



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

ปริญญา

คณิตศาสตร์

สาขา

คณิตศาสตร์

ภาควิชา

เรื่อง อนุพันธ์บน BCC-Algebras

On Derivations of BCC-Algebras

นามผู้วิจัย นายชาญวิทย์ ปรามพยัคฆ์

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์อูษณีย์ ลิ่ววัฒน์, วท.ค.)

หัวหน้าภาควิชา

(รองศาสตราจารย์อูษณีย์ ลิ่ววัฒน์, วท.ค.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญจนา วีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

อนุพันธ์บน BCC-Algebras

On Derivations of BCC-Algebras

โดย

นายชาญวิทย์ ปราบพยัคฆ์

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์)

พ.ศ. 2552

ชาญวิทย์ ปรามพย์คัม 2552: อนุพันธ์บน BCC-Algebras ปริญญาวิทยาศาสตร
มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์) สาขาคณิตศาสตร์ ภาควิชาคณิตศาสตร์ อาจารย์ที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์อุษณีย์ ลิ่ววัฒน์, วท.ค. 67 หน้า

งานวิจัยนี้ได้ประยุกต์แนวคิดของ regular derivation ของ BCI-algebra เข้ากับ BCC-
algebra รวมทั้งหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง และสร้างโครงสร้างทางพีชคณิตโครงสร้างหนึ่งที่
เรียกว่า KU-algebra ศึกษา derivation ของ KU-algebra และหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

Chanwit Prabpayak 2009: On Derivations of BCC-Algebras. Master of Science
(Mathematics), Major Field: Mathematics, Department of Mathematics. Thesis
Advisor: Associate Professor Utsanee Leerawat, Ph.D. 67 pages.

In this research we apply the notion of regular derivation of BCI-algebra to BCC-
algebra and we also investigate some related properties. We establish algebraic structure called
KU-algebra. We study derivation of KU-algebra and investigate related properties.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

____ / ____ / ____

กิตติกรรมประกาศ

ขอกราบขอพระคุณ รองศาสตราจารย์ ดร.อุษณีย์ ลิ่ววัฒน์ ประธานกรรมการที่ปรึกษา
วิทยานิพนธ์ ซึ่งท่านได้เอาใจใส่ให้คำปรึกษาอย่างใกล้ชิด ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.กนกรัตน์
เสวตเศรณี ประธานกรรมการสอบ และรองศาสตราจารย์วันดา ศรีแสงทอง กรรมการการสอบที่ได้
กรุณาให้คำแนะนำข้อคิดเห็น ตรวจสอบและแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดี
จนกระทั่งผู้วิจัยสามารถดำเนินการวิจัยได้สำเร็จสมบูรณ์ จึงกราบขอพระคุณอย่างสูงไว้ ณ โอกาสนี้

ขอขอบคุณอาจารย์และเพื่อนๆ ภาควิชาคณิตศาสตร์ ตลอดจนครอบครัวที่คอยช่วยเหลือ
สนับสนุนและให้กำลังใจตลอดเวลาในการศึกษา

ประโยชน์อันเนื่องมาจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ จะพึงมีเพียงใด ขอมอบแด่คุณพ่อและ
คณาจารย์ทุกท่านที่ได้เมตตาอบรมสั่งสอนให้มีความรู้จนถึงปัจจุบัน

ชาญวิทย์ ปราบพยัคฆ์
มีนาคม 2552

สารบัญ

หน้า

สารบัญ	(1)
คำอธิบายสัญลักษณ์	(2)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	3
การตรวจเอกสาร	4
วิธีการ	18
ผลการวิจัย	22
สรุป	62
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	66

คำอธิบายสัญลักษณ์

1	แทน เป็นสมาชิกของ
$\notin$	แทน ไม่เป็นสมาชิกของ
$\subseteq$	แทน เป็นสับเซตของ
$\subset$	แทน เป็นสับเซตแท้ของ
$\emptyset$	แทน เซตว่าง
$\mathbb{N}$	แทน เซตของจำนวนนับ

อนุพันธ์บน BCC-Algebras

On Derivations of BCC-Algebras

คำนำ

BCI-algebra หมายถึง คือระบบคณิตศาสตร์ $(X, \cdot, 0)$ โดยที่ X เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation และ 0 เป็นสมาชิกของ X โดยที่มีสมบัติสอดคล้องต่อไปนี้

1. $((x \cdot y) \cdot (x \cdot z)) \cdot (z \cdot y) = 0$
2. $(x \cdot (x \cdot y)) \cdot y = 0$
3. $x \cdot x = 0$
4. ถ้า $x \cdot y = y \cdot x = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

มีนักวิจัยหลายท่าน (Bell and Kappe, 1989; Bell and Mason, 1987; Posner, 1957) ได้ศึกษาอนุพันธ์ของ ring ต่อมา Jun and Xin (2004) ได้ประยุกต์แนวคิดอนุพันธ์ของ ring กับ BCI-algebra ถ้า X เป็น BCI-algebra กำหนด $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ให้ $d: X \rightarrow X$ จะกล่าวว่า d เป็น left-right derivation ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ในทำนองเดียวกัน เรียก d ว่า right-left derivation ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ ถ้า d เป็นทั้ง left-right derivation และ right-left derivation จะเรียก d ว่า derivation เรียก d ว่า regular derivation ถ้า $d(0) = 0$ และได้แสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง นอกจากนี้ทั้งสองได้ศึกษา d -invariant ideal สำหรับฟังก์ชัน d ของ BCI-algebra โดยที่ ideal A ของ BCI-algebra จะเรียกว่า d -invariant ก็ต่อเมื่อ $d(A) \subseteq A$ พร้อมทั้งให้เงื่อนไขสำหรับ ideal ของ BCI-algebra ที่จะเป็น d -invariant

ในปี ค.ศ. 2006 Hamza A. S. Abujabal และ Nora O. Al-Shehri ได้ศึกษาอนุพันธ์บน BCK-algebra ในปี ค.ศ. 2007 Hamza and Al-Shehri ได้นิยามอนุพันธ์ทางซ้าย (left derivation) บน BCI-algebra และศึกษา regular left derivation บน BCI-algebra

ในปี ค.ศ. 1998 Wieslaw A. Dudek และ Xiaohong Zhang ได้สร้างโครงสร้างทางพีชคณิตที่เรียกว่า BCC-algebra โดยที่ BCC-algebra คือระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation และ 0 เป็นสมาชิกของ G โดยที่มีสมบัติสอดคล้องต่อไปนี้

1. $((x \cdot y) \cdot (z \cdot y)) \cdot (x \cdot z) = 0$
2. $0 \cdot x = 0$
3. $x \cdot 0 = x$
4. ถ้า $x \cdot y = y \cdot x = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

Dudek and Zhang (1998) ได้ศึกษา ideal ของ BCC-algebra โดยกำหนดนิยามดังนี้ ถ้า G เป็น BCC-algebra และ A เป็นสับเซตของ G ซึ่ง A ไม่เท่ากับเซตว่าง จะเรียก A ว่า BCC-ideal ของ G เมื่อ $0 \in G$ และ ถ้า $(xy)z \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $xz \in A$ บน BCC-algebra ให้ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์บน G กำหนดโดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $xy, yx \in A$ และแสดงได้ว่า $\sim$ เป็น congruence จากนั้นก็สร้าง quotient BCC-algebra G/A และได้ตรวจสอบสมบัติอื่นๆที่เกี่ยวข้อง

จุดประสงค์ของงานวิจัยนี้ คือ การประยุกต์แนวคิดของ regular derivation บน BCI-algebra (Jun and Xin, 2004) ใ้กับ BCC-algebras รวมทั้งหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง และอาศัยแนวคิดของ Dudek and Zhang (1998) ที่ได้สร้างโครงสร้างทางพีชคณิตที่เรียกว่า BCC-algebra โดยกำหนด operation บนเซตและตรึงสมาชิก 0 ใน G สร้างโครงสร้างทางพีชคณิตอีกโครงสร้างหนึ่งที่เรียกว่า KU-algebra พร้อมตรวจสอบสมบัติของ KU-algebra ที่สร้างขึ้นและหาเงื่อนไขต่างๆของโครงสร้างนี้โดยอาศัยแนวคิดเช่นเดียวกับโครงสร้าง BCC-algebra และนิยามอนุพันธ์ของ KU-algebra ที่สร้างขึ้น

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

1. นิยามอนุพันธ์บน BCC-algebra พร้อมแสดงตัวอย่างประกอบ
2. ศึกษาค้นหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้องของอนุพันธ์บน BCC-algebra
3. สร้างโครงสร้างของ KU-algebra และแสดงตัวอย่างประกอบ
4. ศึกษาสมบัติต่างๆของ KU-algebra
5. นิยามอนุพันธ์บน KU-algebra พร้อมแสดงตัวอย่างประกอบ
6. ศึกษาค้นหาสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้องของอนุพันธ์บน KU-algebra

การตรวจเอกสาร

การวิจัยนี้มีบทนิยาม ทฤษฎีบทและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน
2. ผลงานของ Dudek and Zhang (1998)
3. ผลงานของ Jun and Xin (2004)
4. ผลงานของ Hanza and Al-Shehri (2006)
5. ผลงานของ Hanza and Al-Shehri (2007)

1. บทนิยามและทฤษฎีบทพื้นฐาน

บทนิยาม ให้ A เป็นเซตใดๆที่ไม่เป็นเซตว่าง เราจะกล่าวว่า $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operation) บนเซต A ก็ต่อเมื่อ $*$: $A \times A \rightarrow A$ และถ้า $*((a, b)) = c$ เราจะเขียนแทนด้วย

$$a * b = c$$

บทนิยาม ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ ความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B คือสับเซตของ $A \times B$ ถ้า R เป็นความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B และ $(a, b) \in R$ เราจะเขียนแทนด้วย aRb

โดเมนของ R จะเขียนแทนด้วย $\text{Dom}(R)$ คือเซตของสมาชิกตัวแรกของคู่อันดับทั้งหลายที่อยู่ใน R ซึ่งจะเขียนในแบบสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\text{Dom}(R) = \{a \in A \mid \exists b \in B, (a, b) \in R\}$$

พิสัยของ R เขียนแทนด้วย $\text{Im}(R)$ คือเซตของสมาชิกตัวที่สองของคู่อันดับทั้งหลายที่อยู่ใน R ซึ่งจะเขียนในแบบสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\text{Im}(R) = \{b \in B \mid \exists a \in A, (a, b) \in R\}$$

เราสังเกตได้ว่า $\text{Dom}(R) \subseteq A$ และ $\text{Im}(R) \subseteq B$

ในกรณีที่ $A = B$ เราจะกล่าวว่า R เป็นความสัมพันธ์บนเซต A

บทนิยาม ให้ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต X จะกล่าวว่า

1. R มีสมบัติสะท้อน (reflexive) ก็ต่อเมื่อ aRa สำหรับทุก $a \in X$
2. R มีสมบัติสมมาตร (symmetric) ก็ต่อเมื่อ ถ้า สำหรับทุก $a, b \in X$ ที่ aRb แล้ว bRa

3. R มีสมบัติถ่ายทอด (transitive) ก็ต่อเมื่อ ถ้า สำหรับทุก $a, b, c \in X$ ที่ aRb และ bRc แล้ว aRc
4. X มีสมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก $a, b \in X$ ที่ aRb และ bRa แล้ว $a = b$

บทนิยาม R มีความสัมพันธ์สมมูล (Equivalence) บนเซต X ก็ต่อเมื่อ R มีสมบัติสะท้อน สมบัติสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด

บทนิยาม ให้ X เป็นเซตใดๆ และ R เป็นความสัมพันธ์บน X จะเรียก R ว่า partial order บน X ถ้า R มีสมบัติสะท้อน สมบัติปฏิสมมาตรและสมบัติถ่ายทอด บน X

บทนิยาม ถ้า R มีสมบัติ partial order บน X จะเรียก (X, R) ว่า partially ordered set

บทนิยาม ให้ R มีความสัมพันธ์บนเซต X จะกล่าวว่า R เป็น congruence บน X ก็ต่อเมื่อ R สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต X
2. สำหรับทุก $a, b, u, v \in X$ ถ้า aRb และ uRv แล้ว $(au)R(bv)$

บทนิยาม เรียก $(G, \cdot)$ ว่า group ถ้า G ไม่เป็นเซตว่างและ $\cdot$ เป็นการดำเนินการ (operation) บน G ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. สมบัติปิด
 $a \cdot b \in G$ สำหรับทุก $a, b \in G$
2. กฎการเปลี่ยนกลุ่ม
 $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ สำหรับทุก $a, b, c \in G$
3. เอกลักษณ์ (identity element) มี $e \in G$ ที่ว่า
 $a \cdot e = a = e \cdot a$ สำหรับทุก $a \in G$
4. สมาชิกผกผัน (inverse element) สำหรับแต่ละ $a \in G$
จะมี $b \in G$ ที่ $a \cdot b = e = b \cdot a$
เรียก b ว่า สมาชิกผกผันของ a

ข้อตกลง เพื่อความสะดวกจะเขียน G เป็น group แทน $(G, \cdot)$ เป็น group

บทนิยาม ถ้า G เป็น group และ $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุก $a, b \in G$ แล้วจะเรียก G ว่า abelian group (หรือ commutative group)

บทนิยาม ให้ $(G, \cdot)$ และ $(H, *)$ เป็น group และให้ $f : G \rightarrow H$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

บทนิยาม ให้ G และ H เป็น group และให้ $f : G \rightarrow H$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปทั่วถึง H
3. f เป็น isomorphism ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก G ไปทั่วถึง H

บทนิยาม เรียก $(R, +, \cdot)$ ว่า ring ถ้า R ไม่เป็นเซตว่างและ $+$ และ $\cdot$ ต่างก็เป็นการดำเนินการบน R ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. $(R, +)$ เป็น abelian group
2. $a \cdot b \in R$ สำหรับทุก $a, b \in R$
3. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ สำหรับทุก $a, b, c \in R$
4. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ สำหรับทุก $a, b, c \in R$
 $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ สำหรับทุก $a, b, c \in R$

ข้อตกลง 1. เพื่อความสะดวกจะเขียน R เป็น ring แทน $(R, +, \cdot)$ เป็น ring และเขียนแทน $a \cdot b$ ด้วย ab
 2. จะเรียกสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การบวกว่าศูนย์ (zero) เขียนแทนด้วย 0 และเขียนสมาชิกผกผันของ a ด้วย $-a$ และให้สัญลักษณ์ $a-b$ หมายถึง $a+(-b)$

บทนิยาม ให้ R เป็น ring จะเรียก R ว่า ring with identity ถ้า R มีสมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณ

ข้อตกลง สมาชิกเอกลักษณ์ภายใต้การคูณ แทนด้วย 1

บทนิยาม ให้ R เป็น ring จะเรียก R ว่า commutative ring ถ้า $ab = ba$ สำหรับทุก $a, b \in R$ แต่ถ้า $ab \neq ba$ สำหรับบาง $a, b \in R$ จะเรียก R ว่า noncommutative ring

บทนิยาม ให้ R เป็น ring และ $S \subseteq R$ ถ้า S เป็น ring ภายใต้การบวกและการคูณบน R แล้วจะเรียก S ว่า subring ของ R

ทฤษฎีบท ให้ R เป็น ring $S \subseteq R$ และ $S \neq \emptyset$ จะได้ว่า S เป็น subring ของ R ก็ต่อเมื่อ $a - b \in S$ และ $ab \in S$ สำหรับทุก $a, b \in S$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dummit and Foote (1999)

บทนิยาม ให้ R เป็น ring และ I เป็น subring ของ R จะเรียก I ว่า ideal ของ R ถ้า $ar \in I$ และ $ra \in I$ สำหรับทุก $a \in I$ และ $r \in R$

ข้อตกลง ถ้า $ar \in I$ สำหรับทุก $a \in I$ และ $r \in R$ จะเรียก I ว่า right ideal ของ R และถ้า $ra \in I$ สำหรับทุก $a \in I$ และ $r \in R$ จะเรียก I ว่า left ideal ของ R

บทนิยาม ให้ $(R, +, \cdot)$ และ $(S, \oplus, *)$ เป็น ring และ f เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง S จะเรียก f ว่า ring homomorphism จาก R ไปยัง S ถ้า

1. $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$ สำหรับทุก $a, b \in R$
2. $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$ สำหรับทุก $a, b \in R$

ข้อสังเกต $f(-a) = -f(a)$ และ $f(0_R) = 0_S$ เมื่อ 0_R และ 0_S เป็นเอกลักษณ์ภายใต้การบวกของ R และ S ตามลำดับ

บทนิยาม ให้ R และ S เป็น rings และ $f : R \rightarrow S$ เป็น ring homomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก R ไปทั่วถึง S จะเรียก f ว่า isomorphism และกล่าวว่า R และ S isomorphic กัน เขียนแทนด้วย $R \cong S$

2. ผลงานของ Dudek and Zhang (1998)

Dudek and Zhang (1998) ได้นำเสนอแนวคิดใหม่ของ ideal ใน BCC-algebra และอธิบายการเชื่อมโยงระหว่าง ideal และ congruences

บทนิยาม $(G, \cdot, 0)$ จะเรียกว่า BCC-algebra ถ้าสอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้ (สำหรับสมาชิก x, y ใดๆ ของ G เขียน xy แทน $x \cdot y$)

1. $((xy)(zy))(xz) = 0$
2. $xx = 0$
3. $0x = 0$
4. $x0 = x$
5. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y \in G$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก A ว่าเป็น BCC-ideal ของ G ถ้า

1. $0 \in A$
2. ถ้า $(xy)z \in A$ และ $y \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $xz \in A$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็น BCC-ideal ของ G กำหนดความสัมพันธ์ $\sim$ บน G โดย

$$x \sim y \text{ ก็ต่อเมื่อ } xy, yx \in A$$

บทนิยาม ให้ G เป็น BCC-algebra กำหนด ความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$

ข้อสังเกต $(G; \leq)$ เป็น partially ordered set

ทฤษฎีบท ถ้า G เป็น BCC-algebra และ A เป็น BCC-ideal ของ G แล้วความสัมพันธ์ $\sim$ เป็น congruence บน G

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม ให้ $(G, \cdot, 0)$ และ $(H, *, 0)$ เป็น BCC-algebra และให้ $f : G \rightarrow H$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

นิยาม kernel ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{x \in G \mid f(x) = 0\}$ หรือ

$$\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0\}$$

บทนิยาม ให้ G และ H เป็น BCC-algebra และ $f : G \rightarrow H$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปทั่วถึง H
3. f เป็น isomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก G ไปทั่วถึง H

ทฤษฎีบท ถ้า f เป็น epimorphism จาก BCC-algebra G ไปยัง BCC-algebra H แล้ว quotient BCC-algebra $G/\ker(f)$ isomorphic กับ H

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

ทฤษฎีบท ให้ X, Y, Z เป็น BCC-algebra และให้ $h : X \rightarrow Y$ เป็น epimorphism และให้ $g : X \rightarrow Z$ เป็น homomorphism ถ้า $\ker(h) \subseteq \ker(g)$ แล้ว มี homomorphism $f : Y \rightarrow Z$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $f \circ h = g$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม proper ideal จะเรียกว่า maximal ถ้า proper ideal นั้นไม่บรรจุ proper ideal อื่น และ BCC-algebra ใดๆที่ไม่มี proper BCC-ideal เรียกว่า BCC-simple

ทฤษฎีบท ให้ A เป็น proper BCC-ideal ของ BCC-algebra G แล้ว A จะเป็น maximal BCC-ideal ของ G ก็ต่อเมื่อ G/A เป็น BCC-algebra และเป็น BCC-simple

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

3. ผลงานของ Jun and Xin (2004)

Jun and Xin (2004) ได้ให้แนวคิดของ left-right (right-left) derivation ของ BCI-algebra และหาสมบัติที่เกี่ยวข้อง และให้เงื่อนไขสำหรับอนุพันธ์ที่จะเป็น regular

บทนิยาม $(X, \cdot, 0)$ จะเรียกว่า BCI-algebra ถ้าสอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $((xy)(xz))(zy) = 0$
2. $(x(xy))y = 0$
3. $xx = 0$
4. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in X$

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ I เป็นสับเซตไม่ว่างของ X แล้วจะเรียกว่า I ว่า ideal ของ X ถ้า

1. $0 \in I$
2. ถ้า $xy \in I$ และ $y \in I$ แล้ว $x \in I$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม ให้ $(X, \cdot, 0)$ เป็น BCI-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ X จะเรียก S ว่า BCI-subalgebra ของ X ถ้า $(S, \cdot, 0)$ เป็น BCI-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ และกำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

บทนิยาม สำหรับ BCI-algebra X

1. $X_+ = \{x \in X \mid 0 \leq x\}$
2. ถ้า $X_+ = \{0\}$ แล้วเรียก X ว่า p-semisimple BCI-algebra
3. $x + y = x(0y) \quad \forall x, y \in X$
4. $x - y = xy \quad \forall x, y \in X$
5. $L_p(X) = \{a \in X \mid ax = 0 \rightarrow x = a \quad \forall x \in X\}$
6. สำหรับ $a \in X$, $V(a) = \{x \in X \mid ax = 0\}$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน a_x แทน $0(0x)$ สำหรับสมาชิก x ใน X

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra จะได้ว่า

1. ถ้า $x \in V(a)$ และ $y \in V(b)$ แล้ว $xy \in V(ab)$
2. $a_x \in L_p(X)$
3. $0(0a_x) = a_x$
4. ถ้า $x \in L_p(X)$ และ $y \in X$ แล้ว $xy \in L_p(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม BCI-algebra X จะเรียกว่า commutative ถ้า $x \leq y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ แล้ว $x = x \wedge y$

บทนิยาม BCI-algebra X จะเรียกว่า branchwise commutative ถ้า

$$\forall a \in L_p(X) \forall x, y \in V(a), x \wedge y = y \wedge x$$

ทฤษฎีบท BCI-algebra X เป็น commutative ก็ต่อเมื่อ X เป็น branchwise commutative

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ $d: X \rightarrow X$ ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d ว่า left-right derivation (หรือ (l,r)-derivation) ถ้า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in X$ เรียก d ว่า right-left derivation (หรือ (r,l)-derivation) ถ้า d เป็นทั้ง (l,r)-derivation และ (r,l)-derivation จะเรียก d ว่า derivation

ข้อตกลง บน BCI-algebra G เพื่อความสะดวก สำหรับ d เป็นฟังก์ชันของ G เราหมายถึง ฟังก์ชัน $d: G \rightarrow G$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X นิยามโดย $d(x) = a_x$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น (l,r) -derivation ของ X และถ้า X เป็น commutative แล้ว d เป็น (r,l) -derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ว่า

1. ถ้า d เป็น (l,r) -derivation ของ X แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. ถ้า d เป็น (r,l) -derivation ของ X แล้ว $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (l,r) -derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d(0) \in L_p(X)$
2. $d(a) = d(0)(0a) = d(0) + a$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
3. $d(a) \in L_p(X)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
4. $d(a + b) = d(a) + d(b) - d(0)$ สำหรับทุก $a, b \in L_p(X)$
5. d เป็น เอกลักษณะบน $L_p(X)$ ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (r,l) -derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d(a) \in G(X)$ สำหรับทุก $a \in G(X)$
2. $d(a) = ad(0) = a + d(0)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
3. $d(a) \in L_p(X)$ สำหรับทุก $a \in L_p(X)$
4. $d(a + b) = d(a) + d(b) - d(0)$ สำหรับทุก $a, b \in L_p(X)$
5. d เป็น เอกลักษณะบน $L_p(X)$ ก็ต่อเมื่อ $d(0) = 0$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X แล้วจะเรียก d ว่า regular ถ้า $d(0) = 0$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น (l,r) -derivation ของ X จะได้ว่า

1. $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in X$
2. $d(x)y \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
3. $d(xy) = d(x)y \leq d(x)d(y)$ สำหรับทุก $x, y \in X$
4. $d^{-1}(0) := \{x \in X \mid d(x) = 0\}$ เป็น subalgebra ของ X และ $d^{-1}(0) \subset X_+$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ X จะเรียก ideal A ของ X ว่า d -invariant ถ้า $d(A) \subseteq A$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น regular (r,l) -derivation ของ X แล้ว ทุก ideal A ของ X เป็น d -invariant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

ทฤษฎีบท ถ้า X เป็น BCI-algebra และ d เป็น derivation ของ X แล้ว d เป็น regular ก็ต่อเมื่อ ทุก ideal ของ X เป็น d -invariant

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Jun and Xin (2004)

4. ผลงานของ Hanza and Al-Shehri (2006)

Hamza and Al-Shehri (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับอนุพันธ์ของ BCK-algebra และค้นคว้าหาสมบัติต่างๆบนอนุพันธ์ของ BCK-algebra

บทนิยาม $(G, \cdot, 0)$ จะเรียกว่า BCK-algebra ถ้าสอดคล้องกันเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $(xy \cdot zy) \cdot xz = 0$,
2. $xx = 0$,
3. $0x = 0$,
4. $x0 = x$,
5. ถ้า $xy = yx = 0$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ทฤษฎีบท สำหรับทุก (r, l) -derivation (หรือ (l, r) -derivation) ของ BCK-algebra เป็น regular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท derivation ของ BCK-algebra เป็น regular

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น derivation ของ X ถ้า $a \in X$ โดยที่ $d(x)a = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น regular derivation ของ X และยิ่งไปกว่านั้น X เป็น BCK-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ d เป็น derivation ของ X ถ้า $a \in X$ โดยที่ $ad(x) = 0$ สำหรับทุก $x \in X$ แล้ว d เป็น regular derivation ของ X และยิ่งไปกว่านั้น X เป็น BCK-algebra

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น self-map ของ X นิยาม

$d_1 \circ d_2 : X \rightarrow X$ โดย $d_1 \circ d_2(x) = d_1(d_2(x))$ สำหรับทุก $x \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น (l,r)-derivation ของ X แล้ว

$d_1 \circ d_2$ เป็น (l,r)-derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น (r,l)-derivation ของ X แล้ว

$d_1 \circ d_2$ เป็น (r,l)-derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น derivation ของ X แล้ว

$d_1 \circ d_2$ เป็น derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น derivation ของ X แล้ว

$$d_1 \circ d_2 = d_2 \circ d_1$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็นฟังก์ชันของ X นิยาม $d_1 * d_2 : X \rightarrow X$ โดย

$$(d_1 * d_2)(x) = d_1(x)d_2(x) \text{ สำหรับทุก } x \in X$$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p-semisimple BCI-algebra และ d_1, d_2 เป็น derivation ของ X แล้ว

$$d_1 * d_2 = d_2 * d_1$$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2006)

5. ผลงานของ Hanza and Al-Shehri (2007)

Hamza and Al-Shehri (2007) ได้ศึกษาแนวคิดของ left-derivation ของ BCI-algebra

บทนิยาม ให้ X เป็น BCI-algebra กำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

จะเรียกฟังก์ชัน $D : X \rightarrow X$ ว่า left derivation ถ้า $D(xy) = xD(y) \wedge yD(x)$ สำหรับทุก $x, y \in X$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X แล้ว สำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า

1. $xD(x) = yD(y)$
2. $D(x) = a_{D(x) \wedge x}$
3. $D(x) = D(x) \wedge x$
4. $D(x) \in L_p(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X จะได้ว่า

1. $y(yD(x)) = D(x)$
2. $D(x)y \in L_p(X)$

สำหรับทุก $x, y \in X$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X จะได้ว่า

1. $D(0) \in L_p(X)$
2. $D(x) = 0 + D(x)$ สำหรับทุก $x \in X$
3. $D(x + y) = x + D(y)$ สำหรับทุก $x, y \in L_p(X)$
4. $D(x) = x$ สำหรับทุก $x \in X$ ก็ต่อเมื่อ $D(0) = 0$
5. $D(x) \in G(X)$ สำหรับทุก $x \in G(X)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท regular left derivation ของ BCI-algebra เป็น identity map

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2007)

บทนิยาม ให้ A เป็น ideal ของ BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ BCI-algebra จะกล่าวว่า A เป็น D -invariant ถ้า $D(A) \subseteq A$

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p -semisimple BCI-algebra และ D เป็น left derivation ของ X แล้วสำหรับทุก $x, y \in X$ จะได้ว่า

1. $D(xy) = xD(y)$
2. $D(x)x = D(y)y$
3. $D(x)x = yD(y)$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2007)

ทฤษฎีบท ให้ X เป็น p -semisimple BCI-algebra แล้ว D เป็น left derivation ของ X ก็ต่อเมื่อ D เป็น derivation ของ X

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Hanza and Al-Shehri (2007)

วิธีการ

บทนิยาม 1 ระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation และ 0 เป็นสมาชิกของ G เรียก $(G, \cdot, 0)$ ว่า BCK-algebra ถ้าระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((x \cdot y) \cdot (x \cdot z)) \cdot (z \cdot y) = 0$
2. $0 \cdot x = 0$
3. $x \cdot 0 = x$
4. ถ้า $x \cdot y = 0 = y \cdot x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

บทนิยาม 2 ให้ $(G, \cdot, 0)$ เป็น BCK-algebra และ S เป็นสับเซตของ G จะเรียก S ว่า BCK-subalgebra ของ G ถ้า $(S, \cdot, 0)$ เป็น BCK-algebra

บทนิยาม 3 ให้ $(G, \cdot, 0)$ เป็น BCK-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G แล้วจะเรียก A ว่า BCK-ideal ถ้า

1. $0 \in A$
2. ถ้า $x \cdot y \in A$ และ $y \in A$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้ว $x \in A$

บทนิยาม 4 ระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation และ 0 เป็นสมาชิกของ G เรียก $(G, \cdot, 0)$ ว่า BCC-algebra ถ้าระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((x \cdot y) \cdot (z \cdot y)) \cdot (x \cdot z) = 0$
2. $0 \cdot x = 0$
3. $x \cdot 0 = x$
4. ถ้า $x \cdot y = 0 = y \cdot x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน G เป็น BCC-algebra แทน $(G, \cdot, 0)$ เป็น BCC-algebra และเขียน xy แทน $x \cdot y$

ทฤษฎีบท 5 ให้ G เป็น BCC-algebra แล้วสำหรับทุก $x, y \in G$ จะได้ว่า

1. $xx = 0$
2. $(xy)x = 0$

พิสูจน์ (1) ให้ $x \in G$

จากนิยาม BCC-algebra ข้อที่ 1 จะได้ว่า $((x0)(00))(x0) = 0$

จากนิยาม BCC-algebra ข้อที่ 3 จะได้ว่า $xx = 0$

(2) ให้ $x, y \in G$

จากนิยาม BCC-algebra ข้อที่ 1 จะได้ว่า $((xy)(0y))(x0) = 0$

จากนิยาม BCC-algebra ข้อที่ 2 และ 3 จะได้ว่า $((xy)0)x = 0$

ดังนั้น $(xy)x = 0$

#

ข้อสังเกต BCC-algebra G จะเป็น BCK-algebra ถ้า $(xy)z = (xz)y$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$

บทนิยาม 6 ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G แล้วจะเรียก A ว่า BCC-ideal ถ้า

1. $0 \in A$
2. ถ้า $(xy)z \in A$ และ $y \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $xz \in A$

บทนิยาม 7 ให้ $(G, \cdot, 0)$ เป็น BCC-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก S ว่า BCC-subalgebra ของ G ถ้า $(S, \cdot, 0)$ เป็น BCC-algebra

ทฤษฎีบท 8 ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G แล้ว A เป็น BCC-subalgebra ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$ และ $yz \notin A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $(yx)z \notin A$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม 9 ให้ G เป็น BCC-algebra และ R เป็นความสัมพันธ์บนเซต G จะกล่าวว่า R เป็น congruence บน G ก็ต่อเมื่อ R สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. R เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต G
2. สำหรับทุก $a, b, u, v \in G$ ถ้า aRb และ uRv แล้ว $(au)R(bv)$

บทนิยาม 10 ให้ A เป็น BCC-ideal ของ BCC-algebra G กำหนดความสัมพันธ์ $\sim$ บน A โดย

$$x \sim y \text{ ก็ต่อเมื่อ } xy, yx \in A$$

ทฤษฎีบท 11 ถ้า A เป็น BCC-ideal ของ BCC-algebra G แล้วความสัมพันธ์ $\sim$ เป็น congruence บน G

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม 12 สำหรับ BCC-algebra G กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน G โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$

ข้อสังเกต $(G; \leq)$ เป็น partially ordered set

บทนิยาม 13 ให้ $(G, \cdot, 0)$ และ $(H, *, 0)$ เป็น BCC-algebra และให้ $f : G \rightarrow H$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

นิยาม kernel ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{x \in G \mid f(x) = 0\}$ หรือ

$$\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0\}$$

บทนิยาม 14 ให้ G และ H เป็น BCC-algebra และ $f : G \rightarrow H$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปทั่วถึง H
3. f เป็น isomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก G ไปทั่วถึง H

ทฤษฎีบท 15 ให้ X, Y, Z เป็น BCC-algebras และให้ $h : X \rightarrow Y$ เป็น epimorphism และให้ $g : X \rightarrow Z$ เป็น homomorphism ถ้า $\ker(h) \subseteq \ker(g)$ แล้ว มี homomorphism $f : Y \rightarrow Z$ เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $f \circ h = g$

พิสูจน์ ดูรายละเอียดใน Dudek and Zhang (1998)

บทนิยาม 16 ให้ G เป็น BCC-algebra และกำหนด $x \wedge y = y(yx)$ เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$ เป็น left-right derivation (หรือ (l,r)-derivation) ของ G ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ และถ้า d สอดคล้องกับ $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้ว เราจะกล่าวว่า d เป็น right-left derivation (หรือ (r,l)-derivation) ของ G ถ้า d เป็นทั้ง (l,r)-derivation และ (r,l)-derivation เราจะกล่าวว่า d เป็น derivation ของ G

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก สำหรับ d เป็นฟังก์ชันของ G เราหมายถึง ฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$

บทนิยาม 17 ให้ d เป็นฟังก์ชันของ BCC-algebra แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็น regular ถ้า $d(0)=0$

ผลการวิจัย

ผลการวิจัยแบ่งออกเป็น 2 ตอนดังนี้

ตอนที่ 1 อนุพันธ์ของ BCC-algebra

ตอนที่ 2 โครงสร้างและอนุพันธ์ของ KU-algebra

ตอนที่ 1 อนุพันธ์ของ BCC-algebra

ในหัวข้อนี้ เราจะนิยามอนุพันธ์ของ BCC-algebra และแสดงสมบัติต่างๆที่เกี่ยวข้อง

1.1 อนุพันธ์ แบบที่ 1

ในหัวข้อนี้ กำหนด $x \wedge y = y(yx)$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน BCC-algebra

บทนิยาม 1.1.1 ให้ G เป็น BCC-algebra เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า d สอดคล้องกับ $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้ว เราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G

ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 และอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G แล้วจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน d เป็นฟังก์ชันของ G เราหมายถึง ฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$

ตัวอย่าง 1.1.2 ให้ $G = \{0, 1, 2, 3\}$ เป็น BCC-algebra โดยกำหนด operation การคูณตามตารางต่อไปนี้

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

กำหนดฟังก์ชัน $d: G \rightarrow G$ โดย $d(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0,1,3, \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$

ต้องการตรวจสอบว่า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ โดยตารางต่อไปนี้

x	y	d(xy)	d(x)y $\wedge$ xd(y)
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
0	3	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
1	2	0	0
1	3	0	0
2	0	2	2
2	1	2	2
2	2	0	0
2	3	0	0
3	0	0	0
3	1	0	0
3	2	0	0
3	3	0	0

จากตารางจะเห็นได้ว่า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ต่อไปต้องการตรวจสอบว่า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ โดยตารางต่อไปนี้

x	y	d(xy)	xd(y) $\wedge$ d(x)y
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
0	3	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	$d(xy)$	$xd(y) \wedge d(x)y$
1	0	0	0
1	1	0	0
1	2	0	0
1	3	0	0
2	0	2	2
2	1	2	2
2	2	0	0
2	3	0	0
3	0	0	0
3	1	0	0
3	2	0	0
3	3	0	0

จากตารางจะเห็นได้ว่า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$

เนื่องจาก $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ และ $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ดังนั้น d เป็นทั้งอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา และอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G

นั่นคือ d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G

กำหนดฟังก์ชัน $d^*: G \rightarrow G$ โดย $d^*(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, 1, \\ 2, & x = 2, 3 \end{cases}$

ต่อไปจะตรวจสอบว่า $d^*(xy) = xd^*(y) \wedge d^*(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ โดยตารางต่อไปนี้

x	y	$d^*(xy)$	$xd^*(y) \wedge d^*(x)y$
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
0	3	0	0
1	0	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	$d^*(xy)$	$xd^*(y) \wedge d^*(x)y$
1	1	0	0
1	2	0	0
1	3	0	0
2	0	2	2
2	1	2	2
2	2	0	0
2	3	0	0
3	0	2	2
3	1	2	2
3	2	0	0
3	3	0	0

จากตารางจะเห็นได้ว่า $d^*(xy) = xd^*(y) \wedge d^*(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ดังนั้น d^* เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G แต่ d^* ไม่เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G

เพราะ $d^*(31) = 2 \neq 3 = 2 \wedge 3 = d^*(3)1 \wedge 3d^*(1)$

บทนิยาม 1.1.3 ให้ d เป็นฟังก์ชันของ BCC-algebra แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็น regular ถ้า $d(0)=0$

ทฤษฎีบท 1.1.4 ให้ G เป็น BCC-algebra ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G แล้ว d เป็น regular

พิสูจน์ เนื่องจาก d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 d(0) &= d(00) \\
 &= 0d(0) \wedge d(0)0 \\
 &= 0 \wedge d(0) \\
 &= d(0)(d(0)0) \\
 &= d(0)d(0)
 \end{aligned}$$

นั่นคือ $d(0)=0$

ดังนั้น d เป็น regular

#

ทฤษฎีบท 1.1.5 ให้ G เป็น BCC-algebra ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G แล้ว d เป็น regular

พิสูจน์ เนื่องจาก d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(0) &= d(00) \\ &= d(0)0 \wedge 0d(0) \\ &= d(0) \wedge 0 \\ &= 0(0d(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น d เป็น regular

#

จากทฤษฎีบท 1.1.4 และทฤษฎีบท 1.1.5 ทำให้เราได้บทแทรกดังต่อไปนี้

บทแทรก 1.1.6 ให้ G เป็น BCC-algebra ถ้า d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G แล้ว d เป็น regular

ต่อไปจะแสดงสมบัติต่างๆของอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ BCC-algebra ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1.7 ให้ G เป็น BCC-algebra จะได้ว่า

1. ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in G$
2. ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G แล้ว $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ (1) d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G

ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d(x) &= d(x0) \\ &= d(x)0 \wedge xd(0) \\ &= d(x) \wedge x0 \\ &= d(x) \wedge x \end{aligned}$$

(2) ให้ อนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่1 ของ G

ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } d(x) &= d(x0) \\ &= xd(0) \wedge d(x)0 \\ &= x0 \wedge d(x) \\ &= x \wedge d(x)\end{aligned}$$

#

ทฤษฎีบท 1.1.8 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่1 ของ G แล้วจะได้ว่า

1. $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$
2. $d(xy) \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$
3. $d^{-1}(0) := \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น BCC-subalgebra ของ G

พิสูจน์ (1) จากทฤษฎีบท 1.1.7 ข้อ (1) จะได้ว่า $d(x) = x(xd(x))$ สำหรับทุก $x \in G$

$$\text{ดังนั้น } d(x)x = (x(xd(x)))x$$

$$\text{โดยทฤษฎีบท 5 ข้อ 2 จะได้ว่า } d(x)x = (x(xd(x)))x = 0$$

$$\text{นั่นคือ } d(x) \leq x$$

(2) ให้ $x, y \in G$

$$\text{จะได้ว่า } d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$$

$$= (xd(y))(xd(y))(d(x)y)$$

โดยทฤษฎีบท 5 ข้อ 2 จะได้ว่า

$$d(xy)(xd(y)) = ((xd(y))(xd(y))(d(x)y))(xd(y)) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } d(xy) \leq xd(y)$$

(3) เนื่องจาก d เป็น regular ดังนั้น $d^{-1}(0) \neq \emptyset$

$$\text{ให้ } x, y \in d^{-1}(0)$$

$$\text{เพราะว่า } d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$$

$$= 0y \wedge x0$$

$$= 0 \wedge x$$

$$= x(x0)$$

$$= xx$$

$$= 0$$

ดังนั้น $xy \in d^{-1}(0)$

ฉะนั้น $d^{-1}(0)$ เป็น BCC-subalgebra ของ G

#

ทฤษฎีบท 1.1.9 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G แล้วจะได้ว่า

1. $d(xy) \leq d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$
2. $d(xd(x)) = 0$ สำหรับทุก $x \in G$
3. $d^{-1}(0) := \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น BCC-subalgebra ของ G

พิสูจน์ (1) ให้ $x, y \in G$

จะได้ว่า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$

$$= (d(x)y)((d(x)y)(xd(y)))$$

ดังนั้น $d(xy)(d(x)y) = 0$

นั่นคือ $d(xy) \leq d(x)y$

(2) ให้ $x \in G$

จะได้ว่า $d(xd(x)) = xd(d(x)) \wedge d(x)d(x)$

$$= xd(d(x)) \wedge 0$$

$$= 0(0(xd(d(x))))$$

$$= 0$$

ดังนั้น $d(xd(x)) = 0$

(3) เนื่องจาก d เป็น regular ดังนั้น $d^{-1}(0) \neq \emptyset$

ให้ $x, y \in d^{-1}(0)$

เพราะว่า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$

$$= x0 \wedge 0y$$

$$= x \wedge 0$$

$$= 0(0x)$$

$$= 0$$

ดังนั้น $xy \in d^{-1}(0)$

ฉะนั้น $d^{-1}(0)$ เป็น BCC-subalgebra ของ G

#

สังเกตว่า $d^{-1}(0)$ ไม่เป็น ideal ของ G เพราะถ้า $G = \{0,1,2,3\}$ เป็น BCC-algebra โดยกำหนด operation การคูณตามตารางต่อไปนี้

.	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	1	0	1	0
2	2	2	0	0
3	3	3	1	0

กำหนด $d: G \rightarrow G$ โดย $d(x) = \begin{cases} 0 & , x = 0,1,3, \\ 2 & , x = 2 \end{cases}$

ดังนั้น $d^{-1}(0) = \{0,1,3\}$

ฉะนั้น $(23)1=0 \in d^{-1}(0)$ และ $3 \in d^{-1}(0)$ แต่ $21=2 \notin d^{-1}(0)$

นั่นคือ $d^{-1}(0)$ ไม่เป็น ideal ของ G

ทฤษฎีบท 1.1.10 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G แล้วจะได้ว่า $d(d(x)) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned}
 &\text{จะได้ว่า } d(d(x)) = d(xd(x)) \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 1.1.7 ข้อ 1}) \\
 &= d(x)(xd(x)) \wedge xd(xd(x)) \quad (d \text{ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1}) \\
 &= d(x)(xd(x)) \wedge x0 \quad (\text{โดยทฤษฎีบท 1.1.9 ข้อ 2}) \\
 &= d(x)(xd(x)) \wedge x \\
 &= x(x(d(x)(xd(x))))
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(d(x))x = 0$

นั่นคือ $d(d(x)) \leq x$

#

ทฤษฎีบท 1.1.11 ถ้า G เป็น BCC-algebra และ $d_1, d_2, \dots, d_n$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G แล้ว $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots))) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ สำหรับ $n = 1$

ให้ $x \in G$

ดังนั้น $d_1(x) = d_1(x0)$

$$= d_1(x)0 \wedge xd_1(0)$$

$$= d_1(x) \wedge x$$

$$= x(d_1(x))$$

ดังนั้น $d_1(x)x = 0$

นั่นคือ $d_1(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

ให้ $n \in \mathbb{N}$

สมมติว่า $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots))) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

สมมติให้ $D_n = d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots)))$

ดังนั้น $d_{n+1}(D_n) = d_{n+1}(D_n 0)$

$$= d_{n+1}(D_n)0 \wedge D_n d_{n+1}(0)$$

$$= d_{n+1}(D_n) \wedge D_n$$

$$= D_n(D_n d_{n+1}(D_n))$$

นั่นคือ $d_{n+1}(D_n)D_n = 0$

จะนั้น $d_{n+1}(D_n) \leq D_n$

จากสมมุติฐาน จะได้ว่า $d_{n+1}(D_n) \leq D_n \leq x$

#

ทฤษฎีบท 1.1.12 ถ้า G เป็น BCC-algebra และ $d_1, d_2, \dots, d_n$ เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G แล้ว $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots))) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 1.1.11

#

บทนิยาม 1.1.13 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นฟังก์ชันของ G ถ้า A เป็น ideal ของ G และ $d(A) \subseteq A$ แล้วเราจะกล่าวว่า A เป็น d -invariant (เมื่อ $d(A) = \{d(x) \mid x \in A\}$)

ตัวอย่าง 1.1.14 ให้ $G = \{0,1,2,3,4,5\}$ และมี operation การคูณดังตารางต่อไปนี้

.	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1
2	2	2	0	0	1	1
3	3	2	1	0	1	1
4	4	4	4	4	0	1
5	5	5	5	5	5	0

ดังนั้น G เป็น BCC-algebra และ $A = \{0,1,2,3,4\}$ เป็น BCC-ideal ของ G (Dudek และ Zhang, 1998)

กำหนด $d: G \rightarrow G$ โดย $d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1,2,3,4, \\ 5, & x = 5 \end{cases}$

สามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G

และ $d(A) = \{0\} \subseteq A$

ดังนั้น A เป็น d -invariant

ทฤษฎีบท 1.1.15 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G แล้ว ทุก ideal ของ G เป็น d -invariant

พิสูจน์ ให้ A เป็น ideal ของ G

ให้ $y \in d(A)$

ดังนั้นจะมี $x \in A$ ซึ่งทำให้ $y = d(x)$

ดังนั้น $yx = d(x)x = 0 \in A$ (โดยทฤษฎีบท 1.1.8 ข้อ 1)

เนื่องจาก A เป็น ideal ของ G จะได้ว่า $y \in A$

นั่นคือ $d(A) \subseteq A$

ดังนั้น A เป็น d -invariant

#

1.2 อนุพันธ์แบบที่ 2

ในหัวข้อนี้ กำหนด $x \wedge y = x(yx)$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน BCC-algebra

บทนิยาม 1.2.1 ให้ G เป็น BCC-algebra เราจะกล่าวว่า ฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ในการทำงานเดียวกัน ถ้า d สอดคล้องกับ $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้ว เราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G

ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 และอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G แล้วจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 2 ของ G

ทฤษฎีบท 1.2.2 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d อนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G แล้ว d เป็น ฟังก์ชันเอกลักษณ์

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G

ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d(0) &= d(0x) \\ &= 0d(x) \wedge d(0)x \\ &= 0 \wedge d(0)x \\ &= 0((d(0)x)0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } d(x) &= d(x0) \\ &= xd(0) \wedge d(x)0 \\ &= x0 \wedge d(x) \\ &= x \wedge d(x) \\ &= x(d(x)x) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } d(x)x = 0$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } d(x) &= x(d(x)x) \\ &= x0 \\ &= x \end{aligned}$$

นั่นคือ d เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์

#

บทแทรก 1.2.3 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 2 ของ G แล้ว d เป็น regular

ตัวอย่าง 1.2.4 ให้ $G = \{0,1,2\}$ โดยมี operation การคูณดังตารางต่อไปนี้

.	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	1
2	2	1	0

แสดงได้โดยง่ายว่า G เป็น BCC-algebra

ให้ $d : G \rightarrow G$ โดยที่ $d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,1 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

สำหรับทุก $x \in G$

x	y	$d(xy)$	$d(x)y \wedge xd(y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0
1	2	0	0
2	0	2	2
2	1	0	0
2	2	0	0

จากตารางจะเห็นได้ว่า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ดังนั้น d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G

ทฤษฎีบท 1.2.5 ให้ G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G แล้วจะได้ว่า

1. $d(0) = d(0)x$ สำหรับทุก $x \in G$
2. ถ้า $d(0) = 0$ แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G

(1) ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d(0) &= d(0x) \\ &= d(0)x \wedge 0d(x) \\ &= d(0)x \wedge 0 \\ &= (d(0)x)(0(d(0)x)) \\ &= (d(0)x)0 \\ &= d(0)x \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(0) = d(0)x$ สำหรับทุก $x \in G$

(2) ให้ $d(0) = 0$

ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d(x) &= d(x0) \\ &= d(x)0 \wedge xd(0) \\ &= d(x) \wedge x0 \\ &= d(x) \wedge x \end{aligned}$$

นั่นคือ ถ้า $d(0) = 0$ แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$ สำหรับทุก $x \in G$

#

บทนิยาม 1.2.6 ให้ G เป็น BCC-algebra จะเรียกฟังก์ชัน $D : G \rightarrow G$ ว่าอนุพันธ์ทางซ้ายแบบที่ 2 ของ G ถ้า $D(xy) = D(x)y \wedge D(y)x$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ตัวอย่าง 1.2.7 ให้ $G = \{0, 1, 2\}$ โดยมี operation การคูณดังตารางต่อไปนี้

.	0	1	2
0	0	0	0
1	1	0	2
2	2	0	0

แสดงได้โดยง่ายว่า G เป็น BCC-algebra

ให้ $D: G \rightarrow G$ โดยที่ $D(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, 2 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

สำหรับทุก $x \in G$

x	y	$D(xy)$	$D(x)y \wedge D(y)x$
0	0	0	0
0	1	0	0
0	2	0	0
1	0	2	2
1	1	0	0
1	2	0	0
2	0	0	0
2	1	0	0
2	2	0	0

จากตารางจะเห็นได้ว่า $D(xy) = D(x)y \wedge D(y)x$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ดังนั้น D เป็นอนุพันธ์ทางซ้ายแบบที่ 2 ของ G

ทฤษฎีบท 1.2.8 ให้ G เป็น BCC-algebra และ D เป็นอนุพันธ์ทางซ้ายแบบที่ 2 ของ G แล้ว สำหรับ

ทุก $x, y \in G$ จะได้ว่า

1. $D(0) = 0$
2. $D(x)x = D(y)y$

พิสูจน์ (1) สมมติว่า $D(0) \neq 0$

ดังนั้นจะมี $y \in G$ และ $y \neq 0$ ที่ทำให้ $y = D(0)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } D(0) &= D(0y) \\ &= D(0)y \wedge D(y)0 \\ &= yy \wedge D(y) \\ &= 0 \wedge D(y) \\ &= 0(D(y)0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ซึ่งขัดแย้ง ดังนั้น $D(0) = 0$

(2) ให้ $x, y \in G$

$$\begin{aligned} \text{เนื่องจาก } D(0) &= D(xx) \\ &= D(x)x \wedge D(x)x \\ &= (D(x)x)((D(x)x)(D(x)x)) \\ &= (D(x)x)0 \\ &= D(x)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และ } D(0) &= D(yy) \\ &= D(y)y \wedge D(y)y \\ &= (D(y)y)((D(y)y)(D(y)y)) \\ &= (D(y)y)0 \\ &= D(y)y \end{aligned}$$

ดังนั้น $D(x)x = D(y)y$

#

ทฤษฎีบท 1.2.9 ให้ G เป็น BCC-algebra และ D เป็นอนุพันธ์ทางซ้ายแบบที่ 2 ของ G ถ้า A เป็น ideal ของ G แล้ว A เป็น D -invariant

พิสูจน์ ให้ A เป็น ideal ของ G

ให้ $y \in D(A)$

ดังนั้นจะมี $x \in A$ ซึ่งทำให้ $y = D(x)$

ดังนั้น $yx = D(x)x = D(0) = 0 \in A$

เนื่องจาก A เป็น ideal ของ G จะได้ว่า $y \in A$

นั่นคือ $D(A) \subseteq A$

ดังนั้น A เป็น d -invariant

#

ตอนที่ 2 โครงสร้างและอนุพันธ์ของ KU-algebra

ในหัวข้อนี้ เราจะสร้างโครงสร้างทางพีชคณิตที่เรียกว่า KU-algebra และศึกษาอนุพันธ์ของ KU-algebra โดยจะแบ่งออกเป็นหัวข้อดังนี้

2.1 โครงสร้าง KU-algebra

2.2 อนุพันธ์ของ KU-algebra

2.1 โครงสร้าง KU-algebra

ในหัวข้อนี้ เราจะอาศัยแนวคิดของ Dudek และ Zhang (1998) สร้างโครงสร้างทางพีชคณิตอีกโครงสร้างหนึ่งที่เรียกว่า KU-algebra ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1.1 ระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation และ 0 เป็นสมาชิกของ G จะเรียก $(G, \cdot, 0)$ ว่า KU-algebra ถ้าระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(x \cdot y) \cdot ((y \cdot z) \cdot (x \cdot z)) = 0$
2. $0 \cdot x = x$
3. $x \cdot 0 = 0$
4. ถ้า $x \cdot y = 0 = y \cdot x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ข้อตกลง เพื่อความสะดวก เขียน G เป็น KU-algebra แทน $(G, \cdot, 0)$ เป็น KU-algebra และเขียน xy แทน $x \cdot y$

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้ $G = \{0, 1, 2, 3\}$ นิยาม operation $\cdot$ ดังตาราง

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	0	0	2
2	0	2	0	1
3	0	0	0	0

จะแสดงว่า G เป็น KU-algebra

ข้อ (2), (3) และ (4) เห็นได้ชัด ส่วนข้อ (1) สามารถแสดงได้จากตารางข้างล่าง

สำหรับ $x, y, z \in G$ จะได้ว่า

x	y	z	xy	yz	xz	$(xy)((yz)(xz))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	2	0	2	2	0
0	0	3	0	3	3	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	1	2	1	0	2	0
0	1	3	1	2	3	0
0	2	0	2	0	0	0
0	2	1	2	2	1	0
0	2	2	2	0	2	0
0	2	3	2	1	3	0
0	3	0	3	0	0	0
0	3	1	3	0	1	0
0	3	2	3	0	2	0
0	3	3	3	0	3	0
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	0
1	0	2	1	2	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	(xy)((yz)(xz))
1	0	3	1	3	2	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	0	0	0	0
1	1	3	0	2	2	0
1	2	0	0	0	0	0
1	2	1	0	2	0	0
1	2	2	0	0	0	0
1	2	3	0	1	2	0
1	3	0	2	0	0	0
1	3	1	2	0	0	0
1	3	2	2	0	0	0
1	3	3	2	0	2	0
2	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	2	0
2	0	2	0	2	0	0
2	0	3	0	3	1	0
2	1	0	2	0	0	0
2	1	1	2	0	2	0
2	1	2	2	0	0	0
2	1	3	2	2	1	0
2	2	0	0	0	0	0
2	2	1	0	2	2	0
2	2	2	0	0	0	0
2	2	3	0	1	1	0
2	3	0	1	0	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	(xy)((yz)(xz))
2	3	1	1	0	2	0
2	3	2	1	0	0	0
2	3	3	1	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0
3	0	2	0	2	0	0
3	0	3	0	3	0	0
3	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
3	1	2	0	0	0	0
3	1	3	0	2	0	0
3	2	0	0	0	0	0
3	2	1	0	2	0	0
3	2	2	0	0	0	0
3	2	3	0	1	0	0
3	3	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0
3	3	2	0	0	0	0
3	3	3	0	0	0	0

จากตารางจะเห็นว่า $(xy)((yz)(xz)) = 0$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ดังนั้น G เป็น KU-algebra

ข้อสังเกต 1. $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in G$ เพราะว่า $0 = (00)((0x)(0x))$

2. $x(yx) = 0$ สำหรับทุก $x, y \in G$ เพราะว่า $0 = (y0)((0x)(yx))$

บทนิยาม 2.1.3 ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก A ว่า ideal ของ G ถ้า

1. $0 \in A$
2. ถ้า $x(yz) \in A$ และ $y \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $xz \in A$

ตัวอย่างที่ 2.1.4 ให้ $G = \{0,1,2,3,4\}$ นิยาม operation $\cdot$ ดังตาราง

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	0	0	0	3	4
2	0	1	0	3	4
3	0	0	0	0	4
4	0	0	0	0	0

สำหรับ $x, y, z \in G$ จะได้ว่า

x	y	z	xy	yz	xz	$(xy)((yz)(xz))$
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0
0	0	2	0	2	2	0
0	0	3	0	3	3	0
0	0	4	0	4	4	0
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	1	2	1	0	2	0
0	1	3	1	3	3	0
0	1	4	1	4	4	0
0	2	0	2	0	0	0
0	2	1	2	1	1	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	(xy)((yz)(xz))
0	2	2	2	0	2	0
0	2	3	2	3	3	0
0	2	4	2	4	4	0
0	3	0	3	0	0	0
0	3	1	3	0	1	0
0	3	2	3	0	2	0
0	3	3	3	0	3	0
0	3	4	3	4	4	0
0	4	0	4	0	0	0
0	4	1	4	0	1	0
0	4	2	4	0	2	0
0	4	3	4	0	3	0
0	4	4	4	0	4	0
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0
1	0	2	0	2	0	0
1	0	3	0	3	3	0
1	0	4	0	4	4	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
1	1	2	0	0	0	0
1	1	3	0	3	3	0
1	1	4	0	4	4	0
1	2	0	0	0	0	0
1	2	1	0	1	0	0
1	2	2	0	0	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	(xy)((yz)(xz))
1	2	3	0	3	3	0
1	2	4	0	4	4	0
1	3	0	3	0	0	0
1	3	1	3	0	0	0
1	3	2	3	0	0	0
1	3	3	3	0	3	0
1	3	4	3	4	4	0
1	4	0	4	0	0	0
1	4	1	4	0	0	0
1	4	2	4	0	0	0
1	4	3	4	0	3	0
1	4	4	4	0	4	0
2	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	1	1	0
2	0	2	0	2	0	0
2	0	3	0	3	3	0
2	0	4	0	4	4	0
2	1	0	1	0	0	0
2	1	1	1	0	1	0
2	1	2	1	0	0	0
2	1	3	1	3	3	0
2	1	4	1	4	4	0
2	2	0	0	0	0	0
2	2	1	0	1	1	0
2	2	2	0	0	0	0
2	2	3	0	3	3	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	(xy)((yz)(xz))
2	2	4	0	4	4	0
2	3	0	3	0	0	0
2	3	1	3	0	1	0
2	3	2	3	0	0	0
2	3	3	3	0	3	0
2	3	4	3	4	4	0
2	4	0	4	0	0	0
2	4	1	4	0	1	0
2	4	2	4	0	0	0
2	4	3	4	0	3	0
2	4	4	4	0	4	0
3	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0
3	0	2	0	2	0	0
3	0	3	0	3	0	0
3	0	4	0	4	4	0
3	1	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0
3	1	2	0	0	0	0
3	1	3	0	3	0	0
3	1	4	0	4	4	0
3	2	0	0	0	0	0
3	2	1	0	1	0	0
3	2	2	0	0	0	0
3	2	3	0	3	0	0
3	2	4	0	4	4	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	(xy)((yz)(xz))
3	3	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0
3	3	2	0	0	0	0
3	3	3	0	0	0	0
3	3	4	0	4	4	0
3	4	0	4	0	0	0
3	4	1	4	0	0	0
3	4	2	4	0	0	0
3	4	3	4	0	0	0
3	4	4	4	0	4	0
4	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	1	0	0
4	0	2	0	2	0	0
4	0	3	0	3	0	0
4	0	4	0	4	0	0
4	1	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0
4	1	2	0	0	0	0
4	1	3	0	3	0	0
4	1	4	0	4	0	0
4	2	0	0	0	0	0
4	2	1	0	1	0	0
4	2	2	0	0	0	0
4	2	3	0	3	0	0
4	2	4	0	4	0	0
4	3	0	0	0	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	xy	yz	xz	$(xy)((yz)(xz))$
4	3	1	0	0	0	0
4	3	2	0	0	0	0
4	3	3	0	0	0	0
4	3	4	0	4	0	0
4	4	0	0	0	0	0
4	4	1	0	0	0	0
4	4	2	0	0	0	0
4	4	3	0	0	0	0
4	4	4	0	0	0	0

ต้องการแสดงว่า G เป็น KU-algebra

จากตารางข้างต้น จะได้ว่าข้อ (1) เป็นจริง

ข้อ (2), (3) และ (4) เห็นได้ชัด

ดังนั้น G เป็น KU-algebra

ให้ $A = \{0,2\}$ และ $B = \{0,1\}$

ต่อไปจะสร้างตารางเพื่อตรวจสอบว่า A และ B เป็น ideal ของ G หรือไม่

x	y	z	$x(yz)$	xz
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	2	2	2
0	0	3	3	3
0	0	4	4	4
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	$x(yz)$	xz
0	1	2	0	2
0	1	3	3	3
0	1	4	4	4
0	2	0	0	0
0	2	1	1	1
0	2	2	0	2
0	2	3	3	3
0	2	4	4	4
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	0	2	0	0
1	0	3	3	3
1	0	4	4	4
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0
1	1	2	0	0
1	1	3	3	3
1	1	4	4	4
1	2	0	0	0
1	2	1	1	0
1	2	2	0	0
1	2	3	3	3
1	2	4	4	4
2	0	0	0	0
2	0	1	1	1
2	0	2	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	$x(yz)$	xz
2	0	3	3	3
2	0	4	4	4
2	1	0	0	0
2	1	1	0	1
2	1	2	0	0
2	1	3	3	3
2	1	4	4	4
2	2	0	0	0
2	2	1	1	1
2	2	2	0	0
2	2	3	3	3
2	2	4	4	4
3	0	0	0	0
3	0	1	0	0
3	0	2	0	0
3	0	3	0	0
3	0	4	4	4
3	1	0	0	0
3	1	1	0	0
3	1	2	0	0
3	1	3	0	0
3	1	4	4	4
3	2	0	0	0
3	2	1	0	0
3	2	2	0	0
3	2	3	0	0

ต่อเนื่องจากตารางที่แล้ว

x	y	z	$x(yz)$	xz
3	2	4	4	4
4	0	0	0	0
4	0	1	0	0
4	0	2	0	0
4	0	3	0	0
4	0	4	0	0
4	1	0	0	0
4	1	1	0	0
4	1	2	0	0
4	1	3	0	0
4	1	4	0	0
4	2	0	0	0
4	2	1	0	0
4	2	2	0	0
4	2	3	0	0
4	2	4	0	0

จากตารางจะเห็นว่า $x(yz) \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $xz \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in A$

ดังนั้น A เป็น ideal ของ G แต่ B ไม่เป็น ideal ของ G เพราะ $0(12) = 0 \in B$ แต่ $02 = 2 \notin B$

ทฤษฎีบท 2.1.5 ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G ถ้า $xy \in A$ และ $x \in A$ แล้ว $y \in A$

พิสูจน์ ให้ A เป็น ideal ของ G

ให้ $xy \in A$ และ $x \in A$

ดังนั้น $0(xy) = xy \in A$ และ $x \in A$

เนื่องจาก A เป็น ideal จะได้ว่า $y \in A$ #

บทนิยาม 2.1.6 ให้ $(G, \cdot, 0)$ เป็น KU-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ G แล้วจะเรียก S ว่า KU-subalgebra ถ้า $(S, \cdot, 0)$ เป็น KU-algebra

ทฤษฎีบท 2.1.7 ถ้า G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G แล้ว A เป็น KU-subalgebra ของ G

พิสูจน์ ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G

เพียงพอที่จะแสดงว่า A มีสมบัติปิด

ให้ $x, y \in A$

ดังนั้น $(x0)((0y)(xy)) = 0$

นั่นคือ $0(y(xy)) = 0 \in A$

เนื่องจาก A เป็น ideal และ $y \in A$ จะได้ว่า $0(xy) \in A$

ฉะนั้น $xy \in A$ #

ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น KU-subalgebra ของ G จะได้ว่า A เป็น ideal ของ G ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$, $yz \notin A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $y(xz) \notin A$

พิสูจน์ ให้ A เป็น KU-subalgebra ของ G

($\rightarrow$) ให้ A เป็น ideal

ให้ $x \in A$ และ $yz \notin A$

สมมติ $y(xz) \in A$

เนื่องจาก $x \in A$ และ A เป็น ideal จะได้ว่า $yz \in A$ ซึ่งขัดแย้ง

($\leftarrow$) สมมติว่าถ้า $x \in A$, $yz \notin A$ แล้ว $y(xz) \notin A$

ต้องการแสดงว่า A เป็น ideal ของ G

เนื่องจาก A เป็น KU-subalgebra ของ G ดังนั้นมี $0 \in A$

ให้ $x, y, z \in G$ โดยที่ $y \in A, x(yz) \in A$

สมมติว่า $xz \notin A$

จากสมมติฐานจะได้ว่า $x(yz) \notin A$ ซึ่งขัดแย้ง

#

ทฤษฎีบท 2.1.9 ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น KU-subalgebra ของ G จะได้ว่า A เป็น ideal ของ G ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$ และ $z \notin A$ สำหรับทุก $x, z \in G$ แล้ว $xz \notin A$

พิสูจน์ แทน $y = 0$ ในทฤษฎีบท 2.1.8

#

บทนิยาม 2.1.10 ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G กำหนดความสัมพันธ์ $\sim$ บน G นิยามโดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $xy, yx \in A$ และกำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ บน G โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $yx = 0$

ทฤษฎีบท 2.1.11 ให้ G เป็น KU-algebra แล้ว $(G; \leq)$ เป็น partially ordered set

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $xx = 0$ สำหรับทุก $x \in G$

ดังนั้น $x \leq x$

นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติสะท้อน

(2) ให้ $x \leq y$ และ $y \leq x$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ดังนั้น $yx = 0$ และ $xy = 0$

โดยบทนิยาม 2.1.1 ข้อที่ 4 จะได้ว่า $x = y$

นั่นคือ $\leq$ มีสมบัติปฏิสมมาตร

(3) ให้ $x \leq y$ และ $y \leq z$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ดังนั้น $yx = 0$ และ $zy = 0$

จากบทนิยาม 2.1.1 ข้อที่ 1 จะได้ว่า $(zy)((yx)(zx)) = 0$

ดังนั้น $0(0(zx)) = 0$

นั่นคือ $zx = 0$

ฉะนั้น $x \leq z$

จะได้ว่า $\leq$ มีสมบัติถ่ายทอด

จาก (1)-(3) จะได้ว่า $\leq$ เป็น partially ordered set บน G

#

ทฤษฎีบท 2.1.12 ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G แล้ว ความสัมพันธ์ $\sim$ เป็น congruence บน G

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า A มีสมบัติสะท้อนและสมมาตร

ให้ $x, y, z \in G$ โดยที่ $x \sim y$ และ $y \sim z$

ดังนั้น $xy, yx, yz, zy \in A$

เนื่องจาก $(xy)((yz)(xz)) = 0 \in A$ และ A เป็น ideal โดยทฤษฎีบท 2.1.5 จะได้ว่า

$xz \in A$

ทำในทำนองเดียวกัน $(zy)((yx)(zx)) = 0 \in A$ โดยทฤษฎีบท 2.1.5 จะได้ว่า $zx \in A$

ดังนั้น $x \sim z$

นั่นคือ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

ให้ $x, y, u, v \in G$ โดยที่ $x \sim u$ และ $y \sim v$

จะได้ว่า $xu, ux, yv, vy \in A$

เนื่องจาก $(xu)((uy)(xy)) = 0 \in A$ โดยทฤษฎีบท 2.1.5 จะได้ว่า $(uy)(xy) \in A$

เนื่องจาก $(ux)((xy)(uy)) = 0 \in A$ โดยทฤษฎีบท 2.1.5 จะได้ว่า $(xy)(uy) \in A$

ดังนั้น $xy \sim uy$

เนื่องจาก $(uy)((yv)(uv)) = 0 \in A$ และ $yv \in A$ จะได้ว่า $(uy)(uv) \in A$

เนื่องจาก $(uv)((vy)(uy)) = 0 \in A$ และ $vy \in A$ จะได้ว่า $(uv)(uy) \in A$

ดังนั้น $uy \sim uv$

จะได้ว่า $xy \sim uv$

ดังนั้น $\sim$ เป็น congruence บน G

#

ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G ให้ $\sim$ เป็น congruence relation บน G และให้ $x \in G$ กำหนดให้ $C_x = \{y \in G \mid y \sim x\} = \{y \in G \mid xy, yx \in A\}$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $xx = 0 \in A$ สำหรับทุก $x \in G$ ดังนั้น $x \sim x$ นั่นคือ $x \in C_x$ สำหรับทุก $x \in G$

ทฤษฎีบท 2.1.13 ให้ G เป็น KU-algebra และ $\sim$ เป็น congruence relation บน G จะได้ว่า $C_0 = \{x \in G \mid x \sim 0\}$ เป็น ideal ของ G

พิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า $0 \in C_0$

ให้ $x, y, z \in G$ โดยที่ $x(yz) \in C_0$ และ $y \in C_0$

ดังนั้น $x(yz) \sim 0$ และ $y \sim 0$

เนื่องจาก $y \sim 0$ และ $z \sim z$ จะได้ว่า $yz \sim 0z$ (โดยทฤษฎีบท 2.1.12)

เนื่องจาก $x \sim x$ และ $yz \sim 0z$ จะได้ว่า $x(yz) \sim x(0z)$ (โดยทฤษฎีบท 2.1.12)

ดังนั้น $xz \sim 0$ นั่นคือ $xz \in C_0$

$\therefore C_0$ เป็น ideal

#

นิยาม $G/\sim = \{C_x \mid x \in G\}$ กำหนดให้ $C_x * C_y = C_{xy}$ จากทฤษฎีบท 2.1.12 จะเห็นว่า operation $*$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามแจ่มชัด

ทฤษฎีบท 2.1.14 $(G/\sim, *, C_0)$ เป็น KU-algebra

พิสูจน์ ให้ $C_x, C_y, C_z \in G/\sim$

$$(1) (C_x * C_y) * ((C_y * C_z) * (C_x * C_z))$$

$$= C_{xy} * (C_{yz} * C_{xz})$$

$$= C_{(xy)((yz)(xz))}$$

เนื่องจาก $x, y, z \in G$ จะได้ว่า $C_{(xy)((yz)(xz))} = C_0$

นั่นคือ $(C_x * C_y) * ((C_y * C_z) * (C_x * C_z)) = C_0$

$$(2) C_x * C_0 = C_{x0} = C_0$$

$$(3) C_0 * C_x = C_{0x} = C_x$$

(4) ให้ $C_x * C_y = C_0 = C_y * C_x$
 ดังนั้น $C_{xy} = C_0 = C_{yx}$
 เนื่องจาก $xy \in C_{xy}$ ดังนั้น $xy \sim 0$
 ทำนองเดียวกัน $yx \in C_{yx}$ จะได้ว่า $yx \sim 0$
 $\therefore xy, yx \in C_0$
 นั่นคือ $x \sim y$
 ฉะนั้น $C_x = C_y$
 จาก (1)-(4) จะได้ว่า $G/\sim$ เป็น KU-algebra #

บทนิยาม 2.1.15 ให้ $(G, \cdot, 0)$ และ $(H, *, 0)$ เป็น KU-algebra และให้ $f : G \rightarrow H$ จะกล่าวว่า f เป็น homomorphism ก็ต่อเมื่อ $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$
 นิยาม kernel ของฟังก์ชัน f คือเซต $\{x \in G \mid f(x) = 0\}$ หรือ
 $\ker(f) = \{x \in G \mid f(x) = 0\}$

บทนิยาม 2.1.16 ให้ G และ H เป็น KU-algebra และ $f : G \rightarrow H$ เป็น homomorphism จะกล่าวว่า

1. f เป็น monomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1
2. f เป็น epimorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก G ไปทั่วถึง H
3. f เป็น isomorphism ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 จาก G ไปทั่วถึง H

ทฤษฎีบท 2.1.17 ถ้า G เป็น KU-algebra และ $\sim$ เป็น congruence บน G แล้ว $f : G \rightarrow G/\sim$ นิยามโดย $f(x) = C_x$ สำหรับทุก $x \in G$ เป็น epimorphism และ $\ker(f)$ เป็น ideal ของ G

พิสูจน์ ให้ $f : G \rightarrow G/\sim$ นิยามโดย $f(x) = C_x$ สำหรับทุก $x \in G$

(1) ให้ $x, y \in G$ โดยที่ $x = y$

ดังนั้น $C_x = C_y$

แล้วจะได้ว่า $f(x) = f(y)$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชัน

ให้ $C_x \in G/\sim$

ดังนั้น $f(x) = C_x$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

$$\begin{aligned}
 \text{เนื่องจาก } f(xy) &= C_{xy} \\
 &= C_x * C_y \\
 &= f(x) * f(y)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น f เป็น homomorphism บน G

นั่นคือ f เป็น epimorphism บน G

(2) ต้องการแสดงว่า $\ker(f)$ เป็น ideal ของ G

เนื่องจาก $f(0) = C_0$ ดังนั้น $0 \in \ker(f)$

ให้ $x(yz) \in \ker(f)$ และ $y \in \ker(f)$

ดังนั้น $f(x(yz)) = C_0$ และ $f(y) = C_0$

เนื่องจาก f เป็น homomorphism บน G

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } f(x(yz)) &= f(x) * f(yz) \\
 &= f(x) * (f(y) * f(z))
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(y) = C_0$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ว่า } C_0 &= f(x) * (f(y) * f(z)) \\
 &= f(x) * (C_0 * f(z)) \\
 &= f(x) * f(z) \\
 &= f(xz)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $xz \in \ker(f)$

นั่นคือ $\ker(f)$ เป็น ideal ของ G

#

2.2 อนุพันธ์ของ KU-algebra

ในหัวข้อนี้ กำหนด $x \wedge y = (yx)x$ สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน KU-algebra

ให้ G เป็น KU-algebra เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า d สอดคล้องกับ $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G ถ้า d เป็นทั้งอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา และอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G เราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ของ G

ตัวอย่าง 2.2.1 ให้ $G = \{0,1,2,3\}$ กำหนด operation การคูณดังตารางต่อไปนี้

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	0	0	0	3
2	0	1	0	3
3	0	0	0	0

ดังนั้น G เป็น KU-algebra

กำหนดให้ $d: G \rightarrow G$ โดยที่ $d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0,2,3 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

สามารถตรวจสอบได้โดยง่ายว่า d เป็นอนุพันธ์ของ G

ทฤษฎีบท 2.2.2 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G เป็น regular แล้ว d เป็น regular

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G

จะได้ว่า สำหรับทุก $x \in G$

$$\begin{aligned}
 d(0) &= d(x0) \\
 &= d(x)0 \wedge xd(0) \\
 &= 0 \wedge xd(0) \\
 &= (xd(x))0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ดังนั้น d เป็น regular

#

ทฤษฎีบท 2.2.3 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G แล้ว d เป็น regular

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
d(0) &= d(00) \\
&= 0d(0) \wedge d(0)0 \\
&= d(0) \wedge 0 \\
&= (0d(0))d(0) \\
&= d(0)d(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น d เป็น regular

#

บทแทรก 2.2.4 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ของ G เป็น regular แล้ว d เป็น regular

ทฤษฎีบท 2.2.5 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G แล้วสำหรับทุก $x, y \in G$ จะได้ว่า

1. $d(x) = x \wedge d(x)$
2. $d(x) \leq x$
3. $d(xy) \leq d(x)y$
4. $d(d(x)) \leq x$

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G

ให้ $x, y \in G$

$$\begin{aligned}
(1) \quad d(x) &= d(0x) \\
&= d(0)x \wedge 0d(x) \\
&= 0x \wedge 0d(x) \\
&= x \wedge d(x)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in G$

$$(2) \text{ จากข้อ (1) } d(x) = x \wedge d(x) = (d(x)x)x$$

$$\text{ดังนั้น } d(x) = (d(x)x)x$$

$$\text{จะได้ว่า } xd(x) = 0$$

นั่นคือ $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

$$\begin{aligned}
(3) \quad d(xy) &= d(x)y \wedge xd(y) \\
&= ((xd(y))(d(x)y))(d(x)y)
\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (d(x)y)d(xy) = 0$$

นั่นคือ $d(xy) \leq d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$

(4) จากข้อ (1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} d(d(x)) &= d(x) \wedge d(d(x)) \\ &= (d(d(x))d(x))d(x) \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(x)d(d(x)) = 0$

นั่นคือ $d(d(x)) \leq d(x)$

จากข้อ (2) $d(x) \leq x$

ดังนั้น $d(d(x)) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

#

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G แล้วสำหรับทุก $x, y \in G$ จะได้ว่า

1. $d(xy) \leq xd(y)$
2. $d(d(x)x) = 0$

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G

ให้ $x, y \in G$

$$\begin{aligned} (1) \quad d(xy) &= xd(y) \wedge d(x)y \\ &= ((d(x)y)(xd(y)))(xd(y)) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(xd(y))d(xy) = 0$

นั่นคือ $d(xy) \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$

$$\begin{aligned} (2) \quad d(d(x)x) &= d(x)d(x) \wedge d(d(x))x \\ &= 0 \wedge d(d(x))x \\ &= (d(d(x))0)0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $d(d(x)x) = 0$ สำหรับทุก $x \in G$

#

ทฤษฎีบท 2.2.7 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G แล้ว

$d^{-1}(0) := \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น KU-subalgebra ของ G

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G

เนื่องจาก d เป็น regular ดังนั้น $d^{-1}(0) \neq \emptyset$

ให้ $x, y \in d^{-1}(0)$

เพราะว่า $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$

$$= x0 \wedge 0y$$

$$= 0 \wedge y$$

$$= (y0)0$$

$$= 0$$

ดังนั้น $xy \in d^{-1}(0)$

ฉะนั้น $d^{-1}(0)$ เป็น KU-subalgebra ของ G

#

ทฤษฎีบท 2.2.8 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G แล้ว

$d^{-1}(0) = \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น KU-subalgebra ของ G

พิสูจน์ ให้ d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G

เนื่องจาก d เป็น regular ดังนั้น $d^{-1}(0) \neq \emptyset$

ให้ $x, y \in d^{-1}(0)$

เพราะว่า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$

$$= 0y \wedge x0$$

$$= y \wedge 0$$

$$= (0y)y$$

$$= yy$$

$$= 0$$

ดังนั้น $xy \in d^{-1}(0)$

ฉะนั้น $d^{-1}(0)$ เป็น KU-subalgebra ของ G

#

บทแทรก 2.2.9 ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ของ G แล้ว

$d^{-1}(0) = \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น KU-subalgebra ของ G

ทฤษฎีบท 2.2.10 ถ้า G เป็น KU-algebra และ $d_1, d_2, \dots, d_n$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G แล้ว

$d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots))) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ สำหรับ $n = 1$

ให้ $x \in G$

$$\begin{aligned} \text{แล้ว } d_1(x) &= d_1(0x) \\ &= d_1(0)x \wedge 0d_1(x) \\ &= 0x \wedge d_1(x) \\ &= x \wedge d_1(x) \\ &= (d_1(x)x)x \end{aligned}$$

ดังนั้น $xd_1(x) = 0$

นั่นคือ $d_1(x) \leq x$

ให้ $n \in \mathbb{N}$

สมมติว่า $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots)) \leq x$

สมมติให้ $D_n = d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots))$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } d_{n+1}(D_n) &= d_{n+1}(0D_n) \\ &= d_{n+1}(0)D_n \wedge 0d_{n+1}(D_n) \\ &= D_n \wedge d_{n+1}(D_n) \\ &= (d_{n+1}(D_n)D_n)D_n \end{aligned}$$

นั่นคือ $D_n d_{n+1}(D_n) = 0$

ฉะนั้น $d_{n+1}(D_n) \leq D_n$

จากสมมุติฐาน จะได้ว่า $d_{n+1}(D_n) \leq D_n \leq x$

#

ทฤษฎีบท 2.2.11 ถ้า G เป็น KU-algebra และ $d_1, d_2, \dots, d_n$ เป็นอนุพันธ์ของ G แล้ว

$d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x))\dots)) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$

พิสูจน์ พิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบท 2.2.10

#

บทนิยาม 2.2.12 ให้ G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ของ G ให้ A เป็น ideal ของ G เราจะเรียก A ว่า d -invariant ถ้า $d(A) \subseteq A$

ตัวอย่าง 2.2.13 จากตัวอย่าง 1.4 เราได้ว่า $A = \{0, 2\}$ เป็น ideal ของ KU-algebra

$H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ กำหนดให้ $d: H \rightarrow H$ นิยามโดย

$$d(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, 2, 3 \\ 1, & x = 1 \\ 4, & x = 4 \end{cases}$$

สังเกตได้ว่า $d(A) = \{0\}$ ซึ่ง $d(A) \subseteq A$

ดังนั้น A เป็น d-invariant

ทฤษฎีบท 2.2.14 ให้ G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ของ G แล้วจะได้ว่า ทุก ideal ของ G เป็น d-invariant

พิสูจน์ ให้ A เป็น ideal ของ G

ให้ $y \in d(A)$

ดังนั้นจะมี $x \in A$ ซึ่งทำให้ $y = d(x)$

ดังนั้น $xy = xd(x) = 0 \in A$ (จากทฤษฎีบท 2.2.5 ข้อ 2)

เนื่องจาก A เป็น ideal จะได้ว่า $y \in A$

ดังนั้น $d(A) \subseteq A$

นั่นคือ A เป็น d-invariant

#

สรุป

จากผลการวิจัยสามารถสรุปได้ดังนี้

1. โครงสร้าง BCC-algebra

โครงสร้างทางพีชคณิต BCC-algebra หมายถึง ระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation มี 0 เป็นสมาชิกของ G และสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $((x \cdot y) \cdot (z \cdot y)) \cdot (x \cdot z) = 0$
2. $0 \cdot x = 0$
3. $x \cdot 0 = x$
4. ถ้า $x \cdot y = 0 = y \cdot x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ให้ G เป็น BCC-algebra และ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก A ว่าเป็น BCC-ideal ของ G ถ้า $0 \in A$ และถ้า $(xy)z \in A$ และ $y \in A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $xz \in A$

ให้ G เป็น BCC-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก S ว่าเป็น BCC-subalgebra ของ G ถ้า S เป็น BCC-algebra ภายใต้ operation เดียวกันกับ G กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $xy = 0$ แล้ว $(G; \leq)$ เป็น partially ordered set บน G

2. อนุพันธ์ของ BCC-algebra

ให้ G เป็น BCC-algebra สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน G กำหนดให้ $x \wedge y = y(yx)$ และเราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d: G \rightarrow G$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 ของ G ถ้า

$d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ ในทำนองเดียวกันถ้า d สอดคล้องกับ

$d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 1 และอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 1 ของ G เราจะกล่าวว่า d

เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G ถ้า d เป็นฟังก์ชันของ G โดยที่ $d(0)=0$ แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็น regular ให้ A เป็น ideal ของ G จะเรียก A ว่า d -invariant ถ้า $d(A) \subseteq A$

ถ้า G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 1 ของ G แล้วจะได้ว่า

1. d เป็น regular
2. $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$
3. $d(xy) \leq d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$
4. $d(xy) \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$
5. $d(xd(x))=0$ สำหรับทุก $x \in G$
6. $d(d(x)) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$
7. $d^{-1}(0) := \{x \in G \mid d(x)=0\}$ เป็น BCC-subalgebra ของ G
8. $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x)))) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$ เมื่อ $d_1, d_2, \dots, d_n$ เป็น derivations ของ G
9. ทุก ideal ของ G เป็น d -invariant

ให้ G เป็น BCC-algebra สำหรับทุกสมาชิก x และ y ใน G กำหนดให้ $x \wedge y = x(yx)$ และ เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G ถ้า

$d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ ในทำนองเดียวกันถ้า d สอดคล้องกับ

$d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 2 ของ G ถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 และอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 2 ของ G เราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์แบบที่ 2 ของ G

ถ้า G เป็น BCC-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย แบบที่ 2 ของ G แล้ว d เป็น regular และเป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ และถ้า d เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา แบบที่ 2 ของ G แล้วจะได้ว่า สำหรับทุก $x \in G$, $d(0) = d(0)x$ และ ถ้า $d(0) = 0$ แล้ว $d(x) = d(x) \wedge x$

ให้ $D : G \rightarrow G$ จะเรียกฟังก์ชัน D ว่าอนุพันธ์ทางซ้ายแบบที่ 2 ของ G ถ้า

$D(xy) = D(x)y \wedge D(y)x$ สำหรับทุก $x, y \in G$

ถ้า G เป็น BCC-algebra และ D อนุพันธ์ทางซ้ายแบบที่ 2 ของ G แล้ว สำหรับทุก $x, y \in G$ จะได้ว่า $D(0) = 0$, $D(x)x = D(y)y$ และทุก ideal ของ G เป็น D -invariant

3. โครงสร้าง KU-algebra

โครงสร้างทางพีชคณิต KU-algebra หมายถึง ระบบคณิตศาสตร์ $(G, \cdot, 0)$ โดยที่ G เป็นเซตไม่ว่าง พร้อมด้วย $\cdot$ เป็น binary operation มี 0 เป็นสมาชิกของ G และ สอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $(x \cdot y) \cdot ((y \cdot z) \cdot (x \cdot z)) = 0$
2. $0 \cdot x = x$
3. $x \cdot 0 = 0$
4. ถ้า $x \cdot y = 0 = y \cdot x$ แล้ว $x = y$

สำหรับทุก $x, y, z \in G$

ให้ G เป็น KU-algebra และ S เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก S ว่า KU-subalgebra ถ้า S เป็น KU-algebra ภายใต้ operation เดียวกันกับ G ให้ A เป็นสับเซตไม่ว่างของ G จะเรียก A ว่า ideal ของ G ถ้า $0 \in A$ และถ้า $x(yz) \in A$ และ $y \in A$ แล้ว $xz \in A$ กำหนดความสัมพันธ์ $\leq$ โดย $x \leq y$ ก็ต่อเมื่อ $yx = 0$ แล้ว $(G; \leq)$ เป็น partially ordered set และกำหนดความสัมพันธ์ $\sim$ บน G นิยามโดย $x \sim y$ ก็ต่อเมื่อ $xy, yx \in A$ แล้วจะได้ว่า ความสัมพันธ์ $\sim$ เป็น congruence บน G

ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น ideal ของ G จะได้ว่า

1. ถ้า $xy \in A$ และ $x \in A$ แล้ว $y \in A$
2. A เป็น KU-subalgebra ของ G

ให้ G เป็น KU-algebra และ A เป็น KU-subalgebra ของ G จะได้ว่า

1. A เป็น ideal ของ G ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$, $yz \notin A$ สำหรับทุก $x, y, z \in G$ แล้ว $y(xz) \notin A$
2. A เป็น ideal ของ G ก็ต่อเมื่อ ถ้า $x \in A$ และ $z \notin A$ สำหรับทุก $x, z \in G$ แล้ว $xz \notin A$

ให้ A เป็น ideal ของ G และ $\sim$ เป็น congruence relation บน G กำหนดให้

$C_x = \{y \in G \mid xy, yx \in A\}$ หรือ $C_x = \{y \in G \mid x \sim y\}$ จะได้ว่า C_0 เป็น ideal ของ G

ให้ $f : G \rightarrow G/\sim$ นิยามโดย $f(x) = C_x$ จะได้ว่า f เป็น epimorphism และ $\ker(f)$ เป็น ideal ของ G

นิยาม $G/\sim = \{C_x \mid x \in G\}$ และกำหนด binary operation $*$ โดย $C_x * C_y = C_{xy}$ จะได้ว่า $(G/\sim, *, C_0)$ เป็น KU-algebra

4. อนุพันธ์ของ KU-algebra

ให้ G เป็น KU-algebra กำหนด $x \wedge y = (yx)x$ สำหรับทุกสมาชิก $x, y \in G$ เราจะกล่าวว่าฟังก์ชัน $d : G \rightarrow G$ เป็นอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา ของ G ถ้า $d(xy) = d(x)y \wedge xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$ ในทำนองเดียวกัน ถ้า d สอดคล้องกับ $d(xy) = xd(y) \wedge d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$ แล้วเราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G ถ้า d เป็นทั้งอนุพันธ์ ซ้าย-ขวา และอนุพันธ์ ขวา-ซ้าย ของ G เราจะกล่าวว่า d เป็นอนุพันธ์ของ G

ถ้า G เป็น KU-algebra และ d เป็นอนุพันธ์ของ G แล้วจะได้ว่า

1. d เป็น regular
2. $d(x) = x \wedge d(x)$ สำหรับทุก $x \in G$
3. $d(x) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$
4. $d(xy) \leq d(x)y$ สำหรับทุก $x, y \in G$
5. $d(d(x)) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$
6. $d(xy) \leq xd(y)$ สำหรับทุก $x, y \in G$
7. $d(d(x)x) = 0$ สำหรับทุก $x \in G$
8. $d^{-1}(0) := \{x \in G \mid d(x) = 0\}$ เป็น KU-subalgebra ของ G
9. $d_n(d_{n-1}(\dots(d_2(d_1(x)))\dots)) \leq x$ สำหรับทุก $x \in G$ เมื่อ $d_1, d_2, \dots, d_n$ เป็น derivations ของ G
10. ทุก ideal ของ G เป็น d -invariant

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

Bell, H.E. and L.C. Kappe. 1989. Rings in which Derivations Satisfy Certain Algebraic Conditions. **Acta Math. Hungar.** 53(3-4): 339-346.

Bell, H.E. and G. Mason. 1987. On Derivations in Near-ring and Near-fields. **North-Holland Math. Studies.** 137: 31-35.

Dudek, W.A. and X. Zhang. 1998. On ideals and congruences in BCC-algebras. **Czechoslovak Math. Journal.** 48(123): 21-29.

Dummit, D.S. and R.M. Foote. 1999. **Abstract Algebra.** 2nd ed. John Wiley and Sons, Inc., The United States of America.

Hamza, A.S.A. and N.O. Al-Shehri. 2006. Some results on derivations of BCI-algebras. **Coden Jnsmac.** 46: 13-19.

Hamza, A.S.A. and N.O. Al-Shehri. 2007. On left derivations of BCI-algebras. **Soochow Journal of Mathematics.** 33(3): 435-444.

Jun, Y.B. and X.L. Xin. 2004. On derivations of BCI-algebras. **Information Sciences.** 159: 167-176.

Posner, E. 1957. Derivations in Prime Rings. **Proc. Am. Math. Soc.** 8: 1093-1100.

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นายชาญวิทย์ ปรามพยัคฆ์
วัน เดือน ปี ที่เกิด	12 เดือนกันยายน 2525
สถานที่เกิด	อำเภอเกษตรสมบูรณ์ จังหวัดชัยภูมิ
ประวัติการศึกษา	วท.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (2548)
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	ทุนมหาวิทยาลัยงบประมาณยุทธศาสตร์การพัฒนามหาวิทยาลัย เทคโนโลยีราชมงคล พระนครด้านวิทยาศาสตร์และ เทคโนโลยี ประจำปี 2550 ทุนสนับสนุนงานวิจัยระดับบัณฑิตศึกษา เพื่อการตีพิมพ์ ในวารสารในระดับชาติและระดับนานาชาติ บัณฑิต วิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ประจำปีงบประมาณ 2551