ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

ปริญญา

คณิตศาสตร์ คณิตศาสตร์

สาขา **ภาควิชา**

เรื่อง อนุพันธ์ในแลตทิซ

Derivations in Lattices

นามผู้วิจัย นางสาวสุรีพร หาไมตรี

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์อุษณีย์ ลีรวัฒน์, วท.ด.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์สุริยา ณ หนองคาย, Dr.rer.nat.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญจนา ธีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ **เดือน** **พ.ศ**

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

อนุพันธ์ในแลตทิซ

Derivations in Lattices

โดย

นางสาวสุรีพร หาไมตรี

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)
พ.ศ. 2554

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สุรีพร หาไมตรี 2554: อนุพันธ์ในแลตทิซ ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์อุษณีย์ ลีรวัฒน์, วท.ด. 109 หน้า

งานวิจัยนี้มีจุดมุ่งหมายสร้างนัยทั่วไปของอนุพันธ์ในแลตทิซได้แก่ f-derivation, generalized f-derivation, lattice f-derivation, generalized lattice f-derivation และตรวจสอบสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้เราได้แสดงผลลัพธ์บางประการของอนุพันธ์ใน modular lattice และ distributive lattice พร้อมทั้งศึกษาอนุพันธ์อันดับสูงในแลตทิซ

_____ _____ ___ / ___ / ___

ลายมือชื่อนิสิต ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Sureeporn Harmaitree 2011: Derivations in Lattices. Master of Science (Mathematics), Major Field: Mathematics, Department of Mathematics. Thesis Advisor: Associate Professor Utsanee Leerawat, Ph.D. 109 pages.

The purpose of this research are to construct generalization of derivations in lattices, namely f-derivation, generalized f-derivation, lattice f-derivation, generalized lattice f-derivation, and investigation some related properties. Moreover, we establish some results derivation in modular lattice and distributive lattice. We also study higher order derivations in lattices.

_____ _____ ___ / ___ / ___

Student's signature Thesis Advisor's signature

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อุษณีย์ ลีรวัฒน์ ประธานกรรมการที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้เอาใจใส่ให้คำปรึกษาอย่างใกล้ชิด รองศาสตราจารย์กรรณิกา คงสาคร ประธานกรรมการสอบ และรองศาสตราจารย์วนิดา ศรีแสงทอง ผู้ทรงคุณวุฒิที่ได้กรุณาให้คำแนะนำข้อคิดเห็น ตรวจและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆด้วยความเอาใจใส่อย่างดียิ่งจนกระทั่งผู้วิจัยสามารถดำเนินการวิจัยได้สำเร็จสมบูรณ์ จึงกราบขอบพระคุณอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.)ที่สนับสนุนทุนการศึกษาในการศึกษาในระดับปริญญาโทนี้

ขอขอบคุณอาจารย์และเพื่อนๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนครอบครัวที่คอยช่วยเหลือสนับสนุนและให้กำลังใจตลอดเวลาในการศึกษา

ประโยชน์อันเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ จะพึงมีเพียงใด ขอมอบแด่คุณพ่อคุณแม่และคณาจารย์ทุกท่านที่ได้เมตตาอบรมสั่งสอนให้มีความรู้จนถึงปัจจุบัน

สุรีพร หาไมตรี

เมษายน 2554

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
สารบัญภาพ	(2)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(3)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	3
การตรวจเอกสาร	4
วิธีการ	31
ผลการวิจัย	36
สรุป	100
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	107
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	109

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	แลตทิซแบบที่ 1	36
2	แลตทิซแบบที่ 2	42

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

$\in$ = เป็นสมาชิกของ

$\subseteq$ = เป็นสับเซตของ

ϕ = เซตว่าง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

อนุพันธ์ในแลตทิซ

Derivations in Lattices

คำนำ

ในการศึกษาอนุพันธ์ (derivation) เริ่มแรกได้ศึกษาบน ring โดยนักวิจัยหลายท่าน (Bell and Kappe, 1989; Bell and Mason, 1987; Posner, 1957) ได้ทำการศึกษาไว้ ต่อมา Jun and Xin (2004) ได้ประยุกต์แนวคิดอนุพันธ์ (derivation) ของ ring กับ BCI-algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra กำหนด $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ให้ $d : X \to X$ จะกล่าวว่า d เป็น left-right derivation ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกัน เรียก d ว่า right-left derivation ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับ $x, y \in X$ ถ้า d เป็นทั้ง left-right derivation และ right-left derivation จะเรียก d ว่า derivation เรียก d ว่า regular derivation ถ้า $d(0) = 0$ และได้แสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ทั้งสองได้ศึกษา d-invariant ideal สำหรับฟังก์ชัน d ของ BCI-algebra โดยที่ ideal A ของ BCI-algebra จะเรียกว่า d -invariant ก็ต่อเมื่อ $d(A) \subseteq A$ พร้อมทั้งให้เงื่อนไขสำหรับ ideal ของ BCI-algebra ที่จะเป็น d -invariant

ในปี ค.ศ. 2005 Jianming Zhan และ Yong Lin Liu ได้ขยายแนวคิดอนุพันธ์ (derivation) ของ BCI-algebra โดยศึกษาเกี่ยวกับ f-derivation ถ้า X เป็น BCI-algebra กำหนด $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ให้ $d_f : X \to X$ จะกล่าวว่า d_f เป็น left-right f-derivation ถ้า $d_f(x * y) = \big(d_f(x) * f(y)\big) \wedge \big(f(x) * d_f(y)\big)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกัน เรียก d_f ว่า right-left f-derivation ถ้า $d_f(x * y) = \big(f(x) * d_f(y)\big) \wedge \big(d_f(x) * f(y)\big)$ สำหรับ $x, y \in X$ ถ้า d_f เป็นทั้ง left-right f-derivation และ right-left f-derivation จะเรียก d_f ว่า derivation เรียก d_f ว่า regular derivation ถ้า $d_f(0) = 0$ และได้แสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 2006 Hamza A. S. Abujabal และ Nora O. Al-Shehri ได้ศึกษาอนุพันธ์ (derivation) บน BCK-algebra ในปี ค.ศ. 2007 Hamza and Al-Shehri ได้นิยาม derivation ทางซ้าย (left derivation) บน BCI-algebra และศึกษา regular left derivation บน BCI-algebra

ในปี ค.ศ. 2009 Chanwit Prabprayak และ Utsanee Leerawat ได้ศึกษาอนุพันธ์ (derivation) บน BCC-algebra รวมทั้งหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ในปี ค.ศ. 2008 Xiao Long Xin , Ti Yao Li และ Jing Hua Lu ได้ศึกษาอนุพันธ์ (derivation) บน lattice และได้แสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

ในปี ค.ศ. 2010 N. O. Alshehriได้ศึกษา generalized derivation บน lattice และได้แสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

จุดประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การนำแนวคิดของ f-derivation บน BCI-algebra ของ Zhan and Liu (2005) ใช้กับ lattice และหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง รวมทั้งประยุกต์แนวคิดของอนุพันธ์ (derivation) บน lattice เพื่อสร้างนัยทั่วไปและศึกษาอนุพันธ์ (derivation) ในรูปแบบอื่นๆ โดยตั้งชื่อว่า lattice f-derivation และอาศัยแนวคิดเกี่ยวกับ generalized derivation ของ N. O. Alshehri (2010) ประยุกต์ใช้กับ f-derivation และ lattice f-derivation ใน lattice พร้อมทั้งศึกษาสมบัติต่างๆของอนุพันธ์ (derivation) ที่สร้างขึ้น พร้อมทั้งศึกษาอนุพันธ์ (derivation) อันดับสูงใน lattice

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาอนุพันธ์ในแลตทิซ และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2. เพื่อสร้างนัยทั่วไปของอนุพันธ์ในแลตทิซ

3. ตรวจสอบสมบัติต่างๆของอนุพันธ์ที่สร้างขึ้นในข้อ 2

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ความรู้เรื่องอนุพันธ์ในแลตทิซ

2. ได้นัยทั่วไปของอนุพันธ์ในแลตทิซ

3. ได้สมบัติต่างๆของนัยทั่วไปของอนุพันธ์

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

การตรวจเอกสาร

การวิจัยครั้งนี้มีบทนิยาม ทฤษฎีบท ความรู้พื้นฐาน และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ lattice
2. ผลงานของ Jun and Xin (2004)
3. ผลงานของ Hamza and Al-Shehri (2006)
4. ผลงานของ Hamza and Al-Shehri (2007)
5. ผลงานของ Prabpayak and Leerawat (2009)
6. ผลงานของ Zhan and Liu (2005)
7. ผลงานของ Nisar (2009)
8. ผลงานของ Xin et al. (2008)
9. ผลงานของ Alshehri (2010)

1. ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับ lattice

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆที่ไม่เป็นเซตว่าง เราจะกล่าวว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บนเซต A ก็ต่อเมื่อ $* : A \times A \to A$ เป็นฟังก์ชัน และถ้า $*((a,b)) = c$ เราจะเขียนแทนด้วย $a * b = c$

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือสับเซตของ $A \times B$ ถ้า R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B และ $(a, b) \in R$ เราจะเขียนแทนด้วย aRb

โดเมนของ R จะเขียนแทนด้วย Dom(R) คือเซตของสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับทั้งหลายที่อยู่ใน R ซึ่งจะเขียนในแบบสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in R\}$$

พิสัยของ R เขียนแทนด้วย Im(R) คือเซตของสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับทั้งหลายที่อยู่ใน R ซึ่งจะเขียนในแบบสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\text{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in R\}$$

เราสังเกตได้ว่า $\text{Dom}(R) \subseteq A$ และ $\text{Im}(R) \subseteq B$

ในกรณีที่ $A = B$ เราจะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์บนเซต A

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

บทนิยาม ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X จะกล่าวว่า

1. R มีสมบัติสะท้อน (reflexive) ก็ต่อเมื่อ aRa สำหรับทุก $a \in X$
2. R มีสมบัติสมมาตร (symmetric) ก็ต่อเมื่อ ถ้า สำหรับทุก $a, b \in X$ ที่ aRb แล้ว bRa
3. R มีสมบัติถ่ายทอด (transitive) ก็ต่อเมื่อ ถ้า สำหรับทุก $a, b, c \in X$ ที่ aRb และ bRc แล้ว aRc
4. R มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in X$ ที่ aRb และ bRa แล้ว $a = b$

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ จะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์สมมูล (Equivalence) บนเซต X ถ้า R มีสมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์บน X จะเรียก R ว่า partial order บน X ถ้า R มีสมบัติสะท้อน สมบัติปฏิสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด บน X

บทนิยาม ถ้า R มีสมบัติ partial order บน X จะเรียก (X, R) ว่า partially ordered set

บทนิยาม ให้ R มีความสัมพันธ์บนเซต X จะกล่าวว่า R เป็น congruence บน X ก็ต่อเมื่อ R สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X
2. สำหรับทุก $a, b, u, v \in X$ ถ้า aRb และ uRv แล้ว (au)R(bv)

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ และ $\leq$ เป็นความสัมพันธ์ซึ่งเป็น partial order บน X จะเรียก $\leq$ ว่า total order (หรือ linear order) บน X ถ้า สำหรับแต่ละ $a, b \in X$, $a \leq b$ หรือ $b \leq a$ อย่างใดอย่างหนึ่ง และจะเรียก $(X, \leq)$ ว่า total ordered set หรือ chain

บทนิยาม ให้ $(X, \leq)$ เป็น partially ordered set

1. เราจะกล่าวว่า $a \in X$ เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด (greatest element) ของ X ถ้า $x \leq a$ สำหรับทุก $x \in X$
2. เราจะกล่าวว่า $b \in X$ เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด (smallest element) ของ X ถ้า $b \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

บทนิยาม ให้ $(X, \leq)$ เป็น partially ordered set และ $A \subseteq X$

1. เราจะกล่าวว่า $x \in X$ เป็น ค่าขอบเขตบน (upper bound) ของ A ถ้า $a \leq x$ สำหรับทุก $a \in A$
2. เราจะกล่าวว่า $x \in X$ เป็น ค่าขอบเขตล่าง (lower bound) ของ A ถ้า $x \leq a$ สำหรับทุก $a \in A$
3. เราจะกล่าวว่า $u \in X$ เป็น ค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด (supremum) ของ A ถ้า
   3.1. $a \leq u$ สำหรับทุก $a \in A$ และ
   3.2. $u \leq v$ สำหรับทุก v ที่เป็นค่าขอบเขตบน(upper bound)ของ A

   ค่าขอบเขตบนที่น้อยที่สุด (supremum) ของ A เขียนแทนด้วย $\sup A$
4. เราจะกล่าวว่า $w \in X$ เป็น ค่าขอบเขตล่างที่มากที่สุด (infimum) ของ A ถ้า
   4.1. $w \leq a$ สำหรับทุก $a \in A$ และ
   4.2. $v \leq w$ สำหรับทุก v ที่เป็นค่าขอบเขตล่าง (lower bound) ของ A

   ค่าขอบเขตล่างที่มากที่สุด (infimum) ของ A เขียนแทนด้วย $\inf A$

บทนิยาม ให้ L เป็นเซต และ $L \neq \phi$ และ ให้ $\vee$ (อ่านว่า join) และ $\wedge$ (อ่านว่า meet) เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน L เราจะกล่าวว่า $(L, \wedge, \vee)$ เป็น algebraic lattice ถ้าสำหรับทุก $x, y, z \in L$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. $x = x \wedge (x \vee y)$, $x = x \vee (x \wedge y)$

หลัก Duality ให้ $(L, \wedge, \vee)$ เป็น algebraic lattice สำหรับสูตรต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับการดำเนินการ $\wedge$ และ $\vee$ ถ้าแทนที่ $\wedge$ด้วย $\vee$ และแทนที่ $\vee$ ด้วย $\wedge$ ในทุกๆที่ของสูตร ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นจริงเสมอ

บทนิยาม ให้ $(L, \leq)$ เป็น partially ordered set จะเรียก $(L, \leq)$ ว่า lattice ordered set ถ้า $\sup\{x, y\} \in L$ และ $\inf\{x, y\} \in L$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท ให้ $(L, \leq)$ เป็น lattice ordered set และ $x, y \in L$ ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $x \leq y$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2. $\sup\{x, y\} = y$
3. $\inf\{x, y\} = x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

ทฤษฎีบท ให้ $(L, \leq)$ เป็น lattice ordered set ที่มีสมาชิกที่เล็กที่สุด จะได้ว่า L มีสมาชิกที่เล็กที่สุดเพียงตัวเดียว แทนสมาชิกที่เล็กที่สุดด้วย 0 เรียกว่า สมาชิกศูนย์

พิสูจน์ สมมติให้ $a, b \in L$ โดยที่ a และ b เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ L
จะได้ว่า $a \leq x$ สำหรับทุก $x \in L$ และ $b \leq x$ สำหรับทุก $x \in L$
เนื่องจาก $a \leq x$ สำหรับทุก $x \in L$ ดังนั้น $a \leq b$
เนื่องจาก $b \leq x$ สำหรับทุก $x \in L$ ดังนั้น $b \leq a$
เนื่องจาก $\leq$ เป็น partial order ดังนั้น $\leq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร
ฉะนั้น $a = b$
นั่นแสดงว่า L มีสมาชิกที่เล็กที่สุดเพียงตัวเดียว

ทฤษฎีบท ให้ $(L, \leq)$ เป็น lattice ordered set ที่มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด จะได้ว่า L มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดเพียงตัวเดียว แทนสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดด้วย 1 เรียกว่า สมาชิกหนึ่ง

พิสูจน์ สมมติให้ $a, b \in L$ โดยที่ a และ b เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ L
จะได้ว่า $x \leq a$ สำหรับทุก $x \in L$ และ $x \leq b$ สำหรับทุก $x \in L$
เนื่องจาก $x \leq a$ สำหรับทุก $x \in L$ ดังนั้น $b \leq a$
เนื่องจาก $x \leq b$ สำหรับทุก $x \in L$ ดังนั้น $a \leq b$
เนื่องจาก $\leq$ เป็น partial order ดังนั้น $\leq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร
ฉะนั้น $a = b$
นั่นแสดงว่า L มีสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดเพียงตัวเดียว

ทฤษฎีบท 1. ให้ $(L, \leq)$ เป็น lattice ordered set และกำหนดการดำเนินการ $\wedge, \vee$ โดย $x \wedge y = \inf\{x, y\}$, $x \vee y = \sup\{x, y\}$ สำหรับทุก $x, y \in L$ จะได้ว่า $(L, \wedge, \vee)$ เป็น algebraic lattice

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2. ให้ $(L, \wedge, \vee)$ เป็น algebraic lattice และกำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน L โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x \wedge y = x$ สำหรับทุก $x, y \in L$ จะได้ว่า $(L, \leq)$ เป็น lattice ordered set

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

จากทฤษฎีบทข้างต้น แสดงให้เห็นว่ามีความสัมพันธ์แบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่าง lattice ordered set และ algebraic lattice ดังนั้น lattice ordered set สมมูลกับ algebraic lattice

บทนิยาม ให้ L เป็น lattice และ $S \subseteq L$ ซึ่ง $S \neq \phi$ เราจะกล่าวว่า S เป็น sublattice ของ L ถ้า $s_1 \wedge s_2 \in S$ และ $s_1 \vee s_2 \in S$ สำหรับทุก $s_1, s_2 \in S$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

2. ผลงานของ Jun and Xin (2004)

Jun and Xin (2004) ได้ให้แนวคิดของ left-right (right-left) derivation ของ BCI algebra และหาสมบัติที่เกี่ยวข้อง และให้เงื่อนไขสำหรับอนุพันธ์ที่จะเป็น regular

บทนิยาม $(X, \cdot, 0)$ จะเรียกว่า BCI-algebra ถ้าสอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $((xy)(xz))(zy) = 0$
2. $(x(xy))y = 0$
3. $xx = 0$
4. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X แล้วจะเรียกว่า I ว่า ideal ของ X ถ้า

1. $0 \in I$
2. ถ้า $xy \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ $(X, \cdot, 0)$ เป็น BCI-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก S ว่า BCI-subalgebra ของ X ถ้า $(S, \cdot, 0)$ เป็น BCI-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม สำหรับ BCI-algebra X

1. $X_+ = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$
2. ถ้า $X_+ = \{0\}$ แล้วเรียก X ว่า p-semisimple BCI-algebra
3. $x + y = x(0y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $x - y = xy$ สำหรับทุก $x, y \in X$
5. $L_p(X) = \{a \in X \mid xa = 0 \rightarrow x = a \ \forall x \in X\}$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

6. สำหรับ $a \in X$, $V(a) = \{x \in X \mid ax = 0\}$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน a_x แทน $0(0x)$ สำหรับสมาชิก x ใน X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra จะได้ว่า

1. ถ้า $x \in V(a)$ และ $y \in V(b)$ แล้ว $xy \in V(ab)$
2. $a_x \in L_p(X)$
3. $0(0a_x) = a_x$
4. ถ้า $x \in L_p(X)$ และ $y \in X$ แล้ว $xy \in L_p(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม BCI-algebra X จะเรียกว่า commutative ถ้า $x \leq y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $x = x \wedge y$

บทนิยาม BCI-algebra X จะเรียกว่า branchwise commutative ถ้า $\forall a \in L_p(X)\ \forall x, y \in V(a), x \wedge y = y \wedge x$

ทฤษฎีบท BCI-algebra X เป็น commutative ก็ต่อเมื่อ X เป็น branchwise commutative

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d : X \to X$ ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d ว่า left-right derivation (หรือ (l, r)-derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก x, $y \in X$ เรียก d ว่า right-left derivation (หรือ (r, l)-derivation) ถ้า d เป็นทั้ง (l, r)-derivation และ (r, l)-derivation จะเรียก d ว่า derivation

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก สำหรับ d เป็นฟังก์ชันของ X เราหมายถึง ฟังก์ชัน $d : X \to X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X นิยามโดย $d(x) = a_x$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น (l, r)-derivation ของ X และถ้า X เป็น commutative แล้ว d เป็น (r, l)-derivation ของ X

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ว่า

1. ถ้า d เป็น (l, r)-derivation ของ X แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า d เป็น (r, l)-derivation ของ X แล้ว $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (l, r)-derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d(0) \in L_p(X)$
2. $d(a) = d(0)(0a) = d(0) + a$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
3. $d(a) \in L_p(X)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
4. $d(a + b) = d(a) + d(b) - d(0)$ สำหรับทุก $a, b \in L_p(X)$
5. d เป็นเอกลักษณ์บน $L_p(X)$ ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (r, l)-derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d(a) \in G(X)$ สำหรับทุก $a \in G(X)$
2. $d(a) = ad(0) = a + d(0)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
3. $d(a) \in L_p(X)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
4. $d(a + b) = d(a) + d(b) - d(0)$ สำหรับทุก $a, b \in L_p(X)$
5. d เป็นเอกลักษณ์บน $L_p(X)$ ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X แล้วจะเรียก d ว่า regular ถ้า $d(0) = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (l, r)-derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $d(x)y \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $d(xy) = d(x)y \leq d(x)d(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $d^{-1}(0) = \{x \in X \mid d(x) = 0\}$ เป็น subalgebra ของ X และ $d^{-1}(0) \subseteq X_+$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X จะเรียก ideal A ของ X ว่า d-invariant ถ้า $d(A) \subseteq A$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น regular (r, l)-derivation ของ X แล้ว ทุก ideal A ของ X เป็น d-invariant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ถ้า X เป็น BCI-algebra และ d เป็น derivation ของ X แล้ว d เป็น regular ก็ต่อเมื่อ ทุก ideal ของ X เป็น d-invariant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. ผลงานของ Hamza and Al-Shehri (2006)

Hamza and Al-Shehri (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของ BCK-algebra และค้นคว้าหาสมบัติต่างๆบนอนุพันธ์ของ BCK-algebra

บทนิยาม $(G, \cdot, 0)$ จะเรียกว่า BCK-algebra ถ้าสอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $((xy)(xz))(zy) = 0$
2. $(x(xy))y = 0$
3. $xx = 0$
4. $0x = 0$,
5. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ทฤษฎีบท สำหรับทุก (r, l)-derivation (หรือ (l, r)-derivation) ของ BCK-algebra เป็น regular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท derivation ของ BCK-algebra เป็น regular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น derivation ของ X ถ้า $a \in X$ โดยที่ $d(x)a = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น regular derivation ของ X และยิ่งไปกว่านั้น X เป็น BCK-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น derivation ของ X ถ้า $a \in X$ โดยที่ $ad(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น regular derivation ของ X และยิ่งไปกว่านั้น X เป็น BCK-algebra

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็นฟังก์ชันของ X นิยาม $d_1 \circ d_2 : X \to X$ โดย $d_1 \circ d_2(x) = d_1(d_2(x))$ สำหรับทุก $x \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น (l, r)-derivation ของ X แล้ว $d_1 \circ d_2$ เป็น (l, r)-derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น (r, l)-derivation ของ X แล้ว $d_1 \circ d_2$ เป็น (r, l)-derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d_1 \circ d_2$ เป็น derivation ของ X
2. $d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็นฟังก์ชันของ X นิยาม $d_1 * d_2 : X \to X$ โดย $(d_1 * d_2)(x) = d_1(x)d_2(x)$ สำหรับทุก $x \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น derivation ของ X แล้ว $d_1 * d_2 = d_2 * d_1$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2006)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

4. ผลงานของ Hamza and Al-Shehri (2007)

Hamza and Al-Shehri (2007) ได้ศึกษาแนวคิดของ left-derivation ของ BCI-algrbra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ จะเรียกฟังก์ชัน $D : X \to X$ ว่า left derivation ถ้า $D(xy) = xD(y) \wedge yD(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X แล้ว สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า

1. $xD(x) = yD(y)$
2. $D(x) = a_{D(x) \wedge x}$
3. $D(x) = D(x) \wedge x$
4. $D(x) \in L_p(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X จะได้ว่า

1. $y(yD(x)) = D(x)$
2. $D(x)y \in L_p(X)$

สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X จะได้ว่า

1. $D(0) \in L_p(X)$
2. $D(x) = 0 + D(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
3. $D(x + y) = x + D(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L_p(X)$
4. $D(x) = x$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $D(0) = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

5. $D(x) \in G(X)$ สำหรับทุก $x \in G(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท regular left derivation ของ BCI-algebra เป็น identity map

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2007)

บทนิยาม ให้ A เป็น ideal ของ BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ BCI-algebra จะกล่าวว่า A เป็น D-invariant ถ้า $D(A) \subseteq A$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X แล้ว สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า

1. $D(xy) = xD(y)$
2. $D(x)x = D(y)y$
3. $D(x)x = yD(y)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra แล้ว D เป็น left derivation ของ X ก็ต่อเมื่อ D เป็น derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hamza and Al-Shehri (2007)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

5. ผลงานของ Prabpayak and Leerawat (2009)

Prabpayak and Leerawat (2009) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของ BCC-algebra และค้นคว้าหาสมบัติต่างๆบนอนุพันธ์ของ BCC-algebra

บทนิยาม $(G, \cdot, 0)$ จะเรียกว่า BCC-algebra ถ้าสอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $((xy)(zy))(xz) = 0$,
2. $0x = 0$,
3. $x0 = x$,
4. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ $d : G \to G$ ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ เรียก d ว่า left-right derivation (หรือ (l, r)-derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ เรียก d ว่า right-left derivation (หรือ (r, l)-derivation) ถ้า d เป็นทั้ง (l, r)-derivation และ (r, l)-derivation จะเรียก d ว่า derivation

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ G จะเรียก d ว่า regular ถ้า $d(0) = 0$

ทฤษฎีบท สำหรับทุก (r, l)-derivation ของ BCC-algebra เป็น regular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ทฤษฎีบท derivation ของ BCC-algebra เป็น regular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ G จะได้ว่า

1. ถ้า d เป็น (l, r)-derivation ของ G แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in G$
2. ถ้า d เป็น (r, l)-derivation ของ G แล้ว $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็น derivation ของ G จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in G$

1. $d(x) \leq x$
2. $d(xy) \leq d(x)y$
3. $d(xy) \leq xd(y)$
4. $d(xd(x)) = 0$
5. $d(d(x)) \leq 0$
6. $d^{-1}(0) = \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น BCC-subalgebra ของ G

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ $d_1, d_2, ..., d_n$ เป็น derivation ของ G จะได้ว่า $d_n(d_{n-1}(\ldots(d_2(d_1(x)))\ldots)) \leq x$ สำหรับทุก $n \in N$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็น derivation ของ G จะเรียก ideal A ของ G ว่า d-invarant ถ้า $d(A) \subseteq A$ เมื่อ $d(A) = \{d(x) | x \in A\}$

ทฤษฎีบท ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็น derivation ของ G จะได้ว่า ทุก ideal A ของ G เป็น d-invarant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Prabpayak and Leerawat (2009)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

6. ผลงานของ Zhan and Liu (2005)

Zhan and Liu (2005) ได้ให้แนวคิดของ left-right (right-left) f-derivation ของ BCI algebra และหาสมบัติที่เกี่ยวข้อง และให้เงื่อนไขสำหรับอนุพันธ์ที่จะเป็น regular

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $f : X \to X$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก f ว่า endomorphism ของ X ถ้า $f(x * y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก f ว่า monic ของ X ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra, $d_f : X \to X$ เมื่อ f เป็น endomorphism ของ X ถ้า $d_f(x * y) = \left(d_f(x) * f(y)\right) \wedge \left(f(x) * d_f(y)\right)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d_f ว่า left-right f-derivation (หรือ (l, r)-f-derivation) ถ้า $d_f(x * y) = \left(f(x) * d_f(y)\right) \wedge \left(d_f(x) * f(y)\right)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d ว่า right-left f -derivation (หรือ (r, l)-f-derivation) ถ้า d_f เป็นทั้ง (l, r)-f-derivation และ (r, l)-f -derivation จะเรียก d_f ว่า f-derivation

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน f_x แทน $0 * (0 * f(x))$ สำหรับสมาชิก x ใน X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็นฟังก์ชันของ X นิยามโดย $d_f(x) = f_x$ สำหรับทุก $x \in X$ จะได้ว่า d_f เป็น (l, r)-f-derivation ของ X และ ถ้า X เป็น commutative แล้ว d_f เป็น (r, l)-f-derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ว่า

1. ถ้า d_f เป็น (l, r)-f-derivation ของ X แล้ว $d_f(x) = d_f(x) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า d_f เป็น (r, l)-f-derivation ของ X แล้ว $d_f(x) = f(x) \wedge d_f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $d_f(0) = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น (l, r)- f- derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d_f(0) \in L_p(X)$
2. $d_f(a) = d_f(0) * (0 * f(a)) = d_f(0) + f(a)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
3. $d_f(a) \in L_p(X)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
4. $d_f(a+b) = d_f(a) + d_f(b) - d_f(0)$ สำหรับทุก $a, b \in L_p(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น (r, l)-f-derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d_f(a) \in G(X)$ สำหรับทุก $a \in G(X)$
2. $d_f(a) \in L_p(X)$ สำหรับทุก $a \in G(X)$
3. $d_f(a) = f(a) * d_f(0) = f(a) + d_f(0)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
4. $d_f(a+b) = d_f(a) + d_f(b) - d_f(0)$ สำหรับทุก $a, b \in L_p(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น f-derivation ของ X จะเรียก d_f ว่า regular ถ้า $d_f(0) = 0$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น f-derivation ของ X

นิยาม $\ker d_f = \{x \in X | d_f(x) = 0\}$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น f-derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d_f(x) \le f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $d_f(x) * f(y) \le f(x) * d_f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $d_f(x * y) = d_f(x) * f(y) \le d_f(x) * d_f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $\ker d_f$ เป็น subalgebra ของ X
5. ถ้า f เป็น monic แล้ว $\ker d_f \subseteq X_+$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น commutative BCI-algebra และ d_f เป็น regular f-derivation ของ X เมื่อ f เป็น monic ของ X จะได้ว่า X เป็น p-semisimple ก็ต่อเมื่อ $\ker d_f = \{0\}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ A เป็น ideal ของ X จะเรียก A ว่า f-ideal ถ้า $f(A) \subseteq A$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็นฟังก์ชันของ X จะเรียก f-ideal A ของ X ว่า d-invariant ถ้า $d_f(A) \subseteq A$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น regular (r, l)-f-derivation ของ X จะได้ว่า ทุก f-ideal A ของ X เป็น d_f -invariant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_f เป็น f-derivation ของ X จะได้ว่า d_f เป็น regular ก็ต่อเมื่อ ทุก f-ideal ของ X เป็น d_f -invariant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Zhan and Liu (2005)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

7. ผลงานของ Nisar (2009)

Nisar (2009) ได้ให้แนวคิดของ right F-derivation และ left F-derivation ของ BCI algebra และหาสมบัติที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $x_0 \in X$ ถ้า $x \leq x_0$ แล้ว $x = x_0$ สำหรับทุก $x \in X$ จะเรียก x_0 ว่า initial element ของ X

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และกำหนด I_x คือเซตของ initial element ทั้งหมดของ X และจะเรียก I_x ว่า center ของ X

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra, $x_0 \in X$ และ I_x เป็น center ของ X จะเรียกเซต $A(x_0) = \{x \in X | x_0 \leq x\}$ ว่า branch ของ X ที่ถูกกำหนดโดย x_0

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra, d_F เป็นฟังก์ชันของ X และ F เป็น endomoephism ของ X ถ้า $D_F(x * y) = (F(x) * D_F(y)) \wedge (F(y) * D_F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก D_F ว่า right F-derivation ถ้า $D_F(x * y) = (D_F(x) * F(y)) \wedge (D_F(y) * F(x))$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก D_F ว่า left F -derivation ถ้า D_F เป็นทั้ง right F-derivation และ left F -derivation จะเรียก D_F ว่า F-derivation

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน F_x แทน $0 * (0 * F(x))$ สำหรับสมาชิก x ใน X

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_f ว่า F-derivation ของ X จะเรียก D_F ว่า regular F-derivation ถ้า $D_F(0) = 0$ และจะเรียก D_F ว่า irregular F-derivation ถ้า $D_F(0) \neq 0$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น F-derivation ของ X จะได้ว่า

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

1. $D_F(0) \in I_x$
2. $D_F(x) \in I_x$ สำหรับทุก $x \in I_x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น right F-derivation ของ X จะได้ว่า $D_F(x) \in G(X)$ สำหรับทุก $x \in G(X)$ เมื่อ $G(X) = \{x \in X | x = 0 * x\}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra D_F เป็น F-derivation ของ X สมมติให้ถ้า $D_F(x) = F(y)$ แล้ว $D_F(y) = F(x)$ สำหรับทุก $x, y \in I_x$ ซึ่ง $x \neq y$ จะได้ว่า D_F เป็น irregular F-derivation

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra, $x_0, y_0 \in X$ และ D_F เป็น F-derivation ของ X สมมติให้ $F(x) \in A(x_0)$ สำหรับทุก $x \in A(x_0)$ และ $F(y) \in A(y_0)$ สำหรับทุก $y \in A(y_0)$ จะได้ว่า ถ้า $D_F(x) = y_0$ แล้ว $D_F(y) \in A(x_0)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น regular F-derivation ของ X จะได้ว่า $D_F(x) \in A_1$, $D_F(x) \in A_2$ สำหรับบาง branch A_1, A_2 ของ X และ $D_F(x) = F(x)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra, $A(x_0)$ เป็น branch และ D_F เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ว่า ถ้า $D_F(x) = F(x_0)$ สำหรับทุก $x \in A(x_0)$ แล้ว D_F เป็น regular left F-derivation

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D_F เป็น right F-derivation ของ X จะได้ว่า

1. $D_F(x) \in I_x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $F(y) * \left(F(y) * D_F(x)\right) = D_F(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $D_F(x) * F(y) = 0 * \left(F(y) * D_F(x)\right)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $D_F(x) * F(y) \in I_x$ สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra, D_F เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ว่า ฟังก์ชัน D_F ซึ่งนิยามโดย $D_F(x) = 0 * \left(0 * F(x)\right) = F_x$ สำหรับทุก $x \in X$ เมื่อ F เป็น endomorphism ของ X เป็น left F-derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น commutative BCI-algebra และ D_F เป็น F-derivation ของ X เมื่อ F เป็น endomorphism ของ X จะได้ว่า ถ้า $x \leq y$ แล้ว $D_F(x) \in A$ และ $F(x) \in A$ เมื่อ A เป็น branch ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Nisar (2009)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

8. ผลงานของ Xin *et al.* (2007)

Xin *et al*. (2007) ได้ศึกษาเกี่ยวอนุพันธ์ของ lattice และหาสมบัติที่เกี่ยวข้อง นอกจากนั้นได้แสดงลักษณะเฉพาะของ modular lattice และ distributive lattice โดยใช้เงื่อนไขการเป็น isotone derivation

บทนิยาม ให้ L เป็น lattice และ $d : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก d ว่า derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกเขียน dx แทน $d(x)$

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ d เป็น derivation บน L จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

1. $dx \leq x$
2. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$
3. ถ้า I เป็น ideal ของ L แล้ว $dI \subseteq I$
4. ถ้า L มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และมี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด แล้ว $d0 = 0,\ d1 \leq 1$
5. ถ้า L มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด แล้ว $dx = (x \wedge d1) \vee dx$
6. ถ้า $y \leq x$ และ $dx = x$ แล้ว $dy = y$
7. $dx = dx \vee (x \wedge d(x \vee y))$
8. $d^2x = dx$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

บทนิยาม ให้ L เป็น lattice $x, y \in L$ และ d เป็น derivation บน L

1. จะเรียก d ว่า isotone derivation ถ้า $x \leq y$ แล้ว $dx \leq dy$
2. จะเรียก d ว่า monomorphic derivation ถ้า d เป็นฟังก์ชัน 1-1
3. จะเรียก d ว่า epic derivation ถ้า d เป็นฟังก์ชันจาก L ไปทั่วถึง L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ d เป็น derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)
2. $d(x \vee y) = (x \vee dy) \wedge (dx \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. d เป็น monomorphic derivation
4. d เป็น epic derivation

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice ซึ่งมี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด(greatest element) และ d เป็น derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น isotone derivation
2. $dx = x \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$
3. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น Modular lattice และ d เป็น derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น isotone derivation
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. ถ้า $dx = x$ แล้ว $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น distributive lattice และ d เป็น derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น isotone derivation
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ทฤษฎีบท ให้ B เป็น Boolean algebra และ d เป็น isotone derivation บน L จะได้ว่า dB เป็น Boolean algebra และ sublattice ของ L

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ $x, y \in L$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. L เป็น distributive lattice
2. $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก isotone derivation d ของ L

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ $x, y \in L$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. L เป็น modular lattice
2. ถ้า $dx = x$ แล้ว $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก isotone derivation d ของ L

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin *et al*. (2007)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

9. ผลงานของ Alshehri (2010)

Alshehri (2010) ได้ศึกษาเกี่ยว generalized derivation ของ lattice และหาสมบัติที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม ให้ L เป็น lattice และ $D : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะเรียก D ว่า generalized derivation บน L ถ้ามี derivation $d : L \to L$ ซึ่ง $D(x \wedge y) = (Dx \wedge y) \vee (x \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized derivation บน L จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

1. $dx \leq Dx \leq f(x)$
2. $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq Dx \vee Dy$
3. ถ้า I เป็น ideal ของ L แล้ว $DI \subseteq I$
4. ถ้า L มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด แล้ว $D0 = 0$
5. $Dx = \big(D(x \vee y) \wedge x\big) \vee dx$
6. ถ้า $y \leq x$ และ $Dx = x$ แล้ว $Dy = y$
7. $D^2x = Dx$ เมื่อกำหนด $D^2x = D(Dx)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized derivation บน L จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

1. $Dx = (D1 \wedge x) \vee dx$
2. ถ้า $x \geq D1$ แล้ว $Dx \geq D1$
3. ถ้า $x \leq D1$ แล้ว $Dx = x$
4. $D1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = x$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

บทนิยาม ให้ L เป็น lattice $x, y \in L$ และ D เป็น generalized derivation บน L

1. จะเรียก D ว่า isotone generalized derivation ถ้า $x \leq y$ แล้ว $Dx \leq Dy$
2. จะเรียก D ว่า monomorphic generalized derivation ถ้า D เป็นฟังก์ชัน 1-1
3. จะเรียก D ว่า epic generalized derivation ถ้า D เป็นฟังก์ชันจาก L ไปทั่วถึง L

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ D เป็น isotone generalized derivation บน L จะได้ว่า $\mathrm{Fix}_D(L)$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice D_1 และ D_2 เป็น isotone generalized derivation บน L จะได้ว่า ถ้า $D_1 = D_2$ แล้ว $\mathrm{Fix}_{D_1}(L) = \mathrm{Fix}_{D_2}(L)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $Dx = x$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $D(x \vee y) = (x \vee Dy) \wedge (Dx \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. D เป็น monomorphic generalized derivation
4. D เป็น epic derivation

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด (greatest element) และ D เป็น generalized derivation จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. D เป็น isotone generalized derivation
2. $Dx = x \wedge D1$ สำหรับทุก $x \in L$
3. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น Modular lattice และ D เป็น generalized derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. D เป็น isotone generalized derivation
2. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. ถ้า $Dx = x$ แล้ว $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ทฤษฎีบท ให้ L เป็น distributive lattice และ D เป็น generalized derivation บน L จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. D เป็น isotone generalized derivation
2. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Alshehri (2010)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิธีการ

บทนิยาม 1 ให้ L เป็นเซต และ $L \neq \phi$ และให้ $\vee$ (อ่านว่า join) และ $\wedge$ (อ่านว่า meet) เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บน L เราจะกล่าวว่า $(L, \wedge, \vee)$ เป็น algebraic lattice ถ้าสำหรับทุก $x, y, z \in L$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$
2. $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
4. $x = x \wedge (x \vee y)$, $x = x \vee (x \wedge y)$

ข้อตกลง การเขียน L เป็น lattice จะหมายถึง $(L, \wedge, \vee)$ เป็น algebracic lattice

บทนิยาม 2 ให้ L เป็น lattice และกำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน L โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $x \wedge y = x$ และ $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อตกลง การเขียนความสัมพันธ์ " $\geq$" จะมีความสอดคล้องกับการเขียนความสัมพันธ์ " $\leq$" ดังนี้ การเขียน $a \geq b$ จะหมายถึง $b \leq a$

บทตั้ง 3 ให้ L เป็น lattice จะได้ว่า $x \wedge y = x$ ก็ต่อเมื่อ $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

($\Rightarrow$) สมมติให้ $x \wedge y = x$

จะได้ $x \vee y = (x \wedge y) \vee y$

$= y$ (โดยบทนิยาม 1(4))

ดังนั้น $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in L$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $x \vee y = y$

จะได้ $x \wedge y = x \wedge (x \vee y)$

$= x$ (โดยบทนิยาม 1(4))

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ดังนั้น $x \vee y = y$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 2 ในส่วนการพิสูจน์ว่า $x \leq y$ นั้น เพียงพอที่จะแสดงว่า $x \wedge y = x$ หรือ $x \vee y = y$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง

บทตั้ง 4 ให้ L เป็น lattice และกำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน L ดังบทนิยาม 2 จะได้ว่า $x \wedge y = \inf\{x, y\}$ และ $x \vee y = \sup\{x, y\}$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Xin et al. (2008)

ทฤษฎีบท 5 ให้ L เป็น lattice และกำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน L ดังบทนิยาม 2 จะได้ว่า $(L, \leq)$ เป็น partially ordered set

พิสูจน์ (1) โดยบทนิยาม 1 เราทราบว่า $x \wedge x = x$ สำหรับทุก $x \in L$

ดังนั้น $x \leq x$

นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $x \leq y$ และ $y \leq x$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะได้ว่า $x \wedge y = x$ และ $y \wedge x = y$ ตามลำดับ

โดยบทนิยาม 1 เราทราบว่า $x \wedge y = y \wedge x$

ดังนั้น $x = y$

นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร

(3) ให้ $x \leq y$ และ $y \leq z$ สำหรับทุก $x, y, z \in L$

จาก $x \leq y$

จะได้ว่า $x \wedge y = x$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = x \wedge z \quad \text{(โดยบทนิยาม 1(3))}$$

$$x \wedge y = x \wedge z \quad \text{(เพราะว่า } y \leq z\text{)}$$

$$x = x \wedge z \quad \text{(เพราะว่า } x \leq y\text{)}$$

ดังนั้น $x \leq z$

นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติถ่ายทอด

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จาก (1) - (3) สรุปได้ว่า $(L, \leq)$ เป็น partially ordered set

ข้อสังเกต $(L, \leq)$ เป็น lattice ordered set

บทตั้ง 6 ให้ L เป็น lattice และ $x, y, z \in L$ จะได้ว่า ถ้า $y \leq z$ แล้ว $x \wedge y \leq x \wedge z$ และ $x \vee y \leq x \vee z$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

บทนิยาม 7 ให้ L เป็น lattice และ $S \subseteq L$ ซึ่ง $S \neq \phi$ เราจะกล่าวว่า S เป็น sublattice ของ L ถ้า $s_1 \wedge s_2 \in S$ และ $s_1 \vee s_2 \in S$ สำหรับทุก $s_1, s_2 \in S$

บทนิยาม 8 ให้ L เป็น lattice และ $x, y, z \in L$ เราจะกล่าวว่า L เป็น modular lattice ถ้า $x \leq y$ แล้ว $x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z)$

บทนิยาม 9 ให้ L เป็น lattice เราจะกล่าวว่า L เป็น distributive lattice ถ้าสำหรับ $x, y, z \in L$ สอดคล้องกับ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ทฤษฎีบท 10 ให้ L เป็น distributive lattice จะได้ว่า $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ ก็ต่อเมื่อ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ สำหรับทุก $x, y, z \in L$

พิสูจน์ โดยหลัก Duality

บทแทรก 11 ทุกๆ distributive lattice เป็น modular lattice

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Lidl and Pilz (1984)

บทนิยาม 12 ให้ L เป็น lattice และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ L เราจะกล่าวว่า I เป็น ideal ของ L ถ้า I มีสมบัติสอดคล้องดังต่อไปนี้

1. ถ้า $x \leq y$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in L$
2. $x \vee y \in I$ สำหรับทุก $x, y \in I$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

บทนิยาม 13 ให้ L, M เป็น lattice และ $f : L \to M$ เป็นฟังก์ชัน

1. เราจะกล่าวว่า f เป็น meet-homomorphism ถ้า $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

2. เราจะกล่าวว่า f เป็น join-homomorphism ถ้า $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

3. เราจะกล่าวว่า f เป็น lattice-homomorphism ถ้า f เป็นทั้ง meet-homomorphism และ join-homomorphism

4. เราจะกล่าวว่า f เป็น order-preserving ถ้า $x \le y$ แล้ว $f(x) \le f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

บทตั้ง 14 ให้ L, M เป็น lattice และ $f : L \to M$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า f เป็น meet–homomorphism แล้ว f จะเป็น order-preserving
2. ถ้า f เป็น join –homomorphism แล้ว f จะเป็น order-preserving
3. ถ้า f เป็น lattice–homomorphism แล้ว f จะเป็น order-preserving

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in L$ และสมมติให้ $x \le y$

(1) สมมติให้ f เป็น meet–homomorphism

จาก $x \le y$

จะได้ $x = x \wedge y$

$f(x) = f(x \wedge y)$ (เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน)

$= f(x) \wedge f(y)$ (เพราะว่า f เป็น meet–homomorphism)

ดังนั้น $f(x) = f(x) \wedge f(y)$

นั่นคือ $f(x) \le f(y)$

ฉะนั้นสรุปได้ว่า f จะเป็น order-preserving

(2) สมมติให้ f เป็น join–homomorphism

จาก $x \le y$

จะได้ $y = x \vee y$

$f(y) = f(x \vee y)$ (เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน)

$= f(x) \vee f(y)$ (เพราะว่า f เป็น join–homomorphism)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ดังนั้น $f(y) = f(x) \vee f(y)$

นั่นคือ $f(x) \leq f(y)$

ฉะนั้นสรุปได้ว่า f จะเป็น order-preserving

(3) สมมติให้ f เป็น lattice–homomorphism

จะได้ว่า f เป็น meet-homomorphism และ join-homomorphism

จาก (1) หรือ (2) สรุปได้ว่า f จะเป็น order-preserving

บทนิยาม 15 ให้ L เป็น lattice เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d : L \to L$ เป็น derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = (d(x) \wedge y) \vee (x \wedge d(y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแบ่งออกเป็น 5 ตอน ดังนี้

ตอนที่ 1 f-derivation ใน lattice

ตอนที่ 2 generalized f-derivation ใน lattice

ตอนที่ 3 lattice f-derivation ใน lattice

ตอนที่ 4 generalized lattice f-derivation ใน lattice

ตอนที่ 5 อนุพันธ์อันดับสูง

ตอนที่ 1 f-derivation ใน lattice

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม f-derivation ใน lattice และแสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

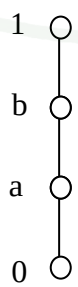
บทนิยาม 1.1 ให้ L เป็น lattice และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d : L \to L$ เป็น f-derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = \big(d(x) \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge d(y)\big)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน dx แทน $d(x)$

ข้อสังเกต 1. ถ้า $f = d$ จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

2. ถ้า f เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function) จะได้ว่า d เป็น derivation บน L

ตัวอย่าง 1.2 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แลตทิซแบบที่ 1

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0 \\ x & \text{สำหรับ } x = a, b, 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ } x = 0, a \\ b & \text{สำหรับ } x = 1, b \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0 \wedge 0) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$$
$$d(0 \wedge a) = d0 = 0,\ d(0 \wedge a) = (d0 \wedge a) \vee (0 \wedge da) = (0 \wedge a) \vee (0 \wedge a) = 0$$
$$d(0 \wedge b) = d0 = 0,\ d(0 \wedge b) = (d0 \wedge b) \vee (0 \wedge db) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge b) = 0$$
$$d(0 \wedge 1) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 1) = (d0 \wedge 1) \vee (0 \wedge d1) = (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = 0$$
$$d(a \wedge a) = da = a,\ d(a \wedge a) = (da \wedge a) \vee (a \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$d(a \wedge b) = da = a,\ d(a \wedge b) = (da \wedge b) \vee (a \wedge db) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$$
$$d(a \wedge 1) = da = a,\ d(a \wedge 1) = (da \wedge 1) \vee (a \wedge d1) = (a \wedge 1) \vee (a \wedge 0) = a$$
$$d(b \wedge b) = db = b,\ d(b \wedge b) = (db \wedge b) \vee (b \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$$
$$d(b \wedge 1) = db = b,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge 1) \vee (b \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (b \wedge 0) = b$$
$$d(1 \wedge 1) = d1 = 0,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge 1) \vee (1 \wedge d1) = (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0$$

ดังนั้น d เป็น derivation บน L

นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$d(0 \wedge 0) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$$
$$d(0 \wedge a) = d0 = 0,\ d(0 \wedge a) = (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (0 \wedge a) \vee (0 \wedge a) = 0$$
$$d(0 \wedge b) = d0 = 0,\ d(0 \wedge b) = (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge b) = 0$$
$$d(0 \wedge 1) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 1) = (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge 0) = 0$$
$$d(a \wedge a) = da = a,\ d(a \wedge a) = (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$d(a \wedge b) = da = a,\ d(a \wedge b) = (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$$
$$d(a \wedge 1) = da = a,\ d(a \wedge 1) = (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (a \wedge 0) = a$$
$$d(b \wedge b) = db = b,\ d(b \wedge b) = (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$$
$$d(b \wedge 1) = db = b,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge b) \vee (b \wedge 0) = b$$
$$d(1 \wedge 1) = d1 = 0,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (0 \wedge b) \vee (b \wedge 0) = 0$$

ดังนั้น d เป็น f-derivation บน L

นั่นคือ d เป็นทั้ง derivation และ f-derivation

ตัวอย่าง 1.3 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 โดยนิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0, 1 \\ a & \text{สำหรับ } x = a, b \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} b & \text{สำหรับ } x = 0, 1 \\ 0 & \text{สำหรับ } x = a, b \end{cases}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0\wedge 0)=d0=0,\ d(0\wedge 0)=(d0\wedge 0)\vee(0\wedge d0)=(0\wedge 0)\vee(0\wedge 0)=0$$
$$d(0\wedge a)=d0=0,\ d(0\wedge a)=(d0\wedge a)\vee(0\wedge da)=(0\wedge a)\vee(0\wedge a)=0$$
$$d(0\wedge b)=d0=0,\ d(0\wedge b)=(d0\wedge b)\vee(0\wedge db)=(0\wedge b)\vee(0\wedge a)=0$$
$$d(0\wedge 1)=d0=0,\ d(0\wedge 1)=(d0\wedge 1)\vee(0\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(0\wedge 0)=0$$
$$d(a\wedge a)=da=a,\ d(a\wedge a)=(da\wedge a)\vee(a\wedge da)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$d(a\wedge b)=da=a,\ d(a\wedge b)=(da\wedge b)\vee(a\wedge db)=(a\wedge b)\vee(a\wedge a)=a$$
$$d(a\wedge 1)=da=a,\ d(a\wedge 1)=(da\wedge 1)\vee(a\wedge d1)=(a\wedge 1)\vee(a\wedge 0)=a$$
$$d(b\wedge b)=db=a,\ d(b\wedge b)=(db\wedge b)\vee(b\wedge db)=(a\wedge b)\vee(b\wedge a)=a$$
$$d(b\wedge 1)=db=a,\ d(b\wedge 1)=(db\wedge 1)\vee(b\wedge d1)=(a\wedge 1)\vee(b\wedge 0)=a$$
$$d(1\wedge 1)=d1=0,\ d(1\wedge 1)=(d1\wedge 1)\vee(1\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)=0$$

ดังนั้น d เป็น derivation บน L

นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$d(0\wedge b)=d0=0$$
$$d(0\wedge b)=(d0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db)=(0\wedge 0)\vee(b\wedge a)=a$$

และพบว่า $d(0\wedge b)\neq(d0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db)$

ดังนั้น d ไม่เป็น f-derivation บน L

นั่นคือ d เป็น derivation แต่ไม่เป็น f-derivation

ตัวอย่าง 1.4 ให้ $L=\{0,\ a,\ b,\ 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 โดยนิยามฟังก์ชัน $d:L\to L$ และฟังก์ชัน $f:L\to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x=1\\ b & \text{สำหรับ } x=b\\ a & \text{สำหรับ } x=0,\ a\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}b & \text{สำหรับ } x=b,1\\ a & \text{สำหรับ } x=0,\ a\end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0\wedge 0)=d0=a,\ d(0\wedge 0)=(d0\wedge f(0))\vee(f(0)\wedge d0)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$d(0\wedge a)=d0=a,\ d(0\wedge a)=(d0\wedge f(a))\vee(f(0)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$d(0\wedge b)=d0=a,\ d(0\wedge b)=(d0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(a\wedge b)=a$$
$$d(0\wedge 1)=d0=a,\ d(0\wedge 1)=(d0\wedge f(1))\vee(f(0)\wedge d1)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=a$$
$$d(a\wedge a)=da=a,\ d(a\wedge a)=(da\wedge f(a))\vee(f(a)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$d(a\wedge b)=da=a,\ d(a\wedge b)=(da\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(a\wedge b)=a$$
$$d(a\wedge 1)=da=a,\ d(a\wedge 1)=(da\wedge f(1))\vee(f(a)\wedge d1)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=a$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$d(b \wedge b) = db = b,\ d(b \wedge b) = (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$

$d(b \wedge 1) = db = b,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge b) \vee (b \wedge 0) = b$

$d(1 \wedge 1) = d1 = 0,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (0 \wedge b) \vee (b \wedge 0) = 0$

ดังนั้น d เป็น f-derivation บน L

นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$d(0 \wedge 0) = d0 = a$

$d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0) = (a \wedge 0) \vee (0 \wedge a) = 0$

และพบว่า $d(0 \wedge 0) \neq (d0 \wedge 0) \vee (0 \wedge d0)$

ดังนั้น d ไม่เป็น derivation บน L

นั่นคือ d เป็น f-derivation แต่ไม่เป็น derivation

ตัวอย่าง 1.5 กำหนดให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดและ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ โดย $dx = 0$ สำหรับทุก $x \in L$ จะได้ว่า d เป็น f-derivation ซึ่งจะเรียก d นี้ว่า zero f-derivation

ทฤษฎีบท 1.6 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $dx \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ (1) ให้ $x \in L$

จะได้ว่า $dx = d(x \wedge x)$

$= (dx \wedge f(x)) \vee (f(x) \wedge dx)$

$= dx \wedge f(x)$

ดังนั้น $dx \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

(2) ให้ $x, y \in L$

จาก (1) จะได้ว่า $dx \leq f(x)$

ดังนั้น $dx \wedge dy \leq f(x) \wedge dy$

$\leq (f(x) \wedge dy) \vee (dx \wedge f(y))$

$= d(x \wedge y)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

และเนื่องจากเราทราบว่า $dx \wedge f(y) \leq dx$ และ $f(x) \wedge dy \leq dy$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$

$\leq dx \vee dy$

สรุปได้ว่า $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y) \leq dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 1.7 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า $f(0) = 0$ แล้ว $d0 = 0$
2. ถ้า $d0 = 0$ แล้ว $dx \wedge f(0) = 0$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ (1) ให้ $f(0) = 0$

จากทฤษฎีบท 1.6(1) จะได้ $d0 \leq f(0) = 0$

เนื่องจาก 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด

ดังนั้น $0 \leq d0$

ฉะนั้น $d0 = 0$

(2) ให้ $d0 = 0$ และ $x \in L$

จะได้ว่า $dx \wedge f(0) = (dx \wedge f(0)) \vee 0$

$= (dx \wedge f(0)) \vee (f(x) \wedge 0)$

$= (dx \wedge f(0)) \vee (f(x) \wedge d0)$

$= d(x \wedge 0)$

$= d0$

$= 0$

ดังนั้น $dx \wedge f(0) = 0$ สำหรับทุก $x \in L$

โดยทฤษฎีบท 1.7(2) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 1.8 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $d(0) = 0$ จะได้ว่า

1. $dx \leq f(0)$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น zero f-derivation
2. $f(0) \leq dx$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ $f(0) = 0$
3. ถ้า $f(0) \neq 0$ และมี $x \in L$ ซึ่ง $dx \neq 0$ แล้ว $(L, \leq)$ ไม่เป็น chian

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท 1.9 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า $d1 = 1$ แล้ว $f(1) = 1$
2. ถ้า $f(1) = 1$ แล้ว $dx = dx \vee (f(x) \wedge d1)$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ (1) ให้ $d1 = 1$

จากทฤษฎีบท 1.6(1) จะได้ $1 = d1 \leq f(1)$

เนื่องจาก 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด ดังนั้น $f(1) \leq 1$

ฉะนั้น $f(1) = 1$

(2) ให้ $f(1) = 1$ และ $x \in L$

จะได้ว่า $dx = d(x \wedge 1)$

$= (dx \wedge f(1)) \vee (f(x) \wedge d1)$

$= (dx \wedge 1) \vee (f(x) \wedge d1)$

$= dx \vee (f(x) \wedge d1)$

ดังนั้น $dx = dx \vee (f(x) \wedge d1)$ สำหรับทุก $x \in L$

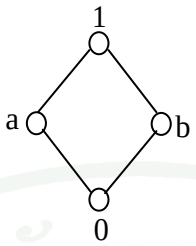
โดยทฤษฎีบท 1.9(2) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 1.10 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

1. $d1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $d1 \leq dx$
2. ถ้า $d1 \leq f(x)$ และ d เป็น order-preserving แล้ว $dx = d1$
3. ถ้า $f(x) \leq d1$ แล้ว $dx = f(x)$
4. $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตัวอย่าง 1.11 ให้ $L=\{0,\ a,\ b,\ 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แลตทิซแบบที่ 2

นิยามฟังก์ชัน $d: L \to L$ และฟังก์ชัน $f: L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0, b \\ a & \text{สำหรับ } x = a, 1 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ } x = 1, a \\ b & \text{สำหรับ } x = 0, b \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0\wedge 0) = d0 = 0,\ d(0\wedge 0) = (d0\wedge f(0))\vee(f(0)\wedge d0) = (0\wedge b)\vee(b\wedge 0) = 0$$
$$d(0\wedge a) = d0 = 0,\ d(0\wedge a) = (d0\wedge f(a))\vee(f(0)\wedge da) = (0\wedge a)\vee(b\wedge a) = 0$$
$$d(0\wedge b) = d0 = 0,\ d(0\wedge b) = (d0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db) = (0\wedge b)\vee(b\wedge 0) = 0$$
$$d(0\wedge 1) = d0 = 0,\ d(0\wedge 1) = (d0\wedge f(1))\vee(f(0)\wedge d1) = (0\wedge 1)\vee(b\wedge a) = 0$$
$$d(a\wedge a) = da = a,\ d(a\wedge a) = (da\wedge f(a))\vee(f(a)\wedge da) = (a\wedge a)\vee(a\wedge a) = a$$
$$d(a\wedge b) = d0 = 0,\ d(a\wedge b) = (da\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge db) = (a\wedge b)\vee(a\wedge 0) = 0$$
$$d(a\wedge 1) = da = a,\ d(a\wedge 1) = (da\wedge f(1))\vee(f(a)\wedge d1) = (a\wedge 1)\vee(a\wedge a) = a$$
$$d(b\wedge b) = db = 0,\ d(b\wedge b) = (db\wedge f(b))\vee(f(b)\wedge db) = (0\wedge b)\vee(b\wedge 0) = 0$$
$$d(b\wedge 1) = db = 0,\ d(b\wedge 1) = (db\wedge f(1))\vee(f(b)\wedge d1) = (0\wedge 1)\vee(b\wedge a) = 0$$
$$d(1\wedge 1) = d1 = a,\ d(1\wedge 1) = (d1\wedge f(1))\vee(f(1)\wedge d1) = (a\wedge 1)\vee(1\wedge a) = a$$

นั่นคือ d เป็น f-derivation บน L

ข้อสังเกต ตัวอย่างที่ 1.11 แสดงให้เห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบท 1.7(1) และ 1.9(1) ไม่จริง

ทฤษฎีบท 1.12 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f: L \to L$ เป็น order-preserving สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $y \le x$ ถ้า $dx = f(x)$ แล้ว $dy = f(y)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $y \le x$ และ $dx = f(x)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เนื่องจาก f เป็น order-preserving และ $y \le x$

ดังนั้น $f(y) \le f(x)$

จาก $y \le x$

จะได้ว่า $y = x \wedge y$

$$\begin{aligned} dy &= d(x \wedge y) \\ &= (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) && \text{(โดยบทนิยาม 1.1)} \\ &= f(y) \vee dy && \text{(เพราะว่า } dy \le f(y) \le f(x) = dx) \\ &= f(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $dy = f(y)$

จากทฤษฎีบท 1.12 แสดงให้เห็นว่าในการกำหนดฟังก์ชัน d และ f ที่จะสอดคล้องกับการที่จะได้ d เป็น f-derivation บน lattice ใดๆนั้น มีเงื่อนไขที่สำคัญอย่างหนึ่งว่า สำหรับแต่ละสมาชิก x, y ใน lattice ซึ่ง $y \le x$ ถ้าเรากำหนดให้ $dx = f(x)$ แล้วเราจะต้องกำหนดให้ $dy = f(y)$ และในตรงกันข้ามถ้าเรามีสมาชิก a, b เพียงคู่เดียวซึ่ง $a \le b$ โดยที่เรากำหนดให้ $db = f(b)$ แต่ $da \ne f(a)$ แล้วจะได้ว่า d ไม่เป็น f-derivation ดังตัวอย่างที่แสดงต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.13 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ พิจารณา lattice L ดังภาพที่ 1 และนิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ ดังนี้ $dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0, a \\ b & \text{สำหรับ } x = b, 1 \end{cases}$

และนิยามฟังก์ชัน $f : L \to L$ โดย $f(x) = x$ สำหรับทุก $x \in L$

โดยนิยามดังกล่าวเราเห็นได้ชัดเจนว่า f เป็น order-preserving ดังนี้

จากนิยามข้างต้นเราสังเกตได้ว่า $a \le b$ และ $db = b = f(b)$ แต่ $da = 0 \ne a = f(a)$

และตรวจสอบได้ว่า $d(a \wedge b) = da = 0$ แต่

$$d(a \wedge b) = (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (0 \wedge b) \vee (a \wedge b) = 0 \vee a = a$$

ดังนั้น $d(a \wedge b) \ne (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db)$

นั่นคือ d ไม่เป็น f-derivation บน L

ทฤษฎีบท 1.14 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preseving จะได้ว่า $dx = dx \vee (f(x) \wedge d(x \vee y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เนื่องจาก f เป็น order-preserving และ $x \le x \vee y$

ดังนั้น $f(x) \le f(x \vee y)$

เราทราบว่า $x = (x \vee y) \wedge x$

จะได้ $dx = d\big((x \vee y) \wedge x\big)$

$= \big(d(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee \big(f(x \vee y) \wedge dx\big)$ (โดยบทนิยาม 1.1)

$= \big(d(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$ (เพราะว่า $dx \le f(x) \le f(x \vee y)$)

ดังนั้น $dx = dx \vee \big(f(x) \wedge d(x \vee y)\big)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 1.15 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ
$d(x \vee y) = \big(dx \vee f(y)\big) \wedge \big(f(x) \vee dy\big)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$ และให้ $x, y \in L$

จะได้ $d(x \vee y) = f(x \vee y)$

$= f(x \vee y) \wedge f(x \vee y)$

$= \big(f(x) \vee f(y)\big) \wedge \big(f(x) \vee f(y)\big)$

$= \big(dx \vee f(y)\big) \wedge \big(f(x) \vee dy\big)$

ดังนั้น $d(x \vee y) = \big(dx \vee f(y)\big) \wedge \big(f(x) \vee dy\big)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $d(x \vee y) = \big(dx \vee f(y)\big) \wedge \big(f(x) \vee dy\big)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
และให้ $x \in L$

จะได้ $dx = d(x \vee x)$

$= \big(dx \vee f(x)\big) \wedge \big(f(x) \vee dx\big)$

$= dx \vee f(x)$

$= f(x)$

ดังนั้น $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

ทฤษฎีบท 1.16 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น order-preserving
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

3. $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ (1)$\Rightarrow$(2) สมมติให้ d เป็น order-preserving และ $x, y \in L$

โดยทฤษฎีบท 1.6(2) เราทราบว่า $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$

ในอีกทางหนึ่งเราทราบว่า $x \wedge y \leq x$ และ $x \wedge y \leq y$

ดังนั้น $d(x \wedge y) \leq dx$ และ $d(x \wedge y) \leq dy$ เพราะว่า d เป็น order-preserving

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ $d(x \wedge y) \wedge d(x \wedge y) \leq dx \wedge d(x \wedge y)$ และ

$dx \wedge d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

ดังนั้น $d(x \wedge y) \wedge d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

นั่นคือ $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

สรุปได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

(2)$\Rightarrow$(1) สมมติให้ $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า d เป็น order-preserving

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $x = x \wedge y$

$dx = d(x \wedge y)$

$= dx \wedge dy$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $dx = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

นั่นคือ $dx \leq dy$

แสดงว่า d เป็น order-preserving

(1) $\Rightarrow$(3) สมมติให้ d เป็น order-preserving

เราทราบว่า $x \leq x \vee y$ และ $y \leq x \vee y$

จะได้ $dx \leq d(x \vee y)$ และ $dy \leq d(x \vee y)$ เพราะว่า d เป็น order-preserving

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ $dx \vee dy \leq d(x \vee y) \vee dy$ และ

$d(x \vee y) \vee dy \leq d(x \vee y) \vee d(x \vee y)$

ดังนั้น $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

(3) $\Rightarrow$(1) สมมติให้ $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า d เป็น order-preserving

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $y = x \vee y$

$dy = d(x \vee y)$

$\geq dx \vee dy$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $dy \geq dx \vee dy$

แต่เราทราบว่า $dy \leq dx \vee dy$

ดังนั้น $dy = dx \vee dy$

นั่นคือ $dx \leq dy$

แสดงว่า d เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 1.17 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น meet-homomorphism ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น order-preserving
2. $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$
3. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.16 จะได้ว่าข้อความ (1) และ (4) สมมูลกัน

เหลือเพียงต้องแสดงว่าข้อความ (1) (2) และ (3) สมมูลกัน

(1) $\Rightarrow$ (2) สมมติให้ d เป็น order-preserving

เนื่องจาก L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

จะได้ว่า $x \leq 1$ สำหรับทุก $x \in L$

ดังนั้น $dx \leq d1$ เพราะว่า d เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 1.6(1) ทราบว่า $dx \leq f(x)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ $dx \wedge dx \leq f(x) \wedge dx$ และ $f(x) \wedge dx \leq f(x) \wedge d1$

ดังนั้น $dx \wedge dx \leq f(x) \wedge d1$

นั่นคือ $dx \leq f(x) \wedge d1$

โดยทฤษฎีบท 1.9(2) เราทราบว่า $dx = dx \vee (f(x) \wedge d1)$

ดังนั้น $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$

(2) $\Rightarrow$ (3) สมมติให้ $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ให้ $x, y \in L$

จะได้ $dx \wedge dy = \big(f(x) \wedge d1\big) \wedge \big(f(y) \wedge d1\big)$

$= f(x) \wedge f(y) \wedge d1$

$= f(x \wedge y) \wedge d1$ (เพราะว่า f เป็น meet-homomorphism)

$= d(x \wedge y)$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

(3) $\Rightarrow$ (1) สมมติให้ $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ต่อไปจะแสดงว่า d เป็น order-preserving

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $x = x \wedge y$

$dx = d(x \wedge y)$

$= dx \wedge dy$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $dx = dx \wedge dy$

นั่นคือ $dx \leq dy$

แสดงว่า d เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 1.18 ให้ L เป็น distributive lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. d เป็น order-preserving
2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.16 จะได้ว่าข้อความ (1) และ (2) สมมูลกัน

เหลือเพียงต้องแสดงว่า (1) และ (3) สมมูลกัน

(1) $\Rightarrow$ (3) สมมติให้ d เป็น order-preserving และให้ $x, y \in L$

เนื่องจาก $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$ และ d เป็น order-preserving

ดังนั้น $dx \leq d(x \vee y)$ และ $dy \leq d(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 1.14 เราทราบว่า $dx = dx \vee \big(f(x) \wedge d(x \vee y)\big)$

จะได้ $dx = dx \vee \big(f(x) \wedge d(x \vee y)\big)$

$= \big(dx \vee f(x)\big) \wedge \big(dx \vee d(x \vee y)\big)$ (เพราะว่า L เป็น distributive lattice)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= f(x) \wedge d(x \vee y)$ (เพราะว่า $dx \leq f(x), dx \leq d(x \vee y)$)

โดยทำนองเดียวเราสามารถแสดงได้ว่า $dy = f(y) \wedge d(x \vee y)$

จะได้ว่า $dx \vee dy = \big(f(x) \wedge d(x \vee y)\big) \vee \big(f(y) \wedge d(x \vee y)\big)$

$= \big(f(x) \vee f(y)\big) \wedge d(x \vee y)$ (เพราะว่า L เป็น distributive lattice)

$= f(x \vee y) \wedge d(x \vee y)$ (เพราะว่า f เป็น join-homomorphism)

$= d(x \vee y)$ (โดยทฤษฎีบท 1.6(1))

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

(3) $\Rightarrow$(1) สมมติให้ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า d เป็น order-preserving

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $y = x \vee y$

$dy = d(x \vee y)$

$= dx \vee dy$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $dy = dx \vee dy$

นั่นคือ $dx \leq dy$

แสดงว่า d เป็น order-preserving

ให้ L เป็น lattice และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $Fix_d(L) = \{x \in L | dx = f(x)\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $Fix_d(L)$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 1.19 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น order-preserving และ f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $Fix_d(L)$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in Fix_d(L)$

ในขั้นแรกเราจะแสดงว่า $x \wedge y \in Fix_d(L)$

โดยทฤษฎีบท 1.6(1) และทฤษฎีบท 1.6(2) เราทราบว่า $d(x \wedge y) \leq f(x \wedge y)$ และ $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$

เนื่องจาก $x, y \in Fix_d(L)$

ดังนั้น $dx = f(x)$ และ $dy = f(y)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เนื่องจาก f เป็น lattice-homomorphism

ดังนั้น f เป็น meet-homomorphism

จะได้ว่า $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

$= dx \wedge dy$

$\leq d(x \wedge y)$

ดังนั้น $f(x \wedge y) \leq d(x \wedge y)$

เนื่องจาก $d(x \wedge y) \leq f(x \wedge y)$ และ $f(x \wedge y) \leq d(x \wedge y)$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = f(x \wedge y)$

นั่นคือ $x \wedge y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \vee y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

โดยทฤษฎีบท 1.6(1) เราทราบว่า $d(x \vee y) \leq f(x \vee y)$

ในอีกทางหนึ่งเราทราบว่า $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$ และ d เป็น order-preserving

จะได้ $dx \leq d(x \vee y)$ และ $dy \leq d(x \vee y)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $dx \vee dy \leq d(x \vee y) \vee dy$ และ

$d(x \vee y) \vee dy \leq d(x \vee y) \vee d(x \vee y) = d(x \vee y)$

ดังนั้น $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$

เนื่องจาก $x, y \in \mathrm{Fix}_{df}(L)$

ดังนั้น $dx = f(x)$ และ $dy = f(y)$

เนื่องจาก f เป็น lattice-homomorphism

ดังนั้น f เป็น join-homomorphism

จะได้ว่า $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

$= dx \vee dy$

$\leq d(x \vee y)$

ดังนั้น $f(x \vee y) \leq d(x \vee y)$

เนื่องจาก $d(x \vee y) \leq f(x \vee y)$ และ $f(x \vee y) \leq d(x \vee y)$

ดังนั้น $d(x \vee y) = f(x \vee y)$

นั่นคือ $x \vee y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

จาก $x \wedge y \in \mathrm{Fix}_d(L)$ และ $x \vee y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

สรุปได้ว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น sublattice ของ L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท 1.20 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น order-preserving และ f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \le y$ และ $y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

จะได้ว่า $dy = f(y)$

โดยทฤษฎีบท 1.12 เราจะได้ว่า $dx = f(x)$

แสดงว่า $x \in \mathrm{Fix}_d(L)$

ดังนั้น $\mathrm{Fix}_d(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

ต่อไปสมมติให้ $x, y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

โดยทฤษฎีบท 1.19 เราทราบว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

ดังนั้น $\mathrm{Fix}_d(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น ideal ของ L

ทฤษฎีบท 1.21 ให้ L เป็น modular lattice และ d เป็น order-preserving และ f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism ถ้ามีสมาชิก $a \in \mathrm{Fix}_d(L)$ แล้ว $d(x \vee a) = dx \vee da$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ สมมติให้มีสมาชิก $a \in \mathrm{Fix}_d(L)$

ดังนั้น $da = f(a)$

กำหนดให้ $x \in L$

เราทราบว่า $x \le x \vee a$ และ $a \le x \vee a$

จะได้ว่า $dx \le d(x \vee a)$ และ $da \le d(x \vee a)$ เพราะว่า d เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 1.14 เราทราบว่า $dx = dx \vee \big(f(x) \wedge d(x \vee a)\big)$

เนื่องจาก L เป็น modular lattice และ $dx \le d(x \vee a)$, $da \le d(x \vee a)$, $dx \le f(x)$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} dx &= dx \vee \big(f(x) \wedge d(x \vee a)\big) \\ &= d(x \vee a) \wedge \big(f(x) \vee dx\big) \\ &= d(x \vee a) \vee f(x) \end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} dx \vee da &= \big(d(x \vee a) \wedge f(x)\big) \vee da \\ &= d(x \vee a) \wedge \big(da \vee f(x)\big) \\ &= d(x \vee a) \wedge \big(f(a) \vee f(x)\big) \quad (\text{เพราะว่า } a \in \mathrm{Fix}_d(L)) \end{aligned}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= d(x \vee a) \wedge f(x \vee a)$ (เพราะว่า f เป็น join-homomorphism)

$= d(x \vee a)$ (โดยทฤษฎีบท 1.6 (1))

ดังนั้น $d(x \vee a) = dx \vee da$ สำหรับทุก $x \in L$

ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $\ker d = \{x \in L | dx = 0\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $\ker d$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 1.22 ให้ L เป็น distributive lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น order-preserving และ f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า $\ker d$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \ker d$

ดังนั้น $dx = 0 = dy$

โดยทฤษฎีบท 1.18 เราทราบว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ และ $d(x \vee y) = dx \vee dy$

จะได้ $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

$= 0 \wedge 0$

$= 0$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = 0$

แสดงว่า $x \wedge y \in \ker d$

และยังได้อีกว่า $d(x \vee y) = dx \vee dy$

$= 0 \vee 0$

$= 0$

ดังนั้น $d(x \vee y) = 0$

นั่นคือ $x \vee y \in \ker d$

จาก $x \wedge y \in \ker d$ และ $x \vee y \in \ker d$

สรุปได้ว่า $\ker d$ เป็น sublattice ของ L

ทฤษฎีบท 1.23 ให้ L เป็น distributive lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น order-preserving และ f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า $\ker d$ เป็น ideal ของ L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in \ker d$

จะได้ว่า $dy = 0$

จาก $x \leq y$

จะได้ว่า $x = x \wedge y$

$dx = d(x \wedge y)$

$= dx \wedge dy$ (โดยทฤษฎีบท 1.18 และ d เป็น order-preserving)

$= dx \wedge 0$ (เพราะว่า $dy = 0$)

$= 0$

ดังนั้น $dx = 0$

แสดงว่า $x \in \ker d$

ดังนั้น $\ker d$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

โดยทฤษฎีบท 2.22 เราทราบว่า $\ker d$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in \ker d$ สำหรับทุก $x, y \in \ker d$

ดังนั้น $\ker d$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $\ker d$ เป็น ideal ของ L

บทนิยาม 1.24 ให้ L เป็น lattice และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน เราจะเรียกสับเซตไม่ว่าง I ของ L ว่า f-invariant ถ้า $f(I) \subseteq I$ เมื่อ $f(I) = \{y \in L \mid y = f(x)$ สำหรับบาง $x \in I\}$

ทฤษฎีบท 1.25 ให้ L เป็น lattice I เป็น ideal ของ L และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า ถ้า I เป็น f-invariant แล้ว I เป็น d-invariant

พิสูจน์ สมมติให้ I เป็น ideal ของ L โดยที่ I เป็น f-invariant และให้ $y \in dI$

ดังนั้น จะมี $x \in I$ ซึ่ง $y = dx$

เนื่องจาก $x \in I$, $I \subseteq L$ และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x) \in f(I)$

เนื่องจาก I เป็น f-invariant ดังนั้น $f(I) \subseteq I$

และจะได้ว่า $f(x) \in I$

โดยทฤษฎีบท 1.6(1) เราทราบว่า $dx \leq f(x)$

ดังนั้น $y \leq f(x)$ เพราะว่า $y = dx$

เนื่องจาก $f(x) \in I$ และ I เป็น ideal ของ L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ดังนั้น $y \in I$

นั่นคือ $dI \subseteq I$

สรุปได้ว่า I เป็น d-invariant

ทฤษฎีบท 1.26 ให้ L เป็น distributive lattice และ d_i เป็น order-preseving และ f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็น join-homomorphism สำหรับ $i = 1, 2$ จะได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น $f_1 \circ f_2$-derivation บน L (กำหนด $(d_1 \circ d_2)(x) = d_1(d_2 x)$ สำหรับทุก $x \in L$)

พิสูจน์ สมมติให้ d_1 เป็น f_1-derivation บน L เมื่อ $f_1 : L \to L$ เป็น join-homomorphism และ d_2 เป็น f_2-derivation บน L เมื่อ $f_2 : L \to L$ เป็น join-homomorphism

กำหนดให้ $x, y \in L$

จะได้ $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) = d_1(d_2(x \wedge y))$

$$
\begin{aligned}
&= d_1\big((d_2 x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2 y)\big) && \text{(โดยบทนิยาม 1.1)}\\
&= d_1\big(d_2 x \wedge f_2(y)\big) \vee d_1\big(f_2(x) \wedge d_2 y\big) && \text{(โดยทฤษฎีบท 1.18)}\\
&= \big((d_1(d_2 x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(d_2 x) \wedge d_1(f_2(y)))\big)\\
&\qquad \vee \big((d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2 y)) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y))\big)\\
&= \big(d_1(d_2 x) \wedge f_1(f_2(y))\big) \vee \big(f_1(d_2 x) \wedge d_1(f_2(y))\big)\\
&\qquad \vee \big(d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2 y)\big) \vee \big(f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y)\big)\\
&= \big[\big(d_1(d_2 x) \wedge f_1(f_2(y))\big) \vee \big(f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y)\big)\big]\\
&\qquad \vee \big(f_1(d_2 x) \wedge d_1(f_2(y))\big) \vee \big(d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2 y)\big)\\
&\geq \big(d_1(d_2 x) \wedge f_1(f_2(y))\big) \vee \big(f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y)\big)\\
&= \big((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) \geq \big((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)$

และจะได้ $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) = d_1(d_2(x \wedge y))$

$$
\begin{aligned}
&= d_1\big((d_2 x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2 y)\big) && \text{(โดยบทนิยาม 1.1)}\\
&= d_1\big(d_2 x \wedge f_2(y)\big) \vee d_1\big(f_2(x) \wedge d_2 y\big) && \text{(โดยทฤษฎีบท 1.18)}\\
&= \big(d_1(d_2 x) \wedge d_1(f_2(y))\big) \vee \big(d_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y)\big)\\
&\leq \big(d_1(d_2 x) \wedge d_1(f_2(y))\big) \vee \big(f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y)\big)\\
&\leq \big(d_1(d_2 x) \wedge f_1(f_2(y))\big) \vee \big(f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2 y)\big)
\end{aligned}
$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$= \big((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f)_2(x)) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)$$

ดังนั้น $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) \leq \big((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)$

ฉะนั้น $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) = \big((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)$

สรุปได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

ทฤษฎีบท 1.27 ให้ L เป็น distributive lattice และ d_i เป็น order-preseving และ f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็น join-homomorphism สำหรับ $i = 1, 2,..., n, ...$ จะได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$ (กำหนด $(d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n)(x) = d_1(d_2(...(d_n x)...))$ สำหรับทุก $x \in L$)

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ P(n) แทนข้อความ $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L

สำหรับ $n = 2$ จะได้ $d_1 \circ d_2$ เป็น $f_1 \circ f_2$-derivation บน L โดยทฤษฎีบท 1.26

ให้ $n \geq 3$ สมมติให้ P(n) เป็นจริง

เพื่อความสะดวกกำหนดให้ $D_n = d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ และ $F_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$

ดังนั้น D_n เป็น F_n-derivation บน L

เนื่องจาก d_{n+1} เป็น f_{n+1}-derivation บน L

และโดยทฤษฎีบท 1.26 จะได้ว่า $D_n \circ d_{n+1}$ เป็น $F_n \circ f_{n+1}$-derivation บน L

นั่นคือ $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n \circ d_{n+1}$ เป็น $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \circ f_{n+1}$-derivation บน L

สรุปได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตอนที่ 2 generalized f-derivation ใน lattice

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม generalized f-derivation ใน lattice และแสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 2.1 ให้ L เป็น lattice และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $D : L \to L$ เป็น generalized f-derivation บน L ถ้ามี f-derivation $d : L \to L$ ซึ่ง $D(x \wedge y) = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อสังเกต ถ้า $D = d$ จะได้ว่า D เป็น f-derivation

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 ในตอนที่ 1
นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ ฟังก์ชัน $D : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 1 \\ b & \text{สำหรับ } x = b \\ a & \text{สำหรับ } x = 0, a \end{cases}, \quad Dx = \begin{cases} a & \text{สำหรับ } x = 0, a, 1 \\ b & \text{สำหรับ } x = b \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} b & \text{สำหรับ } x = b,1 \\ a & \text{สำหรับ } x = 0, a \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0 \wedge 0) = d0 = a,\ d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$d(0 \wedge a) = d0 = a,\ d(0 \wedge a) = (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$d(0 \wedge b) = d0 = a,\ d(0 \wedge b) = (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$$
$$d(0 \wedge 1) = d0 = a,\ d(0 \wedge 1) = (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (a \wedge 0) = a$$
$$d(a \wedge a) = da = a,\ d(a \wedge a) = (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$d(a \wedge b) = da = a,\ d(a \wedge b) = (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$$
$$d(a \wedge 1) = da = a,\ d(a \wedge 1) = (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (a \wedge 0) = a$$
$$d(b \wedge b) = db = b,\ d(b \wedge b) = (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$$
$$d(b \wedge 1) = db = b,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge b) \vee (b \wedge 0) = b$$
$$d(1 \wedge 1) = d1 = 0,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (0 \wedge b) \vee (b \wedge 0) = 0$$

ดังนั้น d เป็น f-derivation บน L
และตรวจสอบได้ว่า

$$D(0 \wedge 0) = D0 = a,\ D(0 \wedge 0) = (D0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$D(0 \wedge a) = D0 = a,\ D(0 \wedge a) = (D0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$$
$$D(0 \wedge b) = D0 = a,\ D(0 \wedge b) = (D0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$D(0\wedge 1)=D0=a,\ D(0\wedge 1)=(D0\wedge f(1))\vee(f(0)\wedge d1)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=a$$
$$D(a\wedge 0)=D0=a,\ D(a\wedge 0)=(Da\wedge f(0))\vee(f(a)\wedge d0)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$D(a\wedge a)=Da=a,\ D(a\wedge a)=(Da\wedge f(a))\vee(f(a)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$D(a\wedge b)=Da=a,\ D(a\wedge b)=(Da\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(a\wedge b)=a$$
$$D(a\wedge 1)=Da=a,\ D(a\wedge 1)=(Da\wedge f(1))\vee(f(a)\wedge d1)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=a$$
$$D(b\wedge 0)=D0=a,\ D(b\wedge 0)=(Db\wedge f(0))\vee(f(b)\wedge d0)=(b\wedge a)\vee(b\wedge a)=a$$
$$D(b\wedge a)=Da=a,\ D(b\wedge a)=(Db\wedge f(a))\vee(f(b)\wedge d1)=(b\wedge a)\vee(b\wedge a)=a$$
$$D(b\wedge b)=Db=b,\ D(b\wedge b)=(Db\wedge f(b))\vee(f(b)\wedge db)=(b\wedge b)\vee(b\wedge b)=b$$
$$D(b\wedge 1)=Db=b,\ D(b\wedge 1)=(Db\wedge f(1))\vee(f(b)\wedge d1)=(b\wedge b)\vee(b\wedge 0)=b$$
$$D(1\wedge 0)=D0=a,\ D(1\wedge 0)=(D1\wedge f(0))\vee(f(1)\wedge d0)=(a\wedge a)\vee(b\wedge a)=a$$
$$D(1\wedge a)=Da=a,\ D(1\wedge a)=(D1\wedge f(a))\vee(f(1)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(b\wedge a)=a$$
$$D(1\wedge b)=Db=b,\ D(1\wedge b)=(D1\wedge f(b))\vee(f(1)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(b\wedge b)=b$$
$$D(1\wedge 1)=D1=a,\ D(1\wedge 1)=(D1\wedge f(1))\vee(f(1)\wedge d1)=(a\wedge b)\vee(b\wedge 0)=a$$

นั่นคือ D เป็น generalized f-derivation บน L

ตัวอย่าง 2.3 ให้ $L=\{0,\ a,\ b,\ 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 2 ในตอนที่ 1

นิยามฟังก์ชัน $d:L\to L$ ฟังก์ชัน $D:L\to L$ และฟังก์ชัน $f:L\to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x=0,b,1\\ a & \text{สำหรับ } x=a\end{cases},\quad Dx=\begin{cases}0 & \text{สำหรับ } x=0,b\\ a & \text{สำหรับ } x=a,1\end{cases},\quad f(x)=\begin{cases}x & \text{สำหรับ } x=1,a\\ b & \text{สำหรับ } x=0,b\end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0\wedge 0)=d0=0,\ d(0\wedge 0)=(d0\wedge f(0))\vee(f(0)\wedge d0)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$$
$$d(0\wedge a)=d0=0,\ d(0\wedge a)=(d0\wedge f(a))\vee(f(0)\wedge da)=(0\wedge a)\vee(b\wedge a)=0$$
$$d(0\wedge b)=d0=0,\ d(0\wedge b)=(d0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$$
$$d(0\wedge 1)=d0=0,\ d(0\wedge 1)=(d0\wedge f(1))\vee(f(0)\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(b\wedge 0)=0$$
$$d(a\wedge a)=da=a,\ d(a\wedge a)=(da\wedge f(a))\vee(f(a)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$$
$$d(a\wedge b)=d0=0,\ d(a\wedge b)=(da\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0$$
$$d(a\wedge 1)=da=a,\ d(a\wedge 1)=(da\wedge f(1))\vee(f(a)\wedge d1)=(a\wedge 1)\vee(a\wedge 0)=a$$
$$d(b\wedge b)=db=0,\ d(b\wedge b)=(db\wedge f(b))\vee(f(b)\wedge db)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$$
$$d(b\wedge 1)=db=0,\ d(b\wedge 1)=(db\wedge f(1))\vee(f(b)\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(b\wedge 0)=0$$
$$d(1\wedge 1)=d1=0,\ d(1\wedge 1)=(d1\wedge f(1))\vee(f(1)\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(1\wedge 0)=0$$

นั่นคือ d เป็น f-derivation บน L

และตรวจสอบได้ว่า

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$D(0\wedge 0)=D0=0,\ D(0\wedge 0)=(D0\wedge f(0))\vee(f(0)\wedge d0)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$

$D(0\wedge a)=D0=0,\ D(0\wedge a)=(D0\wedge f(a))\vee(f(0)\wedge da)=(0\wedge a)\vee(b\wedge a)=0$

$D(0\wedge b)=D0=0,\ D(0\wedge b)=(D0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$

$D(0\wedge 1)=D0=0,\ D(0\wedge 1)=(D0\wedge f(1))\vee(f(0)\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(b\wedge 0)=0$

$D(a\wedge 0)=D0=0,\ D(a\wedge 0)=(Da\wedge f(0))\vee(f(a)\wedge d0)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0$

$D(a\wedge a)=Da=a,\ D(a\wedge a)=(Da\wedge f(a))\vee(f(a)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(a\wedge a)=a$

$D(a\wedge b)=D0=0,\ D(a\wedge b)=(Da\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(a\wedge 0)=0$

$D(a\wedge 1)=Da=a,\ D(a\wedge 1)=(Da\wedge f(1))\vee(f(a)\wedge d1)=(a\wedge 1)\vee(a\wedge 0)=a$

$D(b\wedge 0)=D0=0,\ D(b\wedge 0)=(Db\wedge f(0))\vee(f(b)\wedge d0)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$

$D(b\wedge a)=D0=0,\ D(b\wedge a)=(Db\wedge f(a))\vee(f(b)\wedge d1)=(0\wedge a)\vee(b\wedge a)=0$

$D(b\wedge b)=Db=0,\ D(b\wedge b)=(Db\wedge f(b))\vee(f(b)\wedge db)=(0\wedge b)\vee(b\wedge 0)=0$

$D(b\wedge 1)=Db=0,\ D(b\wedge 1)=(Db\wedge f(1))\vee(f(b)\wedge d1)=(0\wedge 1)\vee(b\wedge 0)=0$

$D(1\wedge 0)=D0=0,\ D(1\wedge 0)=(D1\wedge f(0))\vee(f(1)\wedge d0)=(a\wedge b)\vee(1\wedge 0)=0$

$D(1\wedge a)=Da=a,\ D(1\wedge a)=(D1\wedge f(a))\vee(f(1)\wedge da)=(a\wedge a)\vee(1\wedge a)=a$

$D(1\wedge b)=Db=0,\ D(1\wedge b)=(D1\wedge f(b))\vee(f(1)\wedge db)=(a\wedge b)\vee(1\wedge 0)=0$

$D(1\wedge 1)=D1=a,\ D(1\wedge 1)=(D1\wedge f(1))\vee(f(1)\wedge d1)=(a\wedge 1)\vee(1\wedge 0)=a$

นั่นคือ D เป็น generalized f-derivation บน L

ทฤษฎีบท 2.4 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f:L\to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $dx \le Dx \le f(x)$ สำหรับทุก $x\in L$
2. $Dx\wedge Dy \le D(x\wedge y) \le Dx\vee Dy$ สำหรับทุก $x, y\in L$

พิสูจน์ (1) ให้ $x\in L$

จะได้ว่า $Dx\wedge dx = D(x\wedge x)\wedge dx$

$= ((Dx\wedge f(x))\vee(f(x)\wedge dx))\wedge dx$

$= ((Dx\wedge f(x))\vee dx)\wedge dx$ (เพราะว่า $dx\le f(x)$)

$= dx$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $Dx\wedge dx = dx$

นั่นคือ $dx \le Dx$

จะได้ว่า $Dx\vee f(x) = D(x\wedge x)\vee f(x)$

$= ((Dx\wedge f(x))\vee(f(x)\wedge dx))\vee f(x)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= (Dx \wedge f(x)) \vee ((f(x) \wedge dx) \vee f(x))$

$= (Dx \wedge f(x)) \vee f(x)$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x)$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $Dx \vee f(x) = f(x)$

นั่นคือ $Dx \leq f(x)$

สรุปได้ว่า $dx \leq Dx \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

(2) ให้ $x, y \in L$

จากบทนิยาม 2.1 จะได้ว่า $D(x \wedge y) = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$

$\geq Dx \wedge f(y)$

$\geq Dx \wedge Dy$ (จาก (1) $Dy \leq f(y)$)

ดังนั้น $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y)$

และเนื่องจากเราทราบว่า $Dx \wedge f(y) \leq Dx$ และ $f(x) \wedge dy \leq dy$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $(Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) \leq Dx \vee (f(x) \wedge dy)$ และ $Dx \vee (f(x) \wedge dy) \leq Dx \vee dy$

ดังนั้น $(Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy) \leq Dx \vee dy$

จะได้ $D(x \wedge y) = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$

$\leq Dx \vee dy$

$\leq Dx \vee Dy$ (เพราะว่า $dy \leq Dy$)

ดังนั้น $D(x \wedge y) \leq Dx \vee Dy$

สรุปได้ว่า $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 2.5 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า $Dx = (D(x \vee y) \wedge f(x)) \vee dx$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ (1) ให้ $x, y \in L$

เนื่องจาก f เป็น order-preserving และ $x \leq x \vee y$

ดังนั้น $f(x) \leq f(x \vee y)$

เราทราบว่า $x = (x \vee y) \wedge x$

จะได้ $Dx = D((x \vee y) \wedge x)$

$= (D(x \vee y) \wedge f(x)) \vee (f(x \vee y) \wedge dx)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$ (เพราะว่า $dx \leq f(x) \leq f(x \vee y)$)

ดังนั้น $Dx = \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 2.6 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $y \leq x$ ถ้า $Dx = f(x)$ แล้ว $Dy = f(y)$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $y \leq x$ และ $Dx = f(x)$

จะได้ $y = x \wedge y$

เนื่องจาก f เป็น order-preserving

ดังนั้น $f(y) \leq f(x)$

จะได้ว่า $Dy = D(x \wedge y)$

$= \big(Dx \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge dy\big)$

$= \big(f(x) \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge dy\big)$

$= f(y) \vee dy$ (เพราะว่า $dy \leq Dy \leq f(y) \leq f(x) = Dx$)

$= f(y)$

นั่นคือ $Dy = f(y)$

ทฤษฎีบท 2.7 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า $f(0) = 0$ แล้ว $D0 = 0$
2. ถ้า $D0 = 0$ จะได้ว่า $Dx \wedge f(0) = 0$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ $f(0) = 0$

จะได้ $D0 = D(0 \wedge 0)$

$= \big(D0 \wedge f(0)\big) \vee \big(f(0) \wedge d0\big)$

$= \big(D0 \wedge 0\big) \vee \big(f(0) \wedge 0\big)$

$= 0 \vee 0$

$= 0$

ดังนั้น $D0 = 0$

(2) ให้ $x \in L$ และ $D0 = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เนื่องจาก $d0 \leq D0 = 0$ และ 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด

ดังนั้น $d0 = 0$

จะได้ $Dx \wedge f(0) = (Dx \wedge f(0)) \vee 0$

$= (Dx \wedge f(0)) \vee (f(x) \wedge 0)$

$= (Dx \wedge f(0)) \vee (f(x) \wedge d0)$

$= D(x \wedge 0)$

$= D0$

$= 0$

ดังนั้น $Dx \wedge f(0) = 0$ สำหรับทุก $x \in L$

โดยทฤษฎีบท 2.7(2) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 2.8 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $D(0) = 0$ จะได้ว่า

1. $Dx \leq f(0)$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = 0$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $f(0) \leq Dx$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ $f(0) = 0$
3. ถ้า $f(0) \neq 0$ และ มี $x \in L$ ซึ่ง $Dx \neq 0$ แล้ว $(L, \leq)$ ไม่เป็น chian

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า $D1 = 1$ แล้ว $f(1) = 1$
2. ถ้า $f(1) = 1$ แล้ว $Dx = (D1 \wedge f(x)) \vee dx$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ (1) สมมติให้ $D1 = 1$

โดยทฤษฎีบท 2.4(1) เรามี $D1 \leq f(1)$ ดังนั้น $1 \leq f(1)$

แต่เนื่องจาก 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดของ L

ดังนั้น $f(1) \leq 1$

นั่นคือ $f(1) = 1$

(2) สมมติให้ $f(1) = 1$ และ $x \in L$

จะได้ $Dx = D(1 \wedge x)$

$= (D1 \wedge f(x)) \vee (f(1) \wedge dx)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$= (D1 \wedge f(x)) \vee (1 \wedge dx)$$
$$= (D1 \wedge f(x)) \vee dx$$

ดังนั้น $Dx = (D1 \wedge f(x)) \vee dx$ สำหรับทุก $x \in L$

โดยทฤษฎีบท 2.9(2) เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรกดังนี้

บทแทรก 2.10 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

1. $D1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $D1 \leq Dx$
2. ถ้า $D1 \leq f(x)$ และ D เป็น order-preserving แล้ว $Dx = D1$
3. ถ้า $f(x) \leq D1$ แล้ว $Dx = f(x)$
4. $D1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = f(x)$

ทฤษฎีบท 2.11 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ $D(x \vee y) = (Dx \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee Dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$ และให้ $x, y \in L$

จะได้ $D(x \vee y) = f(x \vee y)$
$$= f(x \vee y) \wedge f(x \vee y)$$
$$= (f(x) \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee f(y))$$
$$= (Dx \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee Dy))$$

ดังนั้น $D(x \vee y) = (Dx \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee Dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $D(x \vee y) = (Dx \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee Dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$ และให้ $x \in L$

จะได้ $Dx = D(x \vee x)$
$$= (Dx \vee f(x)) \wedge (f(x) \vee Dx)$$
$$= Dx \vee f(x)$$
$$= f(x)$$

ดังนั้น $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท 2.12 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น order-preserving และ generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x \leq x \vee y$

จะได้ $Dx \leq D(x \vee y)$ เพราะว่า D เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 2.4(1) จะได้ว่า $dx \leq Dx \leq D(x \vee y) \leq f(x \vee y)$

เราทราบว่า $x = (x \vee y) \wedge x$

จะได้ $Dx = D\big((x \vee y) \wedge x\big)$

$= \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee \big(f(x \vee y) \wedge dx\big)$

$= \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$

ดังนั้น $Dx = \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$

จาก $dx \leq D(x \vee y)$ และ $dx \leq f(x)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $dx = dx \wedge f(x) \leq D(x \vee y) \wedge f(x)$

ฉะนั้น $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

ทฤษฎีบท 2.13 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. D เป็น order-preserving
2. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ (1) $\Rightarrow$ (2) สมมติให้ D เป็น order-preserving และ $x, y \in L$

โดยทฤษฎีบท 2.4(2) เราทราบว่า $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y)$

ในอีกทางหนึ่งเราทราบว่า $x \wedge y \leq x$ และ $x \wedge y \leq y$

จะได้ว่า $D(x \wedge y) \leq Dx$ และ $D(x \wedge y) \leq Dy$ เพราะว่า D เป็น order-preserving

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ $D(x \wedge y) = D(x \wedge y) \wedge D(x \wedge y) \leq Dx \wedge D(x \wedge y)$

และ $Dx \wedge D(x \wedge y) \leq Dx \wedge Dy$

ดังนั้น $D(x \wedge y) \leq Dx \wedge Dy$

สรุปได้ว่า $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

(2)$\Rightarrow$(1) สมมติให้ $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า D เป็น order-preserving

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $x = x \wedge y$

$$Dx = D(x \wedge y)$$
$$= Dx \wedge Dy \quad \text{(โดยสมมติฐาน)}$$

ดังนั้น $Dx = Dx \wedge Dy$

นั่นคือ $Dx \leq Dy$

สรุปได้ว่า D เป็น order-preserving

(1) $\Rightarrow$(3) สมมติให้ D เป็น order-preserving และ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x \leq x \vee y$ และ $y \leq x \vee y$

เนื่องจาก D เป็น order-preserving

ดังนั้น $Dx \leq D(x \vee y)$ และ $Dy \leq D(x \vee y)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ จะได้ $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y) \vee Dy$ และ

$Dy \vee D(x \vee y) \leq D(x \vee y) \vee D(x \vee y)$

ดังนั้น $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

(3)$\Rightarrow$(1) สมมติให้ $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า D เป็น order-preserving

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $y = x \vee y$

$$Dy = D(x \vee y)$$
$$\geq Dx \vee Dy \quad \text{(โดยสมมติฐาน)}$$

ดังนั้น $Dy \geq Dx \vee Dy$

แต่เราทราบว่า $Dy \leq Dx \vee Dy$

ดังนั้น $Dy = Dx \vee Dy$

นั่นคือ $Dx \leq Dy$

สรุปได้ว่า D เป็น order-preserving

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท 2.14 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น meet-homomorphism ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. D เป็น order-preserving
2. $Dx = f(x) \wedge D1$ สำหรับทุก $x \in L$
3. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่าข้อความ (1) และ (4) สมมูลกัน

เหลือเพียงต้องแสดงว่าข้อความ (1) (2) และ (3) สมมูลกัน

(1) $\Rightarrow$ (2) สมมติให้ D เป็น order preserving และ $x \in L$

เนื่องจาก L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

จะได้ว่า $x \leq 1$

ดังนั้น $Dx \leq D1$ เพราะว่า D เป็น order preserving

จากทฤษฎีบท 2.4(1) ทราบว่า $Dx \leq f(x)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ จะได้ $Dx \wedge D1 \leq f(x) \wedge D1$

ดังนั้น $Dx \leq f(x) \wedge D1$ เพราะว่า $Dx \leq D1$

โดยทฤษฎีบท 2.4(1) จะได้ว่า $dx \leq Dx \leq f(x) \wedge D1$

จากทฤษฎีบท 2.9(2) เราทราบว่า $Dx = (D1 \wedge f(x)) \vee dx$

ฉะนั้น $Dx = f(x) \wedge D1$ สำหรับทุก $x \in L$

(2) $\Rightarrow$ (3) สมมติให้ $Dx = f(x) \wedge D1$ สำหรับทุก $x \in L$

ให้ $x, y \in L$

จะได้ $Dx \wedge Dy = (f(x) \wedge D1) \wedge (f(y) \wedge D1)$

$= f(x) \wedge f(y) \wedge D1$ (โดยบทนิยาม 1(1) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x \wedge y) \wedge D1$ (เพราะว่า f เป็น meet-homomorphism)

$= D(x \wedge y)$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

(3) $\Rightarrow$ (1) สมมติให้ $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า D เป็น order-preserving

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $x = x \wedge y$

$Dx = D(x \wedge y)$

$= Dx \wedge Dy$ (โดยสมมติฐาน)

ดังนั้น $Dx = Dx \wedge Dy$

นั่นคือ $Dx \leq Dy$

สรุปได้ว่า D เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 2.15 ให้ L เป็น distributive lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. D เป็น order-preserving
2. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่าข้อความ (1) และ (2) สมมูลกัน

เหลือเพียงต้องแสดงว่า (1) และ (3) สมมูลกัน

(1) $\Rightarrow$ (3) สมมติให้ D เป็น order-preserving และ $x, y \in L$

เนื่องจาก $x \leq x \vee y$ และ D เป็น order-preserving

ดังนั้น $Dx \leq D(x \vee y)$

เนื่องจาก f เป็น join-homomorphism และบทตั้ง 14(2) ในส่วนวิธีการ

จะได้ว่า f เป็น order-preserving

ฉะนั้น $Dx = \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$ (โดยทฤษฎีบท 2.5)

$= \big(D(x \vee y) \vee dx\big) \wedge \big(f(x) \vee dx\big)$ (เพราะว่า L เป็น distributive lattice)

$= D(x \vee y) \wedge f(x)$ (เพราะว่า $dx \leq D(x) \leq D(x \vee y)$)

โดยทำนองเดียวเราสามารถแสดงได้ว่า $Dy = D(x \vee y) \wedge f(y)$

จะได้ว่า $Dx \vee Dy = \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee \big(D(x \vee y) \wedge f(y)\big)$

$= D(x \vee y) \wedge \big(f(x) \vee f(y)\big)$ (เพราะว่า L เป็น distributive lattice)

$= D(x \vee y) \wedge f(x \vee y)$ (เพราะว่า f เป็น join-homomorphism)

$= D(x \vee y)$ (โดยทฤษฎีบท 2.4(1))

ดังนั้น $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

(3) $\Rightarrow$(1) สมมติให้ $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะแสดงว่า D เป็น order-preserving

กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

จะได้ว่า $y = x \vee y$

$$Dy = D(x \vee y)$$
$$= Dx \vee Dy \quad \text{(โดยสมมติฐาน)}$$

ดังนั้น $Dy = Dx \vee Dy$

นั่นคือ $Dx \leq Dy$

สรุปได้ว่า D เป็น order-preserving

ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชันกำหนด $Fix_D(L) = \{x \in L | Dx = f(x)\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $Fix_D(L)$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 2.16 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น order-preserving และ generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ ให้ $x, y \in Fix_D(L)$

ในขั้นแรกเราจะแสดงว่า $x \wedge y \in Fix_D(L)$

โดยทฤษฎีบท 2.4(1) และทฤษฎีบท 2.4(2) เราทราบว่า

$D(x \wedge y) \leq f(x \wedge y)$ และ $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y)$

เนื่องจาก $x, y \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Dx = f(x)$ และ $Dy = f(y)$

จะได้ว่า $D(x \wedge y) \geq Dx \wedge Dy$

$$= f(x) \wedge f(y)$$
$$= f(x \wedge y)$$

ดังนั้น $D(x \wedge y) \geq f(x \wedge y)$

เนื่องจาก $D(x \wedge y) \leq f(x \wedge y)$ และ $D(x \wedge y) \geq f(x \wedge y)$

ดังนั้น $D(x \wedge y) = f(x \wedge y)$

นั่นคือ $x \wedge y \in Fix_D(L)$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \vee y \in Fix_D(L)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

โดยทฤษฎีบท 2.4(1) เราทราบว่า $D(x \vee y) \leq f(x \vee y)$

ในอีกทางหนึ่ง โดยทฤษฎีบท 2.13 เราทราบว่า $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$

จะได้ว่า $D(x \vee y) \geq Dx \vee Dy$

$= f(x) \vee f(y)$

$= f(x \vee y)$

ดังนั้น $D(x \vee y) \geq f(x \vee y)$

นั่นคือ $D(x \vee y) = f(x \vee y)$

นั่นคือ $x \vee y \in Fix_D(L)$

จาก $x \wedge y \in Fix_D(L)$ และ $x \vee y \in Fix_D(L)$

สรุปได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น sublattice ของ L

ทฤษฎีบท 2.17 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น order-preserving และ generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in Fix_D(L)$

จะได้ว่า $Dy = f(y)$

โดยทฤษฎีบท 2.6 เราจะได้ว่า $Dx = f(x)$

นั่นแสดงว่า $x \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Fix_D(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

ต่อไปสมมติให้ $x, y \in Fix_D(L)$

โดยทฤษฎีบท 2.16 เราทราบว่า $Fix_D(L)$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Fix_D(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น ideal ของ L

ทฤษฎีบท 2.18 ให้ L เป็น modular lattice และ D เป็น order-preserving และ generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism ถ้ามีสมาชิก $a \in Fix_D(L)$ แล้ว $D(x \vee a) = Dx \vee Da$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ สมมติให้มีสมาชิก $a \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Da = f(a)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

กำหนดให้ $x \in L$

เราทราบว่า $x \le x \vee a$ และ $a \le x \vee a$

ดังนั้น $Dx \le D(x \vee a)$ และ $Da \le D(x \vee a)$ เพราะว่า D เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 2.12 เราทราบว่า $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จะได้ $Dx = D(x \vee a) \wedge f(x)$

เนื่องจาก L เป็น modular lattice และ $Da \le D(x \vee a)$

จะได้ $Dx \vee Da = \big(D(x \vee a) \wedge f(x)\big) \vee Da$

$= D(x \vee a) \wedge \big(Da \vee f(x)\big)$ (เพราะว่า L เป็น modular lattice)

$= D(x \vee a) \wedge \big(f(a) \vee f(x)\big)$ (เพราะว่า $a \in \mathrm{Fix}_D(L)$)

$= D(x \vee a) \wedge f(x \vee a)$ (เพราะว่า f เป็น join-homomorphism)

$= D(x \vee a)$ (โดยทฤษฎีบท 2.4(1))

ดังนั้น $D(x \vee a) = Dx \vee Da$ สำหรับทุก $x \in L$

ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $\ker D = \{x \in L | Dx = 0\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $\ker D$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 2.19 ให้ L เป็น distributive lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น order-preserving และ generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า $\ker D$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \ker D$

ดังนั้น $Dx = 0 = Dy$

โดยทฤษฎีบท 2.15 เราทราบว่า $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ และ $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

จะได้ $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$= 0 \wedge 0$

$= 0$

ดังนั้น $D(x \wedge y) = 0$

แสดงว่า $x \wedge y \in \ker D$

และยังได้อีกว่า $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

$= 0 \vee 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= 0$

ดังนั้น $D(x \vee y) = 0$

นั่นคือ $x \vee y \in \ker D$

จาก $x \wedge y \in \ker D$ และ $x \vee y \in \ker D$

สรุปได้ว่า $\ker D$ เป็น sublattice ของ L

ทฤษฎีบท 2.20 ให้ L เป็น distributive lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น order-preserving และ generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า $\ker D$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in \ker D$

จะได้ว่า $Dy = 0$

จาก $x \leq y$

จะได้ว่า $x = x \wedge y$

$Dx = D(x \wedge y)$

$= Dx \wedge Dy$ (โดยทฤษฎีบท 2.15 และ D เป็น order-preserving)

$= Dx \wedge 0$ (เพราะว่า $Dy = 0$)

$= 0$

ดังนั้น $Dx = 0$

แสดงว่า $x \in \ker D$

ดังนั้น $\ker D$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

โดยทฤษฎีบท 2.19 เราทราบว่า $\ker D$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in \ker D$ สำหรับทุก $x, y \in \ker D$

ดังนั้น $\ker D$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $\ker D$ เป็น ideal ของ L

ทฤษฎีบท 2.21 ให้ L เป็น lattice I เป็น ideal ของ L และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า ถ้า I เป็น f-invariant แล้ว I เป็น D-invariant

พิสูจน์ สมมติให้ I เป็น ideal ของ L โดยที่ I เป็น f-invariant และให้ $y \in DI$

ดังนั้นจะมี $x \in I$ ซึ่ง $y = Dx$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เนื่องจาก $x \in I$, $I \subseteq L$ และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน

ดังนั้น $f(x) \in f(I)$

เนื่องจาก I เป็น f-invariant

ดังนั้น $f(I) \subseteq I$

และจะได้ว่า $f(x) \in I$

โดยทฤษฎีบท 2.4(1) เราทราบว่า $Dx \leq f(x)$

ดังนั้น $y \leq f(x)$ เพราะว่า $y = Dx$

เนื่องจาก $f(x) \in I$ และ I เป็น ideal ของ L

ดังนั้น $y \in I$

นั่นคือ $DI \subseteq I$

สรุปได้ว่า I เป็น D-invariant

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตอนที่ 3 lattice f-derivation ใน lattice

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม lattice f-derivation ใน lattice และแสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 3.1 ให้ L เป็น lattice และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d : L \to L$ เป็น lattice f-derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ และ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 3.1 พบว่า ถ้า d เป็น lattice f-derivation แล้ว d เป็น f-derivation ดังนั้นสมบัติที่เกี่ยวข้องกับ f-derivation ในตอนที่ 1 จะเป็นจริงเมื่อ d เป็น lattice f-derivation และจากทฤษฎีบท 1.18 ในตอนที่ 1 พบว่า d ซึ่งเป็น f-derivation บน L จะมีสมบัติเป็น lattice f-derivation เมื่อ L เป็น distributive lattice และ f เป็น join-homomorphism พร้อมทั้ง d นั้นต้องมีสมบัติเป็น order-preserving

ตัวอย่าง 3.2 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 ในตอนที่ 1
นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} x & \text{สำหรับ } x = 0, a \\ b & \text{สำหรับ } x = 1, b \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ } x = 0, a \\ b & \text{สำหรับ } x = 1, b \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$d(0 \wedge 0) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$
$d(0 \wedge a) = d0 = 0,\ d(0 \wedge a) = (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (0 \wedge a) \vee (0 \wedge a) = 0$
$d(0 \wedge b) = d0 = 0,\ d(0 \wedge b) = (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge b) = 0$
$d(0 \wedge 1) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 1) = (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge b) = 0$
$d(a \wedge a) = da = a,\ d(a \wedge a) = (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$
$d(a \wedge b) = da = a,\ d(a \wedge b) = (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$
$d(a \wedge 1) = da = a,\ d(a \wedge 1) = (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (a \wedge b) = a$
$d(b \wedge b) = db = b,\ d(b \wedge b) = (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$
$d(b \wedge 1) = db = b,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$
$d(1 \wedge 1) = d1 = b,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (b \wedge b) \vee (b \wedge b) = b$
$d(0 \vee 0) = d0 = 0,\ d(0 \vee 0) = d0 \vee d0 = 0 \vee 0 = 0$
$d(0 \vee a) = da = a,\ d(0 \vee a) = d0 \vee da = 0 \vee a = a$
$d(0 \vee b) = db = b,\ d(0 \vee b) = d0 \vee db = 0 \vee b = b$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$d(0 \vee 1) = d1 = b,\ d(0 \vee 1) = d0 \vee d1 = 0 \vee b = b$
$d(a \vee a) = da = a,\ d(a \vee a) = da \vee da = a \vee a = a$
$d(a \vee b) = db = b,\ d(a \vee b) = da \vee db = a \vee b = b$
$d(a \vee 1) = d1 = b,\ d(a \vee 1) = da \vee d1 = a \vee b = b$
$d(b \vee b) = db = b,\ d(b \vee b) = db \vee db = b \vee b = b$
$d(b \vee 1) = d1 = b,\ d(b \vee 1) = db \vee d1 = b \vee b = b$
$d(1 \vee 1) = d1 = b,\ d(1 \vee 1) = d1 \vee d1 = b \vee b = b$

ดังนั้น d เป็น lattice f-derivation บน L

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $L = \{0,\ a,\ b,\ 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 ในตอนที่ 1 นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0 \\ a & \text{สำหรับ } x = 1,\ b,\ a \end{cases},\quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0 \\ a & \text{สำหรับ } x = a,\ b \\ b & \text{สำหรับ } x = 1 \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$d(0 \wedge 0) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$
$d(0 \wedge a) = d0 = 0,\ d(0 \wedge a) = (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (0 \wedge a) \vee (0 \wedge a) = 0$
$d(0 \wedge b) = d0 = 0,\ d(0 \wedge b) = (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (0 \wedge a) \vee (0 \wedge a) = 0$
$d(0 \wedge 1) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 1) = (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0$
$d(a \wedge a) = da = a,\ d(a \wedge a) = (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$
$d(a \wedge b) = da = a,\ d(a \wedge b) = (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$
$d(a \wedge 1) = da = a,\ d(a \wedge 1) = (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (a \wedge a) = a$
$d(b \wedge b) = db = a,\ d(b \wedge b) = (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (a \wedge a) \vee (a \wedge a) = a$
$d(b \wedge 1) = db = a,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (a \wedge a) = a$
$d(1 \wedge 1) = d1 = a,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$
$d(0 \vee 0) = d0 = 0,\ d(0 \vee 0) = d0 \vee d0 = 0 \vee 0 = 0$
$d(0 \vee a) = da = a,\ d(0 \vee a) = d0 \vee da = 0 \vee a = a$
$d(0 \vee b) = db = a,\ d(0 \vee b) = d0 \vee db = 0 \vee a = a$
$d(0 \vee 1) = d1 = a\ ,\ d(0 \vee 1) = d0 \vee d1 = 0 \vee a = a$
$d(a \vee a) = da = a,\ d(a \vee a) = da \vee da = a \vee a = a$
$d(a \vee b) = db = a,\ d(a \vee b) = da \vee db = a \vee a = a$
$d(a \vee 1) = d1 = a,\ d(a \vee 1) = da \vee d1 = a \vee a = a$
$d(b \vee b) = db = a,\ d(b \vee b) = db \vee db = a \vee a = a$
$d(b \vee 1) = d1 = a,\ d(b \vee 1) = db \vee d1 = a \vee a = a$
$d(1 \vee 1) = d1 = a,\ d(1 \vee 1) = d1 \vee d1 = a \vee a = a$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ดังนั้น d เป็น lattice f-derivation บน L

ตัวอย่าง 3.4 ให้ $L=\{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 ในตอนที่ 1
นิยามฟังก์ชัน $d: L \to L$ และฟังก์ชัน $f: L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0 \\ a & \text{สำหรับ } x = 1 \\ b & \text{สำหรับ } x = b, a \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } x = 0 \\ 1 & \text{สำหรับ } x = a, b, 1 \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$$d(0\wedge 0) = d0 = 0,\ d(0\wedge 0) = (d0\wedge f(0))\vee(f(0)\wedge d0) = (0\wedge 0)\vee(0\wedge 0) = 0$$
$$d(0\wedge a) = d0 = 0,\ d(0\wedge a) = (d0\wedge f(a))\vee(f(0)\wedge da) = (0\wedge 1)\vee(0\wedge b) = 0$$
$$d(0\wedge b) = d0 = 0,\ d(0\wedge b) = (d0\wedge f(b))\vee(f(0)\wedge db) = (0\wedge 1)\vee(0\wedge b) = 0$$
$$d(0\wedge 1) = d0 = 0,\ d(0\wedge 1) = (d0\wedge f(1))\vee(f(0)\wedge d1) = (0\wedge 1)\vee(0\wedge a) = 0$$
$$d(a\wedge a) = da = b,\ d(a\wedge a) = (da\wedge f(a))\vee(f(a)\wedge da) = (b\wedge 1)\vee(1\wedge b) = b$$
$$d(a\wedge b) = da = b,\ d(a\wedge b) = (da\wedge f(b))\vee(f(a)\wedge db) = (b\wedge 1)\vee(1\wedge b) = b$$
$$d(a\wedge 1) = da = b,\ d(a\wedge 1) = (da\wedge f(1))\vee(f(a)\wedge d1) = (b\wedge 1)\vee(1\wedge a) = b$$
$$d(b\wedge b) = db = b,\ d(b\wedge b) = (db\wedge f(b))\vee(f(b)\wedge db) = (b\wedge 1)\vee(1\wedge b) = b$$
$$d(b\wedge 1) = db = b,\ d(b\wedge 1) = (db\wedge f(1))\vee(f(b)\wedge d1) = (b\wedge 1)\vee(1\wedge a) = b$$
$$d(1\wedge 1) = d1 = a,\ d(1\wedge 1) = (d1\wedge f(1))\vee(f(1)\wedge d1) = (a\wedge 1)\vee(1\wedge a) = a$$

ดังนั้น d เป็น f-derivation บน L
นอกจากนั้นยังสามารถตรวจสอบได้ว่า

$$d(a\vee 1) = d1 = a$$
$$d(a\vee 1) = da\vee d1 = b\vee a = b$$

และพบว่า $d(a\vee 1) \neq da\vee d1$
ดังนั้น d เป็น f-derivation บน L แต่ d ไม่เป็น lattice f-derivation บน L

ข้อสังเกต ในตัวอย่างที่ 3.2 เราพบว่า ถ้า $f = d$ แล้ว d เป็น lattice f-derivation บน L แต่ตัวอย่างที่ 3.3 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่าถ้า d เป็น lattice f-derivation บน L แล้วไม่จำเป็นที่ $d = f$ และในตัวอย่างที่ 3.4 เป็นตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า d ซึ่งเป็น f-derivation อาจไม่มีสมบัติเป็น lattice f-derivation

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f: L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า d เป็น order-preserving

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ กำหนดให้ d เป็น lattice f-derivation บน L

สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

เนื่องจาก d เป็น lattice f-derivation บน L

จะได้ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จาก $x \leq y$

จะได้ $y = x \vee y$

$dy = d(x \vee y)$

$= dx \vee dy$

ดังนั้น $dy = dx \vee dy$

ฉะนั้น $dx \leq dy$

สรุปได้ว่า d เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า d เป็น lattice-homomorphism

พิสูจน์ เนื่องจาก d เป็น lattice f-derivation บน L

ดังนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

เพราะฉะนั้นเพียงพอที่จะแสดงว่า $dx \wedge dy = d(x \wedge y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

สมมติให้ $x, y \in L$

จากทฤษฎีบท 1.6(2) ในตอนที่ 1 เราทราบว่า $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$

ในอีกทางหนึ่งเราทราบว่า $x \wedge y \leq x$ และ $x \wedge y \leq y$

โดยทฤษฎีบท 3.5 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

จะได้ $d(x \wedge y) \leq dx$ และ $d(x \wedge y) \leq dy$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ว่า $d(x \wedge y) \wedge dy \leq dx \wedge dy$

ดังนั้น $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$ เพราะว่า $d(x \wedge y) \leq dy$

จาก $dx \wedge dy \leq d(x \wedge y)$ และ $d(x \wedge y) \leq dx \wedge dy$

สรุปได้ว่า $dx \wedge dy = d(x \wedge y)$

นั่นคือ d เป็น lattice-homomorphism

บทแทรก 3.7 ให้ L เป็น lattice และ $d : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า d เป็น lattice-homomorphism ก็ต่อเมื่อ d เป็น lattice d-derivation บน L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ d เป็น lattice-homomorphism

สมมติให้ $x, y \in L$

เนื่องจาก d เป็น lattice-homomorphism

ดังนั้น d เป็น join-homomorphism และ meet-homomorphism

จะได้ว่า $d(x \vee y) = dx \vee dy$

และ $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

$= (dx \wedge dy) \vee (dx \wedge dy)$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = (dx \wedge dy) \vee (dx \wedge dy)$

ฉะนั้น $d(x \vee y) = dx \vee dy$ และ $d(x \wedge y) = (dx \wedge dy) \vee (dx \wedge dy)$

สรุปได้ว่า d เป็น lattice d-derivation บน L

($\Leftarrow$) โดยทฤษฎีบท 3.6

บทแทรก 3.8 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $dx \wedge dy = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 3.9 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ ให้ $x \in L$

เนื่องจาก L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

ดังนั้น $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 3.5 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

จาก $x \leq 1$

จะได้ $dx \leq d1$

$f(x) \wedge dx \leq f(x) \wedge d1$ (โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $dx \leq f(x) \wedge d1$ (เพราะว่า $dx \leq f(x)$)

จาก $x \leq 1$

จะได้ว่า $x = x \wedge 1$

$dx = d(x \wedge 1)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$= (dx \wedge f(1)) \vee (f(x) \wedge d1)$$
$$= (dx \wedge 1) \vee (f(x) \wedge d1)$$
$$= dx \vee (f(x) \wedge d1)$$
$$= f(x) \wedge d1 \qquad \text{(เพราะว่า } dx \leq f(x) \wedge d1\text{)}$$

ดังนั้น $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$

โดยทฤษฎีบท 3.9 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 3.10 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

1. $d1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $dx = d1$
2. $f(x) \leq d1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$
3. $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$

บทแทรก 3.11 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $f(1) = 1$ และ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $d1 = 1$

โดยทฤษฎีบท 1.9(1) ในตอนที่ 1 จะได้ว่า $f(1) = 1$

โดยบทแทรก 3.10(3) จะได้ว่า $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $f(1) = 1$ และ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

เราเห็นได้ชัดเจนว่า $d1 = f(1) = 1$

ทฤษฎีบท 3.12 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x = (x \wedge y) \vee x$

จะได้ $dx = d((x \wedge y) \vee x)$

$$= d(x \wedge y) \vee dx \qquad \text{(โดยบทนิยาม 3.1)}$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= \big((dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)\big) \vee dx$ (โดยบทนิยาม 3.1)

$= \big((dx \wedge f(y)) \vee dx\big) \vee (f(x) \wedge dy)$ (โดยบทนิยาม 1 ในส่วนวิธีการ)

$= dx \vee (f(x) \wedge dy)$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 3.13 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x \leq x \vee y$

จะได้ $f(x) \leq f(x \vee y)$ เพราะว่า f เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 1.6(1) ในตอนที่ 1 จะได้ว่า $dx \leq f(x) \leq f(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 3.5 เราทราบว่า d เป็น order-preserving

จะได้ว่า $dx \leq d(x \vee y)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx = dx \wedge f(x) \leq d(x \vee y) \wedge f(x)$

เราทราบว่า $x = (x \vee y) \wedge x$

จะได้ $dx = d\big((x \vee y) \wedge x\big)$

$= \big(d(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee \big(f(x \vee y) \wedge dx\big)$ (โดยบทนิยาม 3.1)

$= \big(d(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$ (เพราะว่า $dx \leq f(x \vee y)$)

$= d(x \vee y) \wedge f(x)$ (เพราะว่า $dx \leq d(x \vee y) \wedge f(x)$)

ดังนั้น $dx = d(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 3.14 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

จากทฤษฎีบท 3.13 เราทราบว่า $dx = d(x \vee y) \wedge f(x)$

โดยทฤษฎีบท 3.6 เราทราบว่า d เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

$= \big(d(x \vee y) \wedge f(x)\big) \wedge dy$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= (f(x) \wedge d(x \vee y)) \wedge dy$ (โดยบทนิยาม 1(2) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x) \wedge (d(x \vee y) \wedge dy)$ (โดยบทนิยาม 1(3) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x) \wedge dy$ (โดยทฤษฎีบท 3.5 และ $y \leq x \vee y$)

ดังนั้น $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 3.15 ให้ L เป็น modular lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

จากทฤษฎีบท 3.12 เราทราบว่า $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$

เนื่องจาก L เป็น modular lattice และ $dx \leq f(x)$

จาก $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$

จะได้ $dx = f(x) \wedge (dx \vee dy)$

$= f(x) \wedge d(x \vee y)$ (โดยบทนิยาม 3.1)

ดังนั้น $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 3.16 ให้ L เป็น modular lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

โดยทฤษฎีบท 3.15 เราทราบว่า $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 3.6 เราทราบว่า d เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

$= (f(x) \wedge d(x \vee y)) \wedge dy$

$= f(x) \wedge (d(x \vee y) \wedge dy)$ (โดยบทนิยาม 1(3) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x) \wedge ((dx \vee dy) \wedge dy)$

$= f(x) \wedge dy$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

บทแทรก 3.17 ให้ L เป็น distributive lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ และ $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $Fix_d(L) = \{x \in L | dx = f(x)\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $Fix_d(L)$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 3.18 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $Fix_d(L)$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ ให้ $x, y \in Fix_d(L)$

ดังนั้น $dx = f(x)$ และ $dy = f(y)$

ในขั้นแรกจะแสดงว่า $x \vee y \in Fix_d(L)$

เนื่องจาก d เป็น lattice f-derivation บน L

จะได้ว่า $d(x \vee y) = dx \vee dy$

$= f(x) \vee f(y)$

$= f(x \vee y)$ (เพราะว่า f เป็น lattice-homomorphism)

ดังนั้น $d(x \vee y) = f(x \vee y)$

นั่นคือ $x \vee y \in Fix_d(L)$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \wedge y \in Fix_d(L)$

เนื่องจาก $x, y \in Fix_d(L)$ ดังนั้น $dx = f(x)$ และ $dy = f(y)$

โดยทฤษฎีบท 3.6 เราทราบว่า d เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

$= f(x) \wedge f(y)$

$= f(x \wedge y)$ (เพราะว่า f เป็น lattice-homomorphism)

ดังนั้น $d(x \wedge y) = f(x \wedge y)$

นั่นคือ $x \wedge y \in Fix_d(L)$

จาก $x \wedge y \in Fix_d(L)$ และ $x \vee y \in Fix_d(L)$

โดยบทนิยาม 7 ในส่วนวิธีการสรุปได้ว่า $Fix_d(L)$ เป็น sublattice ของ L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ทฤษฎีบท 3.19 ให้ L เป็น lattice และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \le y$ และ $y \in \mathrm{Fix}_L(L)$

จะได้ว่า $dy = f(y)$

โดยทฤษฎีบท 1.12 ในตอนที่ 1 เราจะได้ว่า $dx = f(x)$

แสดงว่า $x \in \mathrm{Fix}_d(L)$

ดังนั้น $\mathrm{Fix}_d(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

ต่อไปสมมติให้ $x, y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

โดยทฤษฎีบท 3.18 เราทราบว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in \mathrm{Fix}_d(L)$

ดังนั้น $\mathrm{Fix}_d(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $\mathrm{Fix}_d(L)$ เป็น ideal ของ L

ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $\ker d = \{x \in L | dx = 0\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $\ker d$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 3.20 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $\ker d$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ ให้ $x, y \in \ker d$

ดังนั้น $dx = 0 = dy$

โดยบทนิยาม 3.1 จะได้ $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$

$= (0 \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge 0)$

$= 0 \vee 0$

$= 0$

ดังนั้น $d(x \wedge y) = 0$

แสดงว่า $x \wedge y \in \ker d$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \vee y \in \ker d$

โดยบทนิยาม 3.1 เราทราบว่า $d(x \vee y) = dx \vee dy = 0 \vee 0 = 0$

ดังนั้น $d(x \vee y) = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

นั่นคือ $x \vee y \in \ker d$

จาก $x \wedge y \in \ker d$ และ $x \vee y \in \ker d$

โดยบทนิยาม 7 ในส่วนวิธีการสรุปได้ว่า $\ker d$ เป็น sublattice ของ L

ทฤษฎีบท 3.21 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $\ker d$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in \ker d$

จะได้ว่า $dy = 0$

โดยทฤษฎีบท 3.6 เราทราบว่า d เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$

$dx = dx \wedge 0$ (เพราะว่า $x \leq y$ และ $dy = 0$)

$= 0$

ดังนั้น $dx = 0$

แสดงว่า $x \in \ker d$

ดังนั้น $\ker d$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

โดยทฤษฎีบท 3.20 เราทราบว่า $\ker d$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in \ker d$ สำหรับทุก $x, y \in \ker d$

ดังนั้น $\ker d$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $\ker d$ เป็น ideal ของ L

ทฤษฎีบท 3.22 ให้ L เป็น lattice และ d_i เป็น lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชันสำหรับ $i = 1, 2$ จะได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L (กำหนด $(d_1 \circ d_2)(x) = d_1(d_2 x)$ สำหรับทุก $x \in L$)

พิสูจน์ สมมติให้ d_1 เป็น lattice f_1-derivation บน L เมื่อ $f_1 : L \to L$ เป็นฟังก์ชันและ d_2 เป็น lattice f_2-derivation บน L เมื่อ $f_2 : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน

กำหนดให้ $x, y \in L$

จะได้ $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) = d_1(d_2(x \wedge y))$

$= d_1\big((d_2 x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2 y)\big)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$$= d_1(d_2x \wedge f_2(y)) \vee d_1(f_2(x) \wedge d_2y)$$
$$= ((d_1(d_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y))))$$
$$\vee ((d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2y)) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)))$$
$$= (d_1(d_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y)))$$
$$\vee (d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2y)) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))$$
$$= [(d_1(d_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))]$$
$$\vee (f_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y))) \vee (d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2y))$$
$$\geq (d_1(d_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))$$
$$= ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$$

ดังนั้น $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) \geq ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$

และจะได้ $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) = d_1(d_2(x \wedge y))$
$$= d_1((d_2x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2y))$$
$$= d_1(d_2x \wedge f_2(y)) \vee d_1(f_2(x) \wedge d_2y)$$
$$= (d_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y))) \vee (d_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))$$
$$\leq (d_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))$$
$$\leq (d_1(d_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))$$
$$= ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f)_2(x)) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$$

ดังนั้น $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) \leq ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$

ฉะนั้น $(d_1 \circ d_2)(x \wedge y) = ((d_1 \circ d_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$

นอกจากนั้นจะได้ว่า $(d_1 \circ d_2)(x \vee y) = d_1(d_2(x \vee y))$
$$= d_1(d_2x \vee d_2y)$$
$$= d_1(d_2x) \vee d_1(d_2y)$$
$$= (d_1 \circ d_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y)$$

ดังนั้น $(d_1 \circ d_2)(x \vee y) = (d_1 \circ d_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y)$

สรุปได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

ทฤษฎีบท 3.23 ให้ L เป็น lattice และ d_i เป็น lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชันสำหรับ $i = 1, 2, ..., n, ...$ จะได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

(กำหนด $(d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n)(x) = d_1(d_2(...(d_nx)...))$ สำหรับทุก $x \in L$)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พิสูจน์ โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ P(n) แทนข้อความ $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L

สำหรับ $n = 2$ จะได้ $d_1 \circ d_2$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L โดยทฤษฎีบท 3.22

ให้ $n \geq 3$ สมมติให้ P(n) เป็นจริง

เพื่อความสะดวกกำหนดให้ $D_n = d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ และ $F_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$

ดังนั้น D_n เป็น lattice F_n-derivation บน L

เนื่องจาก d_{n+1} เป็น lattice f_{n+1}-derivation บน L

และโดยทฤษฎีบท 3.22 จะได้ว่า $D_n \circ d_{n+1}$ เป็น lattice $F_n \circ f_{n+1}$-derivation บน L

นั่นคือ $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n \circ d_{n+1}$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \circ f_{n+1}$-derivation บน L

สรุปได้ว่า $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ตอนที่ 4 generalized lattice f-derivation ใน lattice

ในหัวข้อนี้เราจะนิยาม generalized lattice f-derivation ใน lattice และแสดงสมบัติต่างๆ ที่เกี่ยวข้อง

บทนิยาม 4.1 ให้ L เป็น lattice และ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $D : L \to L$ เป็น generalized lattice f-derivation บน L ถ้ามี lattice f-derivation $d : L \to L$ ซึ่ง $D(x \wedge y) = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ และ $D(x \vee y) = Dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ข้อสังเกต 1. ถ้า $D = d$ จะได้ว่า D เป็น lattice f-derivation

2. ถ้า D เป็น generalized lattice f-derivation แล้ว D เป็น generalized f-derivation

ตัวอย่าง 4.2 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 ในตอนที่ 1
นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$, $D : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$dx = a$ สำหรับ $x = 0, a, b, 1$ $Dx = b$ สำหรับ $x = 0, a, b, 1$

และ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{สำหรับ } x = 1 \\ b & \text{สำหรับ } x = 0, a, b \end{cases}$

ตรวจสอบได้ว่า

$d(0 \wedge 0) = d0 = a,\ d(0 \wedge 0) = (d0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$

$d(0 \wedge a) = d0 = a,\ d(0 \wedge a) = (d0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$

$d(0 \wedge b) = d0 = a,\ d(0 \wedge b) = (d0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$

$d(0 \wedge 1) = d0 = a,\ d(0 \wedge 1) = (d0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (a \wedge 1) \vee (b \wedge a) = a$

$d(a \wedge a) = da = a,\ d(a \wedge a) = (da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$

$d(a \wedge b) = da = a,\ d(a \wedge b) = (da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$

$d(a \wedge 1) = da = a,\ d(a \wedge 1) = (da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (a \wedge 1) \vee (b \wedge a) = a$

$d(b \wedge b) = db = a,\ d(b \wedge b) = (db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (a \wedge b) \vee (b \wedge a) = a$

$d(b \wedge 1) = db = a,\ d(b \wedge 1) = (db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (a \wedge 1) \vee (b \wedge a) = a$

$d(1 \wedge 1) = d1 = a,\ d(1 \wedge 1) = (d1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (a \wedge 1) \vee (1 \wedge a) = a$

$d(0 \vee 0) = d0 = a,\ d(0 \vee 0) = d0 \vee d0 = a \vee a = a$

$d(0 \vee a) = da = a,\ d(0 \vee a) = d0 \vee da = a \vee a = a$

$d(0 \vee b) = db = a,\ d(0 \vee b) = d0 \vee db = a \vee a = a$

$d(0 \vee 1) = d1 = a,\ d(0 \vee 1) = d0 \vee d1 = a \vee a = a$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$d(a \vee a) = da = a,\ d(a \vee a) = da \vee da = a \vee a = a$

$d(a \vee b) = db = a,\ d(a \vee b) = da \vee db = a \vee a = a$

$d(a \vee 1) = d1 = a,\ d(a \vee 1) = da \vee d1 = a \vee a = a$

$d(b \vee b) = db = a,\ d(b \vee b) = db \vee db = a \vee a = a$

$d(b \vee 1) = d1 = a,\ d(b \vee 1) = db \vee d1 = a \vee a = a$

$d(1 \vee 1) = d1 = a,\ d(1 \vee 1) = d1 \vee d1 = a \vee a = a$

ดังนั้น d เป็น lattice f-derivation บน L

และตรวจสอบได้ว่า

$D(0 \wedge 0) = D0 = b,\ D(0 \wedge 0) = (D0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(0 \wedge a) = D0 = b,\ D(0 \wedge a) = (D0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(0 \wedge b) = D0 = b,\ D(0 \wedge b) = (D0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(0 \wedge 1) = D0 = b,\ D(0 \wedge 1) = (D0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (b \wedge a) = b$

$D(a \wedge 0) = D0 = b,\ D(a \wedge 0) = (Da \wedge f(0)) \vee (f(a) \wedge d0) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(a \wedge a) = Da = b,\ D(a \wedge a) = (Da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(a \wedge b) = Da = b,\ D(a \wedge b) = (Da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(a \wedge 1) = Da = b,\ D(a \wedge 1) = (Da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (b \wedge a) = b$

$D(b \wedge 0) = D0 = b,\ D(b \wedge 0) = (Db \wedge f(0)) \vee (f(b) \wedge d0) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(b \wedge a) = Da = b,\ D(b \wedge a) = (Db \wedge f(a)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(b \wedge b) = Db = b,\ D(b \wedge b) = (Db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(b \wedge 1) = Db = b,\ D(b \wedge 1) = (Db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (b \wedge a) = b$

$D(1 \wedge 0) = D0 = b,\ D(1 \wedge 0) = (D1 \wedge f(0)) \vee (f(1) \wedge d0) = (b \wedge b) \vee (1 \wedge a) = b$

$D(1 \wedge a) = Da = b,\ D(1 \wedge a) = (D1 \wedge f(a)) \vee (f(1) \wedge da) = (b \wedge b) \vee (1 \wedge a) = b$

$D(1 \wedge b) = Db = b,\ D(1 \wedge b) = (D1 \wedge f(b)) \vee (f(1) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (1 \wedge a) = b$

$D(1 \wedge 1) = D1 = b,\ D(1 \wedge 1) = (D1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (1 \wedge a) = b$

$D(0 \vee 0) = D0 = b,\ D(0 \vee 0) = D0 \vee d0 = b \vee a = b$

$D(0 \vee a) = Da = b,\ D(0 \vee a) = D0 \vee da = b \vee a = b$

$D(0 \vee b) = Db = b,\ D(0 \vee b) = D0 \vee db = b \vee a = b$

$D(0 \vee 1) = D1 = b,\ D(0 \vee 1) = D0 \vee d1 = b \vee a = b$

$D(a \vee 0) = Da = b,\ D(a \vee 0) = Da \vee d0 = b \vee a = b$

$D(a \vee a) = Da = b,\ D(a \vee a) = Da \vee da = b \vee a = b$

$D(a \vee b) = Db = b,\ D(a \vee b) = Da \vee db = b \vee a = b$

$D(a \vee 1) = D1 = b,\ D(a \vee 1) = Da \vee d1 = b \vee a = b$

$D(b \vee 0) = Db = b,\ D(b \vee 0) = Db \vee d0 = b \vee a = b$

$D(b \vee a) = Db = b,\ D(b \vee a) = Db \vee da = b \vee a = b$

$D(b \vee b) = Db = b,\ D(b \vee b) = Db \vee db = b \vee a = b$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$D(b \vee 1) = D1 = b,\ D(b \vee 1) = Db \vee d1 = b \vee a = b$
$D(1 \vee 0) = D1 = b,\ D(1 \vee 0) = D1 \vee d0 = b \vee a = b$
$D(1 \vee a) = D1 = b,\ D(1 \vee a) = D1 \vee da = b \vee a = b$
$D(1 \vee b) = D1 = b,\ D(1 \vee b) = D1 \vee db = b \vee a = b$
$D(1 \vee 1) = D1 = b,\ D(1 \vee 1) = D1 \vee d1 = b \vee a = b$

นั่นคือ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L

ทฤษฎีบท 4.3 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $dx \leq Dx \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq D(x \vee y) \leq Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ (1) โดยทฤษฎีบท 2.4(1) ในตอนที่ 2

(2) ให้ $x, y \in L$

จะได้ว่า $D(x \wedge y) = \big(Dx \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge dy\big)$

$\leq Dx \vee dy$

$= D(x \vee y)$ (โดยบทนิยาม 4.1)

ดังนั้น $D(x \wedge y) \leq D(x \vee y)$

นอกจากนั้นจะได้อีกว่า $D(x \vee y) = Dx \vee dy$

$\leq Dx \vee Dy$ (เพราะว่า $dy \leq Dy$)

ดังนั้น $D(x \vee y) \leq Dx \vee Dy$

ฉะนั้น $D(x \wedge y) \leq D(x \vee y) \leq Dx \vee Dy$

โดยทฤษฎีบท 2.4(2) ในตอนที่ 2 เราทราบว่า $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq Dx \vee Dy$

สรุปได้ว่า $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq D(x \vee y) \leq Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 4.4 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า D เป็น order-preserving

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$

ดังนั้น $x \wedge y = x$ และ $x \vee y = y$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

โดยทฤษฎีบท 4.3(2) เราทราบว่า $D(x \wedge y) \leq D(x \vee y)$

จะได้ว่า $Dx \leq Dy$

นั่นคือ D เป็น order-preserving

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า D เป็น lattice-homomorphism

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x \wedge y \leq x$ และ $x \wedge y \leq y$

โดยทฤษฎีบท 4.4 เราทราบว่า D เป็น order-preserving

จะได้ $D(x \wedge y) \leq Dx$ และ $D(x \wedge y) \leq Dy$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $D(x \wedge y) \wedge Dy \leq Dx \wedge Dy$

ดังนั้น $D(x \wedge y) \leq Dx \wedge Dy$ เพราะว่า $D(x \wedge y) \leq Dy$

โดยทฤษฎีบท 4.4(2) เราทราบว่า $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y)$

ดังนั้น $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

นอกจากนั้นเราทราบว่า $x \leq x \vee y$ และ $y \leq x \vee y$

จะได้ว่า $Dx \leq D(x \vee y)$ และ $Dy \leq D(x \vee y)$ เพราะว่า D เป็น order-preserving

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการจะได้ $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y) \vee Dy$

$= D(x \vee y)$ (เพราะว่า $Dy \leq D(x \vee y)$)

ดังนั้น $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 4.4(2) เราทราบว่า $D(x \vee y) \leq Dx \vee Dy$

ดังนั้น $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

จาก $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ และ $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

สรุปได้ว่า D เป็น lattice-homomorphism

บทแทรก 4.6 ให้ L เป็น lattice และ $D : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า D เป็น lattice-homomorphism ก็ต่อเมื่อ D เป็น generalized lattice D-derivation บน L

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) กำหนดให้ D เป็น lattice-homomorphism

สมมติให้ $x, y \in L$

โดยบทแทรก 3.7 ในตอนที่ 3 จะได้ว่า D เป็น lattice D-derivation

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เนื่องจาก D เป็น lattice-homomorphism

ดังนั้น D เป็น join-homomorphism และ meet-homomorphism

จะได้ $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

และ $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$= (Dx \wedge Dy) \vee (Dx \wedge Dy)$

ดังนั้น $D(x \wedge y) = (Dx \wedge Dy) \vee (Dx \wedge Dy)$

นั่นคือ จะมี l attice D-derivation D ซึ่ง $D(x \wedge y) = (Dx \wedge Dy) \vee (Dx \wedge Dy)$ และ $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

สรุปได้ว่า D เป็น lattice D-derivation บน L

($\Leftarrow$) โดยทฤษฎีบท 4.5

บทแทรก 4.7 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $Dx \wedge Dy = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า $Dx = D1 \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x \in L$

เนื่องจาก L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด

ดังนั้น $x \leq 1$

โดยทฤษฎีบท 4.4 เราทราบว่า D เป็น order-preserving

จาก $x \leq 1$

จะได้ $Dx \leq D1$

$f(x) \wedge Dx \leq f(x) \wedge D1$ (โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $Dx \leq f(x) \wedge D1$ (เพราะว่า $Dx \leq f(x)$)

จาก $x \leq 1$

จะได้ว่า $x = x \wedge 1$

$Dx = D(1 \wedge x)$

$= (D1 \wedge f(x)) \vee (f(1) \wedge dx)$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= (D1 \wedge f(x)) \vee (1 \wedge dx)$

$= (D1 \wedge f(x)) \vee dx$

$= D1 \wedge f(x)$ (เพราะว่า $dx \leq Dx \leq f(x) \wedge D1$)

ดังนั้น $Dx = D1 \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

โดยทฤษฎีบท 4.8 เราจะได้ผลลัพธ์ที่ตามมาเป็นบทแทรก ดังนี้

บทแทรก 4.9 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

1. $D1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = D1$
2. $f(x) \leq D1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = f(x)$
3. $D1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = f(x)$

บทแทรก 4.10 ให้ L เป็น lattice ที่มี 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุด และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $D1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $f(1) = 1$ และ $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $D1 = 1$

โดยทฤษฎีบท 2.9(1) ในตอนที่ 2 จะได้ว่า $f(1) = 1$

โดยบทแทรก 4.9(3) จะได้ว่า $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

($\Leftarrow$) สมมติให้ $f(1) = 1$ และ $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

เราเห็นได้ชัดเจนว่า $D1 = f(1) = 1$

ทฤษฎีบท 4.11 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $Dx = Dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x = (x \wedge y) \vee x$

จะได้ $Dx = D((x \wedge y) \vee x)$

$= D(x \wedge y) \vee Dx$ (เพราะว่า D เป็น lattice-homomorphism)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= \big((Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)\big) \vee Dx$ (โดยบทนิยาม 4.1)

$= \big((Dx \wedge f(y)) \vee Dx\big) \vee (f(x) \wedge dy)$ (โดยบทนิยาม 1 ในส่วนวิธีการ)

$= Dx \vee (f(x) \wedge dy)$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $Dx = Dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in L$

เราทราบว่า $x \leq x \vee y$

จะได้ $f(x) \leq f(x \vee y)$ เพราะว่า f เป็น order-preserving

โดยทฤษฎีบท 4.3(1) จะได้ว่า $dx \leq Dx \leq f(x) \leq f(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 4.4 เราทราบว่า D เป็น order-preserving

จะได้ว่า $Dx \leq D(x \vee y)$

โดยบทตั้ง 6 ในส่วนวิธีการ จะได้ว่า $dx \leq Dx = Dx \wedge f(x) \leq D(x \vee y) \wedge f(x)$

เราทราบว่า $x = (x \vee y) \wedge x$

จะได้ $Dx = D\big((x \vee y) \wedge x\big)$

$= \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee \big(f(x \vee y) \wedge dx\big)$ (โดยบทนิยาม 4.1)

$= \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \vee dx$ (เพราะว่า $dx \leq f(x \vee y)$)

$= D(x \vee y) \wedge f(x)$ (เพราะว่า $dx \leq D(x \vee y) \wedge f(x)$)

ดังนั้น $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

ทฤษฎีบท 4.13 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

จากทฤษฎีบท 4.12 เราทราบว่า $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$

โดยทฤษฎีบท 4.5 เราทราบว่า D เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$= \big(D(x \vee y) \wedge f(x)\big) \wedge Dy$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$= \big(f(x) \wedge D(x \vee y)\big) \wedge Dy$ (โดยบทนิยาม 1(2) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x) \wedge \big(D(x \vee y) \wedge Dy\big)$ (โดยบทนิยาม 1(3) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x) \wedge Dy$ (โดยทฤษฎีบท 4.4 และ $y \leq x \vee y$)

ดังนั้น $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 4.14 ให้ L เป็น modular lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $Dx = f(x) \wedge D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

จากทฤษฎีบท 4.11 เราทราบว่า $Dx = Dx \vee \big(f(x) \wedge dy\big)$

จะได้ $Dx = f(x) \wedge (Dx \vee dy)$ (เพราะว่า L เป็น modular lattice และ $Dx \leq f(x)$

$= f(x) \wedge D(x \vee y)$ (โดยบทนิยาม 4.1)

ดังนั้น $Dx = f(x) \wedge D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ทฤษฎีบท 4.15 ให้ L เป็น modular lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

พิสูจน์ ให้ $x, y \in L$

โดยทฤษฎีบท 4.14 เราทราบว่า $Dx = f(x) \wedge D(x \vee y)$

โดยทฤษฎีบท 4.5 เราทราบว่า D เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$= \big(f(x) \wedge D(x \vee y)\big) \wedge Dy$

$= f(x) \wedge \big(D(x \vee y) \wedge Dy\big)$ (โดยบทนิยาม 1(3) ในส่วนวิธีการ)

$= f(x) \wedge \big((Dx \vee Dy) \wedge Dy\big)$

$= f(x) \wedge Dy$ (โดยบทนิยาม 1(4) ในส่วนวิธีการ)

ดังนั้น $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

บทแทรก 4.16 ให้ L เป็น distributive lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $Dx = f(x) \wedge D(x \vee y)$ และ $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $Fix_D(L) = \{x \in L | Dx = f(x)\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $Fix_D(L)$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 4.17 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ ให้ $x, y \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Dx = f(x)$ และ $Dy = f(y)$

โดยทฤษฎีบท 4.5 เราทราบว่า D เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$= f(x) \wedge f(y)$

$= f(x \wedge y)$

ดังนั้น $D(x \wedge y) = f(x \wedge y)$

นั่นคือ $x \wedge y \in Fix_D(L)$

และจะได้ว่า $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

$= f(x) \vee f(y)$

$= f(x \vee y)$

ดังนั้น $D(x \vee y) = f(x \vee y)$

นั่นคือ $x \vee y \in Fix_D(L)$

สรุปได้ว่า $x \wedge y \in Fix_D(L)$ และ $x \vee y \in Fix_D(L)$

นั่นคือ $Fix_D(L)$ เป็น sublattice ของ L

ทฤษฎีบท 4.18 ให้ L เป็น lattice และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism จะได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in Fix_D(L)$

จะได้ว่า $Dy = f(y)$

โดยบทตั้ง 14(3) ในส่วนวิธีการจะได้ f เป็น order-preserving

ดังนั้น $f(x) \leq f(y)$

จาก $x \leq y$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

จะได้ $x = x \wedge y$

$Dx = D(x \wedge y)$

$= D(y \wedge x)$ (โดยบทนิยาม 1(2) ในส่วนวิธีการ)

$= (Dy \wedge f(x)) \vee (f(y) \wedge dx)$ (โดยบทนิยาม 4.1)

$= (f(y) \wedge f(x)) \vee (f(y) \wedge dx)$ (เพราะว่า $Dy = f(y)$)

$= f(x) \vee dx$ (เพราะว่า $dx \leq Dx \leq f(x) \leq f(y) = Dy$)

$= f(x)$

ดังนั้น $Dx = f(x)$

แสดงว่า $x \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Fix_D(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

ต่อไปสมมติให้ $x, y \in Fix_D(L)$

โดยทฤษฎีบท 4.17 เราทราบว่า $Fix_D(L)$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in Fix_D(L)$

ดังนั้น $Fix_D(L)$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $Fix_D(L)$ เป็น ideal ของ L

ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน กำหนด $\ker D = \{x \in L | Dx = 0\}$

ผลลัพธ์ต่อไปนี้เราสมมติให้ $\ker D$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L

ทฤษฎีบท 4.19 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $\ker D$ เป็น sublattice ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in \ker D$

ดังนั้น $Dx = 0 = Dy$

โดยทฤษฎีบท 4.5 เราทราบว่า D เป็น lattice-homomorphism

ดังนั้น $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ และ $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

จะได้ $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$= 0 \wedge 0$

$= 0$

ดังนั้น $D(x \wedge y) = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

แสดงว่า $x \wedge y \in \ker D$

และยังได้อีกว่า $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

$= 0 \vee 0$

$= 0$

ดังนั้น $D(x \vee y) = 0$

นั่นคือ $x \vee y \in \ker D$

จาก $x \wedge y \in \ker D$ และ $x \vee y \in \ker D$

สรุปได้ว่า $\ker D$ เป็น sublattice ของ L

ทฤษฎีบท 4.20 ให้ L เป็น lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $\ker D$ เป็น ideal ของ L

พิสูจน์ สมมติให้ $x, y \in L$ ซึ่ง $x \leq y$ และ $y \in \ker D$

จะได้ว่า $Dy = 0$

โดยทฤษฎีบท 4.5 เราทราบว่า D เป็น lattice-homomorphism

จะได้ว่า $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

$Dx = Dx \wedge 0$ (เพราะว่า $x \leq y$ และ $Dy = 0$)

$= 0$

ดังนั้น $Dx = 0$

แสดงว่า $x \in \ker D$

ดังนั้น $\ker D$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 1 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

โดยทฤษฎีบท 4.19 เราทราบว่า $\ker D$ เป็น sublattice ของ L

ดังนั้น $x \vee y \in \ker D$

ดังนั้น $\ker D$ สอดคล้องกับสมบัติข้อ 2 ของบทนิยาม 12 ในส่วนวิธีการ

สรุปได้ว่า $\ker D$ เป็น ideal ของ L

ทฤษฎีบท 4.21 ให้ L เป็น lattice และ D_i เป็น generalized lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2$ จะได้ว่า $D_1 \circ D_2$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L (กำหนด $(D_1 \circ D_2)(x) = D_1(D_2 x)$ สำหรับทุก $x \in L$)

พิสูจน์ กำหนดให้ $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สมมติให้ D_1 เป็น generalized lattice f_1-derivation บน L เมื่อ $f_1 : L \to L$ เป็นฟังก์ชันโดยที่มี lattice f_1-derivation d_1 บน L ซึ่ง $D_1(x \wedge y) = (D_1x \wedge f_1(y)) \vee (f_1(x) \wedge d_1y)$ และ $D_1(x \vee y) = D_1x \vee d_1y$ สำหรับทุก $x, y \in L$ และสมมติให้ D_2 เป็น generalized lattice f_2-derivation บน L เมื่อ $f_2 : L \to L$ เป็นฟังก์ชันโดยที่มี lattice f_2-derivation d_2 บน L ซึ่ง $D_2(x \wedge y) = (D_2x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2y)$ และ $D_2(x \vee y) = D_2x \vee d_2y$ สำหรับทุก $x, y \in L$ โดยทฤษฎีบท 3.21 ในตอนที่ 3 จะได้ว่า $d_1 \circ d_2$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

จะได้ $(D_1 \circ D_2)(x \wedge y) = D_1(D_2(x \wedge y))$

$$
\begin{aligned}
&= D_1\big((D_2x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2y)\big) \\
&= D_1(D_2x \wedge f_2(y)) \vee d_1(f_2(x) \wedge d_2y) \\
&= \big((D_1(D_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y)))\big) \\
&\qquad \vee \big((d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2y)) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))\big) \\
&= (D_1(D_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y))) \\
&\qquad \vee (d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2y)) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)) \\
&= \big[(D_1(D_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y))\big] \\
&\qquad \vee (f_1(d_2x) \wedge d_1(f_2(y))) \vee (d_1(f_2(x)) \wedge f_1(d_2y)) \\
&\geq (D_1(D_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)) \\
&= ((D_1 \circ D_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$(D_1 \circ D_2)(x \wedge y) \geq ((D_1 \circ D_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$$

และจะได้ $(D_1 \circ D_2)(x \wedge y) = D_1(D_2(x \wedge y))$

$$
\begin{aligned}
&= D_1\big((D_2x \wedge f_2(y)) \vee (f_2(x) \wedge d_2y)\big) \\
&= D_1(D_2x \wedge f_2(y)) \vee d_1(f_2(x) \wedge d_2y) \\
&= (D_1(D_2x) \wedge D_1(f_2(y))) \vee (d_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)) \\
&\leq (D_1(D_2x) \wedge D_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)) \\
&\leq (D_1(D_2x) \wedge f_1(f_2(y))) \vee (f_1(f_2(x)) \wedge d_1(d_2y)) \\
&= ((D_1 \circ D_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$(D_1 \circ D_2)(x \wedge y) \leq ((D_1 \circ D_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)) \vee ((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y))$$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ฉะนั้น

$(D_1 \circ D_2)(x \wedge y) = \big((D_1 \circ D_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)$

นอกจากนั้นจะได้ว่า $(D_1 \circ D_2)(x \vee y) = D_1(D_2(x \vee y))$

$= D_1(D_2 x \vee d_2 y)$

$= D_1(D_2 x) \vee d_1(d_2 y)$

$= (D_1 \circ D_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y)$

ดังนั้น $(D_1 \circ D_2)(x \vee y) = (D_1 \circ D_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y)$

นั่นคือ จะมี lattice $f_1 \circ f_2$-derivation $d_1 \circ d_2$ บน L ซึ่ง

$(D_1 \circ D_2)(x \wedge y) = \big((D_1 \circ D_2)(x) \wedge (f_1 \circ f_2)(y)\big) \vee \big((f_1 \circ f_2)(x) \wedge (d_1 \circ d_2)(y)\big)$

และ $(D_1 \circ D_2)(x \vee y) = (D_1 \circ D_2)(x) \vee (d_1 \circ d_2)(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

สรุปได้ว่า $D_1 \circ D_2$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

ทฤษฎีบท 4.22 ให้ L เป็น lattice และ D_i เป็น generalized lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2, ..., n, ...$ จะได้ว่า $D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

(กำหนด $(D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n)(x) = D_1(D_2(...(D_n x)...))$ สำหรับทุก $x \in L$)

พิสูจน์ สมมติให้แต่ละ D_i ซึ่งเป็น generalized lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะมี lattice f_i-derivation d_i บน L ซึ่ง $D_i(x \vee y) = D_i x \vee d_i y$ และ $D_i(x \wedge y) = (D_i x \wedge f_i(y)) \vee (f_i(x) \wedge d_i y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$ เมื่อ $i = 1, 2, ..., n, ...$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

สมมติให้ P(n) แทนข้อความ $D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$- derivation บน L

สำหรับ $n = 2$ จะได้ $D_1 \circ D_2$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L โดยทฤษฎีบท 4.21

ให้ $n \geq 3$ สมมติให้ P(n) เป็นจริง

เพื่อความสะดวกกำหนดให้ $P_n = D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n$ และ $F_n = f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$

ดังนั้น P_n เป็น generalized lattice F_n-derivation บน L

เนื่องจาก D_{n+1} เป็น generalized lattice f_{n+1}-derivation บน L

และโดยทฤษฎีบท 4.21 จะได้ว่า $P_n \circ D_{n+1}$ เป็น generalized lattice $F_n \circ f_{n+1}$-derivation บน L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

นั่นคือ $D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n \circ D_{n+1}$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n \circ f_{n+1}$-derivation บน L

สรุปได้ว่า $D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

สำหรับการศึกษาในส่วนนี้ เราได้ศึกษา generalized lattice f-derivation ใน lattice ในอีกรูปแบบหนึ่งเพิ่มเติมโดยใช้นิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.23 ให้ L เป็น lattice เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $D : L \to L$ เป็น generalized lattice f-derivation บน L ถ้ามี lattice f-derivation $d : L \to L$ ซึ่ง

$D(x \wedge y) = \big(D(x) \wedge f(y)\big) \vee \big(f(x) \wedge d(y)\big)$ และ $D(x \vee y) = D(x) \vee D(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

จากบทนิยาม 4.23 เราพบว่า ถ้า $D = d$ แล้ว D เป็น lattice f-derivation และ ถ้า D เป็น generalized lattice f-derivation แล้ว D เป็น generalized f-derivation เช่นเดียวกับข้อสังเกตในบทนิยาม 4.1 นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างที่สอดคล้องกับบทนิยาม 4.23 ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.24 ให้ $L = \{0, a, b, 1\}$ เป็น lattice ดังภาพที่ 1 ในตอนที่ 1

นิยามฟังก์ชัน $d : L \to L$, $D : L \to L$ และฟังก์ชัน $f : L \to L$ ตามลำดับดังต่อไปนี้

$$dx = \begin{cases} a & \text{สำหรับ } x = b, 1 \\ 0 & \text{สำหรับ } x = 0, a \end{cases}, \quad Dx = \begin{cases} b & \text{สำหรับ } x = b, 1 \\ 0 & \text{สำหรับ } x = 0, a \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ } x = b, 1 \\ 0 & \text{สำหรับ } x = 0, a \end{cases}$$

ตรวจสอบได้ว่า

$d(0 \wedge 0) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 0) = \big(d0 \wedge f(0)\big) \vee \big(f(0) \wedge d0\big) = \big(0 \wedge 0\big) \vee \big(0 \wedge 0\big) = 0$

$d(0 \wedge a) = d0 = 0,\ d(0 \wedge a) = \big(d0 \wedge f(a)\big) \vee \big(f(0) \wedge da\big) = \big(0 \wedge 0\big) \vee \big(0 \wedge 0\big) = 0$

$d(0 \wedge b) = d0 = 0,\ d(0 \wedge b) = \big(d0 \wedge f(b)\big) \vee \big(f(0) \wedge db\big) = \big(0 \wedge b\big) \vee \big(0 \wedge a\big) = 0$

$d(0 \wedge 1) = d0 = 0,\ d(0 \wedge 1) = \big(d0 \wedge f(1)\big) \vee \big(f(0) \wedge d1\big) = \big(0 \wedge 1\big) \vee \big(0 \wedge a\big) = 0$

$d(a \wedge a) = da = 0,\ d(a \wedge a) = \big(da \wedge f(a)\big) \vee \big(f(a) \wedge da\big) = \big(0 \wedge 0\big) \vee \big(0 \wedge 0\big) = 0$

$d(a \wedge b) = da = 0,\ d(a \wedge b) = \big(da \wedge f(b)\big) \vee \big(f(a) \wedge db\big) = \big(0 \wedge b\big) \vee \big(0 \wedge a\big) = 0$

$d(a \wedge 1) = da = 0,\ d(a \wedge 1) = \big(da \wedge f(1)\big) \vee \big(f(a) \wedge d1\big) = \big(0 \wedge 1\big) \vee \big(0 \wedge a\big) = 0$

$d(b \wedge b) = db = a,\ d(b \wedge b) = \big(db \wedge f(b)\big) \vee \big(f(b) \wedge db\big) = \big(a \wedge b\big) \vee \big(b \wedge a\big) = a$

$d(b \wedge 1) = db = a,\ d(b \wedge 1) = \big(db \wedge f(1)\big) \vee \big(f(b) \wedge d1\big) = \big(a \wedge 1\big) \vee \big(b \wedge a\big) = a$

$d(1 \wedge 1) = d1 = a,\ d(1 \wedge 1) = \big(d1 \wedge f(1)\big) \vee \big(f(1) \wedge d1\big) = \big(a \wedge 1\big) \vee \big(1 \wedge a\big) = a$

$d(0 \vee 0) = d0 = 0,\ d(0 \vee 0) = d0 \vee d0 = 0 \vee 0 = 0$

$d(0 \vee a) = da = 0,\ d(0 \vee a) = d0 \vee da = 0 \vee 0 = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$d(0 \vee b) = db = a,\ d(0 \vee b) = d0 \vee db = 0 \vee a = a$

$d(0 \vee 1) = d1 = a,\ d(0 \vee 1) = d0 \vee d1 = 0 \vee a = a$

$d(a \vee a) = da = 0,\ d(a \vee a) = da \vee da = 0 \vee 0 = 0$

$d(a \vee b) = db = a,\ d(a \vee b) = da \vee db = 0 \vee a = a$

$d(a \vee 1) = d1 = a,\ d(a \vee 1) = da \vee d1 = 0 \vee a = a$

$d(b \vee b) = db = a,\ d(b \vee b) = db \vee db = a \vee a = a$

$d(b \vee 1) = d1 = a,\ d(b \vee 1) = db \vee d1 = a \vee a = a$

$d(1 \vee 1) = d1 = a,\ d(1 \vee 1) = d1 \vee d1 = a \vee a = a$

ดังนั้น d เป็น lattice f-derivation บน L

และตรวจสอบได้ว่า

$D(0 \wedge 0) = D0 = 0,\ D(0 \wedge 0) = (D0 \wedge f(0)) \vee (f(0) \wedge d0) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$

$D(0 \wedge a) = D0 = 0,\ D(0 \wedge a) = (D0 \wedge f(a)) \vee (f(0) \wedge da) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$

$D(0 \wedge b) = D0 = 0,\ D(0 \wedge b) = (D0 \wedge f(b)) \vee (f(0) \wedge db) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0$

$D(0 \wedge 1) = D0 = 0,\ D(0 \wedge 1) = (D0 \wedge f(1)) \vee (f(0) \wedge d1) = (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge a) = 0$

$D(a \wedge 0) = D0 = 0,\ D(a \wedge 0) = (Da \wedge f(0)) \vee (f(a) \wedge d0) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$

$D(a \wedge a) = Da = 0,\ D(a \wedge a) = (Da \wedge f(a)) \vee (f(a) \wedge da) = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) = 0$

$D(a \wedge b) = Da = 0,\ D(a \wedge b) = (Da \wedge f(b)) \vee (f(a) \wedge db) = (0 \wedge b) \vee (0 \wedge a) = 0$

$D(a \wedge 1) = Da = 0,\ D(a \wedge 1) = (Da \wedge f(1)) \vee (f(a) \wedge d1) = (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge a) = 0$

$D(b \wedge 0) = D0 = 0,\ D(b \wedge 0) = (Db \wedge f(0)) \vee (f(b) \wedge d0) = (b \wedge 0) \vee (b \wedge 0) = 0$

$D(b \wedge a) = Da = 0,\ D(b \wedge a) = (Db \wedge f(a)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge 0) \vee (b \wedge 0) = 0$

$D(b \wedge b) = Db = b,\ D(b \wedge b) = (Db \wedge f(b)) \vee (f(b) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (b \wedge a) = b$

$D(b \wedge 1) = Db = b,\ D(b \wedge 1) = (Db \wedge f(1)) \vee (f(b) \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (b \wedge a) = b$

$D(1 \wedge 0) = D0 = 0,\ D(1 \wedge 0) = (D1 \wedge f(0)) \vee (f(1) \wedge d0) = (b \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0$

$D(1 \wedge a) = Da = 0,\ D(1 \wedge a) = (D1 \wedge f(a)) \vee (f(1) \wedge da) = (b \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) = 0$

$D(1 \wedge b) = Db = b,\ D(1 \wedge b) = (D1 \wedge f(b)) \vee (f(1) \wedge db) = (b \wedge b) \vee (1 \wedge a) = b$

$D(1 \wedge 1) = D1 = b,\ D(1 \wedge 1) = (D1 \wedge f(1)) \vee (f(1) \wedge d1) = (b \wedge 1) \vee (1 \wedge a) = b$

$D(0 \vee 0) = D0 = 0,\ D(0 \vee 0) = D0 \vee D0 = 0 \vee 0 = 0$

$D(0 \vee a) = Da = 0,\ D(0 \vee a) = D0 \vee Da = 0 \vee 0 = 0$

$D(0 \vee b) = Db = b,\ D(0 \vee b) = D0 \vee Db = 0 \vee b = b$

$D(0 \vee 1) = D1 = b,\ D(0 \vee 1) = D0 \vee D1 = 0 \vee b = b$

$D(a \vee 0) = Da = 0,\ D(a \vee 0) = Da \vee D0 = 0 \vee 0 = 0$

$D(a \vee a) = Da = 0,\ D(a \vee a) = Da \vee Da = 0 \vee 0 = 0$

$D(a \vee b) = Db = b,\ D(a \vee b) = Da \vee Db = 0 \vee b = b$

$D(a \vee 1) = D1 = b,\ D(a \vee 1) = Da \vee D1 = 0 \vee b = b$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

$D(b \vee 0) = Db = b$, $D(b \vee 0) = Db \vee D0 = b \vee 0 = b$

$D(b \vee a) = Db = b$, $D(b \vee a) = Db \vee Da = b \vee 0 = b$

$D(b \vee b) = Db = b$, $D(b \vee b) = Db \vee Db = b \vee b = b$

$D(b \vee 1) = D1 = b$, $D(b \vee 1) = Db \vee D1 = b \vee b = b$

$D(1 \vee 0) = D1 = b$, $D(1 \vee 0) = D1 \vee D0 = b \vee 0 = b$

$D(1 \vee a) = D1 = b$, $D(1 \vee a) = D1 \vee Da = b \vee 0 = b$

$D(1 \vee b) = D1 = b$, $D(1 \vee b) = D1 \vee Db = b \vee b = b$

$D(1 \vee 1) = D1 = b$, $D(1 \vee 1) = D1 \vee D1 = b \vee b = b$

นั่นคือ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สรุป

จากผลการวิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้

ให้ L เป็น lattice $d: L \to L$ $D: L \to L$ และ $f: L \to L$ เป็นฟังก์ชัน ให้ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ L จะเรียก I ว่า f-invariant ถ้า $f(I) \subseteq I$ กำหนด $\mathrm{Fix}_d(L) = \{x \in L | dx = f(x)\}$ $\mathrm{Fix}_D(L) = \{x \in L | Dx = f(x)\}$ $\ker d = \{x \in L | dx = 0\}$ และ $\ker D = \{x \in L | Dx = 0\}$ เป็นสับเซตแท้ไม่ว่างของ L กำหนด $(d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n)(x) = d_1(d_2(\ldots(d_n x)\ldots))$ สำหรับทุก $x \in L$ และการเขียน $d^n x$ หมายถึง $\underbrace{(d \circ d \circ \cdots \circ d)}_{n}(x) = \underbrace{d(d(\ldots(d}_{n} x)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะเรียก $d^n x$ ว่า derivation อันดับที่ n ของ x ถ้า d เป็น derivation บน L และ $d^0 x$ หมายถึง x

1. f-derivation ใน lattices

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน d เป็น f-derivation บน L ถ้า $d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ให้ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f: L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $dx \le f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $dx \wedge dy \le d(x \wedge y) \le dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
   3.1. d เป็น order-preserving
   3.2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
   3.3. $dx \vee dy \le d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
4. ถ้า I เป็น ideal ของ L ซึ่ง I เป็น f-invariant แล้ว I เป็น d-invariant
5. ถ้า 0 เป็นสมาชิกตัวที่เล็กที่สุดใน L และ $f(0) = 0$ แล้ว $d0 = 0$
6. ถ้า 0 เป็นสมาชิกตัวที่เล็กที่สุดใน L และ $d0 = 0$ แล้ว จะได้ว่า
   6.1. $dx \wedge f(0) = 0$ สำหรับทุก $x \in L$
   6.2. $dx \le f(0)$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ d เป็น zero f-derivation
   6.3. $f(0) \le dx$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ $f(0) = 0$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

6.4. ถ้า $f(0) \neq 0$ และ มี $x \in L$ ซึ่ง $dx \neq 0$ แล้ว $(L, \leq)$ ไม่เป็น chain

7. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L และ $d1 = 1$ แล้ว $f(1) = 1$

8. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L และ $f(1) = 1$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

8.1. $dx = dx \vee (f(x) \wedge d1)$

8.2. $d1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $d1 \leq dx$

8.3. ถ้า $d1 \leq f(x)$ และ d เป็น order-preserving แล้ว $dx = d1$

8.4. ถ้า $f(x) \leq d1$ แล้ว $dx = f(x)$

8.5. $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$

9. ให้ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า

9.1. $dx = dx \vee (f(x) \wedge d(x \vee y))$ สำหรับทุก $x, y \in L$

9.2. ถ้าสำหรับ $x, y \in L$ ซึ่ง $y \leq x$ โดยที่ $dx = f(x)$ แล้ว $dy = f(y)$

9.3. ถ้า d เป็น order-preserving แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

9.3.1. $d^2x = f(dx) \wedge d(f(x))$

9.3.2. $d^n x = f(d^{n-1}x) \wedge d(f(d^{n-2}x))$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2$

9.4. ถ้า d เป็น order-preserving และ $d(f(x)) = f(dx)$ สำหรับทุก $x \in L$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

9.4.1 $d^2x = d(f(x))$

9.4.2 $d^n x = d^{n-1}(f(x))$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

10. ให้ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น j oin-homomorphism จะได้ว่า

10.1. $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ $d(x \vee y) = (dx \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

10.2. ถ้า 0 เป็นสมาชิกตัวที่เล็กที่สุดใน L และ d เป็น order-preserving แล้ว $\ker d$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

10.3. ถ้า L เป็น distributive lattice แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

10.3.1. d เป็น order-preserving

10.3.2. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

10.3.3. $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

10.4. ถ้า L เป็น modular lattice d เป็น order-preserving และ มีสมาชิก $a \in Fix_d(L)$ แล้ว $d(x \vee a) = dx \vee da$ สำหรับทุก $x \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

11. ให้ L เป็น distributive lattice และ d_i เป็น order-preseving และ f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็น join-homomorphism สำหรับ $i = 1, 2,..., n, ...$ จะได้ว่า

11.1. $d_1 \circ d_2$ เป็น $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

11.2. $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

12. ถ้า 1 เป็นสมาชิกตัวที่ใหญ่ที่สุดใน L และ d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น meet-homomorphism ซึ่ง $f(1) = 1$ จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

12.1. d เป็น order-preserving

12.2. $dx = f(x) \wedge d1$ สำหรับทุก $x \in L$

12.3. $d(x \wedge y) = dx \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

12.4. $dx \vee dy \leq d(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

13. ถ้า d เป็น f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism และ d เป็น order-preserving แล้ว $Fix_d(L)$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

2. generalized f-derivation ใน lattice

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน D เป็น generalized f-derivation บน L ถ้ามี f-derivation d บน L ซึ่ง $D(x \wedge y) = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ให้ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. $dx \leq Dx \leq f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$
2. $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
3. ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

3.1. D เป็น order-preserving

3.2. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

3.3. $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

4. ถ้า I เป็น ideal ของ L ซึ่ง I เป็น f-invariant แล้ว I เป็น D-invariant
5. ถ้า 0 เป็นสมาชิกตัวที่เล็กที่สุดใน L และ $f(0) = 0$ แล้ว $D0 = 0$
6. ถ้า 0 เป็นสมาชิกตัวที่เล็กที่สุดใน L และ $D0 = 0$ แล้ว จะได้ว่า

6.1. $Dx \wedge f(0) = 0$ สำหรับทุก $x \in L$

6.2. $Dx \leq f(0)$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = 0$ สำหรับทุก $x \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

6.3. $f(0) \leq Dx$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ $f(0) = 0$

6.4. ถ้า $f(0) \neq 0$ และมี $x \in L$ ซึ่ง $Dx \neq 0$ แล้ว $(L, \leq)$ ไม่เป็น chain

7. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L และ $D1 = 1$ แล้ว $f(1) = 1$

8. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L และ $f(1) = 1$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

8.1. $Dx = (D1 \wedge f(x)) \vee dx$

8.2. $D1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $D1 \leq Dx$

8.3. ถ้า $D1 \leq f(x)$ และ D เป็น order-preserving แล้ว $Dx = D1$

8.4. ถ้า $f(x) \leq D1$ แล้ว $Dx = f(x)$

8.5. $D1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = f(x)$

9. ถ้า D เป็น order-preserving แล้ว $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

10. ให้ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving จะได้ว่า

10.1. $Dx = (D(x \vee y) \wedge f(x)) \vee dx$ สำหรับทุก $x, y \in L$

10.2. ถ้าสำหรับ $x, y \in L$ ซึ่ง $y \leq x$ โดยที่ $Dx = f(x)$ แล้ว $Dy = f(y)$

11. ให้ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น join-homomorphism จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$

11.1. $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$ ก็ต่อเมื่อ
$D(x \vee y) = (Dx \vee f(y)) \wedge (f(x) \vee Dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

11.2. ถ้า L เป็น distributive lattice ที่มี 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุด และ D เป็น order-preserving แล้ว $\ker D$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

11.3. ถ้า L เป็น distributive lattice แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

11.3.1. D เป็น order-preserving

11.3.2. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$

11.3.3. $D(x \vee y) = Dx \vee Dy$

11.4. ถ้า L เป็น modular lattice D เป็น order-preserving และมี $a \in Fix_D(L)$ แล้ว $D(x \vee a) = Dx \vee Da$ สำหรับทุก $x \in L$

12. ถ้า 1 เป็นสมาชิกตัวที่ใหญ่ที่สุดใน L และ D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น meet-homomorphism ซึ่ง $f(1) = 1$ แล้ว จะได้ว่า ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

12.1. D เป็น order-preserving

12.2. $Dx = f(x) \wedge D1$ สำหรับทุก $x \in L$

12.3. $D(x \wedge y) = Dx \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

12.4. $Dx \vee Dy \leq D(x \vee y)$ สำหรับทุก $x, y \in L$

13. ถ้า D เป็น generalized f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism และ D เป็น order-preserving แล้ว $Fix_D(L)$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

3. lattice f-derivation ใน lattices

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน d เป็น lattice f-derivation บน L ถ้า
$d(x \wedge y) = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ และ $d(x \vee y) = dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ให้ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. d เป็น f-derivation
2. d เป็น order-preserving
3. d เป็น lattice-homomorphism
4. $dx \wedge dy = (dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
5. $dx = dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
6. ถ้า L เป็น modular lattice แล้ว $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ และ $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
7. ถ้า L เป็น distributive lattice แล้ว $dx = f(x) \wedge d(x \vee y)$ และ $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
8. ถ้า 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดใน L แล้ว $\ker d$ เป็น sublattice และ ideal ของ L
9. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L และ $f(1) = 1$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$
   9.1. $dx = f(x) \wedge d1$
   9.2. $d1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $dx = d1$
   9.3. $f(x) \leq d1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$
   9.4. $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $dx = f(x)$
10. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L แล้ว $d1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $f(1) = 1$ และ $dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$
11. ให้ d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x, y \in L$
    11.1. $dx = d(x \vee y) \wedge f(x)$
    11.2. $d(x \wedge y) = f(x) \wedge dy$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

11.3. $d^2x = f(dx) \wedge d(f(x))$

11.4. $d^nx = f(d^{n-1}x) \wedge d(f(d^{n-2}x))$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 2$

11.5. ถ้า $d(f(x)) = f(dx)$ แล้ว $d^2x = d(f(x))$ และ $d^nx = d^{n-1}(f(x))$ สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

12. ถ้า d เป็น lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism แล้ว $Fix_d(L)$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

13. ถ้า $d : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า d เป็น lattice-homomorphism ก็ต่อเมื่อ d เป็น lattice d-derivation บน L

14. ให้ d_i เป็น lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชันสำหรับ $i = 1, 2, ..., n, ...$ จะได้ว่า

14.1. $d_1 \circ d_2$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

14.2. $d_1 \circ d_2 \circ \cdots \circ d_n$ เป็น lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

4. generalized lattice f-derivation ใน lattices

เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน D เป็น generalized lattice f-derivation บน L ถ้ามี lattice f-derivation d บน L ซึ่ง $D(x \wedge y) = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ และ $D(x \vee y) = Dx \vee dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ให้ D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. D เป็น generalized f-derivation
2. D เป็น order-preserving
3. D เป็น lattice-homomorphism
4. $Dx \wedge Dy \leq D(x \wedge y) \leq D(x \vee y) \leq Dx \vee Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
5. $Dx \wedge Dy = (Dx \wedge f(y)) \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
6. $Dx = Dx \vee (f(x) \wedge dy)$ สำหรับทุก $x, y \in L$
7. ถ้า L เป็น modular lattice แล้ว $Dx = f(x) \wedge D(x \vee y)$ และ $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$
8. ถ้า L เป็น distributive lattice แล้ว $Dx = f(x) \wedge D(x \vee y)$ และ $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

9. ถ้า 0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดใน L แล้ว $\ker D$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

10. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L และ $f(1)=1$ แล้ว จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in L$

10.1. $Dx = D1 \wedge f(x)$

10.2. $D1 \leq f(x)$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = D1$

10.3. $f(x) \leq D1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = f(x)$

10.4. $D1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ $Dx = f(x)$

11. ถ้า 1 เป็นสมาชิกที่ใหญ่ที่สุดใน L แล้ว $D1=1$ ก็ต่อเมื่อ $f(1)=1$ และ $Dx = f(x)$ สำหรับทุก $x \in L$

12. ถ้า D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น order-preserving แล้ว $Dx = D(x \vee y) \wedge f(x)$ และ $D(x \wedge y) = f(x) \wedge Dy$ สำหรับทุก $x, y \in L$

13. ถ้า D เป็น generalized lattice f-derivation บน L เมื่อ $f : L \to L$ เป็น lattice-homomorphism แล้ว $Fix_D(L)$ เป็น sublattice และ ideal ของ L

14. ถ้า $D : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว D เป็น lattice-homomorphism ก็ต่อเมื่อ D เป็น generalized lattice D-derivation บน L

15. ให้ D_i เป็น generalized lattice f_i-derivation บน L เมื่อ $f_i : L \to L$ เป็นฟังก์ชัน สำหรับ $i = 1, 2, ..., n, ...$ จะได้ว่า

15.1. $D_1 \circ D_2$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2$-derivation บน L

15.2. $D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_n$ เป็น generalized lattice $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$-derivation บน L สำหรับจำนวนเต็มบวก $n \geq 2$

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

Al-shehri, N.O. 2010. Generalized Derivations of Lattices. **Int. J. Contemp. Math. Sciences** 5 (13): 629-640.

Bell, H.E. and L.C. Kappe. 1989. Rings in which Derivations Satisfy Certain Algebraic Conditions. **Acta Math. Hungar**. 53(3-4): 339-346.

Bell. H.E. and G. Mason. 1987. On Derivations in Near-ring and Near-fields. **North-Holland Math. Studies**. 137: 31-35.

Hamza, A.S.A. and N.O. Al-Shehri. 2006. Some results on derivations of BCI-algebras. **Coden Jnsmac** 46: 13-19.

Hamza, A.S.A. and N.O. Al-Shehri. 2007. On left derivations of BCI-algebras. **Soochow Journal of Mathematics** 33 (6): 435-444.

Jun,Y.B. and X.L. Xin. 2004. On derivations of BCI-algebras. **Information Sciences** 159: 167-176.

Lidl, R. and G. Pilz. 1984. **Applied Abstract Algebra.** 7 ed. Springer-Verlag New York Inc, U.S.A.

Nisar, F. 2009. On F-Derivation of BCI-Algebra. **Journal of Prime Research in Mathematics** (5): 176-191.

Posner, E. 1957. Derivations in Prime Rings. **Proc. Am. Math. Soc**. 8: 1093-1100.

Prabprayak, C. and U. Leerawat. 2009. On derivations of BCC-algebras. **Kasetsart Journal** 53: 398-401.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

Xin, L.X., T.Y. Li and J.H. Lu. 2008. On derivations of lattice. **Information Sciences** 178: 307-316.

Zhan, J. and Y.L. Liut. 2005. On f-derivations of BCI-algebras. **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences** 11: 1675-1684.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ชื่อ	นางสาวสุรีพร หาไมตรี
เกิดวันที่	6 เมษายน 2526
สถานที่เกิด	อำเภออุทัย จังหวัดพระนครศรีอยุธยา
ประวัติการศึกษา	วท.บ. เกียตรนิยมอันดับ 2 (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประกาศนียบัตรบัณฑิต (วิชาชีพครู) มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
ตำแหน่งปัจจุบัน	ครู คศ.1
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	โรงเรียนเตรียมอุดมศึกษาพัฒนาการ นนทบุรี ต.บางกร่าง อ.เมืองนนทบุรี จ.นนทบุรี 11000
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ได้รับทุนโครงการส่งเสริมการผลิตครูผู้มีความสามารถพิเศษทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์(สควค.) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (พ.ศ. 2552-2553)

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์