

## บทที่ 2

### การควบคุมการสั่นไหวของโครงสร้างด้วยมวลหน่วงปรับค่า

โครงสร้างทางวิศวกรรมโยธาโดยทั่วไปมักจะมีค่าความหน่วงค่อนข้างต่ำและถ้าหากโครงสร้างเหล่านั้นมีความถี่ธรรมชาติต่ำไปด้วยแล้วซึ่งมักจะเป็นโครงสร้างที่มีความชะลูดค่อนข้างมาก ได้แก่ อาคารสูง (Skyscrapers) สะพานช่วงยาวมาก (Very long span bridges) โครงสร้างแบบปล่อง (Chimney structures) โครงสร้างที่เป็นส่วนยื่น (Overhanging structures) เป็นต้น ก็จะทำให้เกิดการสั่นไหวได้ง่ายภายใต้การกระทำของแรงพลวัต ถ้าการสั่นไหวมีมากเกินไปซึ่งเป็นผลมาจากแรงกระทำซ้ำและสั่นกลับไปกลับมาหลายรอบก็จะทำให้โครงสร้างเกิดความล้าขึ้น จนอาจจะก่อให้เกิดการแตกร้าวเสียหายได้ หรือในกรณีที่รุนแรงโครงสร้างอาจจะเกิดการกำทอน (Resonance) จนส่งผลให้โครงสร้างพังทลาย (Structural collapse) ได้ในที่สุด

จากปัญหาดังกล่าวข้างต้น การควบคุมโครงสร้างด้วยการปรับปรุงคุณสมบัติทางพลศาสตร์ของโครงสร้าง คือ ความหน่วงและสติเฟเนส ให้ดีขึ้นเพื่อลดแรงกระตุ้นทางพลศาสตร์ซึ่งจะไปเพิ่มสมรรถนะทำให้โครงสร้างมีผลตอบสนองที่ต้องการจนสามารถใช้งานได้โดยไม่เกิดผลกระทบต่อกิจกรรม ชีวิตและทรัพย์สินของมนุษย์จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่ง ระบบการควบคุมผลตอบสนองทางโครงสร้างสามารถแบ่งออกเป็น 4 ประเภทหลัก คือ 1. การควบคุมแบบไม่ใช้พลังงานจากภายนอกใส่เข้าไปในระบบ (Passive control) 2. การควบคุมแบบใช้พลังงานจากภายนอกใส่เข้าไปในระบบ (Active control) 3. การควบคุมแบบผสม (Hybrid control) ระหว่าง Passive และ Active 4. ระบบกึ่งแรงกระทำ (Semi-active control) อย่างไรก็ตาม ในบทนี้จะพิจารณาการควบคุมโครงสร้างเฉพาะ Passive control เท่านั้น

#### 2.1 มวลหน่วงปรับค่า

มวลหน่วงปรับค่า (Tuned mass damper: TMD) จะถูกนำมาติดตั้งอยู่บนโครงสร้างหลักซึ่งประกอบด้วย มวลที่เคลื่อนที่ได้ (Moving mass or Auxiliary mass) สปริง (Spring) และตัวหน่วง (Viscous damper) เป็นอุปกรณ์ที่ถูกนำมาใช้เพื่อเพิ่มขีดความสามารถสำหรับลดผลการสั่นไหวของโครงสร้างภายใต้การเปลี่ยนแปลงความถี่ของแรงกระตุ้น โดยเฉพาะในสภาวะการสั่นแบบคงที่ (Steady-state vibration)

การใช้มวลหน่วงปรับค่าทำงานร่วมกับโครงสร้างเปรียบเสมือนการเพิ่มความหน่วงให้กับโครงสร้าง โดยที่สปริงและมวลหน่วงจะถูกปรับค่าให้เหมาะสมเพื่อให้ความถี่ของมวลหน่วงมีค่าใกล้เคียงกับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง เมื่อโครงสร้างเริ่มสั่นจะทำให้มวลหน่วงปรับค่าเกิดการเคลื่อนที่และจะทำงานได้ดีเมื่อเวลาผ่านไประยะเวลาหนึ่งซึ่งจะเกิดการเคลื่อนที่ที่มีทิศทางตรงกันข้ามสัมพันธ์กับโครงสร้างเป็นอย่างมาก ดังนั้น พลังงานส่วนใหญ่ในโครงสร้างจะถูกดูดซับโดยมวลหน่วงปรับค่าซึ่งตัวหน่วงจะทำหน้าที่สลายพลังงานทั้งหมด ทั้งนี้ มวลหน่วงปรับค่าจะมีประสิทธิภาพมากที่สุดเมื่อถูกติดตั้งอยู่ในตำแหน่งที่เหมาะสมซึ่งเป็นตำแหน่งที่มีการเคลื่อนที่ตัวสูงสุดของโครงสร้าง ทำให้สามารถลดจำนวนการใช้มวลหน่วงปรับค่าลงได้

## 2.2 ผลตอบสนองการเคลื่อนที่ทางพลศาสตร์ของระบบที่มีระดับชั้นความเสรีเท่ากับสอง เนื่องจากแรงภายนอก

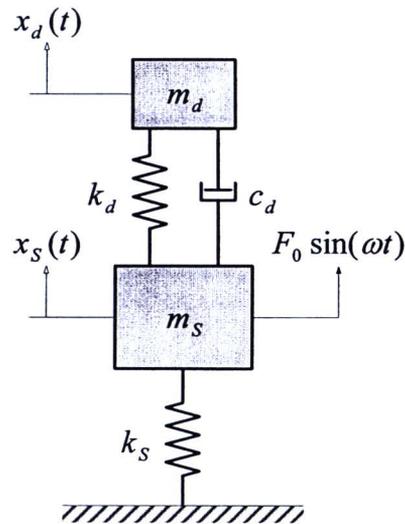
ปัญหาการสั่นไหวของโครงสร้างทางวิศวกรรมโยธาโดยทั่วไป มักจะเป็นผลมาจากแรงกระตุ้นที่ไร้รูปแบบ (Random excitations) เช่น แรงลม (Wind load) แรงแผ่นดินไหว (Earthquake load) แรงจากการจราจร (Traffic load) เป็นต้น แรงดังกล่าวจะกระทำต่อโครงสร้างแบ่งเป็น แรงกระตุ้นที่ตัวโครงสร้าง (Force excitation) แรงกระตุ้นที่ฐานเนื่องจากการเคลื่อนที่ (Support displacement excitation) และแรงกระตุ้นที่ฐานเนื่องจากความเร่ง (Support acceleration excitation) แรงทั้งหลายเหล่านี้มักจะมีลักษณะที่ซับซ้อนเป็นอย่างมากและมีรูปแบบไม่แน่นอน อย่างไรก็ตาม ในหัวข้อนี้จะศึกษาผลตอบสนองของโครงสร้างและมวลหน่วงปรับค่าภายใต้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิคซึ่งเป็นรูปแบบที่พบบ่อยมากสำหรับการศึกษาพฤติกรรมทางพลศาสตร์ของโครงสร้าง เนื่องจากสามารถช่วยให้ผู้ศึกษามีความเข้าใจพฤติกรรมทางพลศาสตร์ได้ง่ายและเป็นพื้นฐานนำไปสู่การศึกษาผลตอบสนองของโครงสร้างสำหรับแรงกระทำรูปแบบอื่น

### 2.2.1 ระบบโครงสร้างหลักไม่มีความหน่วง

รูปที่ 2.1 แสดงแบบจำลองการรวมมวล (Lumped mass model) ที่มีระดับชั้นความเสรีเท่ากับสอง (2-DOF) ของโครงสร้างหลักไม่มีความหน่วงและมวลหน่วงปรับค่าภายใต้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิคกระทำที่โครงสร้าง แบบจำลองนี้ถูกเสนอขึ้นโดย Den Hartog ซึ่งสามารถเขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้ คือ

$$m_s \ddot{x}_s(t) + k_s x_s(t) + c_d [\dot{x}_s(t) - \dot{x}_d(t)] + k_d [x_s(t) - x_d(t)] = F_0 \sin(\omega t) \quad (2.1)$$

$$m_d \ddot{x}_d(t) + c_d [\dot{x}_d(t) - \dot{x}_s(t)] + k_d [x_d(t) - x_s(t)] = 0 \quad (2.2)$$



รูปที่ 2.1 แบบจำลองของโครงสร้างหลักไม่มีความหน่วง (Undamped main system) ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าที่มีระดับชั้นความถี่เท่ากับสอง

หรือเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการของเมทริกซ์  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$  คือ

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\omega t) \quad (2.3)$$

ในการแก้สมการ (2.3) จะใช้จำนวนเชิงซ้อน (Complex number) เข้ามาดำเนินการเพื่อช่วยแก้สมการของระบบดังกล่าว โดยที่แรงกระตุ้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปเป็นแบบเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential form) ในเทอมของจำนวนเชิงซ้อน คือ

$$\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.4)$$

สมมติให้ผลเฉลยเฉพาะ (Particular solution) ของผลตอบสนองสำหรับสภาวะการสั่นแบบคงที่ (Steady-state response) ของสมการ (2.3) คือ

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.5)$$

ทำการหาอนุพันธ์ของสมการ (2.5) เทียบกับเวลาจะได้เวกเตอร์ของความเร็ว คือ

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} = i\omega \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.6)$$

ในทำนองเดียวกัน หาอนุพันธ์ของสมการ (2.6) เทียบกับเวลาจะได้เวกเตอร์ของความเร่ง คือ

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_d(t) \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2.7)$$

แทนค่าสมการ (2.5), (2.6) และ (2.7) ลงในสมการ (2.3) แล้วเปลี่ยนแรงในเทอมด้านขวามือของสมการไปเป็นแรงทั่วไปจากสมการ (2.4) หลังจากนั้นดำเนินการจัดเทอมใหม่แล้วหารด้วย  $e^{i\omega t}$  ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{bmatrix} (k_s + k_d - m_s \omega^2) + c_d \omega i & -k_d - c_d \omega i \\ -k_d - c_d \omega i & (k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} (k_s + k_d - m_s \omega^2) + c_d \omega i & -k_d - c_d \omega i \\ -k_d - c_d \omega i & (k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i \end{bmatrix} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega \mathbf{C}i$$

ทำการแก้สมการ (2.8) จะได้คำตอบเป็นเวกเตอร์ของการกระจัดสัมบูรณ์สูงสุด (Maximum absolute displacement vector) คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_S \\ X_T \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega i \mathbf{C})} \begin{bmatrix} (k_T - m_T \omega^2) + c_T \omega i & k_T + c_T \omega i \\ k_T + c_T \omega i & (k_S + k_T - m_S \omega^2) + c_T \omega i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{F_0}{\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega i \mathbf{C})} \begin{bmatrix} (k_T - m_T \omega^2) + c_T \omega i \\ k_T + c_T \omega i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

เมื่อ

$m_S$  คือ มวลของโครงสร้างหลัก (Main mass)

$m_d$  คือ มวลของมวลหน่วงปรับค่า (TMD mass)

$c_S$  คือ ความหน่วงของโครงสร้างหลัก (Main system damping)

$c_d$  คือ ความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า (TMD damping)

$k_S$  คือ สติฟเนสของโครงสร้างหลัก (Main system stiffness)

$k_d$  คือ สติฟเนสของมวลหน่วงปรับค่า (TMD stiffness)

$\omega_S = \sqrt{k_S / m_S}$  คือ ความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างหลัก

(Natural frequency of main system)

$\omega_d = \sqrt{k_d / m_d}$  คือ ความถี่ธรรมชาติของมวลหน่วงปรับค่า

(Natural frequency of TMD)

$i = \sqrt{-1}$  คือ จำนวนเชิงซ้อน (Complex number)

และ

$$\begin{aligned} &\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega i \mathbf{C}) \\ &= [(k_S + k_T - m_S \omega^2) + c_T \omega i] \cdot [(k_T - m_T \omega^2) + c_T \omega i] - (k_T + c_T \omega i)^2 \\ &= (k_S k_T - k_S m_T \omega^2 - k_T m_T \omega^2 - k_T m_S \omega^2 + m_S m_T \omega^4) + (k_S c_T \omega - m_S c_T \omega^3 - m_T c_T \omega^3) i \end{aligned}$$

สมการ (2.9) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของอัตราส่วนแบบไร้หน่วย (Dimensionless ratio) ซึ่งจะมีความสะดวกในการใช้งานมาก โดยที่พารามิเตอร์ต่างๆ มีดังนี้

$$\zeta_s = \frac{c_s}{2m_s\omega_s} \text{ คือ อัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้างหลัก}$$

(Damping ratio of main system)

$$\zeta_d = \frac{c_d}{2m_d\omega_d} \text{ คือ อัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า}$$

(Damping ratio of TMD)

$$\mu = \frac{m_d}{m_s} \text{ คือ อัตราส่วนมวล (Mass ratio)}$$

$$\alpha = \frac{\omega_d}{\omega_s} \text{ คือ อัตราส่วนปรับค่าความถี่ (Frequency or tuning ratio)}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_s} \text{ คือ อัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้น (Forcing frequency ratio)}$$

$$X_{st} = \frac{F_0}{k_s} \text{ คือ การกระจัดเชิงสถิตของโครงสร้าง (Static displacement of structure)}$$

ขั้นตอนต่อไป ดำเนินการจัดเทอมต่างๆ ในสมการ (2.9) ใหม่ให้อยู่ในรูปของพารามิเตอร์ที่กำหนดไว้ข้างต้น จะได้

$$\begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} = \frac{X_{st}}{[(\alpha^2 - \beta^2).(1 - \beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2] + [2\zeta_d\alpha\beta.(1 - \beta^2 - \mu\beta^2)].i} \begin{bmatrix} (\alpha^2 - \beta^2) + 2\zeta_d\alpha\beta.i \\ \alpha^2 + 2\zeta_d\alpha\beta.i \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

จากสมการ (2.10) จะได้ค่าผลตอบสนองสำหรับสภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างหลักและตัวหน่วงปรับค่าที่อยู่ในรูปของอัตราส่วนแบบไร้หน่วย คือ

$$\frac{X_s}{X_{st}} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2) + 2\zeta_d\alpha\beta.i}{[(\alpha^2 - \beta^2).(1 - \beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2] + [2\zeta_d\alpha\beta(1 - \beta^2 - \mu\beta^2)].i} = \frac{A + B.i}{E + F.i} \quad (2.11)$$

$$\frac{X_d}{X_{st}} = \frac{\alpha^2 + 2\zeta_d\alpha\beta.i}{[(\alpha^2 - \beta^2).(1 - \beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2] + [2\zeta_d\alpha\beta(1 - \beta^2 - \mu\beta^2)].i} = \frac{C + D.i}{E + F.i} \quad (2.12)$$

โดยที่  $A = \alpha^2 - \beta^2$ ,  $B = D = 2\zeta_d\alpha\beta$ ,  $C = \alpha^2$ ,  $E = (\alpha^2 - \beta^2).(1 - \beta^2) - \mu\alpha^2\beta^2$   
 $F = 2\zeta_d\alpha\beta(1 - \beta^2 - \mu\beta^2)$  ซึ่งค่าต่างๆ เหล่านี้เป็นจำนวนจริง (Real number)

สมการ (2.11) และ (2.12) สามารถจัดพจน์ใหม่ให้อยู่ในรูปของ  $x = a + bi$  โดยใช้วิธีดำเนินการของจำนวนเชิงซ้อนด้วยการนำค่าคอนจูเกตของตัวส่วน  $E - Fi$  คูณเข้าไปทั้งตัวเศษและส่วนของสมการ (2.11) และ (2.12) ตามลำดับ หลังจากนั้นทำการจัดพจน์ จะได้

$$\frac{X_s}{X_{st}} = \frac{AE + BF}{E^2 + F^2} + \frac{BE - AF}{E^2 + F^2}i \quad (2.13)$$

$$\frac{X_d}{X_{st}} = \frac{CE + DF}{E^2 + F^2} + \frac{DE - CF}{E^2 + F^2}i \quad (2.14)$$

จากสมการ (2.13) และ (2.14) จะเห็นว่า ทั้งสองสมการประกอบไปด้วยพจน์ที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนเชิงซ้อนซึ่งจะมีผลของมุมเฟส (Phase angle:  $\phi$ ) เข้ามาเกี่ยวข้อง โดยค่ามุมนี้หาได้จากความสัมพันธ์  $\phi = \tan^{-1}(b/a)$  และสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อน  $x = a + bi$  ให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว (Polar coordinate) คือ  $x = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  ดังนั้น ค่าขนาดผลตอบสนอง (Amplitude response) สามารถหาได้จาก  $r = |x| = \sqrt{a^2 + b^2}$  นั่นคือ

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{A^2 + B^2}{E^2 + F^2} \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

$$\left| \frac{X_d}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{C^2 + D^2}{E^2 + F^2} \right]^{1/2} \quad (2.16)$$

แทนค่า A, B, C, D, E และ F ลงในสมการ (2.15) และ (2.16) จะได้ขนาดผลตอบสนองของการขจัดสูงสุดที่เป็นอัตราส่วนแบบไร้หน่วย (Normalized response) หรือ สัมประสิทธิ์ปรับขยายผลตอบสนองทางพลศาสตร์ (Dynamic magnification factor:  $DMF$ ) คือ

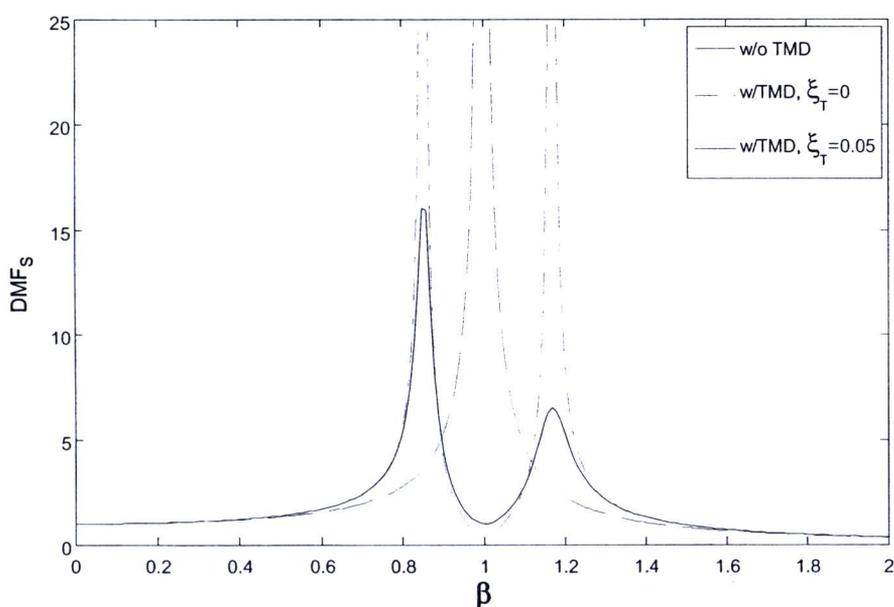
$$DMF_s = \left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2\zeta_d \alpha \beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2]^2 + [2\zeta_d \alpha \beta(1 - \beta^2 - \mu \beta^2)]^2} \right]^{1/2} \quad (2.17)$$

$$DMF_d = \left| \frac{X_d}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{(\alpha^2)^2 + (2\zeta_d \alpha \beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2]^2 + [2\zeta_d \alpha \beta(1 - \beta^2 - \mu \beta^2)]^2} \right]^{1/2} \quad (2.18)$$

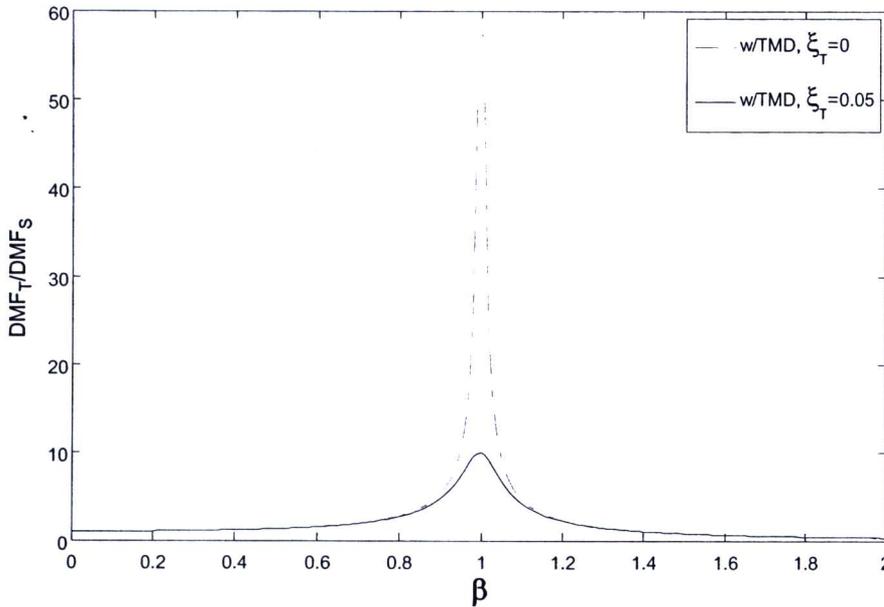
สำหรับในกรณีของโครงสร้างหลักไม่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า ขนาดผลตอบสนองสามารถลดรูปลงได้ โดยการกำหนดให้ค่า  $\alpha$ ,  $\mu$  และ  $\zeta_d$  เท่ากับศูนย์ ดังนั้น จะได้

$$DMF_s = \left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (2.19)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ปรับขยายผลตอบสนองทางพลศาสตร์ในสมการ (2.17) และ (2.18) จะแสดงถึงจำนวนเท่าของการขจัดเชิงพลศาสตร์เทียบกับการขจัดเชิงสถิตของโครงสร้างและมวลหน่วงปรับค่าตามลำดับ ค่านี้สามารถนำไปสร้างกราฟความสัมพันธ์ภายใต้การเปลี่ยนแปลงอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นซึ่งจะเป็นประโยชน์ในการศึกษาพฤติกรรมของผลตอบสนองเชิงพลศาสตร์ระหว่างโครงสร้างและมวลหน่วงปรับค่า



รูปที่ 2.2 ผลตอบสนองที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างไม่มีมวลหน่วงปรับค่า (เส้นประ) และมีมวลหน่วงปรับค่าด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0$ ,  $\mu = 0.10$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta_d = 0$  (เส้นประ-จุด) และ  $\zeta_d = 0.05$  (เส้นทึบ)



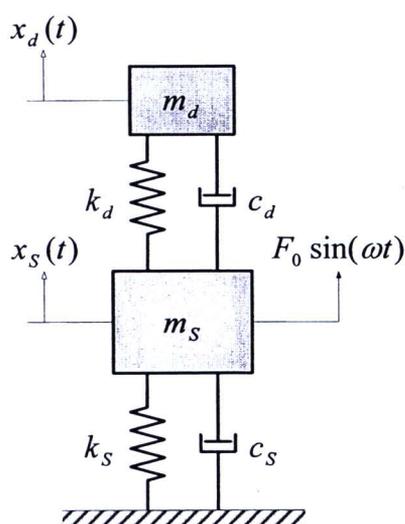
รูปที่ 2.3 อัตราส่วนการกระจัดที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของมวลหน่วงปรับค่าต่อโครงสร้างด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0$ ,  $\mu = 0.10$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta_d = 0$  (เส้นประ-จุด) และ  $\zeta_d = 0.05$  (เส้นทึบ)

รูปที่ 2.2 แสดงให้เห็นแนวโน้มของผลตอบสนองการสั่นไหวในสภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงตามอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้น โดยใช้ค่าอัตราส่วนมวล  $\mu = 0.10$  และอัตราส่วนปรับค่าความถี่  $\alpha = 1.0$  ซึ่งความถี่ของมวลหน่วงปรับค่าจะถูกปรับค่าให้เท่ากับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้าง ในกรณีโครงสร้างไม่มีมวลหน่วงปรับค่าที่  $\beta = 1.0$  ซึ่งความถี่ของแรงกระตุ้นมีค่าเท่ากับความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างนั้นจะมีค่าผลตอบสนองต่อการสั่นที่สูงมาก และค่าผลตอบสนองนี้จะลดลงอย่างมากเมื่อใช้มวลหน่วงปรับค่าติดเข้าไปทำงานร่วมกับโครงสร้างสำหรับมวลหน่วงไม่มีความหน่วง (Absorber) ที่มีค่า  $\zeta_d = 0$  เคยถูกใช้เพื่อช่วยลดการสั่นของโครงสร้างในยุคแรกซึ่งคิดค้นโดย Frahm จะเห็นว่าสามารถลดการสั่นที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ได้ทั้งหมดหรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง ค่าผลตอบสนองเท่ากับศูนย์ อย่างไรก็ตาม ถ้าความถี่แรงกระตุ้นมีค่าเบี่ยงเบนไปจากค่าความถี่ที่ปรับค่า ( $\beta \neq 1.0$ ) ไม่มากนัก ค่าผลตอบสนองจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว และได้ค่าที่สูงมากทำให้มีช่วงความถี่ใช้งาน (Operating range or bandwidth) ค่อนข้างแคบ ดังนั้น อุปกรณ์ชนิดนี้จะสามารถใช้งานได้อย่างมีประสิทธิภาพก็ต่อเมื่อรู้ค่าความถี่แรงกระตุ้นที่แน่นอน ในทางตรงกันข้าม ถ้าใช้มวลหน่วงปรับค่าที่มีความหน่วงซึ่งถูกเสนอโดย Den Hartog ในที่นี้ใช้ค่า  $\zeta_d = 0.05$  จะสังเกตเห็นว่าที่  $\beta = 1.0$  ค่าผลตอบสนองจะไม่เท่ากับศูนย์ และถ้าความถี่

แรงกระตุ้นเบี่ยงเบนไปจากความถี่ที่ปรับค่าแล้วจะทำให้ค่าผลตอบสนองไม่สูงมากเมื่อเทียบกับการใช้มวลหน่วงไม่มีความหน่วง เพราะฉะนั้น จึงส่งผลให้มีช่วงความถี่ใช้งานกว้างขึ้นและมีประสิทธิภาพช่วยลดการสั่นไหวได้ดีกว่า ด้วยเหตุนี้จึงทำให้มวลหน่วงปรับค่าถูกนำมาใช้อย่างแพร่หลายและได้รับการพัฒนามาจนถึงปัจจุบัน

กราฟในรูปที่ 2.3 แสดงถึงพฤติกรรมของการเคลื่อนที่ของมวลหน่วงปรับค่าเทียบกับโครงสร้างว่ามีมากน้อยเพียงใดขณะที่โครงสร้างเกิดการสั่นไหวซึ่งจะเป็นประโยชน์มากสำหรับการออกแบบเพราะสามารถทำให้ผู้ออกแบบทราบว่าจะต้องจัดเตรียมพื้นที่ใช้งานของมวลหน่วงปรับค่าเท่าไรจึงจะเหมาะสม ในรูปนี้จะสังเกตเห็นว่า มวลหน่วงปรับค่ามีการเคลื่อนที่สูงสุดมากกว่าโครงสร้างประมาณ 10 และ 50 เท่า สำหรับกรณีมวลหน่วงปรับค่าที่ใช้  $\zeta_d = 0.05$  และ  $\zeta_d = 0$  ตามลำดับตรงบริเวณตำแหน่งความถี่แรงกระตุ้นที่ทำให้เกิดการสั่นพ้อง ( $\beta = 1.0$ ) ซึ่งมีค่าค่อนข้างมาก ดังนั้น พื้นที่ใช้งานจะต้องมากพอเพื่อให้มวลหน่วงปรับค่าสามารถเคลื่อนที่ได้ อีกทั้งยังต้องพิจารณาความสามารถในการยึดตัวได้ของสปริงสำหรับมวลหน่วงปรับค่าด้วย เนื่องจากมีการเคลื่อนที่ตัวที่สูงมาก

## 2.2.2 ระบบโครงสร้างหลักมีความหน่วง



รูปที่ 2.4 แบบจำลองของโครงสร้างหลักมีความหน่วง (Damped main system) ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าที่มีระดับชั้นความเสียดทานสอง

ในความเป็นจริง โครงสร้างโดยทั่วไปจะมีความหน่วงอยู่บ้างเล็กน้อยซึ่งจะทำหน้าที่สลายพลังงานให้กับโครงสร้างขณะเกิดการสั่นไหว แต่ในบางกรณีอาจมีความจำเป็นต้องปรับปรุงคุณสมบัติด้านความหน่วงของโครงสร้างที่มีแนวโน้มจะเกิดการสั่นไหวได้มากเพื่อเพิ่มสมรรถนะในการดูดซับพลังงานจลน์ของระบบ ทำให้โครงสร้างเกิดการสั่นไหวน้อยลง รูปที่ 2.4 แสดงแบบจำลองการรวมมวล (Lumped mass model) ที่มีระดับขั้นความเสรีเท่ากับสอง (2-DOF) ของโครงสร้างหลักมีความหน่วงและติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าเพื่อช่วยลดการสั่นไหวภายใต้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิกกระทำที่โครงสร้างซึ่งสามารถเขียนสมการของการเคลื่อนที่ได้ คือ

$$m_s \ddot{x}_s(t) + c_s \dot{x}_s(t) + k_s x_s(t) + c_d [\dot{x}_s(t) - \dot{x}_d(t)] + k_d [x_s(t) - x_d(t)] = F_0 \sin(\omega t) \quad (2.20)$$

$$m_d \ddot{x}_d(t) + c_d [\dot{x}_d(t) - \dot{x}_s(t)] + k_d [x_d(t) - x_s(t)] = 0 \quad (2.21)$$

หรือเขียนให้อยู่ในรูปแบบสมการของเมทริกซ์ คือ

$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s(t) \\ \ddot{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s + c_d & -c_d \\ -c_d & c_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s + k_d & -k_d \\ -k_d & k_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(\omega t) \quad (2.22)$$

การแก้สมการ (2.22) จะทำในทำนองเดียวกันกับกรณีโครงสร้างไม่มีความหน่วง โดยเปลี่ยนรูปแบบสมการให้เป็นสมการทั่วไปซึ่งมีรูปแบบเป็นเอกซ์โปเนนเชียลฟังก์ชันในเทอมของจำนวนเชิงซ้อนด้วยการแทนค่าสมการ (2.5), (2.6) และ (2.7) ลงในสมการ (2.22) แล้วเปลี่ยนแรงในเทอมด้านขวามือของสมการไปเป็นแรงทั่วไปจากสมการ (2.4) หลังจากนั้นดำเนินการจัดเทอมใหม่แล้วหารด้วย  $e^{i\omega t}$  ทั้งสองข้างของสมการ จะได้

$$\begin{bmatrix} (k_s + k_d - m_s \omega^2) + (c_s + c_d) \omega i & -k_d - c_d \omega i \\ -k_d - c_d \omega i & (k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

โดยที่

$$\begin{bmatrix} (k_s + k_d - m_s \omega^2) + (c_s + c_d) \omega i & -k_d - c_d \omega i \\ -k_d - c_d \omega i & (k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i \end{bmatrix} = \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega \mathbf{C} i$$

ทำการแก้สมการ (2.23) จะได้คำตอบเป็นเวกเตอร์ของการกระจัดสัมบูรณ์สูงสุด คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} &= \frac{1}{\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega i \mathbf{C})} \begin{bmatrix} (k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i & k_d + c_d \omega i \\ k_d + c_d \omega i & (k_s + k_d - m_s \omega^2) + (c_s + c_d) \omega i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{F_0}{\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega i \mathbf{C})} \begin{bmatrix} (k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i \\ k_d + c_d \omega i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + \omega \mathbf{C} i)$$

$$\begin{aligned} &= [(k_s + k_d - m_s \omega^2) + (c_s + c_d) \omega i] \cdot [(k_d - m_d \omega^2) + c_d \omega i] - (k_d + c_d \omega i)^2 \\ &= (k_s k_d - k_s m_d \omega^2 - k_d m_d \omega^2 - k_d m_s \omega^2 + m_s m_d \omega^4 - c_s c_d \omega^2) \\ &\quad + (k_s c_d \omega - m_s c_d \omega^3 - m_d c_d \omega^3 + k_d c_s \omega - m_d c_s \omega^3) i \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันกับกรณีของโครงสร้างหลักไม่มีความหน่วง สมการ (2.24) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปของอัตราส่วนแบบไร้หน่วย คือ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} X_s \\ X_d \end{bmatrix} &= \frac{X_{st}}{[(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2 - 4 \zeta_s \zeta_d \alpha \beta^2] + [2 \zeta_d \alpha \beta \cdot (1 - \beta^2 - \mu \beta^2) + 2 \zeta_s \beta (\alpha^2 - \beta^2)]} \cdot i \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} (\alpha^2 - \beta^2) + 2 \zeta_d \alpha \beta i \\ \alpha^2 + 2 \zeta_d \alpha \beta i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

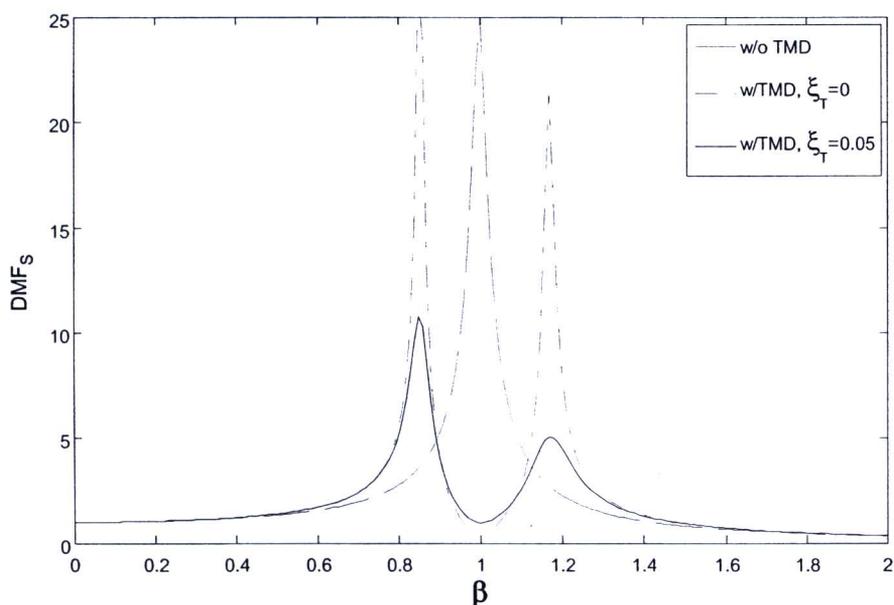
จากสมการ (2.25) จะได้ขนาดผลตอบสนองของการกระจัดสูงสุดที่เป็นอัตราส่วนแบบไร้หน่วย คือ

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^2 + (2 \zeta_d \alpha \beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2 - 4 \zeta_s \zeta_d \alpha \beta^2]^2 + [2 \zeta_d \alpha \beta \cdot (1 - \beta^2 - \mu \beta^2) + 2 \zeta_s \beta (\alpha^2 - \beta^2)]^2} \right]^{1/2} \quad (2.26)$$

$$\left| \frac{X_d}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{(\alpha^2)^2 + (2\zeta_d \alpha \beta)^2}{[(\alpha^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha^2 \beta^2 - 4\zeta_s \zeta_d \alpha \beta^2]^2 + [2\zeta_d \alpha \beta \cdot (1 - \beta^2 - \mu \beta^2) + 2\zeta_s \beta (\alpha^2 - \beta^2)]^2} \right]^{1/2} \quad (2.27)$$

สำหรับในกรณีของโครงสร้างหลักไม่ติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า ขนาดผลตอบสนองสามารถลดรูปลงได้ โดยการกำหนดให้ค่า  $\alpha$ ,  $\mu$  และ  $\zeta_d$  เท่ากับศูนย์ ดังนั้น จะได้

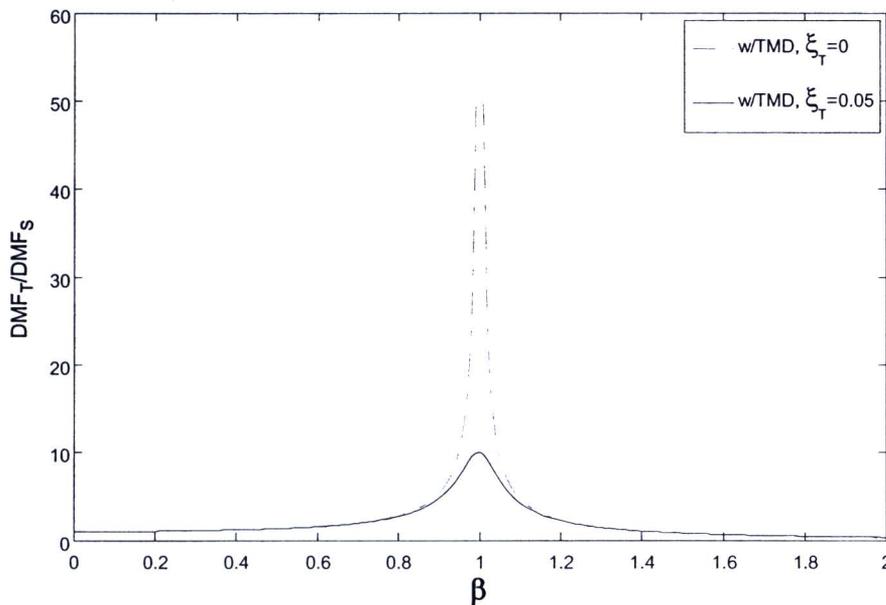
$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\zeta_s \beta)^2} \right]^{1/2} \quad (2.28)$$



รูปที่ 2.5 ผลตอบสนองที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างไม่มีมวลหน่วงปรับค่า (เส้นประ) และมีมวลหน่วงปรับค่าด้วยค่า  $\zeta_s = 0.02$ ,  $\mu = 0.10$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta_d = 0$  (เส้นประ-จุด) และ  $\zeta_d = 0.05$  (เส้นทึบ)

จากรูปที่ 2.5 สามารถอธิบายผลได้เช่นเดียวกับรูปที่ 2.2 แต่กรณีในรูปนี้ โครงสร้างหลักจะมีความหน่วง  $\zeta_s = 0.02$  ซึ่งช่วยในการดูดซับพลังงานจลน์ของระบบจึงทำให้ผลตอบสนองมีค่าน้อยกว่ากรณีในรูปที่ 2.2 ดังได้อธิบายไว้ข้างต้น

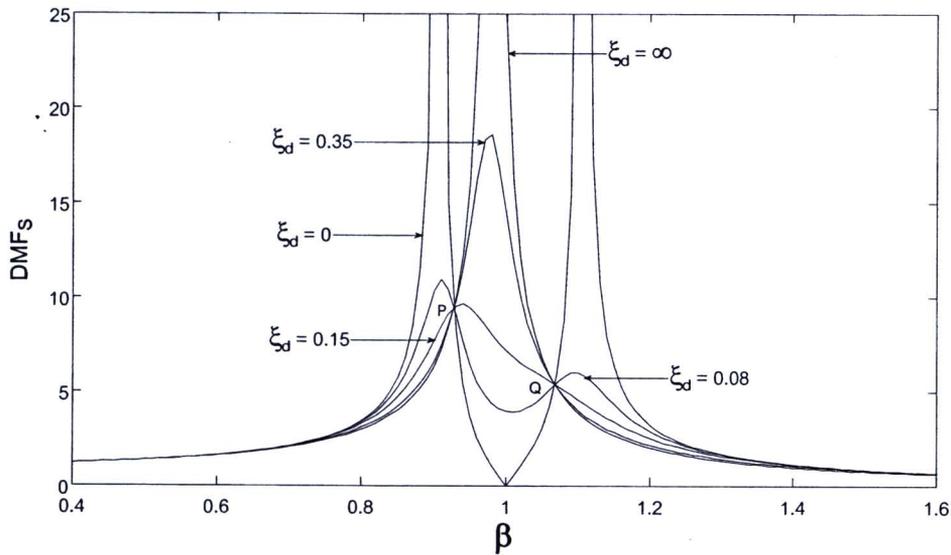
ค่าการเคลื่อนที่ของมวลหน่วงปรับค่าเทียบกับโครงสร้างในรูปที่ 2.6 มีค่าใกล้เคียงกันมากกับกราฟในรูปที่ 2.3 ซึ่งไม่สามารถมองเห็นความแตกต่างของกราฟได้ด้วยตาเปล่า ดังนั้น ผลจึงเป็นไปในทำนองเดียวกันกับที่กล่าวมาแล้ว



รูปที่ 2.6 อัตราส่วนการกระจัดที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของมวลหน่วงปรับค่าต่อโครงสร้างด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0.02$ ,  $\mu = 0.10$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta_d = 0$  (เส้นประ-จุด) และ  $\zeta_d = 0.05$  (เส้นทึบ)

### 2.3 ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของมวลหน่วงปรับค่า

จากหัวข้อที่แล้วทำให้ทราบถึงค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ที่มีอิทธิพลต่อการสั่นไหวของโครงสร้างและมวลหน่วงปรับค่าในเบื้องต้น อย่างไรก็ตาม ในการที่จะทำให้ผลการสั่นไหวมีค่าน้อยที่สุดตามที่ต้องการนั้น มวลหน่วงปรับค่าที่ใช้จะต้องมีค่าความถี่และความหน่วงที่เหมาะสม ดังนั้นต่อไปจะอธิบายถึงวิธีการหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมทั้งสองค่านี้ซึ่งมีพื้นฐานแนวคิดมาจาก Den Hartog ด้วยการทำให้เกิดค่าการกระจัดน้อยที่สุดสำหรับระบบโครงสร้างไม่มีความหน่วง (Minimizing displacement of undamped main structure) ภายใต้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิก



รูปที่ 2.7 ผลตอบสนองที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างไม่มีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta_d$  แตกต่างกันหลายค่า

ในรูปที่ 2.7 แสดงกราฟของผลตอบสนองการกระจัดของโครงสร้างไม่มีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าเทียบกับอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นด้วยการกำหนดค่าอัตราส่วนมวล  $\mu = 0.04$  และอัตราส่วนปรับค่าความถี่  $\alpha = 1.0$  เป็นค่าคงที่ แต่ใช้ค่าที่แตกต่างกันของอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า ( $\zeta_d$ ) จากรูปจะสังเกตเห็นว่า ทุกกรณีของค่า  $\zeta_d$  เส้นกราฟจะตัดผ่านจุดสองจุด คือ จุด P และ Q ซึ่งเรียกสองจุดนี้ว่า Two fixed points กล่าวคือ ค่าผลตอบสนองการกระจัดของโครงสร้างที่จุดสองจุดนี้จะไม่ขึ้นกับค่าอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า สำหรับในกรณีที่ค่า  $\zeta_d = 0$  ผลตอบสนองจะลู่เข้าสู่ค่าอนันต์ที่บริเวณ 2 ตำแหน่งของความถี่ทำให้เกิดการกำหนดและเส้นกราฟจะมีลักษณะแบ่งแยกออกเป็นปลายแหลม 2 ตำแหน่ง (Two peaks) เมื่อมีค่าอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่าไม่มากนัก ( $\zeta_d = 0.08$ ) ซึ่ง ณ ตำแหน่งที่จุดสูงสุดของปลายแหลมนี้จะเกิดการกำหนดขึ้นโดยมีค่าอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นเท่ากับ  $\beta_1$  และ  $\beta_2$  โดยที่  $\beta_1 < \beta_p < \beta = \alpha < \beta_q < \beta_2$  ในทางตรงกันข้ามเมื่อค่าอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่ามีค่าสูงขึ้น ( $\zeta_d = 0.35$ ) จะทำให้เส้นกราฟมีลักษณะเป็นปลายแหลมเดี่ยว (Single peak) และจะมีค่าผลตอบสนองการกระจัดเพิ่มขึ้น ยิ่งไปกว่านั้น ถ้าค่า  $\zeta_d = \infty$  จะทำให้ผลตอบสนองที่ได้มีค่าสูงมากๆ ลู่เข้าสู่ค่าอนันต์อีกครั้ง เช่นเดียวกันกับกรณีที่ค่า  $\zeta_d = 0$  นั้นหมายความว่า มวลหน่วงปรับค่าจะไม่ทำงานและจะติดไปกับโครงสร้างเมื่อเกิดการสั่นไหวซึ่งจะเปลี่ยนจากระบบ 2-DOF ไปเป็น SDOF (Single degree of

freedom) ทำให้มีมวลรวมของระบบเท่ากับ  $m_s + m_d$  อย่างไรก็ตาม ผลตอบสนองที่ตำแหน่งจุด P และ Q ยังคงมีค่าต่างกันอยู่ ดังนั้น ถ้าต้องการให้ผลตอบสนองมีค่าเท่ากันจะต้องเลือกค่า  $\alpha$  ให้เหมาะสมซึ่งการเปลี่ยนค่า  $\alpha$  จะทำให้ตำแหน่งจุด P และ Q สามารถเคลื่อนขึ้นลงในแนวตั้งได้ จากพฤติกรรมที่ได้อธิบายไว้ข้างต้น ทำให้ทราบว่าเมื่อกำหนดค่าอัตราส่วนปรับค่าความถี่ได้อย่างเหมาะสมแล้ว จะทำให้ผลตอบสนองการกระจัดมีค่าเท่ากัน ณ ตำแหน่งจุด P และ Q และเมื่อทำการเพิ่มค่า  $\zeta_d$  เส้นกราฟผลตอบสนองจะเปลี่ยนรูปร่างจาก 2 peaks ไปเป็น 1 peak ดังนั้น จะมีค่า  $\zeta_d$  ที่เหมาะสมค่าหนึ่งทำให้ผลตอบสนองมีค่าเท่ากันและน้อยที่สุดที่ตำแหน่งจุด P และ Q นี้

ในการที่จะหาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมโดยใช้หลักการของ Two fixed points อันดับแรกจะต้องหาค่าอัตราส่วนปรับค่าความถี่ที่เหมาะสม  $\alpha_{opt}$  ก่อนเพื่อให้ผลตอบสนองการกระจัดที่จุด P และ Q มีค่าเท่ากัน โดยการจัดพจน์ของสมการ (2.17) ใหม่ ดังนี้

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{X^2 + (2\zeta_d Y)^2}{W^2 + (2\zeta_d Z)^2} \right]^{1/2} \quad (2.29)$$

โดยที่  $X = \alpha_{opt}^2 - \beta^2$ ,  $Y = \alpha_{opt}^2 \beta$ ,  $W = (\alpha_{opt}^2 - \beta^2)(1 - \beta^2) - \mu \alpha_{opt}^2 \beta^2$  และ  $Z = \alpha_{opt}^2 \beta(1 - \beta^2 - \mu \beta^2)$

จากสมการ (2.29) จัดพจน์ใหม่อีกครั้ง จะได้

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \left[ \frac{X^2 (1 + 4\zeta_d^2 \frac{Y^2}{X^2})}{W^2 (1 + 4\zeta_d^2 \frac{Z^2}{W^2})} \right]^{1/2} \quad (2.30)$$

เนื่องจากว่า ค่าผลตอบสนองการกระจัดของโครงสร้างที่ตำแหน่งจุด P และ Q ไม่ขึ้นกับค่า  $\zeta_d$  ดังนั้น จากสมการ (2.30) จะได้

$$\frac{Y^2}{X^2} = \frac{Z^2}{W^2}$$

$$\frac{Y}{X} = \pm \frac{Z}{W}$$

$$\frac{\alpha_{opt}^2 \beta}{\alpha_{opt}^2 - \beta^2} = \pm \frac{\alpha_{opt}^2 \beta (1 - \beta^2 - \mu \beta^2)}{(\alpha_{opt}^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha_{opt}^2 \beta^2}$$

$$\frac{1}{\alpha_{opt}^2 - \beta^2} = \pm \frac{1 - \beta^2 - \mu \beta^2}{(\alpha_{opt}^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha_{opt}^2 \beta^2}$$

$$\frac{1}{\alpha_{opt}^2 - \beta^2} - \frac{1 - \beta^2 - \mu \beta^2}{(\alpha_{opt}^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha_{opt}^2 \beta^2} = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{\alpha_{opt}^2 - \beta^2} + \frac{1 - \beta^2 - \mu \beta^2}{(\alpha_{opt}^2 - \beta^2) \cdot (1 - \beta^2) - \mu \alpha_{opt}^2 \beta^2} = 0 \quad (2.32)$$

สมการ (2.31) จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ ค่า  $\beta = 0$  นั่นคือ ไม่มีแรงกระตุ้นทำให้โครงสร้างไม่เกิดการสั่น คำตอบจึงไม่มีความหมาย (Trivial solution) ดังนั้น สมการ (2.32) จะถูกใช้เพื่อหาค่า  $\beta_P$  และ  $\beta_Q$  ที่ตำแหน่งจุด P และ Q ตามลำดับ โดยการจัดพจน์ของสมการใหม่ จะได้

$$\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) (\beta^2)^2 - (1 + \alpha_{opt}^2 + \mu \alpha_{opt}^2) \beta^2 + \alpha_{opt}^2 = 0 \quad (2.33)$$

จากสมการ (2.33) จะเห็นว่าอยู่ในรูปแบบสมการ  $ax^2 + bx + c = 0$  ซึ่งมีคำตอบเป็น  $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$  และมีผลบวกของคำตอบเท่ากับ  $x_1^2 + x_2^2 = -b/a$  ดังนั้น ผลบวกของคำตอบทั้งสองค่าของสมการ (2.33) คือ

$$\beta_P^2 + \beta_Q^2 = \frac{1 + \alpha_{opt}^2 + \mu \alpha_{opt}^2}{1 + \frac{\mu}{2}} \quad (2.34)$$

ต่อไป ทำการลดรูปสมการ (2.17) ด้วยการแทนค่า  $\zeta_d = \infty$  เพื่อให้สะดวกและง่ายต่อการหาค่า  $\beta$  เพราะค่าผลตอบสองที่ตำแหน่งจุด P และ Q ไม่ขึ้นกับค่า  $\zeta_d$

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_{\zeta_d = \infty} = \left[ \frac{1}{(1 - \beta^2 - \mu\beta^2)^2} \right]^{1/2} \quad (2.35)$$

แทนค่า  $\beta = \beta_p$  และ  $\beta = \beta_Q$  ลงในสมการ (2.35) จะได้

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_P = + \frac{1}{1 - \beta_p^2 - \mu\beta_p^2} \quad (2.36)$$

$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_Q = - \frac{1}{1 - \beta_Q^2 - \mu\beta_Q^2} \quad (2.37)$$

เนื่องจากว่า เมื่อปรับค่าความถี่ของมวลหน่วงปรับค่าด้วยค่าที่เหมาะสมจะทำให้ผลตอบสนองการกระจัดมีค่าเท่ากันที่ตำแหน่งจุด P และ Q ดังนั้น จากสมการ (2.36) และ (2.37)

กำหนดให้ค่า  $\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_P = \left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_Q$  จะได้

$$\beta_p^2 + \beta_Q^2 = \frac{2}{1 + \mu} \quad (2.38)$$

จากสมการ (2.34) และ (2.38) จะเห็นว่าค่า  $\beta_p^2 + \beta_Q^2$  ของทั้งสองสมการมีค่าเท่ากัน ดังนั้น จะได้ค่าปรับค่าความถี่ที่เหมาะสมของมวลหน่วงปรับค่า คือ

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (2.39)$$

ต่อไปจะทำการหาค่าอัตราส่วนความหน่วงที่เหมาะสมของมวลหน่วงปรับค่า  $\zeta_{d,opt}$  โดยจะใช้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ของระบบที่มีค่า  $\zeta_d = \infty$  ซึ่งที่สภาวะนี้มวลรวมของระบบจะมีค่าเท่ากับ  $m_s + m_d$  ดังที่ได้กล่าวไว้ข้างต้น ทั้งนี้ก็เพื่อความง่ายต่อการหาค่า  $\zeta_{d,opt}$  ดังนั้นค่าความถี่แรงกระตุ้นที่ทำให้เกิดการกำทอน (Resonance frequency)  $\omega = \omega_\infty$  ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าความถี่ของระบบผสมระหว่างโครงสร้างและมวลหน่วงปรับค่า (Composite system)  $\omega_{CS}$  คือ

$$\omega_{\infty} = \omega_{CS} = \sqrt{\frac{k_s}{m_s + m_d}} = \sqrt{\frac{k_s}{m_s + \mu m_s}} = \sqrt{\frac{k_s}{m_s(1 + \mu)}} = \omega_s \sqrt{\frac{1}{1 + \mu}} \quad (2.40)$$

จากสมการ (2.40) จะได้ค่ากำลังสองของอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นที่ตำแหน่ง  $\omega = \omega_{\infty}$  คือ

$$\beta^2 = \beta_{\infty}^2 = \frac{\omega_{\infty}^2}{\omega_s^2} = \frac{1}{\mu + 1} \quad (2.41)$$

ดำเนินการหาค่า  $\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_{P,Q,\zeta_d=\infty}$  ด้วยการแทนค่า  $\alpha_{opt}$  ที่ได้จากสมการ (2.39) ลงในสมการ (2.33) จะได้

$$(\beta^2)^2 - \frac{2\beta^2}{1 + \mu} + \frac{2}{(2 + \mu)(1 + \mu)^2} = 0 \quad (2.42)$$

ทำการแก้สมการ (2.42) จะได้

$$\beta^2 = \beta_{P,Q}^2 = \frac{1}{1 + \mu} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{\mu}{2 + \mu}} \right) \quad (2.43)$$

แทนค่าสมการ (2.43) ลงในสมการ (2.35) จะได้ผลตอบสนองการขจัดสำหรับค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของมวลหน่วงปรับค่า คือ

$$DMF_{S,opt} = \left| \frac{X_s}{X_{st}} \right|_{P,Q,\zeta_d=\infty} = \sqrt{\frac{2 + \mu}{\mu}} \quad (2.44)$$

ดังนั้น ค่าอัตราส่วนความถี่ของมวลหน่วงปรับค่าที่เหมาะสมหาได้โดยการแทนค่าสมการ (2.39), (2.41) และ (2.44) ลงในสมการ (2.17) จะได้

$$\zeta_{d,opt} = \sqrt{\frac{\mu}{2(1+\mu)}} \quad (2.45)$$

• อย่างไรก็ตาม Warburton (1982) ได้แนะนำให้ใช้ค่า  $\zeta_{d,opt}$  เท่ากับค่า Average root mean square ของ  $\zeta_{d,p}^2$  และ  $\zeta_{d,q}^2$  นั่นคือ  $\zeta_{d,opt} = [\frac{1}{2}(\zeta_{d,p}^2 + \zeta_{d,q}^2)]^{1/2}$  ซึ่งค่า  $\zeta_{d,p}$  และ  $\zeta_{d,q}$  สามารถหาได้โดยการหาค่ากราเดียน (Gradient) ของผลตอบสนองการกระจัดที่ค่า  $\beta_p$  และ  $\beta_q$  เท่ากับศูนย์ ( $\frac{\partial DMF_{s,p}}{\partial \beta_p} = 0$  และ  $\frac{\partial DMF_{s,q}}{\partial \beta_q} = 0$ ) ดังนั้น จะได้

$$\zeta_{d,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} \quad (2.46)$$

นอกจากนี้ พารามิเตอร์ที่สำคัญอีกอย่างหนึ่ง คือ อัตราส่วนความหน่วงเทียบเท่า (Equivalent damping:  $\zeta_{eq}$ ) สำหรับโครงสร้างไม่มีความหน่วงที่เป็นผลมาจากมวลหน่วงปรับค่า ซึ่งเปรียบเสมือนเป็นการเพิ่มความหน่วงเข้าไปในโครงสร้างนั่นเอง โดยจะพิจารณาให้เป็นระบบโครงสร้างมีความหน่วงที่มีระดับชั้นความถี่เท่ากับหนึ่ง (SDOF Damped main system) ดังนั้น พิจารณาสมการ (2.28) โดยให้ความถี่แรงกระตุ้นมีค่าเท่ากับความถี่ของโครงสร้างซึ่งจะทำให้ค่า  $\beta = 1.0$  และจะได้ค่าผลตอบสนองการกระจัดของโครงสร้างที่ความถี่ที่กำหนด คือ

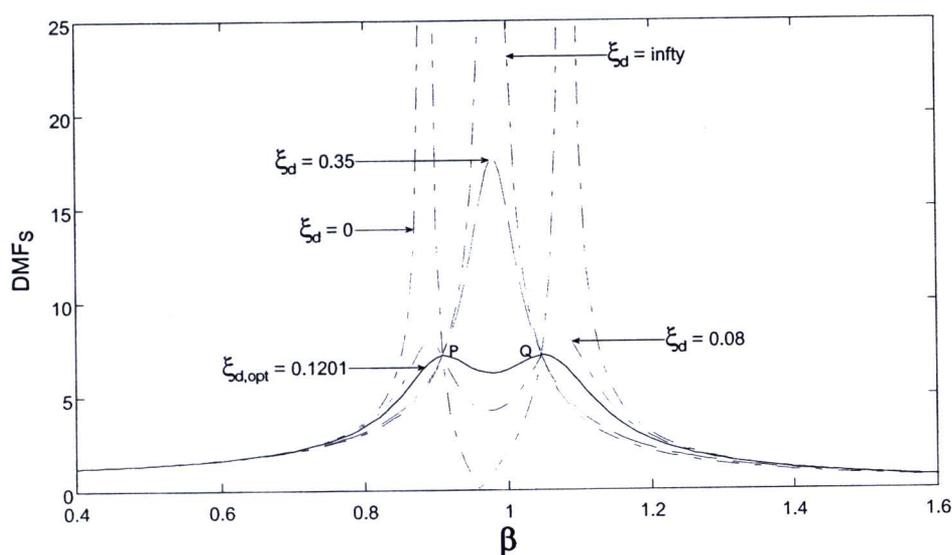
$$\left| \frac{X_s}{X_{st}} \right| = \frac{1}{2\zeta_s} \quad (2.47)$$

ค่าผลตอบสนองการกระจัดในสมการ (2.47) จะมีค่าโดยประมาณให้เป็นค่าในสมการ (2.44) ซึ่งค่า  $\zeta_s = \zeta_{eq}$  ดังนั้น จะได้

$$DMF_{s,opt} = \frac{1}{2\zeta_{eq}}$$

$$\zeta_{eq} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu/2}{1+\mu/2}} \quad (2.48)$$

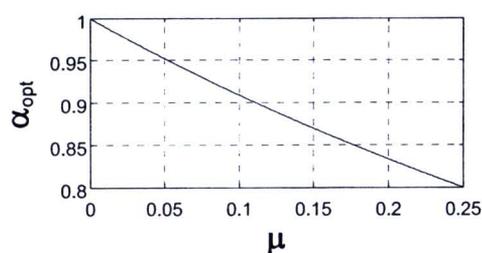
ในรูปที่ 2.8 แสดงกราฟของผลตอบสนองการกระจัดของโครงสร้างไม่มีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าเทียบกับอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นด้วยการกำหนดค่าอัตราส่วนมวล  $\mu = 0.04$  และอัตราส่วนปรับค่าความถี่ที่เหมาะสม  $\alpha_{opt} = 0.9615$  เป็นค่าคงที่ แต่ใช้ค่าที่แตกต่างกันของ  $\zeta_d$  จากรูปจะสังเกตเห็นว่า กรณีของค่า  $\zeta_{d,opt} = 0.1201$  จะทำให้ผลตอบสนองการกระจัดมีค่าเท่ากันที่ตำแหน่งจุด P และ Q ดังที่ได้อธิบายไว้ข้างต้น



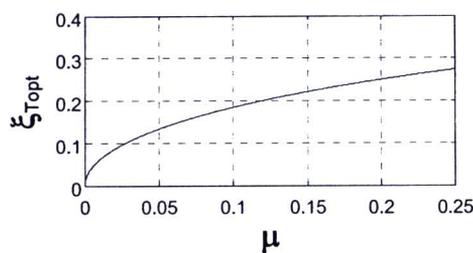
รูปที่ 2.8 ผลตอบสนองที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างไม่มีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $\alpha_{opt} = 0.9615$ ,  $\zeta_d$  แตกต่างกันหลายค่า

จากรูปที่ 2.9 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมต่างๆ เทียบกับอัตราส่วนมวลซึ่งได้จากสมการ (2.39), (2.46), (2.48) และ (2.44) ตามรูปที่ 2.9(ก), 2.9(ข), 2.9(ค) และ 2.9(ง) ตามลำดับ ในรูปที่ 2.9(ก) จะสังเกตได้ว่า ค่า  $\alpha_{opt}$  ลดลง เมื่อค่า  $\mu$  เพิ่มขึ้น และค่า  $\alpha_{opt} < 1.0$  เสมอ สำหรับทุกค่าของ  $\mu$  หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง ค่าความถี่ของมวลหน่วงปรับค่าที่ใช้เพื่อให้ได้ค่าผลตอบสนองการกระจัดน้อยที่สุดจะมีค่าน้อยกว่าค่าความถี่ธรรมชาติของโครงสร้างเสมอ สำหรับรูปที่ 2.9(ข) เมื่อค่า  $\mu$  เพิ่มขึ้น จะทำให้ค่า  $\zeta_{d,opt}$  มีค่าเพิ่มขึ้นตามไปด้วย และกรณีรูปที่ 2.9(ค) จะเห็นว่า ค่า  $\zeta_{eq}$  จะสูงขึ้น เมื่อเพิ่มค่า  $\mu$  นั่นคือ ถ้าต้องการเพิ่มความหน่วงให้กับโครงสร้างจะต้องใช้มวลของมวลหน่วงปรับค่ามากขึ้น อย่างไรก็ตามจากรูปที่ 2.9(ง) แสดงให้เห็นว่า การเพิ่มค่า  $\mu$  ไม่มากกว่า 0.05 จะทำให้มวลหน่วงปรับค่ามีประสิทธิภาพที่ดีสำหรับการสั่นไหวของโครงสร้าง เพราะค่า  $DMF_{S,opt}$  ลดลงอย่างมีนัยสำคัญ และถ้าใช้ค่า

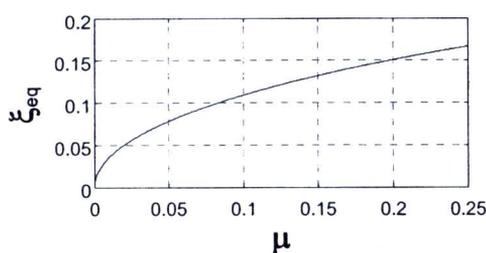
$\mu > 0.05$  การลดลงของผลตอบสนองการกระตุ้นจะมีค่าน้อยมากและเกือบจะคงที่ ดังนั้น การใช้มวลหน่วงปรับค่าที่มีมวลอยู่ในช่วงระหว่าง 2 ถึง 5 % ของมวลโครงสร้างจะคุ้มค่าง่าทั้งในด้าน การสูญเสียไหวลดและค่าใช้จ่ายไม่แพงมาก อย่างไรก็ตามในบางกรณีถ้าจำเป็นต้องใช้มวลของมวลหน่วงปรับค่ามากขึ้นซึ่งพิจารณาจากกราฟแล้วพบว่า ที่ค่า 15 % ของมวลโครงสร้างน่าจะเป็นค่าใช้งานได้สูงสุดที่เหมาะสม เพราะฉะนั้น ทำให้สามารถประเมินช่วงการใช้งานที่เหมาะสมที่จะเป็นไปได้อัตราส่วนมวลคือ  $0.02 < \mu < 0.15$  อัตราส่วนปรับจูนความถี่  $0.98 < \alpha < 0.86$  อัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า  $0.08 < \zeta_d < 0.22$  และค่าความหน่วงเทียบเท่า  $0.05 < \zeta_{eq} < 0.13$



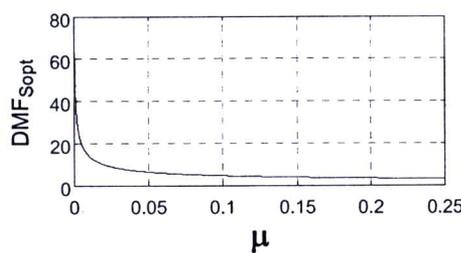
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 2.9 ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมของมวลหน่วงปรับค่าเทียบกับอัตราส่วนมวล (ก) อัตราส่วนปรับค่าความถี่ (ข) อัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า (ค) อัตราส่วนความหน่วงเทียบเท่า และ (ง) ผลตอบสนองการกระตุ้นของโครงสร้างสำหรับโครงสร้างไม่มีความหน่วง

Warburton (1982) ได้ทำการศึกษาค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมภายใต้เงื่อนไขที่แตกต่างกันไปของค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ Optimize สำหรับแรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิกและไว้รูปแบบประเภท White noise spectral density กระทำต่อโครงสร้างไม่มีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าซึ่งได้แสดงไว้ในตารางที่ 2.1 และ 2.2 ตามลำดับ

ตารางที่ 2.1 ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับมวลห้องปรับค่าติดเข้ากับโครงสร้างไม่มีความหน่วงภายใต้แรงกระทำแบบฮาร์โมนิค (Warburton, 1982)

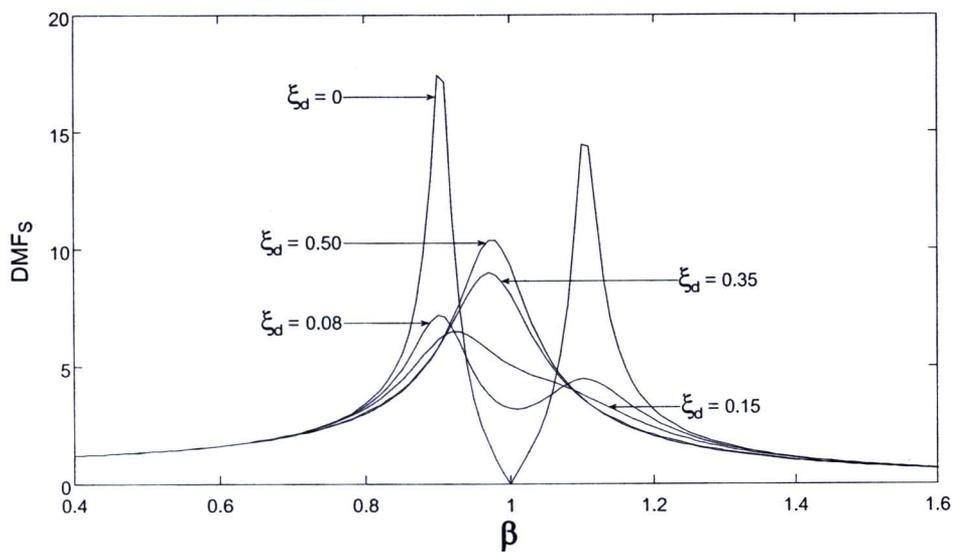
Excitation		Optimized Response			Optimized TMD Parameters	
Case	Type Applied to	Parameter Optimized	Definition of $DMF_S$	$DMF_{S,opt}$	$\alpha_{opt}$	$\zeta_{d,opt}$
1	Force $F_0 e^{i\omega t}$ Main mass	$X_S$	$\frac{X_S}{F_0 / k_S}$	$\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}$	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}$
2	Force $F_0 e^{i\omega t}$ Main mass	$\ddot{X}_S$	$\frac{\ddot{X}_S}{F_0 / M_S}$	$\sqrt{\frac{2}{\mu(1+\mu)}}$	$\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}$	$\sqrt{\frac{2}{\mu(1+\mu)}}$
3	Acceleration $\ddot{X}_0 e^{i\omega t}$ Base	$y_S = x_S - x_0$	$\frac{y_S}{\ddot{X}_0 / \omega_S^2}$	$(1+\mu)\sqrt{\frac{2}{\mu}}$	$\frac{\sqrt{1-\mu/2}}{1+\mu}$	$(1+\mu)\sqrt{\frac{2}{\mu}}$
4	Acceleration $\ddot{X}_0 e^{i\omega t}$ Base	$\ddot{X}_S$	$\frac{\ddot{X}_S}{\ddot{X}_0}$	$\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}$	$\frac{1}{1+\mu}$	$\sqrt{\frac{2+\mu}{\mu}}$

ตารางที่ 2.2 ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับมวลหน่วงปรับค่าติดเข้ากับโครงสร้างที่ไม่มีความหน่วงภายใต้แรงกระทำแบบไร้รูปแบบซึ่งเป็นประเภท White noise spectral density (Warburton, 1982)

Case	Excitation Type Applied to	Parameter Optimized	Optimized Response Definition of DMF <sub>S</sub>	DMF <sub>S,opt</sub>	Optimized TMD Parameters $\alpha_{opt}$ $\zeta_{d,opt}$
1	Force Main mass	$X_S$	$\frac{\sigma_x^2 k_S^2}{2\pi S_0 \omega_S}$	$\sqrt{\frac{1+3\mu/4}{\mu(1+\mu)}}$	$\sqrt{\frac{1+\mu/2}{1+\mu}}$ $\sqrt{\frac{\mu(1+3\mu/4)}{4(1+\mu)(1+\mu/2)}}$
2	Force Main mass	$\dot{X}_S$	$\frac{\sigma_x^2 k_S^2}{2\pi S_0 \omega_S^3}$	$\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}$	$\sqrt{\frac{1}{1+\mu}}$ $\frac{\mu}{4}$
3	Acceleration Base $\dot{X}_0^{lat}$	$y_S = x_S - x_0$	$\frac{\sigma_y^2 \omega_S^3}{2\pi S_0}$	$(1+\mu)^{3/2} \sqrt{\frac{4-\mu}{4\mu}}$	$\sqrt{\frac{1-\mu/2}{1+\mu}}$ $\sqrt{\frac{\mu(1-\mu/4)}{4(1+\mu)(1-\mu/2)}}$

หมายเหตุ:  $\sigma_x^2$ ,  $\sigma_x^2$  และ  $\sigma_y^2$  เป็นค่าการแปรผัน (Variance) ของการรบกวนความเร่งสัมบูรณ์และการรบกวนสัมพัทธ์ของโครงสร้างหลัก ตามลำดับ

สำหรับในกรณีของโครงสร้างมีความหน่วง ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมไม่สามารถหาได้ด้วยการใช้หลักการของ Two fixed point เนื่องจากว่า กราฟของผลตอบสนองการกระจัดจะไม่สามารถตัดกันทำให้เกิดจุดสองจุดได้โดยที่ไม่ขึ้นกับค่า  $\zeta_d$  ดังแสดงในรูปที่ 2.10 อย่างไรก็ตาม ค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับกรณีนี้สามารถหาได้ด้วยวิธีการเชิงตัวเลข (Numerical approach) ซึ่งได้มีการศึกษาวิจัยในอดีตและค่าเหล่านั้นถูกนำเสนอเป็นสูตรแบบ Empirical formulae



รูปที่ 2.10 ผลตอบสนองที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างมีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า ด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0.02$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $\alpha = 1.0$ ,  $\zeta_d$  แตกต่างกันหลายค่า

loi และ Ikeda (1978) ได้เสนอค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมเป็นสูตรแบบ Empirical formulae การได้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิคกระทำที่โครงสร้างด้วยการใช้ค่า  $DMF_s$  เป็นฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective function) ในการ optimize เพื่อทำให้ได้ค่าน้อยสุด (ที่มาจากหนังสือ Passive Energy Dissipation Systems in Structural Engineering) คือ

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{1 + \mu} - (0.241 + 1.7\mu - 2.6\mu^2)\zeta_s - (1.0 - 1.9\mu + \mu^2)\zeta_s^2 \quad (2.49)$$

$$\zeta_{d,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} + (0.13 + 0.12\mu + 0.4\mu^2)\zeta_s - (0.01 + 0.9\mu + 3\mu^2)\zeta_s^2 \quad (2.50)$$

โดยที่ ค่าอัตราส่วนมวลอยู่ในช่วง  $0.03 < \mu < 0.40$  และอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้าง  $0 < \zeta_s < 0.15$  ซึ่งจะมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 1 %

Tsai และ Lin (1993) ได้ใช้ฟังก์ชันเป้าหมายเหมือนกรณีของ loi และ Ikeda ภายใต้แรงกระตุ้นแบบฮาร์โมนิคสองประเภท คือ

(ก) แรงกระตุ้นที่ฐานเนื่องจากการเคลื่อนที่ (Support displacement excitation)

$$\alpha_{opt} = \left( \frac{\sqrt{1+\mu/2}}{1+\mu} + \frac{1}{\sqrt{1-2\zeta_s^2}} - 1 \right) - (0.288 - 0.661\sqrt{\mu} + 1.12\mu)\sqrt{\mu}\zeta_s - (2.298 - 6.739\sqrt{\mu} + 8.316\mu)\sqrt{\mu}\zeta_s^2 \quad (2.51)$$

$$\zeta_{d,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)}} + 0.238\mu\zeta_s + 0.151\zeta_s - 0.187\zeta_s^2 \quad (2.52)$$

โดยที่ ค่าอัตราส่วนมวลอยู่ในช่วง  $\mu < 0.20$  และอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้าง  $0 < \zeta_s < 0.15$  ซึ่งจะมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.02 % และ 1.5 % เมื่อเทียบกับค่าตัวเลขที่ได้จากวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับสมการ (2.51) และ (2.52) ตามลำดับ

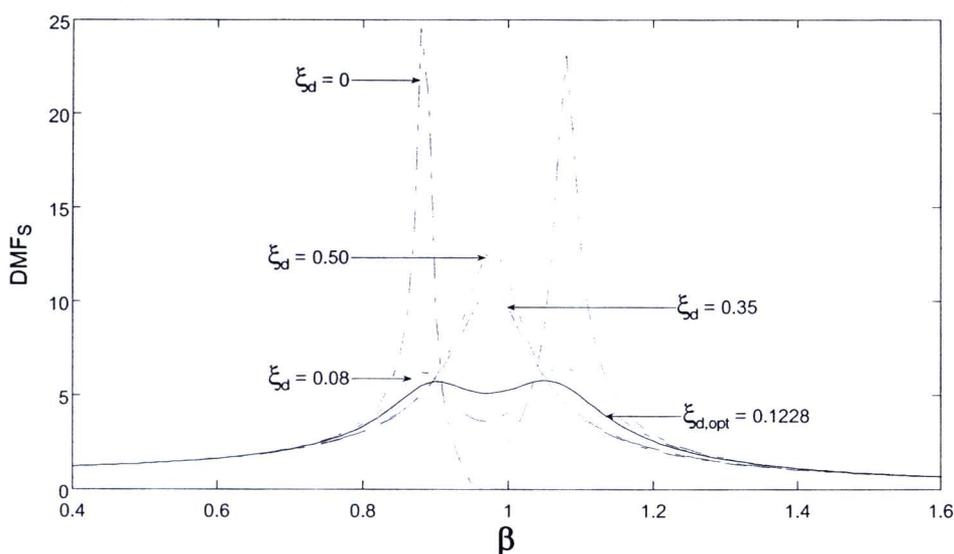
(ข) แรงกระตุ้นที่ฐานเนื่องจากความเร่ง (Support acceleration excitation)

$$\alpha_{opt} = \left( \frac{\sqrt{1-\mu/2}}{1+\mu} + \sqrt{1-2\zeta_s^2} - 1 \right) - (2.375 - 1.034\sqrt{\mu} - 0.426\mu)\sqrt{\mu}\zeta_s - (3.730 - 16.903\sqrt{\mu} + 20.496\mu)\sqrt{\mu}\zeta_s^2 \quad (2.53)$$

$$\zeta_{d,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)(1-\mu/2)}} + (0.163\zeta_s + 4.98\zeta_s^2)\mu + (0.151\zeta_s - 0.17\zeta_s^2) \quad (2.54)$$

โดยที่ ค่าอัตราส่วนมวลอยู่ในช่วง  $\mu < 0.20$  และอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้าง  $0 < \zeta_s < 0.15$  ซึ่งจะมีค่าความคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.04 % และ 2 % เมื่อเทียบกับค่าตัวเลขที่ได้จากวิธีการเชิงตัวเลขสำหรับสมการ (2.53) และ (2.54) ตามลำดับ

ในรูปที่ 2.11 แสดงกราฟของผลตอบสนองการกระจัดของโครงสร้างมีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่าเทียบกับอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นด้วยการกำหนดค่าอัตราส่วนมวล  $\mu = 0.04$ . และอัตราส่วนปรับค่าความถี่ที่เหมาะสม  $\alpha_{opt} = 0.9551$  เป็นค่าคงที่ แต่ใช้ค่าที่แตกต่างกันของ  $\zeta_d$  จากรูปจะสังเกตเห็นว่า กรณีของค่า  $\zeta_{d,opt} = 0.1228$  จะทำให้ผลตอบสนองการขจัดมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้งนี้ค่า  $\alpha_{opt}$  และ  $\zeta_{d,opt}$  หาจากสมการ (2.49) และ (2.50) ตามลำดับ



รูปที่ 2.11 ผลตอบสนองที่สภาวะการสั่นแบบคงที่ของโครงสร้างมีความหน่วงติดตั้งมวลหน่วงปรับค่า ด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0.02$ ,  $\mu = 0.04$ ,  $\alpha_{opt} = 0.9551$ ,  $\zeta_d$  แตกต่างกันหลายค่า

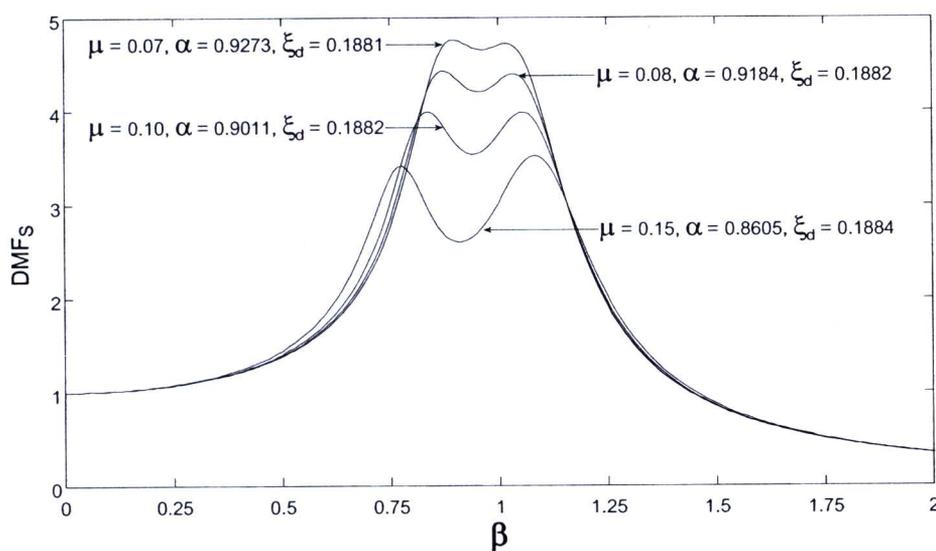
#### 2.4 ประสิทธิภาพและการคงสภาพความสามารถใช้งานได้ของมวลหน่วงปรับค่า

เรื่องของประสิทธิภาพ (Effectiveness) เป็นสิ่งสำคัญอันดับแรกที่จะต้องนำมาพิจารณาสำหรับการออกแบบเพื่อเลือกใช้มวลหน่วงปรับค่า ทั้งนี้เพื่อให้สามารถลดผลการสั่นไหวของโครงสร้างให้ได้มากที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้และเหมาะสมกับงบประมาณค่าใช้จ่ายที่มีอยู่ เพราะฉะนั้น จึงมีความจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับผู้ออกแบบที่จะต้องทราบถึงค่าพารามิเตอร์อะไรบ้างที่จะมีผลกระทบต่อประสิทธิภาพการทำงานของมวลหน่วงปรับค่าซึ่งได้แก่ อัตราส่วนมวล อัตราส่วนปรับค่าความถี่ ความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่าและความหน่วงของโครงสร้าง ประการที่สองเป็นเรื่องของความสามารถในการคงสภาพการใช้งานได้ (Robustness) ของมวลหน่วงปรับค่าภายใต้การเปลี่ยนแปลงคุณสมบัติบางอย่างของระบบเมื่อถูกใช้งานไประยะเวลาหนึ่ง

หรือจากขบวนการผลิตในโรงงาน กล่าวคือ การสูญเสียค่าปรับค่าความถี่และค่าความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า หรือเรียกโดยรวมว่า Detuning or Mistuning

#### 2.4.1 ประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่า

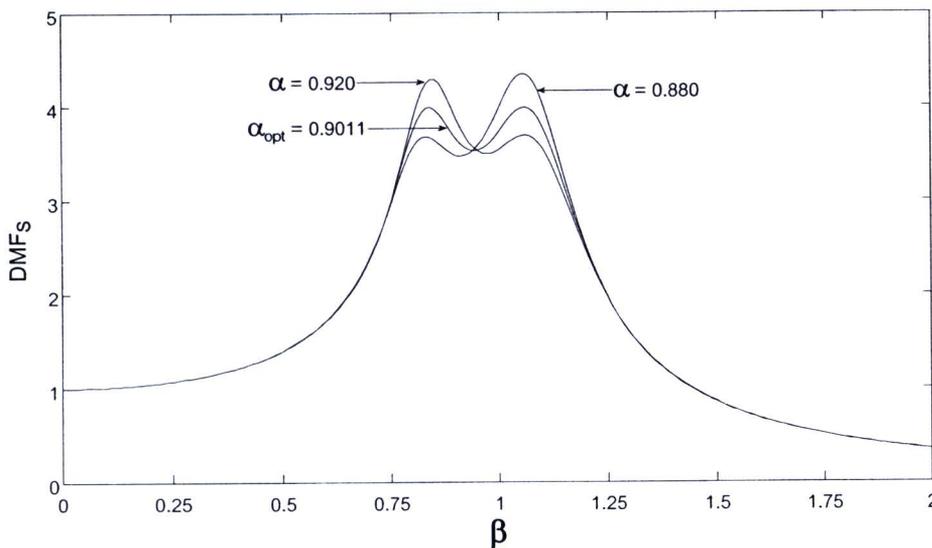
รูปที่ 2.12 แสดงถึงผลกระทบของอัตราส่วนมวลที่มีต่อผลตอบสนองการกระจัดซึ่งจะเห็นว่าถ้าเพิ่มอัตราส่วนมวลขึ้นจะทำให้ผลตอบสนองการกระจัดลดลงและส่งผลให้ประสิทธิภาพในการลดการสั่นไหวของโครงสร้างดีขึ้นไปด้วย อีกทั้งยังช่วยเพิ่มช่วงความถี่ใช้งานให้กว้างขึ้น อย่างไรก็ตาม การใช้อัตราส่วนมวลที่มากจะต้องพิจารณาถึงความเหมาะสมของค่าใช้จ่าย พื้นที่ใช้งานเพียงพอหรือไม่ รวมถึงความยากง่ายในการติดตั้งที่หน้างานอีกด้วย นอกจากนี้ ยังต้องคำนึงถึงผลกระทบของแรงสั่นที่เพิ่มเข้าไปสู่โครงสร้างซึ่งจะต้องไม่ทำให้โครงสร้างเกิดหน่วยแรงที่มากเกินไปกว่าค่าที่ออกแบบไว้



รูปที่ 2.12 ประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าเนื่องจากอัตราส่วนมวล  $\mu$  แตกต่างกันหลายค่า ด้วยค่าพารามิเตอร์  $\zeta_s = 0.02$

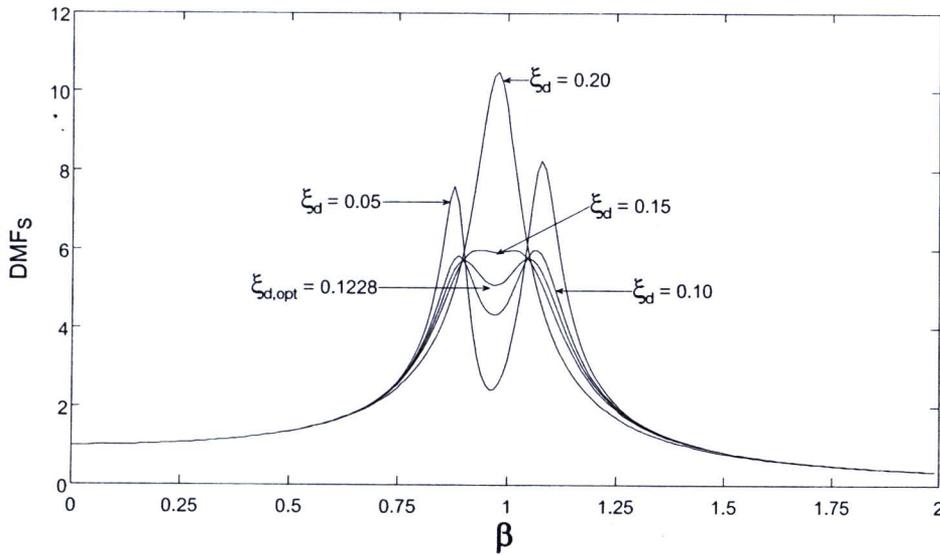
รูปที่ 2.13 แสดงให้เห็นว่า การใช้ค่าปรับค่าความถี่ที่ต่ำ  $\alpha_{lower} = 0.880$  และสูง  $\alpha_{upper} = 0.920$  กว่าค่าที่เหมาะสม  $\alpha_{opt} = 0.9011$  จะทำให้ตำแหน่งของ Peak เลื่อนไปจากตำแหน่งเดิม โดยที่ในกรณีของค่า  $\alpha_{lower}$  จะมีค่าผลตอบสนองที่เพิ่มขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นอยู่ในช่วง  $\alpha_{lower} < \beta < 1.10$  ในทางกลับกัน ค่าผลตอบสนองจะลดลงเมื่อค่า

$\beta < \alpha_{lower}$  สำหรับในกรณีของค่า  $\alpha_{upper}$  จะมีค่าผลตอบแทนที่เพิ่มขึ้นเมื่อค่าอัตราส่วนความถี่แรงกระตุ้นอยู่ในช่วง  $0.80 < \beta < \alpha_{upper}$  และค่าผลตอบแทนจะลดลงเมื่อค่า  $\beta > \alpha_{upper}$  เพราะฉะนั้น โดยภาพรวมแล้วประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าจะดีที่สุดเมื่อปรับค่าความถี่ให้มีค่าเหมาะสมซึ่งจะทำให้ได้ช่วงความถี่ใช้งานกว้างกว่าการปรับจูนความถี่ที่เบี่ยงเบนไปจากค่าที่เหมาะสม

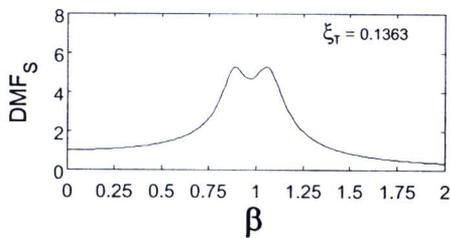


รูปที่ 2.13 ประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าเนื่องจากอัตราส่วนปรับค่าความถี่  $\alpha$  แตกต่างกันหลายค่าด้วยค่าพารามิเตอร์  $\mu = 0.10$ ,  $\zeta_s = 0.02$  และ  $\zeta_{d,opt} = 0.1875$

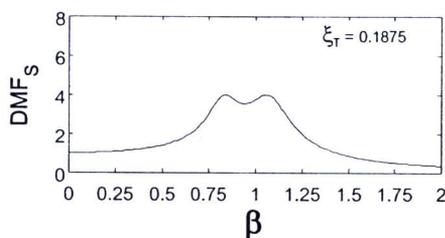
จากรูปที่ 2.14 จะสังเกตเห็นว่าเมื่อเพิ่มค่า  $\zeta_d$  มากขึ้น โดยที่ใช้ค่า  $\mu$  และ  $\alpha$  คงที่ ลักษณะรูปของเส้นกราฟผลตอบแทนการขจัดจะเปลี่ยนจาก 2 Peaks ไปเป็น 1 Peak และจะมีค่าของ Peak ต่ำที่สุดเมื่อใช้ค่าอัตราส่วนความถี่ของมวลหน่วงปรับค่าที่เหมาะสม  $\zeta_{d,opt} = 0.1228$  ซึ่งทำให้ประสิทธิภาพของการลดการสั่นไหวในภาพรวมดีที่สุด แม้ว่าที่ค่าความถี่การกำหนด  $\beta = \alpha_{opt}$  จะมีค่าผลตอบแทนสูงกว่าการใช้ค่า  $\zeta_d$  ที่ต่ำกว่าก็ตามเนื่องจากที่ค่า  $\zeta_{d,opt}$  นี้จะมีช่วงความถี่ใช้งานที่กว้างกว่า



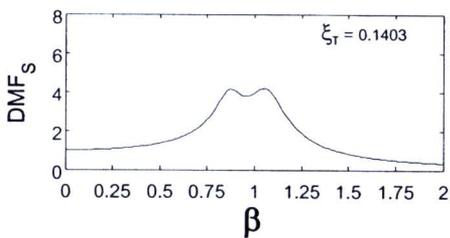
รูปที่ 2.14 ประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าเนื่องจากอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่า  $\zeta_d$  แตกต่างกันหลายค่า ด้วยค่าพารามิเตอร์  $\mu = 0.04$ ,  $\alpha_{opt} = 0.9551$  และ  $\zeta_s = 0.02$



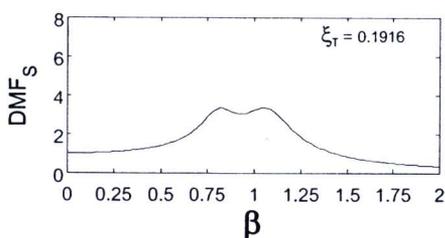
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

รูปที่ 2.15 ประสิทธิภาพของมวลหน่วงปรับค่าเนื่องจากอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้าง (ก)  $\alpha = 0.9456$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\zeta_s = 0.05$  (ข)  $\alpha = 0.9011$ ,  $\mu = 0.105$ ,  $\zeta_s = 0.05$  (ค)  $\alpha = 0.9341$ ,  $\mu = 0.05$ ,  $\zeta_s = 0.10$  และ (ง)  $\alpha = 0.8878$ ,  $\mu = 0.10$ ,  $\zeta_s = 0.10$

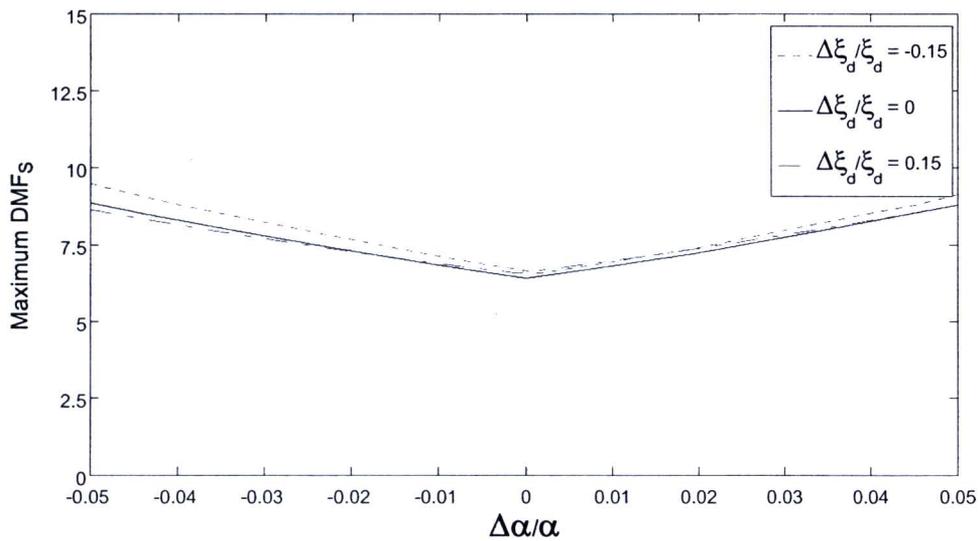
รูปที่ 2.15 แสดงถึงอิทธิพลของอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้างที่มีต่อค่าผลตอบสนองการขจัด พบว่าการใช้ค่าความหน่วงของโครงสร้างที่มากจะทำให้ผลตอบสนองลดลงมากตามไปด้วยเนื่องจากโครงสร้างมีความสามารถในการสลายพลังงานมากขึ้น อย่างไรก็ตาม ในความเป็นจริงโครงสร้างจะมีค่าความหน่วงเฉพาะของโครงสร้างนั้นๆ อยู่ค่าหนึ่งซึ่งโดยทั่วไปมักจะมีค่าไม่มากนัก

ในรูปที่ 2.15(ก) และ 2.15(ข) ใช้ค่าอัตราส่วนความหน่วงโครงสร้างเท่ากันคือ  $\zeta_s = 0.05$  สำหรับค่าอัตราส่วนมวลนั้นมีค่าแตกต่างกันคือ  $\mu = 0.05$  และ  $\mu = 0.10$  ซึ่งจะเห็นว่ากรณีที่ใช้ค่าอัตราส่วนมวลมากจะมีค่าผลตอบสนองลดลงจาก  $DMF_s = 5.1$  ไปเป็น  $DMF_s = 4.0$  คิดเป็น 21.6 % ในทำนองเดียวกัน สำหรับรูปที่ 2.15(ค) และ 2.15(ง) ใช้ค่าอัตราส่วนมวลที่แตกต่างกันคือ  $\mu = 0.05$  และ  $\mu = 0.10$  แต่ใช้ค่าอัตราส่วนความหน่วงของโครงสร้างเพิ่มขึ้นเป็น  $\zeta_s = 0.10$  ซึ่งในกรณีที่ใช้ค่าอัตราส่วนมวลมากจะมีค่าผลตอบสนองลดลงจาก  $DMF_s = 4.1$  ไปเป็น  $DMF_s = 3.4$  คิดเป็น 17.10 % ดังนั้น จากตัวเลขที่คิดเป็นเปอร์เซ็นต์ของค่าผลตอบสนองการขจัดที่ลดลงพบว่าโครงสร้างที่มีความหน่วงมาก ประสิทธิภาพในการลดผลการสั่นไหวของมวลหน่วงปรับค่าจะลดลง ดังนั้น ในทางปฏิบัติจึงนิยมใช้มวลหน่วงปรับค่ากับโครงสร้างที่มีความหน่วงน้อย (Lightly damped main system)

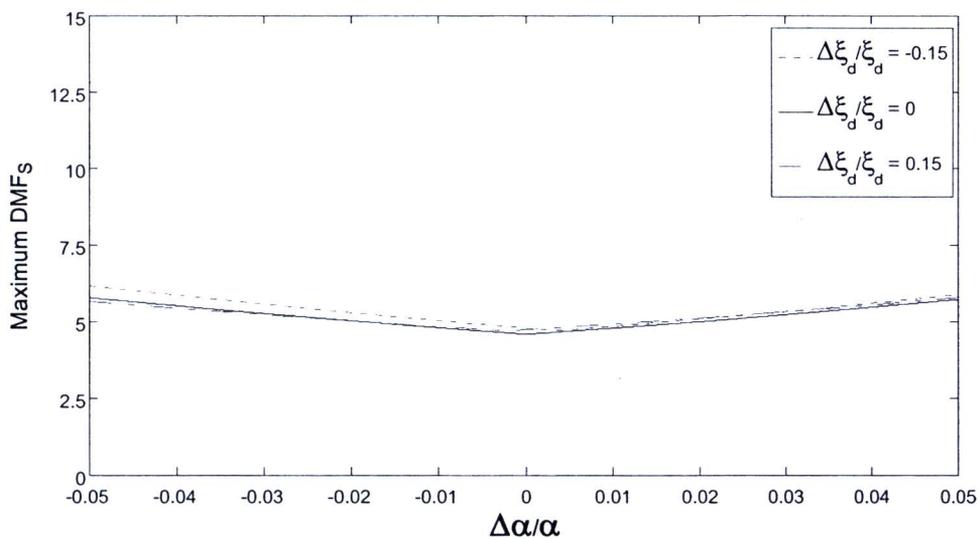
#### 2.4.2 การคงสภาพความสามารถใช้งานได้ของมวลหน่วงปรับค่า

รูปที่ 2.16 แสดงถึงค่าอัตราส่วนปรับค่าความถี่และค่าอัตราส่วนความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่าเบี่ยงเบนไปจากค่าที่เหมาะสมซึ่งอยู่ที่ตำแหน่งศูนย์บนแกนนอน หรือ  $\Delta\alpha/\alpha = 0$  จากกราฟเส้นทึบใช้ค่า  $\zeta_{d,opt}$  สำหรับค่า  $\mu = 0.05$  แสดงให้เห็นว่า เมื่อค่าอัตราส่วนปรับค่าความถี่เบี่ยงเบนไปจากตำแหน่งศูนย์จะทำให้ค่าผลตอบสนองสูงสุดของ  $DMF_s$  มีค่าเพิ่มขึ้นทั้งด้านบวกและด้านลบของแกนนอน แต่ในด้านลบของแกนนอนหรืออีกนัยหนึ่งอัตราส่วนปรับค่าความถี่ลดลงจะให้ค่า  $DMF_s$  สูงกว่าด้านบวกของแกนนอนเล็กน้อยเนื่องจากเส้นกราฟมีความชันมากกว่า นอกจากนี้หากพิจารณาการเบี่ยงเบนของค่าความหน่วง พบว่า เมื่อค่าความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่าลดลงจากค่าที่เหมาะสมซึ่งแทนด้วยเส้นประจะได้ค่าผลตอบสนองสูงกว่าค่าบนเส้นทึบทั้งในด้านลบและบวกของแกนนอน โดยเฉพาะอย่างยิ่งในด้านลบจะเห็นได้ชัดเจนมากที่เป็นเช่นนี้เพราะเมื่อลดค่าความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่าลงจะส่งผลให้ความหน่วงของระบบลดลงตามไปด้วย สำหรับกรณีเมื่อค่าอัตราส่วนความหน่วงมีค่าเพิ่มขึ้นแสดงด้วยเส้นประ-จุด จะให้ค่าผลตอบสนองลดลงเล็กน้อยในด้านลบของแกนนอนแต่ในด้านบวกผลตอบสนองมีค่า

ใกล้เคียงกับเส้นทึบมากซึ่งไม่สามารถมองเห็นความแตกต่างได้อย่างชัดเจนด้วยตาเปล่า อย่างไรก็ตาม อดี ผลของการเบี่ยงเบนค่าอัตราส่วนความหน่วงจะไม่ส่งผลกระทบต่อค่าผลตอบสนองซึ่งสังเกตได้จากมีค่าแตกต่างจากเส้นทึบเล็กน้อยอีกทั้งความชันของเส้นกราฟก็ไม่เปลี่ยนแปลงไปมากเมื่อเทียบกับเส้นทึบ



รูปที่ 2.16 ความคงสภาพใช้งานได้ของมวลหน่วงปรับค่าโดยใช้ค่า  $\mu = 0.05$



รูปที่ 2.17 ความคงสภาพใช้งานได้ของมวลหน่วงปรับค่าโดยใช้ค่า  $\mu = 0.10$

รูปที่ 2.17 แสดงผลในทำนองเดียวกันกับรูปที่ 2.16 ดังที่ได้อธิบายแล้วเพียงแต่ใช้ค่าอัตราส่วนมวลที่สูงขึ้นคือ  $\mu = 0.10$  อย่างไรก็ตาม การใช้อัตราส่วนมวลที่มากขึ้นจะทำให้ค่าความแตกต่างของผลตอบสนองระหว่างเส้นทึบและเส้นอื่น ๆ มีค่าน้อยลงอย่างเห็นได้ชัด โดยเฉพาะในด้านบวกของแกนนอน ทั้งสามเส้นมีค่าใกล้เคียงกันมาก ดังนั้น จากผลข้างต้นทำให้ทราบว่า การที่จะลดผลกระทบของ Detuning สามารถทำได้โดยการเพิ่มอัตราส่วนมวลซึ่งจะทำให้มวลหน่วงปรับค่ายังคงสภาพความสามารรถใช้งานได้ (Robustness) โดยที่ผลกระทบจากค่าความหน่วงของมวลหน่วงปรับค่าจะให้ผลน้อยกว่าค่าอัตราส่วนปรับค่าความถี่

## 2.5 ตัวอย่างการใช้งานมวลหน่วงปรับค่า

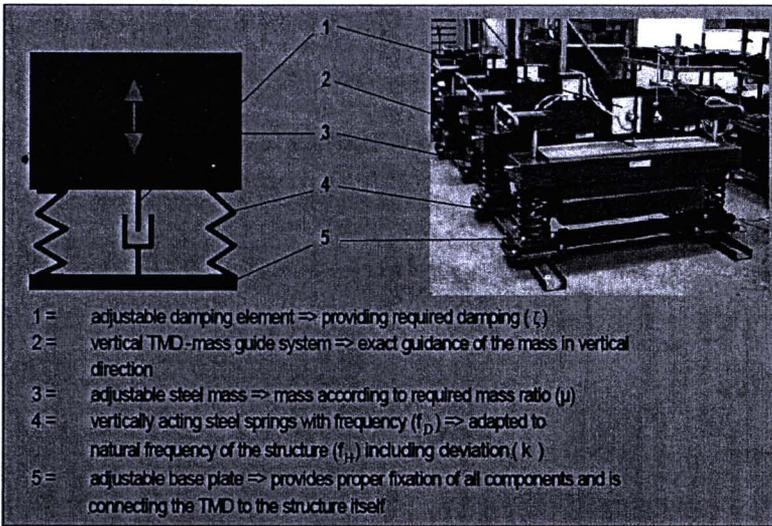
ตั้งแต่อดีตจนถึงปัจจุบัน มวลหน่วงปรับค่าได้ถูกนำมาใช้ทำงานร่วมกับโครงสร้างหลายประเภท ตัวอย่างเช่น อาคารสูง สะพาน โครงสร้างแบบปล่อง รถยนต์ เครื่องจักร เป็นต้น ทั้งนี้เพื่อลดผลการสั่นไหวของโครงสร้างให้น้อยลงอันมีสาเหตุมาจากแรงพลวัตต่างๆ ทำให้โครงสร้างเหล่านั้นใช้งานได้ดีโดยไม่ส่งผลกระทบทางใดทางหนึ่งต่อชีวิตและทรัพย์สินตลอดช่วงอายุการใช้งานของโครงสร้าง

ลักษณะทางกายภาพของมวลหน่วงปรับค่าสามารถแบ่งเป็น 2 ประเภทหลัก คือ สปริง-ตัวหน่วง (Spring-damper) และ ลูกตุ้ม (Pendulum) ที่แกว่งตัวได้ โดยการนำไปใช้งานจะขึ้นกับความเหมาะสมและสอดคล้องกับสถาปัตยกรรมของโครงสร้าง ดังแสดงในรูปที่ 2.18 และตารางที่ 2.3 แสดงรายการของมวลหน่วงปรับค่าประเภท Passive damping device ที่นำไปใช้งานกับโครงสร้างประเภทต่างๆ

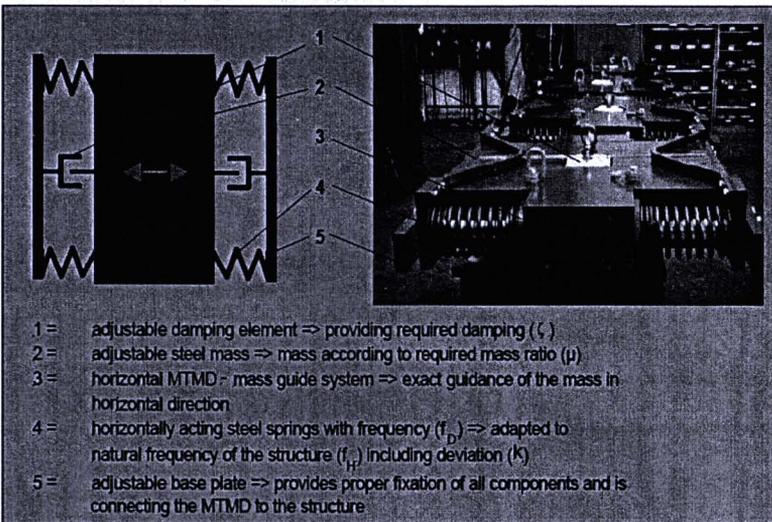
ตารางที่ 2.3 รายการมวลหน่วงปรับค่าประเภท Passive damping device กับโครงสร้างประเภท  
ต่างๆ

ประเทศ	เมือง/ชื่อและประเภทของโครงสร้าง	มวล (Tons)	ความถี่ (Hz)	ประเภท TMD	ปี
France	Paris, Stade de France, Footbridge	3 x 2.05-2.8	1.8-2.1	สปริง-ตัวหน่วง	1997
France	Paris, Solferino Footbridge	14 x 1.9-2.5	0.8-2.2	สปริง-ตัวหน่วง	2000
France	La Hague, SGN, Stack	2 x 0.2	1.4	สปริง-ตัวหน่วง	1999
GB	London, Stakis Metropole, Hotel Building	7 x 14.5	4.4	สปริง-ตัวหน่วง	2000
GB	Inverness, Kessock Bridge	8 x 2	0.5	สปริง-ตัวหน่วง	2000
GB	London, Millennium Bridge	58 x 1-2.5	0.8-2.2	สปริง-ตัวหน่วง	2001
GB	Coventry, Footbridge	3 x 0.67	1.0	สปริง-ตัวหน่วง	2003
Germany	Berlin, Schwedter Str., Footbridge	4 x 0.9	1.9	สปริง-ตัวหน่วง	1999
Germany	Berlin, Britzer Damm, Footbridge	2 x 0.5	5.9	สปริง-ตัวหน่วง	2001
Germany	Freilassing, Footbridge	4 x 0.82	2.3	สปริง-ตัวหน่วง	2002
Germany	Hamburg, Stack	0.78	0.7	สปริง-ตัวหน่วง	1996
Italy	Barberino del Mugello, Footbridge	2 x 0.1	2.3	สปริง-ตัวหน่วง	1996
Japan	Chiba, Chiba Port Tower	10, 15	0.43-0.44	สปริง-ตัวหน่วง	1986
Japan	Osaka, Crystal Tower	180, 360	0.24-0.28	สปริง-ตัวหน่วง	1990
Japan	Kobe, Rokko Island P&G Building	270	0.33-0.62	ลูกตุ้ม	1993
Japan	Ube, Stack	0.3	3.1	สปริง-ตัวหน่วง	2000
Korea	Seoul, Sun You Footbridge	4 x 1.5-1.65	0.8-2.0	สปริง-ตัวหน่วง	2002
Norway	Mjomnesundet Bridge	10	0.5	สปริง-ตัวหน่วง	1989
Singapore	Changi Airport, Footbridge	2 x 0.5	0.9	สปริง-ตัวหน่วง	2003
Thailand	Bangkok, Chao Phya Bridge	18 x 4.5	0.3-0.7	สปริง-ตัวหน่วง	1985
Thailand	Bangkok, Stack	3.5	0.8	สปริง-ตัวหน่วง	1999
UAE	Dubai, Burj Al Arab, Steel Sceleton and Spire	11 x 5	0.8-2.0	สปริง-ตัวหน่วง	1997
UAE	Dubai, Emirates Towers, Spire	6 x 1.2	0.9	สปริง-ตัวหน่วง	1999
UAE	Dubai, 21st Century Tower, Spire	2 x 5	1.1	สปริง-ตัวหน่วง	2003
USA	Boston, John Hancock Building	2 x 300	0.14	สปริง-ตัวหน่วง	1977
USA	New York, City Crop Center Building	370	0.16	สปริง-ตัวหน่วง	1978

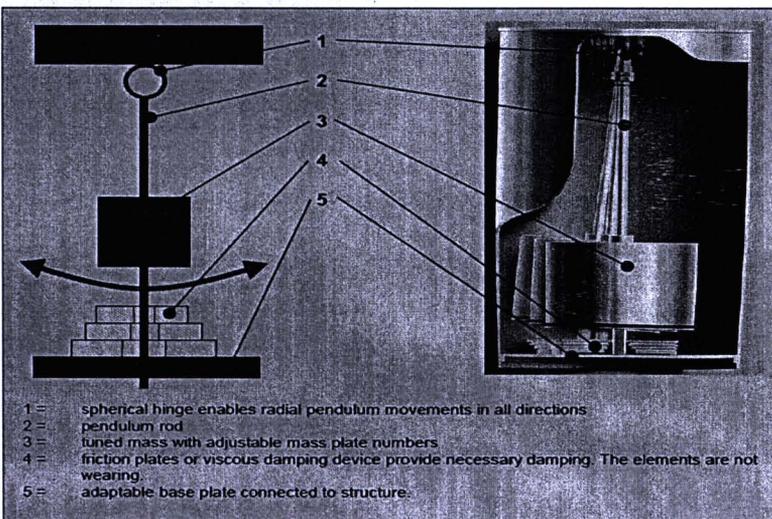
(ที่มาจาก Brochure สินค้าของ GERB vibration control system)



(ก) มวลหน่วงปรับค่าเคลื่อนที่ตามแนวตั้ง (Vertically acting tuned mass damper) แบบสปริง-ตัวหน่วง

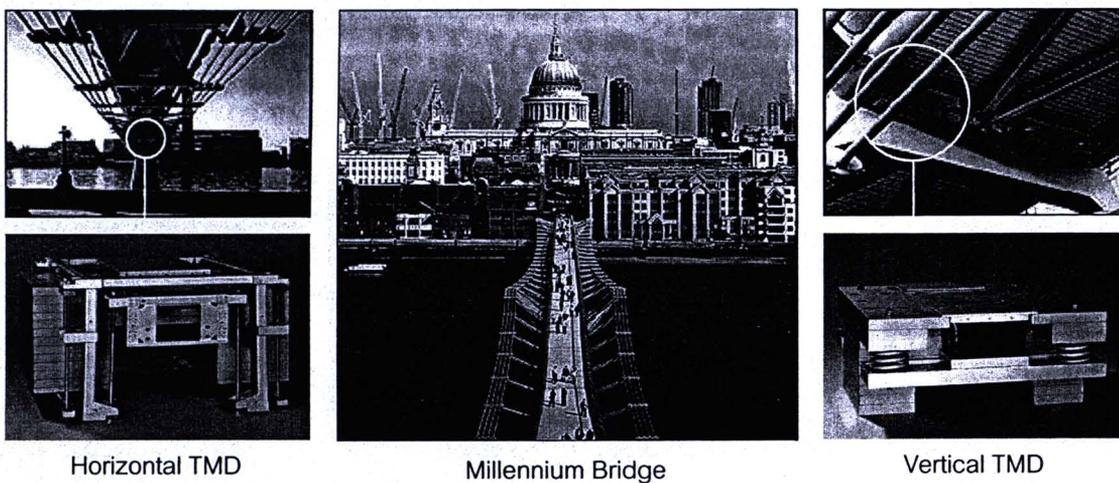


(ข) มวลหน่วงปรับค่าเคลื่อนที่ตามแนวราบ (Horizontally acting tuned mass damper) แบบสปริง-ตัวหน่วง



(ค) มวลหน่วงปรับค่าแบบลูกตุ้มแกว่งตัวได้ (Pendulum tuned mass damper)

รูปที่ 2.18 ลักษณะทางกายภาพของมวลหน่วงปรับค่า

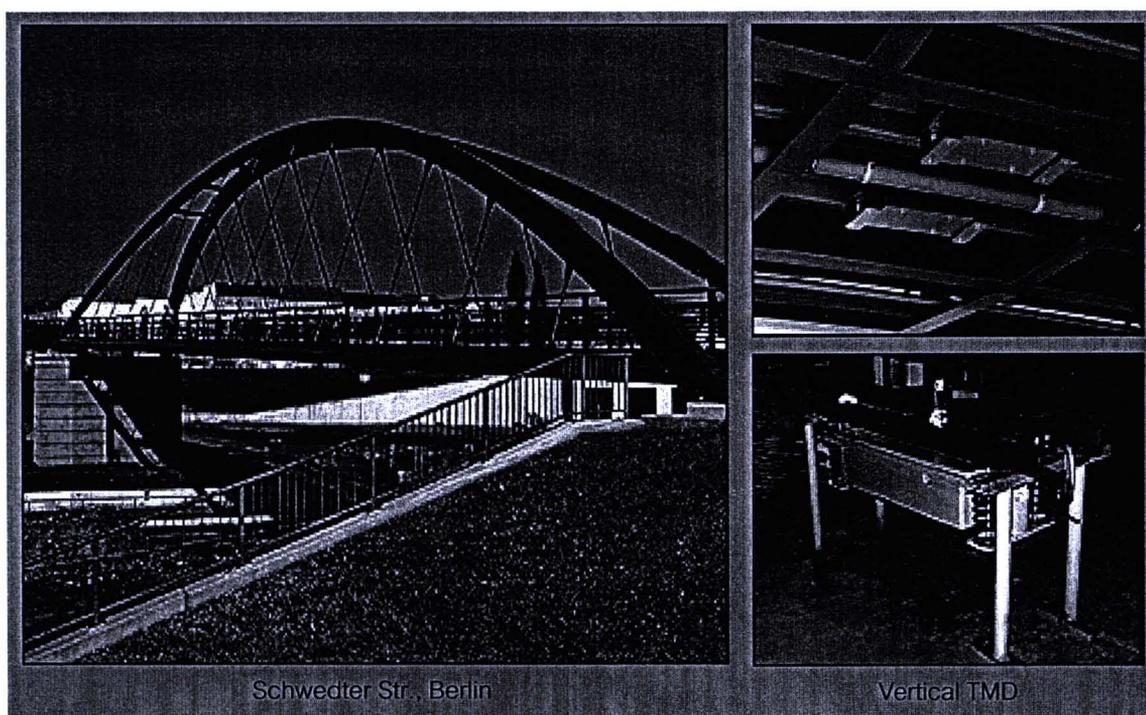


Horizontal TMD

Millennium Bridge

Vertical TMD

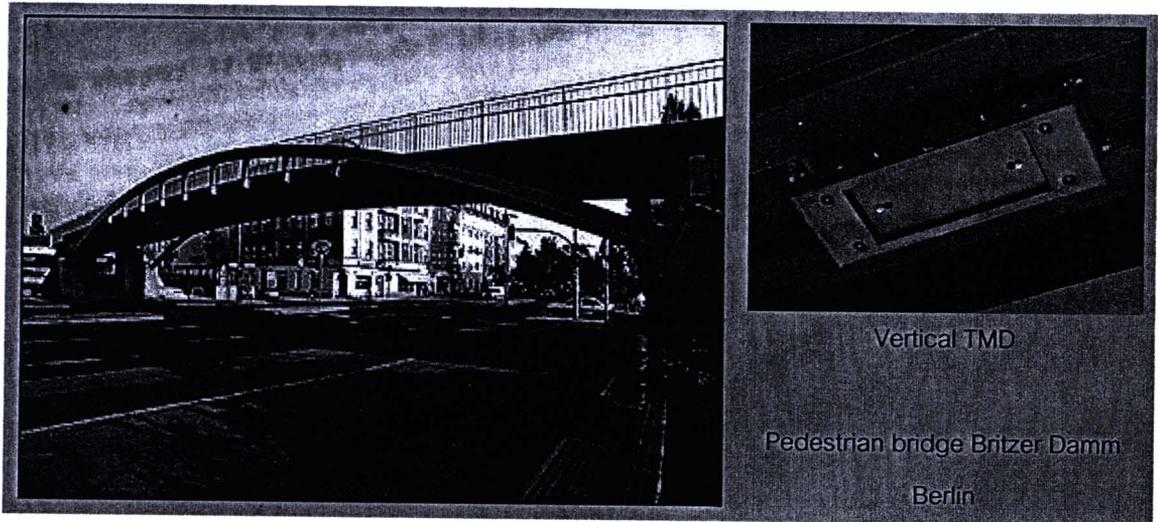
รูปที่ 2.19 สะพาน Millennium Bridge, London/UK



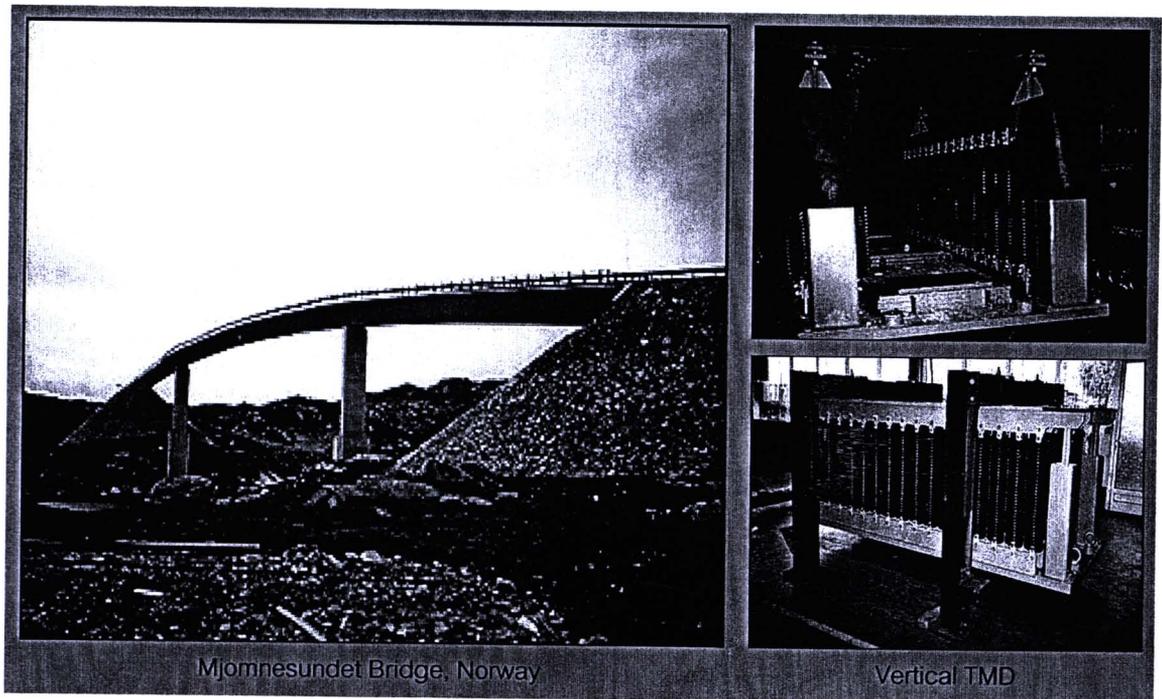
Schwedter Str., Berlin

Vertical TMD

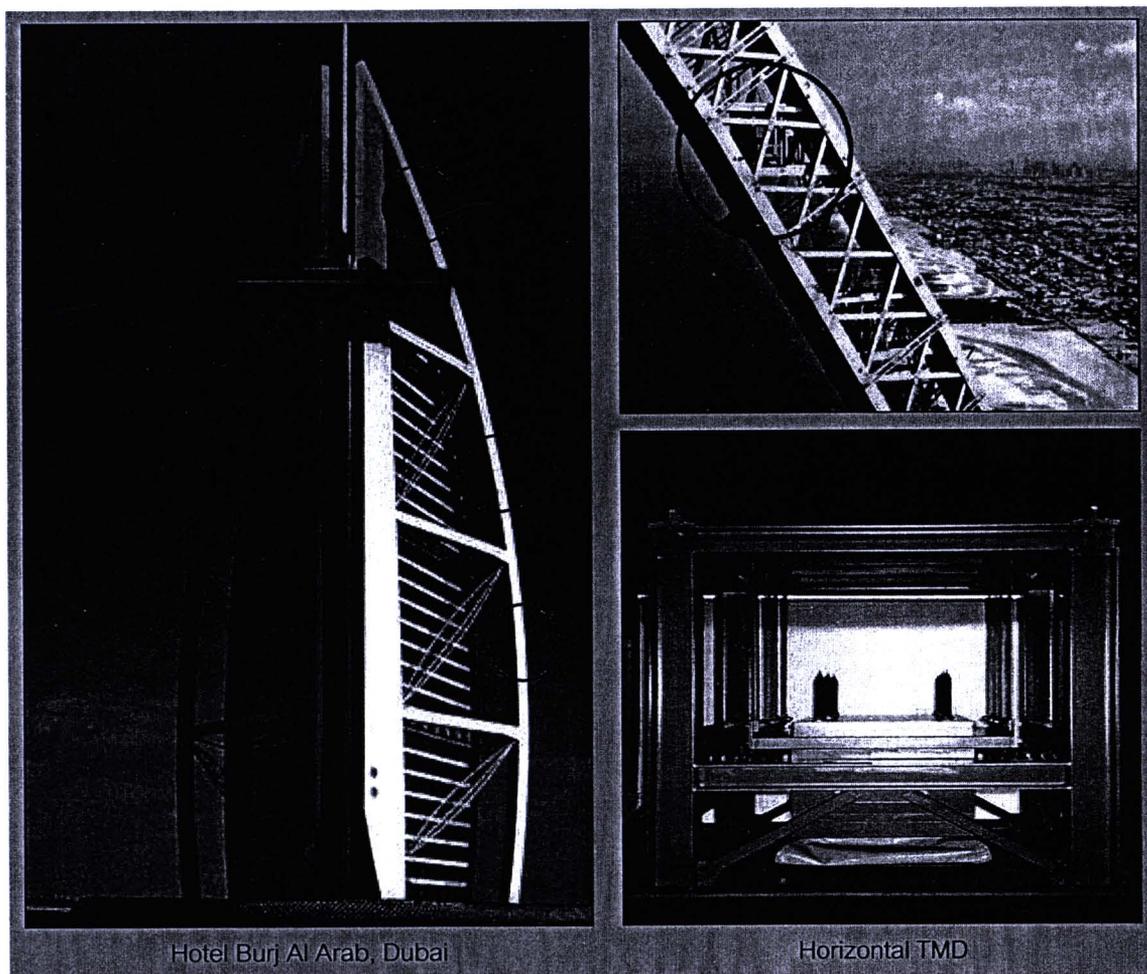
รูปที่ 2.20 สะพาน Schwedter Str., Bridge, Berlin/Germany



รูปที่ 2.21 สะพาน Pedestrian bridge Britzer Damm Berlin /Germany



รูปที่ 2.22 สะพาน Mjornesundet Bridge, Norway



รูปที่ 2.23 โรงแรม Burj Al Arab, Steel Sceleton and Spire, Dubai/UAE