

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

3.1 ทฤษฎีกลศาสตร์ของไหล

ของไหล (fluid) ที่มีความหมายโดยทั่วไปถือว่าเป็นสารต่อเนื่องที่อาจอยู่ในสถานะของเหลวหรือแก๊ส ซึ่งจะเกิดการเปลี่ยนรูปได้ภายใต้ความเค้นที่มากระทำ การไหลของของเหลวจะขึ้นอยู่กับหรือเปลี่ยนแปลงไปกับระยะทางและเวลา การไหลนั้นแบ่งออกได้เป็น การไหลแบบหนืด (viscous flow) และแบบไม่หนืด (inviscous flow) การไหลแบบไม่หนืดเป็นการไหลที่ไม่มีความเสียดทาน ซึ่งยังสามารถจำแนกออกได้เป็นแบบไม่อัดตัว (incompressible flow) และแบบอัดตัว (compressible flow) การไหลแบบไม่อัดตัวปกติจะเกิดขึ้นกับของเหลว (liquid) ในขณะที่การไหลแบบอัดตัวโดยทั่วไปจะเกิดขึ้นกับแก๊ส (gas)

3.1.1 สมการควบคุมการไหลของของไหลและการถ่ายเทความร้อน

สมการควบคุมการไหลของของไหลจะถูกแทนด้วยการบรรยายเชิงคณิตศาสตร์ของกฎการอนุรักษ์ทางฟิสิกส์ คือ มวลของของไหลจะคงที่ไม่เปลี่ยนแปลง อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมจะมีค่าเท่ากับผลรวมของแรงของอนุภาคของไหล (กฎข้อ 2 ของนิวตัน) อัตราการเปลี่ยนแปลงของพลังงานจะเท่ากับผลรวมของอัตราของความร้อนที่เพิ่มขึ้นกับงานที่ทำของอนุภาคของไหล (กฎข้อ 1 ของเทอร์โมไดนามิกส์) ดังนั้นสมการที่เกี่ยวข้องจึงประกอบด้วยสมการดังนี้

สมการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla \cdot \rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

สมการอนุรักษ์โมเมนตัม

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

สมการอนุรักษ์พลังงาน

$$\frac{\partial(\rho C_p T)}{\partial t} + \rho C_p \nabla(Tu) = k \nabla^2 T - p \nabla u + q \quad (3.3)$$

3.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

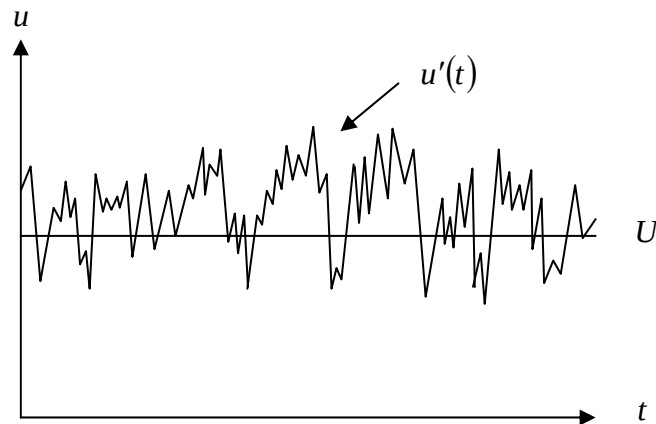
สำหรับงานทางด้านวิศวกรรมที่เกี่ยวข้องกับการไหลต่าง ๆ เช่น การไหลในท่อ การไหลผ่านแผ่นเรียบ และอื่น ๆ จะมีพฤติกรรมการไหลแบบปั่นป่วนนั้นคือความเร็วของลมประกอบไปด้วยส่วนที่เป็นค่าเฉลี่ยและส่วนที่เป็นค่าแปรปรวน ดังนั้นการวิเคราะห์ผลของแรงลมจึงต้องใช้ทฤษฎีการไหลแบบปั่นป่วน

3.2.1 การไหลแบบปั่นป่วน

ค่าเรย์โนลด์ของการไหลจะให้ปริมาณความสัมพันธ์ของแรงภายในหรือแรงเฉื่อยต่อแรงเนื่องจากความหนืด ในการทดสอบระบบการไหล สังเกตว่าค่าเรย์โนลด์ที่ต่ำกว่าค่าเรย์โนลด์วิกฤต Re_{crit} การไหลจะสม่ำเสมอและชั้นของของไหลที่ติดกันจะเลื่อนผ่านไปอย่างเป็นระเบียบ ถ้าทำการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตที่ไม่เปลี่ยนแปลงตามเวลาจะเป็นการไหลแบบคงที่ เรียกการไหลแบบนี้ว่า การไหลแบบราบเรียบ (laminar flow) ในกรณีที่ค่าเรย์โนลด์มากกว่าค่าเรย์โนลด์วิกฤต Re_{crit} พฤติกรรมการไหลจะเป็นแบบสับสนและวุ่นวาย การเคลื่อนที่ภายในจะไม่คงที่ แม้ว่าเงื่อนไขขอบเขตที่ใส่เข้าไปจะคงที่ ความเร็วและค่าการไหลอื่น ๆ จะแปรผันตามการไหลที่มีทิศทางสับสนและวุ่นวาย เรียกการไหลแบบนี้ว่า การไหลแบบปั่นป่วน (turbulent flow)

ความเร็วในภาพที่ 3.1 สามารถแยกออกได้เป็นค่าความเร็วเฉลี่ยคงที่ U กับส่วนที่ผันผวน $u'(t)$ ที่วางซ้อนกันอยู่ จะได้ว่า $u(t) = U + u'(t)$ แม้ว่าในการไหลซึ่งความเร็วเฉลี่ยและความดันจะแปรผันใน 1 หรือ 2 มิติ ส่วนการผันผวนปั่นป่วนจะพิจารณาใน 3 มิติ นอกจากนี้ภาพของการไหลปั่นป่วนแสดงให้เห็นโครงสร้างการไหลวน ซึ่งเรียกว่า turbulent eddy

ในการไหลปั่นป่วนอนุภาคของไหลซึ่งเริ่มต้นจะอยู่แยกห่างออกจากกันสามารถเคลื่อนที่เข้ามาใกล้กันได้ด้วย eddy motion สิ่งที่ตามมาคือปริมาณความร้อนและโมเมนตัมจะมีการแลกเปลี่ยนกันได้ดี turbulent eddy ขนาดใหญ่จะมีผลกับความเร็วเฉลี่ยและเอาพลังงานมาจากความเร็วเฉลี่ยด้วยกระบวนการที่เรียกว่า vortex stretching เกรเดียนต์ความเร็วเฉลี่ยที่มีในการไหลเฉือนจะทำให้การหมุนของ turbulent eddy บิดเบี้ยว



ภาพที่ 3.1

ตัวอย่างขนาดความเร็วในการไหลแบบปั่นป่วน

ค่าเรย์โนลด์ large eddy ได้จากการรวมกันของ eddy scale กับ ความหนืดคัสกีย์ ซึ่งจะมีขนาดใหญ่ในทุกการไหลที่เป็นการไหลแบบปั่นป่วน ดังนั้น large eddy นี้จะถูกบังคับด้วยแรงเฉื่อยและความหนืดซึ่งไม่สำคัญมากนัก เพราะฉะนั้น large eddy จะมีผลเมื่อไม่มีความหนืดและโมเมนตัมเชิงมุม โดยจะถูกอนุรักษ์ระหว่างการเกิด vortex stretching เนื่องจากอัตราการหมุนที่เพิ่มขึ้นและรัศมีของหน้าตัดที่ลดลง

3.2.2 สมการเรย์โนลด์ของการไหลแบบปั่นป่วน

การวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนด้วยสมการนาเวียร์-สโตกส์โดยตรงนั้น ไม่สามารถทำได้ ทฤษฎีการวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วนในปัจจุบันจึงใช้สมการของเรย์โนลด์ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ที่ได้จากการเฉลี่ยของสมการนาเวียร์-สโตกส์ โดยเริ่มจากการพิจารณาว่าความเร็วของการไหลและแรงดันจะอยู่ในรูปของค่าเฉลี่ยรวมกับค่าแปรปรวน

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} + u' & v &= \bar{v} + v' \\ w &= \bar{w} + w' & p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} u' dt = 0 \quad ; \quad \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} u dt = 0$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} v' dt = 0 & \quad ; \quad \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} v dt = 0 \\
\frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} w' dt = 0 & \quad ; \quad \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} w dt = 0
\end{aligned} \tag{3.5}$$

แทนสมการ 3.4 ลงในสมการเชิงอนุพันธ์มวล โดยพิจารณาเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว จะได้ว่า

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{3.6}$$

และทำการแทนสมการ 3.4 - 3.5 ลงในสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนตัมโดยพิจารณาเป็นการไหลแบบไม่อัดตัว ไม่คิดผลของค่าความหนืดและไม่คิดผลของแรงเนื่องจากน้ำหนักของตัวเอง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'u'} \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'} \right] & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'w'} \right]
\end{aligned} \tag{3.7a}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) - \rho \overline{v'u'} \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) - \rho \overline{v'v'} \right] & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) - \rho \overline{v'w'} \right]
\end{aligned} \tag{3.7b}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) - \rho \overline{w'u'} \right] \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \rho \overline{w'v'} \right] & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \rho \overline{w'w'} \right]
\end{aligned} \tag{3.7c}$$

สมการ 3.7a – 3.7c เรียกว่า สมการเรย์โนลด์

สังเกตว่า สมการเรย์โนลด์ นั้นมีหน้าตาคล้ายคลึงกับสมการเชิงอนุพันธ์โมเมนต์ของนาเวียร์-สโตกส์ โดยมีเทอมเพิ่มขึ้นมา 9 เทอม ซึ่งเรียกว่า Reynolds stresses tensor หรือ Turbulence stresses tensor คือ

$$\begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

จะเห็นได้ว่าสมการเรย์โนลด์นั้น มีตัวไม่รู้ค่าเป็นค่าเฉลี่ยของความดันและความเร็วในแกนต่าง ๆ ซึ่งสมการจะอยู่ในรูปของการไหลแบบปั่นป่วน ทำให้สามารถทำการวิเคราะห์ต่อไปได้ อย่างไรก็ตาม เทอมของ Reynolds stresses นั้นเป็นตัวไม่รู้ค่าเพิ่มขึ้นมา

3.2.3 แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วน

ทฤษฎีในการประดิษฐ์แบบจำลองการไหลแบบปั่นป่วนนั้นสามารถแบ่งออกได้เป็น 3 ทฤษฎี ดังนี้

1. Large eddy simulation (LES)

ทฤษฎีนี้จะจำลองพฤติกรรมของ Eddy ขนาดใหญ่และพิจารณาว่าพฤติกรรมของ Eddy ขนาดเล็กนั้นไม่แปรเปลี่ยนตามปัญหา

ข้อด้อยของทฤษฎีนี้คือโดยทั่วไปจะใช้ระยะเวลาในการคำนวณสูงกว่าทฤษฎี EVM

2. Reynolds stress method (RSM)

ทฤษฎีนี้จะทำการหาสมการเพิ่มเติมจากความสัมพันธ์ระหว่างค่า Reynolds stresses แต่ละตัวใน Reynolds stresses tensor ซึ่งทฤษฎีนี้ซับซ้อนมากกว่าทฤษฎี EVM และเกี่ยวข้องกับสมการจำนวนมาก นอกจากนั้นยังมีค่าคงที่ที่ได้จากการทดลองซึ่งมีจำนวนมาก และไม่ค่อยชัดเจน อีกทั้งทฤษฎีนี้ยังใช้เวลาในการวิเคราะห์นานกว่าทฤษฎี EVM และ LES ด้วยทำให้ทฤษฎี RSM ไม่ค่อยได้รับความนิยม

3. Eddy viscosity model (EVM)

ทฤษฎีนี้เป็นที่นิยมและใช้กันแพร่หลายในการวิเคราะห์การไหลแบบปั่นป่วน ทฤษฎีนี้พิจารณาว่า Reynolds stresses นั้นสัมพันธ์กับเกรเดียนต์ความเร็ว ดังนี้

$$\begin{aligned}
& -\rho \begin{bmatrix} \overline{u'u'} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'v'} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'w'} \end{bmatrix} \\
& = \mu_t \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.9)
\end{aligned}$$

โดยที่ μ_t คือ ความหนืดของการไหลแบบปั่นป่วน

เมื่อแทนความสัมพันธ์ของสมการ 3.9 ลงในสมการ 3.7a – 3.7c จะทำให้สมการเรย์โนลด์อยู่ในรูปแบบของสมการดังนี้

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right] \quad (3.10a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) \right] \quad (3.10b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) \right] \quad (3.10c)
\end{aligned}$$

แบบจำลองที่พัฒนาขึ้นจาก EVM นี้ มีหลากหลายตัวที่เป็นที่นิยมและถูกนำไปพัฒนาสร้างเป็นซอฟต์แวร์สำเร็จรูปเพื่อการใช้งาน เช่น Zero Equation Turbulence Model,

Standard $k - \varepsilon$ Model, Standard $k - \omega$ Turbulence Model, Shear stress Transport Turbulence Model (SST) และอื่น ๆ

สำหรับงานวิจัยนี้จะเลือกแบบจำลองการไหลปั่นป่วน คือ Standard $k - \varepsilon$ Model ซึ่งเป็นแบบจำลองที่ได้รับความนิยมในงานด้านอุตสาหกรรมที่เกี่ยวข้องกับการไหล อีกทั้งยังเป็นแบบจำลองที่มีรูปแบบง่ายสำหรับการกำหนดเงื่อนไขขอบเขต และเงื่อนไขเริ่มต้น โดยแบบจำลอง

Standard $k - \varepsilon$ Model นั้น ค่าความหนืดของการไหลแบบปั่นป่วน μ_t พิจารณาจาก

$$\mu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.11)$$

โดยที่ k คือ สมการพลังงานจลน์แบบปั่นป่วน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{u}k)}{\partial x} + \rho \frac{\partial (\bar{v}k)}{\partial y} + \rho \frac{\partial (\bar{w}k)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + \mu_t \phi - \rho \varepsilon \end{aligned} \quad (3.12)$$

และ ε คือ สมการอัตราการกระจายพลังงานจลน์แบบปั่นป่วน สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \frac{\partial (\bar{u}k)}{\partial x} + \rho \frac{\partial (\bar{v}k)}{\partial y} + \rho \frac{\partial (\bar{w}k)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_{1\varepsilon} \mu_t \frac{\varepsilon}{k} \phi - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned} \quad (3.13)$$

โดยที่ $C_\mu = 0.09$, $C_{1\varepsilon} = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1$ และ $\sigma_\varepsilon = 1.3$ เป็นค่าคงที่ที่ได้จากการทดลองตามลำดับ

สมการของ $k - \varepsilon$ สมการที่ 3.12 – 3.13 นี้ เป็นสมการที่ใช้ประกอบกับสมการเรย์โนลด์ในการคำนวณหาค่าความเร็วเฉลี่ย $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ ตามลำดับ

3.3 ระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม (Finite Volume Method)

ปัญหาทางวิศวกรรมรวมไปถึงฟิสิกส์สามารถแทนได้ด้วย สมการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งส่วนใหญ่จะอยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations หรือ PDE) ทั้งปัญหากลศาสตร์ของแข็ง และพลศาสตร์ของไหลสามารถแทนด้วยเชิงอนุพันธ์ย่อยทั้งนั้น แต่ปัญหาก็คือ เชิงอนุพันธ์ย่อยที่จะนำมาใช้ประยุกต์ในงานวิศวกรรมนั้นไม่สามารถหาผลเฉลยด้วยวิธีการทางคณิตศาสตร์ทั่วไปได้ กล่าวคือการหาคำตอบที่แท้จริง (Exact Solution) ของสมการเหล่านี้ทำได้ยาก แต่ยังมีคณิตศาสตร์อีกแขนงหนึ่งที่พอจะหาคำตอบของเชิงอนุพันธ์ย่อยได้โดยเรียกศาสตร์แขนงนี้ว่า การวิเคราะห์เชิงตัวเลข (Numerical Analysis)

หลักการง่าย ๆ ของการวิเคราะห์เชิงตัวเลขก็คือ ทำการแปลงสมการทางคณิตศาสตร์ที่ยุ่งยากอย่าง เช่น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ที่มีการดิฟและอินทิเกรตให้เป็นสมการที่มีแต่การ บวก ลบ คูณ หาร เท่านั้นหรือสมการพีชคณิต (Algebraic Equations) โดยเรียกกระบวนการในการแปลงรูปสมการว่า Discretization ซึ่งโดยทั่วไปมีหลายกระบวนการเช่น ระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (Finite difference method) ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (Finite element method) และระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม (Finite volume method) ซึ่งสมการพีชคณิตที่ได้มาก็จะสามารถหาคำตอบได้โดยง่าย

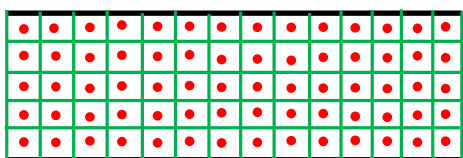
กระบวนการแปลงรูปสมการ (Discretization) ด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่มนั้นใช้หลักการทางด้านพลศาสตร์ของไหลโดยแบ่งปัญหาที่อยู่ในปริมาตรควบคุม (Control Volume) ของทั้งขอบเขตของปัญหาที่พิจารณา (Domain) ให้กลายเป็น Volume ย่อย ๆ ต่อไปก็ทำการ Discretize สมการควบคุมการไหลที่เกี่ยวข้อง ดังภาพที่ 3.2



กำหนดโดเมนของปัญหา



แบ่งให้เป็น cell ย่อย ๆ ในโดเมน



กำหนดจุดในแต่ละ cell และทำการ Discretize
สมการที่เกี่ยวข้อง ให้ครบทุก cell แล้วทำการหา
ผลเฉลย

ภาพที่ 3.2

กระบวนการแปลงรูปสมการด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์โวลุ่ม