

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยกรณีศึกษาโดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพซึ่งเน้นการบรรยายเชิงวิเคราะห์ โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเต็มโดยใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad หรือGSP เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยพิจารณาจากพฤติกรรมการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มที่ได้โดยใช้แถบบันทึก วัสดุท่อน และพิจารณาจากงานเขียนของนักเรียนระหว่างปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้และมีการสัมภาษณ์ประกอบการวิเคราะห์ข้อมูล ซึ่งรายละเอียดการวิเคราะห์ข้อมูลเป็นดังนี้

การวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนโดยใช้กรอบทฤษฎี Action – Process – Structure (APS) ที่พัฒนาโดย Heingraj (2006) โดยผู้วิจัยได้นำเสนอ ข้อมูลพื้นฐาน การวิเคราะห์ข้อมูล สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล โดยมีหัวข้อดังนี้

1. ข้อมูลทั่วไปของโรงเรียนบ้านโนนสว่าง อำเภอโซ่พิสัย จังหวัดหนองคาย
2. ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย
3. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
 - 3.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
 - 3.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
 - 3.3 สรุปผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
4. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
 - 4.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

4.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

4.3 สรุปผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

5. การเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

6. อภิปรายผล

อภิปรายผลความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

1. ข้อมูลทั่วไปของโรงเรียนบ้านโนนสว่าง อำเภอโซ่พิสัย จังหวัดหนองคาย

โรงเรียนบ้านโนนสว่าง สร้างเมื่อวันที่ 1 มิถุนายน พ.ศ.2515 ณ อาคารที่สร้างชั่วคราว เปิดทำการสอนครั้งแรก ตั้งแต่ชั้นประถมศึกษาปีที่ 1-4 มีนักเรียนทั้งหมด 72 คน ต่อมา ปี พ.ศ. 2517 ได้งบประมาณจากกองสลากกินแบ่งรัฐบาล เป็นจำนวนเงิน 200,000 บาท ได้สร้างอาคารเรียนถาวรขนาด 4 ห้องเรียน จำนวน 1 หลัง เปิดอาคารเรียนเมื่อวันที่ 1 พฤษภาคม 2517 มีครูประจำการ 3 คน ผู้ช่วยครู 1 คน มีนักเรียนทั้งหมด 173 คน ในปี พ.ศ. 2539 โรงเรียนบ้านโนนสว่างได้รับอนุมัติจากสำนักงานคณะกรรมการการประถมศึกษาแห่งชาติ ให้เปิดเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ในโรงเรียนโครงการขยายโอกาสทางการศึกษา ปัจจุบันโรงเรียนบ้านโนนสว่าง ตั้งอยู่ที่บ้านโนนสว่าง หมู่ที่ 3 ตำบลถ้ำเจริญ อำเภอโซ่พิสัย จังหวัดหนองคาย สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาหนองคาย เขต 2 เปิดสอนตั้งแต่ระดับ ก่อนประถมศึกษา ถึงระดับ มัธยมศึกษาตอนต้น มีเขตพื้นที่บริการ 5 หมู่บ้าน ได้แก่ บ้านโนนสว่าง บ้านโนนสว่างใต้ บ้านหนองแวง บ้านคลองทิพย์ และบ้านศรีอุบล สภาพชุมชนรอบบริเวณโรงเรียนมีลักษณะเป็นชุมชนชนบท มีประชากรประมาณ 345 ครัวเรือน มีประชากรทั้งหมด 1,947 คน อาชีพหลักของชุมชนคือ เกษตรกรรม เนื่องจาก เป็นที่ราบเหมาะแก่การเพาะปลูกพืชและเลี้ยงสัตว์ ประชากรส่วนใหญ่นับถือศาสนา พุทธ

ปรัชญาของโรงเรียน : ปญญ นรานํ รตนํ

ปัญหาเปรียบคังดวงแก้วแห่งคนดี

คำขวัญของโรงเรียน : คุณธรรม วินัย ใฝ่รู้ สู้งาน

สีประจำโรงเรียน : ฟ้า - น้ำเงิน

สัญลักษณ์ของโรงเรียน: นกวาญกั๊กด์

ผู้อำนวยการ โรงเรียนบ้านโนนสว่างชื่อนายสมพร ถิ่นปรู ปัจจุบันมีจำนวนนักเรียนทั้งหมด 220 คน แยกเป็นระดับชั้นอนุบาล 1 และ 2 จำนวน 34 คน ชาย 19 คน หญิง 15 คนระดับ ป.1-6 จำนวน 119 คน ชาย 63 คน หญิง 56 คน ระดับ ม.1-3 จำนวน 67 คน ชาย 36 คน หญิง โรงเรียนบ้านโนนสว่าง มีครูทั้งหมด 14 คน

2. ข้อมูลเกี่ยวกับกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้คือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่6 ภาคเรียนที่2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนบ้านโนนสว่าง ตำบลถ้ำเจริญ อำเภอโซ่พิสัย จังหวัดหนองคาย สังกัดสำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาหนองคาย เขต 2 จำนวน12 คน โดยผู้วิจัยได้ศึกษาพฤติกรรมกลุ่มเป้าหมายโดยการเข้าสังเกตในชั้นเรียนและสอบถามข้อมูลจากครูประจำชั้น รวมทั้งผู้วิจัยได้ทำการสัมภาษณ์กลุ่มเป้าหมายเป็นรายบุคคล กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้แบ่งออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 3คน ดังต่อไปนี้

2.1 นักเรียนกลุ่มที่ 1 เป็นนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

(1) บีส เกิดวันที่ 29 กันยายน 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริง พุดเก่ง ชอบเล่นกีฬา เล่นเปตอง ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ความใฝ่ฝันอยากเป็นค็อกเตอร์ด้านการทำสวนยางพารา มีน้องสาวหนึ่งคน อาศัยอยู่กับตา ยาย อาชีพทำสวนยางพารา

(2) เอ เกิดวันที่ 5 มีนาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริง พุดเก่ง ชอบเล่นกีฬา ฟุตบอล ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี ความใฝ่ฝันอยากเป็นทหาร มีน้องสาวหนึ่งคนชื่อเมล์ อาศัยอยู่กับตา ยาย เนื่องจากพ่อกับแม่ไปทำงานต่างจังหวัด

(3) บอส เกิดวันที่ 9 กุมภาพันธ์ 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริง ใจร้อน กล้าแสดงออก เป็นประธานนักเรียน ชอบเล่นกีฬาเล่นวอลเลย์บอล ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ความใฝ่ฝันอยากเป็นหมอเพราะจะได้ช่วยรักษาคนป่วย พ่อแม่หย่าร้างกัน มีน้องชายหนึ่งคน อาศัยอยู่กับตา ยายและแม่ ครอบครัวยังมีอาชีพค้าขาย

2.2 นักเรียนกลุ่มที่ 2 เป็นนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

(1) กลอย เกิดวันที่ 2 ตุลาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนใจร้อน โกรธง่ายและชอบแกล้งเพื่อน กีฬาที่ชอบคือแชร์บอล ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และศิลปะ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี ความใฝ่ฝันอยากเป็นครู มีพี่สาวหนึ่งคนชื่อ กิ เรียนอยู่ ชั้น ม.3 พ่อเสียชีวิตแล้ว อาศัยอยู่กับแม่ แม่มีอาชีพทำนา

(2) ช้าง เกิดวันที่ 25 ตุลาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริง พุดเก่ง ตลกมีมุขเยอะ ชอบเล่นกีฬาเทเบิลเทนนิส ชอบเรียนวิชาภาษาไทยและคณิตศาสตร์ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี ความใฝ่ฝันอยากเป็นทหาร มีน้องชายชื่อตุงเรียนอยู่ชั้นป.2 อาศัยอยู่กับย่า พ่อแม่ไปทำงานรับจ้างที่ต่างจังหวัด

(3) คาร์ เกิดวันที่ 30 มีนาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริง ยิ้มเก่ง ชอบเล่นตระกร้อ ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ความใฝ่ฝันอยากเป็นทหาร มีพี่สาวหนึ่งคนชื่ออุง อาศัยอยู่กับพ่อและแม่ พ่อแม่มีอาชีพค้าขาย

2.3 นักเรียนกลุ่มที่ 3 เป็นนักเรียนที่ใช้ The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

(1) อ้อม เกิดวันที่ 22 ตุลาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนเรียบร้อย ร่าเริงและมีน้ำใจ ชอบช่วยเหลือเพื่อนทุกคนชอบเล่นกีฬาบอลเลย์บอล ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และภาษาไทยมีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี ความใฝ่ฝันอยากเป็นหมอเพราะจะได้รักษาคนแก่และทุกคนที่ป่วย อาศัยอยู่กับตาและยาย พ่อแม่ไปทำงานรับจ้างที่ต่างจังหวัด

(2) เต๋ย เกิดวันที่ 2 กุมภาพันธ์ 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนใจร้อน โกรธง่ายหายเร็ว ชอบเล่นกีฬาเปตอง ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และศิลปะ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ความใฝ่ฝันอยากเป็นผู้พิพากษาเพราะจะได้ตัดสินคดี มีน้องชาย 2 คนชื่อเต๋ลกับเต๋ออาศัยอยู่กับพ่อแม่ พ่อแม่ทำอาชีพรับจ้างทั่วไป

(3) เจน เกิดวันที่ 7 กรกฎาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริง โกรธง่ายหายเร็ว ชอบเล่นกีฬาเล่นบอลเลย์บอล ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และศิลปะ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ความใฝ่ฝันอยากเป็นคุณครูเพราะจะได้สอนเด็กให้เป็นคนดี มีความรู้ มีพี่ชายชื่อโยและพี่สาวชื่อทิพย์อาศัยอยู่กับพ่อแม่ พ่อแม่มีอาชีพทำนา

2.4 นักเรียนกลุ่มที่ 4 เป็นนักเรียนที่ใช้ The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

(1) แนน เกิดวันที่ 3 กันยายน 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนใจร้อน พุดเก่ง เป็นคนมีน้ำใจ ชอบช่วยเหลือเพื่อน ชอบเล่นตระกร้อ ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และพลศึกษา มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี ความใฝ่ฝันอยากเป็นหมอเพราะจะได้รักษาคน มีพี่สาว 2 คนชื่ออภิญญา

กำลังเรียนระดับปริญญาตรีและอีกคนซึ่งนิศาชลเรียนอยู่ ชั้น ม.4 อาศัยอยู่กับแม่ แม่ทำอาชีพรับจ้างทั่วไป

(2) ป๊อ เกิดวันที่10 กรกฎาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนร่าเริงและชอบพูดตลก ชอบเล่นกีฬาฟุตบอล ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษและคณิตศาสตร์ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี ความใฝ่ฝันอยากเป็นตำรวจเพราะจะได้จับผู้ร้าย อาศัยอยู่กับพ่อแม่ พ่อแม่มีอาชีพทำสวนยางพารา

(3) คาล เกิดวันที่17 พฤษภาคม 2541 ลักษณะนิสัยเป็นคนเรียบร้อย ร่าเริงและเป็นพี่ของเพื่อนทุกคน ชอบเล่นกีฬาเปตอง ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์และภาษาอังกฤษ มีผลการเรียนในวิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก ความใฝ่ฝันอยากเป็นหมอเพราะจะได้รักษาคนและพ่อแม่เวลาป่วย มีน้องสาวชื่อเซฟเรียนอยู่ชั้น ป.2 อาศัยอยู่กับยาย พ่อแม่ไปทำงานรับจ้างที่ต่างจังหวัด

3. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

3.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

เริ่มต้นผู้วิจัยอธิบายเกี่ยวกับข้อตกลงเบื้องต้นก่อนให้นักเรียนทำกิจกรรม หลังจากนั้นผู้ช่วยผู้วิจัยแจกใบกิจกรรมและอุปกรณ์ที่ใช้ในการทำกิจกรรม คือ กलोंที่แทนโบกี้รถไฟ ซึ่งติดแถบสีน้ำเงินและสีแดงไว้ที่ด้านข้างของโบกี้รถไฟ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม ซึ่งมี 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน ทำความเข้าใจเกี่ยวกับข้อตกลงเบื้องต้นอีกครั้ง ซึ่งมีดังนี้

กำหนดให้

- 1) รถไฟ 1 โบกี้ แทน จำนวนเต็ม 1 หน่วย(หัวรถไฟก็แทน 1 โบกี้)
- 2) รถไฟขบวนสีน้ำเงินให้หันหัวไปทางซ้าย แทน จำนวนเต็มบวก
- 3) รถไฟขบวนสีแดงให้หันหัวไปทางขวา แทน จำนวนเต็มลบ

เงื่อนไข

1) ถ้ามีรถไฟ 2 ขบวน วิ่งไปทิศทางเดียวกัน จะทำให้รถไฟสองขบวนนี้ต่อกันเป็นขบวนเดียวกัน

2) ถ้ารถไฟมี 2 ขบวน ไฟวิ่งเข้าหากัน (ทิศทางตรงข้ามกัน) จะทำให้รถไฟชนกันและทำให้โบกี้ที่มีสีต่างกันจับคู่หักล้างกันและตรวงไป

3) ถ้าตัวดำเนินการเป็นเครื่องหมายบวก (+) จะทำให้รถไฟจะวิ่งไปในทิศทางเดิม

4) ถ้าตัวดำเนินการเป็นเครื่องหมายลบ (-) จะทำให้รถไฟจะหันกลับไปทิศทางตรงกันข้าม

หลังจากที่นักเรียนทำความเข้าใจในข้อตกลงเบื้องต้นแล้วนักเรียนก็ดำเนินการทำกิจกรรมซึ่งได้ผลการวิเคราะห์ ดังต่อไปนี้

3.1.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

3.1.1.1 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ให้นักเรียนหาผลบวกของ $5+8$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ ดังภาพที่ 2 และ โปรโตคอลการพูดคุยขณะทำกิจกรรมดังนี้



ภาพที่ 2 แสดงการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

นักเรียนได้ปรึกษากันว่า “สีแดงเป็นจำนวนลบ งั้นสีน้ำเงินเป็นจำนวนบวกสิ”

เอ ห้าโบกี้แมนบ่

บีส ห้าโบกี้ ห้าแล้วก็เปิดแมนบ่ แปะนี่เป็นสีแดงแมนบ่

บอส บ่แปดบ่แมนสีแดง

บีส สีน้ำเงินแมนบ่

บอส ห้าสีหยง

บีส บวกมันน่าจะเป็นสีเดียวกัน

- เอ มาจะอ่านให้ฟัง ห้าบวกแปดจะได้สี่หยัง (ต่อรถไฟขบวน 8 เป็นสีแดง จากนั้นนับรวม) ตอบ 13
- เอ (กลับไปอ่านโจทย์และเขียน) ได้ขบวนสีน้ำเงิน มี 13 โบกี้ ตอบ 13

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ในตอนแรกนักเรียนลองต่อขบวนรถไฟ โดยการลองคิดลองดู เนื่องจากนักเรียนได้ต่อขบวนสีแดงและสีน้ำเงินในโจทย์ที่เป็น $5 + 8$ แต่นักเรียนได้นับขบวนรวมกัน และตอบออกมาเป็น 13 อาจจะเนื่องจากนักเรียนสับสนกับขบวนรถไฟว่าจะให้เป็นสีอะไร แต่นักเรียนทั้งกลุ่มได้ปรับเปลี่ยนขบวนรถไฟเป็นขบวนสีน้ำเงิน พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรม ดังภาพที่ 3 และจากการสัมภาษณ์นักเรียนในตอนท้ายหลังจากการทำกิจกรรม นักเรียนทั้งกลุ่มได้ช่วยกันต่อโบกี้รถไฟ โดยต่อขบวนที่ 1 ก่อน คือ 5 โบกี้ และได้นับจำนวนโบกี้ว่าครบห้าหรือไม่ โดยขบวนที่ต่อเป็นขบวนสีน้ำเงิน และเมื่อต่อเสร็จนักเรียนได้พูดว่า “เสร็จแล้ว” จากนั้นนักเรียนได้ต่อรถไฟขบวนที่ 2 และบอกว่า นารรถไฟสองขบวนมาต่อกัน จากนั้นนักเรียนช่วยกันนับโบกี้ทั้งหมด และตอบผลลัพธ์ออกมาเป็น 13

1. $5 + 8$ จะได้ขบวนสี.....และมีจำนวน..... โบกี้
 ดังนั้น $5 + 8 = \dots\dots\dots$

ภาพที่ 3 แสดงการทำกิจกรรมการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จะเห็นได้ว่าจากโปรโตคอลการทำกิจกรรมที่ 1 กรณีที่เป็นการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกอยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ไปสู่ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “มีรถไฟขบวน 2 ขบวน ขบวนที่ 1 เป็นขบวนสีน้ำเงิน ขบวนที่ 2 ก็สีน้ำเงิน และถ้ามีเครื่องหมาย + อยู่ตรงกลาง แสดงว่า รถไฟทั้ง 2 ขบวน จะไปทางเดิม เพราะฉะนั้น มันต้องวิ่งมาต่อกัน และกลายเป็นรถไฟขบวนเดียว มีโบกี้ 17 โบกี้” ดังแสดงในภาพที่ 4 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม บีสได้ตอบว่า “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นสีน้ำเงินขบวนที่สองก็สีน้ำเงิน มีเครื่องหมายบวกอยู่ตรงกลาง แสดงว่ารถไฟทั้งสองขบวนไปทางเดิม” และ เอ ได้ตอบว่า “แล้วมันก็ต่อกันเป็นขบวนเดียวมีสิบเจ็ด โบกี้” บอส ตอบว่า “ก็เลยตอบสิบเจ็ด ครับ”

ให้นักเรียนหาคำตอบจาก โจทย์ที่กำหนดให้พร้อมอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบ

1. $9 + 8 = \dots\dots\dots$

เหตุผล.....

ภาพที่ 4 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวกและให้เหตุผลว่า “แต่ละจำนวนมีค่าเต็มบวก ไม่มีตัวหักล้าง จึงมีค่าเพิ่มขึ้น และมีจำนวนเต็มบวก” ดังแสดงในภาพที่ 5 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนได้อธิบายกับผู้วิจัยว่า “นี่ถึงรถไฟสีน้ำเงินสองขบวน มาต่อกัน จึงได้สีน้ำเงิน ที่แทนจำนวนเต็มบวก”

21. จำนวนเต็มบวก บวกกับ จำนวนเต็มบวกจะได้จำนวนเต็ม

เหตุผล.....

ภาพที่ 5 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)



จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

3.1.1.2 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-5) + (-8)$ โดยใช้รถไฟ โดยนักเรียนได้ต่อโบริรถไฟเป็นรถไฟขบวนที่ 1 จำนวน 5 โบริ และเป็นขบวนสีแดง และรถไฟขบวนที่สอง จำนวน 8 โบริ และเป็นขบวนสีแดงเช่นเดียวกัน แสดงดังภาพที่ 6 และนักเรียนในกลุ่มที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ดังโปรโตคอลการพูดคุยขณะทำกิจกรรมดังนี้



ภาพที่ 6 แสดงการทำกิจกรรมที่ 1 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

- เอ ในวงเล็บลบห้า บวก ในวงเล็บลบแปด จะได้ขบวนสี
- บีส ในวงเล็บลบห้า บวก ในวงเล็บลบ แปด ลบมันแยกออกแหม่ม มันชนกันแต่ แปด เป็นสีหยง มันแยกออก
- เอ ในวงเล็บมันเป็นลบ มันมานำกัน มันมาติดกัน ไปนำกัน (นับจำนวน โบริรถไฟ) มันได้สีห้า
- บอส ในวงเล็บลบห้า บวก ในวงเล็บลบ แปด ได้ขบวนสี
- เอ สีแดง เอ้อ ได้ขบวนสีน้ำเงิน
- บอส กลับไปอ่านเงื่อนไขอีกครั้ง ถ้าลบ รถไฟจะหันไปในทิศทางตรงกันข้าม แต่ถ้ามี

เครื่องหมายบวกรถไฟจะหันไปทิศทางเดิม อ้อเข้าใจแล้ว เครื่องหมายลบตรงกลาง อันนี้เป็นเครื่องหมายบวก แสดงว่ารถไฟหันไปในทิศทางเดิม

- บอส จะได้ขบวนสี
 บีส สีแดง บีสแดง
 เอ สีแดง
 บอส จำนวนโบกี้
 บีส สิบสาม
 เอ สิบสาม ท่อเก้า สิบสาม
 บอส ได้ขบวนสี
 เอ สีแดง

จากโปรโตคอลและการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถต่อรถไฟตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $(-5) + (-8)$ ต่อเป็นรถไฟ สองขบวนที่มีสีแดงเหมือนกัน และนำมาต่อกัน ผลลัพธ์เป็น 13 โบกี้ และเป็นขบวนสีแดง และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ -13 ดังภาพที่ 7

2. $(-5) + (-8)$ จะได้ขบวนสี...แดง... และมีจำนวน.....โบกี้
 ดังนั้น $(-5) + (-8) = \dots\dots -13 \dots\dots$

ภาพที่ 7 แสดงการทำกิจกรรม กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จะเห็นได้ว่าจากโปรโตคอลการทำกิจกรรมที่ 1 กรณีที่เป็นการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบอยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบและให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่า

นักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ไปสู่ความเข้าใจในมิติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “เมื่อมีจำนวนเต็มลบด้วยกันมาต่อกันก็จะได้ค่าเพิ่มขึ้น (ที่นับตามรถไฟ 16 โบกี้ แต่มีจำนวนเต็มลบ คือ -16)” ดังแสดงในภาพที่ 8 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม บีสได้ตอบว่า “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นสีแดง ขบวนที่สองก็สีแดง มีเครื่องหมายบวกอยู่ตรงกลาง แสดงว่ารถไฟทั้งสองขบวนไปทางเดิม” และ เอ ได้ตอบว่า “แล้วมันก็ต่อกันเป็นขบวนเดียว สีแดง มีสิบหกโบกี้”

$$13. (-10) + (-6) = \dots 16 \dots$$

เหตุผล.....

ภาพที่ 8 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ และให้เหตุผล โดยการยกตัวอย่าง การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ คือ $(-1) + (-2)$ พร้อมทั้งเขียนอธิบายต่อว่า “มีค่าเพิ่มขึ้น แต่มีจำนวนเต็มลบ และเป็นจำนวนเต็มลบที่มีค่าน้อยลง” ดังภาพที่ 9 ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติมเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียน และนักเรียนได้อธิบายว่า “ที่เขียนว่ามีค่าเพิ่มขึ้น คือ มีจำนวนโบกี้เพิ่มขึ้น เพราะนำมาต่อกัน แต่ก็เป็นจำนวนเต็มลบ เพราะเป็นสีแดง และมีค่าน้อยลง หมายถึง ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าน้อยลง”

22. จำนวนเต็มลบ บวกกับ จำนวนเต็มลบจะได้จำนวนเต็ม 16

เหตุผล.....

ภาพที่ 9 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบ ด้วยจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

3.1.1.3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ

การบวกจำนวนเต็มในกรณีที่เป็นการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ผู้วิจัย แยกพิจารณาใน 3 กรณี ดังได้เสนอผลการวิเคราะห์ต่อไปนี้

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $5 + (-3)$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีน้ำเงินจำนวน 5 โบกี้ และขบวนที่ 2 มีสีแดงจำนวน 3 โบกี้ จากนั้นนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกัน พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 แสดงดังภาพที่ 10 และ โปรโตคอลการพูดคุยขณะทำกิจกรรมดังนี้



ภาพที่ 10 แสดงการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ในกรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ของนักเรียน กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

- บอส โจทย์ข้อนี้ว่ายังไงได้
- เอ ห้า บวก ลบ สาม จะได้ขบวนสี
- บีส ห้า แทนรถไฟสีน้ำเงินเม่นบ่ และก็ลบสามแทนรถไฟสีแดง บวกกันเป็นจ้งใจ

- เอ มั่นแน่น ไปทางเก่ามัน สิ้นน้ำเงินไปทางซ้าย สีแดงไปทางขวา แสดงว่ามันสวนทางกัน
- บีส แสดงว่ามันซิกซันกัน เงื่อนไขว่จ้งใจ
- เอ อยู่ใส่กระดาษที่ครูให้อ่าน
- บอส อยู่ณิ ถ้ำรดไฟมีสอง ขบวน วิ่งเข้าหากัน(ทิศทางตรงข้ามกัน) จะทำให้รอดไฟชนกัน และทำให้โบกที่มีสีต่างกันจับคู่หักล้างกันและตกรางไป
- บอส นับได้จักคู่
- บีส สามคู่ จับคู่สีแดงกับสีน้ำเงินแม่นับ
- บอส เออ
- บีส เหลืออยู่สอง โบกี้
- บอส สีน้ำเงินคะเนาะ
- เอ แสดงว่าตอบขบวนสีน้ำเงิน จำนวนสอง โบกี้ คำตอบคือสอง

จากโปรโตคอลและการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถต่อรถไฟตามเงื่อนไขว่ของกิจกรรมได้ คือ $5 + (-3)$ ต่อเป็นรถไฟ สองขบวนคือสีน้ำเงินและขบวนสีแดง จับคู่กันได้สามคู่ และตกรางเหลือสอง โบกี้ จึงตอบขบวนสีน้ำเงิน และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ 2 ดังภาพที่ 11

1. $5 + (-3)$ จะได้ขบวนสีน้ำเงิน และมีจำนวน.....2..... โบกี้
 ดังนั้น $5 + (-3) = \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots$

ภาพที่ 11 แสดงการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จะเห็นได้ว่าจากโปรโตคอลการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนมิตทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบไปสู่อะไรในมโนมิตระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “5 + (-4) สำหรับ 5 เป็นจำนวนเต็มบวก ขบวนสีน้ำเงิน ส่วนอีกขบวนเป็นขบวนสีแดง วิ่งไปคนละทางกัน จะมาชนกัน จับคู่หักล้าง แล้วจะเหลือ 1”

นักเรียนสามารถบอกในรูปแบบทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่อย่างใด แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวน โบกี้รถไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่าเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผล โดยการยกตัวอย่าง การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ คือ $(-4) + (9)$ พร้อมทั้งเขียนอธิบายต่อว่า “ในกรณีที่จำนวนเต็มบวกมากกว่าจะหักล้างหรือนับเพิ่ม ก็จะเป็นจำนวนเต็มบวกเหมือนเดิม” ดังภาพที่ 12 และผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติมเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียน และนักเรียนได้อธิบายว่า “เมื่อนักถึงรถไฟ ขบวนหนึ่งสีแดง อีกขบวนสีน้ำเงิน วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน ตกรางไป เหลือเป็นสีน้ำเงินคือจำนวนเต็มบวก เพราะขบวนสีน้ำเงินมีจำนวนโบกี้มากกว่าสีแดง จึงออกมาเป็นสีน้ำเงิน คือจำนวนเต็มบวก”

23.1 จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มบวกมากกว่าจะได้จำนวน

เหตุผล..... ผลบวกของ $(-4) + 5 = 1$

ภาพที่ 12 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ เมื่อค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

(2) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-3) + 5$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีแดงจำนวน 3 โบกี้ และขบวนที่ 2 มีสีน้ำเงินจำนวน 5 โบกี้ จากนั้นนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกัน เหลือขบวนสีน้ำเงิน 2 โบกี้ และเขียนตอบในใบกิจกรรม ดังภาพที่ 13

2. $(-3) + 5$ จะได้ขบวนสี.....และมีจำนวน.....2..... โบกี้

ดังนั้น $(-3) + 5 = \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots$

ภาพที่ 13 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จะเห็นว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตอยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโบกัรด์ไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกัรด์ไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนมิตทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ไปสู่ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง ดังภาพที่ 14 พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “เมื่อรดไฟทั้ง 2 มาชนกัน ก็ตรงและจับคู่หักล้าง และจำนวนที่น้อยจะถูกหักล้างจากจำนวนที่มาก” และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์เพิ่มเติม นักเรียนได้อธิบายเหตุผลเพิ่มเติมอ้างอิงรดไฟ 2 ขบวนคือ “รดไฟขบวนที่ 1 มีสีน้ำเงิน จำนวน 3 โบกี้ และรดไฟอีกขบวนมีสีแดงจำนวน 8 โบกี้ คนละสี มาชนกันหักล้าง ตรง เหลือสีแดง 5 โบกี้ จึงตอบ -5”

9. $3 + (-8) = \dots -5 \dots$
 เหตุผล.....ใช้รดไฟทั้ง 2 ขบวนชนกัน ก็ตรงและจับคู่หักล้าง
และจำนวนที่น้อยจะถูกหักล้างจากจำนวนที่มาก

ภาพที่ 14 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ เมื่อค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่อย่างใด แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวนโบกัรด์ไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่า

เป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผลว่า “เมื่อนึกถึงรถไฟ ขบวนรถไฟทั้งสองขบวนคนละสี่กัน วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน ตกรางไป เหลือเป็นสี่แดง คือจำนวนเต็มลบ เพราะขบวนสีน้ำเงินมีจำนวน โบกีน้อยกว่าสี่แดง จึงออกมาเป็นสี่แดง คือ จำนวนเต็มลบ”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

(3) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $7 + (-7)$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีน้ำเงินจำนวน 7 โบกี้ และขบวนที่ 2 มีสี่แดงจำนวน 7 โบกี้ จากนั้นนักเรียนนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกันจับคู่กัน ไม่เหลือขบวนรถไฟ นักเรียนจึงสรุปคำตอบคือ 0 ดังภาพที่ 15

11. $7 + (-7)$ จะได้ขบวนสี...^{น้ำเงิน} และมีจำนวน.....⁰..... โบกี้
 ดังนั้น $7 + (-7) = \dots\dots\dots 0$

ภาพที่ 15 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จะเห็นได้ว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนทัศน์อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

โดยจัดกระทำกับโบกัรด์ไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกัรด์ไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบไปสู่ความเข้าใจในมิติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “รถไฟ 2 ขบวน คนละสี รถไฟจะชนกัน เมื่อรถไฟทั้ง 2 มาชนกัน จับคู่หักล้างและก็ตรงราง ไม่เหลือโบกัรด์ไฟเลย จึงเป็นศูนย์”

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นศูนย์ นักเรียนในกลุ่มได้อธิบายว่า “รถไฟ 2 ขบวนมีจำนวนโบกัรด์เท่ากัน แต่คนละสี ชนกัน จึงจับคู่ตรงรางหมด ไม่เหลือ จึงเป็นศูนย์”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

3.1.1.4 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก

บวก

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับการ จัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-8) + 5$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ ดังแสดงในโปรโตคอลการพูดคุยของสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

เอ ลบแปด บวกห้า จะได้ขบวนสี่

บีส ลบแปดแทนรถไฟสีแดง ห้าแทนรถไฟสีน้ำเงิน สีแดงไปทางขวา สีน้ำเงินไป

ทางซ้าย

เอ มันทวนทางกันขื่อนี้ชนกันอีกแล้ว

บอส ตกกลางจักคู่

บีส หัวคู่ ที่ตกลงเหลือสาม โบกี้สีแดงแสดงว่าตอบขบวนสีแดง จำนวนสาม โบกี้

จากโปรแกรมและการสัมภาษณ์ นักเรียนสามารถต่อรถไฟตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $(-8) + 5$ ต่อเป็นรถไฟสองขบวนคือ -8 แทนขบวนสีแดง และ 5 แทนขบวนสีน้ำเงิน จับคู่กันได้หัวคู่และตกลงเหลือสาม โบกี้ จึงตอบขบวนแดง และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ -3

จะเห็นได้จากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรมและการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติอยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ไปสู่ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกได้ถูกต้อง เช่น $(-8) + 3$ ได้ผลลัพธ์คือ -5 พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “รถไฟขบวนที่ 1 สีน้ำแดง 8 โบกี้ รถไฟขบวนที่ 2 สีน้ำเงิน 3 โบกี้ วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน และจับคู่ตกลง เหลือสีแดง 5 โบกี้ เป็น -5”

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่อย่างใด แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวนโบกี้รถไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่าเป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผลว่า “เมื่อนี้ถึงรถไฟ ขบวนรถไฟทั้ง

สองขบวนคนละสี่กัน วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน ตกรางไป เหลือเป็นสี่แดง คือจำนวนเต็มลบ เพราะขบวนสี่แดงมีจำนวน โบกี้มากกว่าสี่น้ำเงิน จึงออกมาเป็นสี่แดง คือ จำนวนเต็มลบ”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

(2) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-4) + 6$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ คือ นักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟ โดยที่ขบวนแรกมีสี่แดง จำนวน 4 โบกี้ และขบวนที่ 2 สี่น้ำเงินจำนวน 6 โบกี้ รถไฟสองขบวนมีสี่คนละสี วิ่งเข้าชนกัน เหลือจำนวนโบกี้สี่น้ำเงิน 2 โบกี้ จากนั้นนักเรียนได้สรุปออกมาเป็นคำตอบ ในใบกิจกรรม ดังภาพที่ 16

6. $(-4) + 6$ จะได้ขบวนสี..... และมีจำนวน..... โบกี้
 ดังนั้น $(-4) + 6 = \dots\dots\dots 2 \dots\dots\dots$

ภาพที่ 16 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จากโปรโตคอลและการสัมภาษณ์ นักเรียนสามารถต่อรถไฟตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $(-4) + 6$ ต่อเป็นรถไฟสองขบวนคือ -4 แทนขบวนสี่แดง และ 6 แทนขบวนสี่น้ำเงิน จับคู่กันได้สี่คู่และตกรางเหลือสองโบกี้ จึงตอบขบวนสี่น้ำเงิน และนักเรียนตอบว่าผลลัพธ์คือ 2

จะเห็นได้ว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลอยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจโมติทางคณิตศาสตร์ ไปสู่ความเข้าใจในโมติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ได้ถูกต้อง และนักเรียนได้เหตุผลว่า “ขบวนที่ 1 มี 6 โบกี้ ขบวนที่ 2 มี 9 โบกี้ เมื่อรถไฟ 2 ขบวน วิ่งมาชนกันก็จะตรง และจับคู่หักล้าง เพราะฉะนั้นเหลือ 3 โบกี้” ดังภาพที่ 17 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียน นักเรียนได้ให้เหตุผลว่า “-6 เป็นจำนวนเต็มลบ รถไฟสีแดงมี 6 โบกี้ 9 เป็นจำนวนเต็มบวก รถไฟสีน้ำเงิน มี 9 โบกี้ วิ่งไปคนละทาง ชนกัน เหลือสีน้ำเงิน 3 โบกี้ เป็นจำนวนเต็มบวก ตอบ 3”

7. $(-6) + 9 = \dots$

เหตุผล.....
.....
.....
.....

ภาพที่ 17 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก เมื่อค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่อย่างใด แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวน โบกี้รถไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่าเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผลว่า “เมื่อนี้ถึงรถไฟ

ขบวนรถไฟทั้งสองขบวนคนละสี่คัน วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน ตกรางไป เหลือเป็นสีน้ำเงิน คือ จำนวนเต็มบวก เพราะขบวนสีน้ำเงินมีจำนวน โบกี้มากกว่าแดง จึงออกมาเป็นสีน้ำเงิน คือ จำนวนเต็มบวก”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

(3) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-7) + 7$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีแดง จำนวน 7 โบกี้ และขบวนที่ 2 มีสีน้ำเงินจำนวน 7 โบกี้ จากนั้นนักเรียนนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกันจับคู่กัน ไม่เหลือขบวนรถไฟ นักเรียนจึงสรุปคำตอบคือ 0 ดังภาพที่ 18

12. $(-7) + 7$ จะได้ขบวนสี..... และมีจำนวน..... โบกี้
ดังนั้น $(-7) + 7 = \dots\dots\dots$

ภาพที่ 18 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จะเห็นได้ว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนทัศน์อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวข้องกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก โดยจัด

กระทำกับ โบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ เท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจใน โนมติทางคณิตศาสตร์ไปสู่ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “รถไฟ 2 ขบวน คนละสี รถไฟจะชนกัน เมื่อรถไฟทั้ง 2 มาชนกัน จับคู่หักล้างและก็ตัดราง ไม่เหลือ โบกี้รถไฟเลย จึงเป็นศูนย์”

นักเรียนสามารถบอกในรูปแบบทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นศูนย์ นักเรียนในกลุ่มได้อธิบายว่า “รถไฟ 2 ขบวนมีจำนวนโบกี้เท่ากัน แต่คนละสี ชนกัน จึงจับคู่ตัดรางหมด ไม่เหลือ จึงเป็นศูนย์”

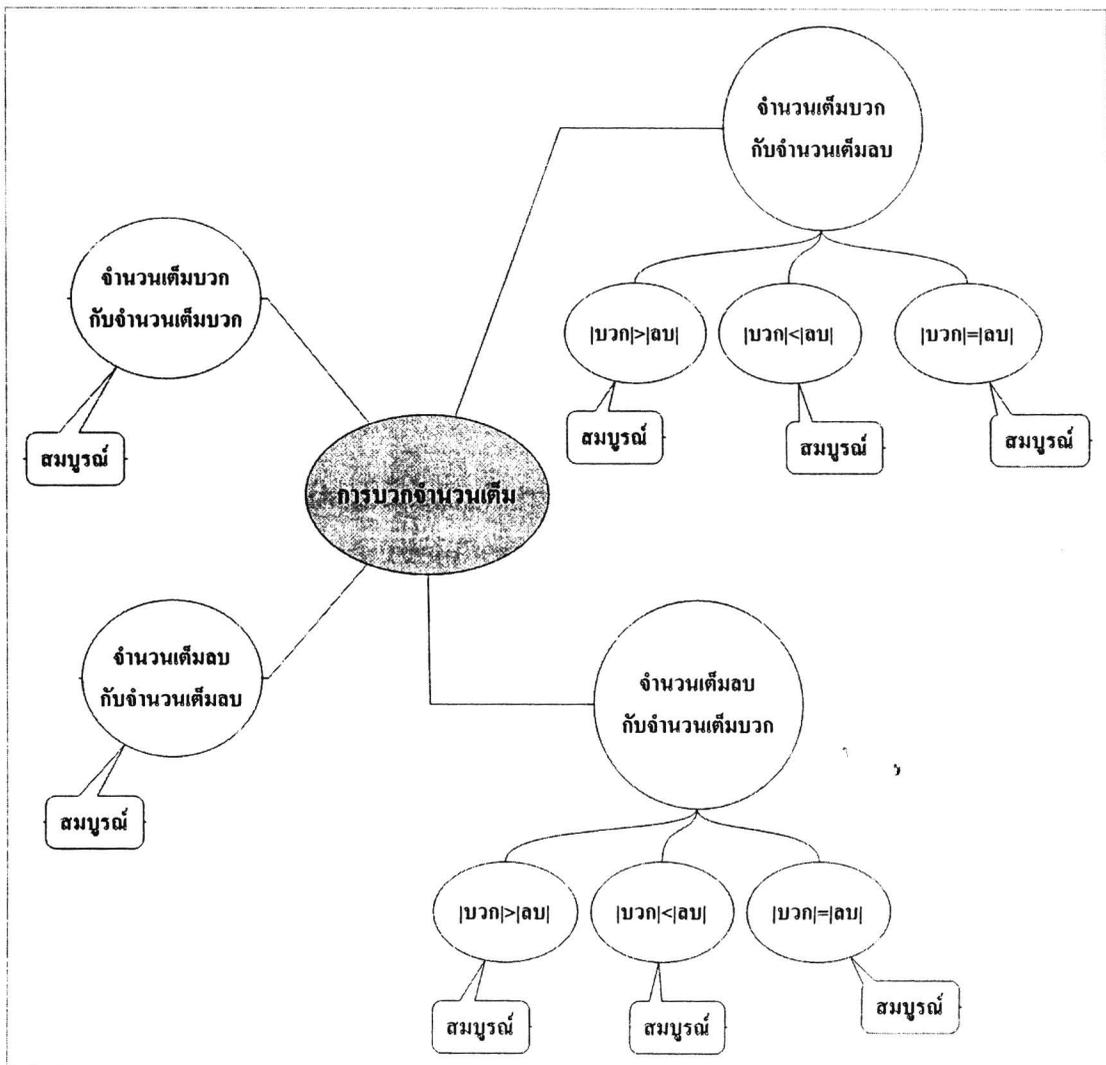
จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

3.1.1.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติเรื่องการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือ โบกี้รถไฟ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อให้นักเรียนทำการบวกจำนวนไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยัง โบกี้รถไฟที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมและนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติเรื่องการบวกจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการเมื่อให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่เป็น $(-7) + 5 + (-4)$ พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยการบวกทีละคู่ และเมื่อให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนมติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่การต่อขบวนรถไฟ

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 3 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การบวกจำนวนสามจำนวนพบว่านักเรียนสามารถ

เชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการบวกจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือนักเรียนนำมโนคติเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ มาใช้หาผลบวกตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ดังเช่น $(-7) + 5 + (-4)$ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง ดังภาพที่ 19



ภาพที่ 19 แสดงโครงสร้างของการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)

3.1.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของ นักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

3.1.2.1 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ให้นักเรียนหาผลบวกของ $5+8$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนกลุ่มที่ 2 ได้แสดงพฤติกรรม การเรียนรู้ ดังภาพที่.20 และ โพรโตคอลการพูดคุยขณะทำกิจกรรมดังนี้



ภาพที่ 20 แสดงการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

กลอย	ห้า บวก ลบสาม จะได้ขบวนสี่ ห้าสี่ยัง
ต้าร์	สีน้ำเงิน
กลอย	และแปดได้
ช้าง	สีน้ำเงินคือกัน
กลอย	บวกกันจึงได้
ต้าร์	กะเอามาต่อกัน
กลอย	ได้ 13 อัน โบกี้ ตอบ 13

เมื่อนักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟจำนวน 2 ขบวนสีน้ำเงิน โดยต่อขบวนที่หนึ่ง ก่อน คือห้า โบกี้ ต่อรถไฟขบวนที่ 2 อีกห้า โบกี้ จากนั้นได้นำมาต่อกันและนับจำนวน โบกี้รถไฟที่เหลือ และสรุปเป็นผลลัพธ์คือ 13 ดังภาพที่ 21

1. $5 + 8$ จะได้ชบวนสี่เหลี่ยมจัตุรัส และมีจำนวน.....13..... โบกี้
 ดังนั้น $5 + 8 = \dots\dots 13 \dots\dots$

ภาพที่ 21 แสดงการทำกิจกรรมการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียน
 กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จะเห็นได้ว่าจากโปรโตคอลการทำกิจกรรมที่ 1 กรณีที่เป็นการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกอยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ไปสู่ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “สีน้ำเงินเป็นจำนวนเต็มบวกมันไปทางเดียวกันและต่อกันเป็นชบวน” ดังแสดงในภาพที่.22 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนกลุ่มที่ 2 ได้อธิบายว่า มีรถไฟ 9 โบกี้สีน้ำเงิน และ มีรถไฟ 8 โบกี้สีน้ำเงิน สีเดียวกัน มาต่อกัน ได้เป็น 17 โบกี้สีน้ำเงิน ตอบ 17”

กิจกรรมที่ 3

ให้นักเรียนหาคำตอบจากโจทย์ที่กำหนดให้พร้อมอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบ

1. $9 + 8 = \dots\dots 17 \dots\dots$

เหตุผล.....เพราะว่า ทั้งสีน้ำเงิน สีเดียวกัน มันไปทางเดียวกันและต่อกันเป็นชบวน
17 โบกี้สีน้ำเงินมาบวก

ภาพที่ 22 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ของนักเรียน
 กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวกและให้เหตุผลว่า “เป็นจำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มบวก ได้จำนวนเต็มบวก” ดังแสดงในภาพที่ 23 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ นักเรียนได้อธิบายกับผู้วิจัยว่า “นี่ก็ถึงรถไฟสีน้ำเงินสองขบวน มาต่อกัน จึงได้สีน้ำเงิน ที่แทนจำนวนเต็มบวก”

21. จำนวนเต็มบวก บวกกับ จำนวนเต็มบวกจะได้จำนวนเต็ม
 เหตุผล. & เพราะว่าเป็นสีน้ำเงินเหมือนกัน บวกกัน
 จำนวนเต็มบวก = จำนวนเต็มบวก

ภาพที่ 23 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, คาร์)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

3.1.2.2 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-5)+(-8)$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนกลุ่มที่ 2 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ดัง โปรโตคอลดังนี้

กลอย	ลบห้า บวก ลบแปด จะได้ขบวนสี
คาร์	แปดเป็นสีหยง และห้าหละ
กลอย	สีแดงเบิด
กลอย	สีแดงแรงฤทธิ์ ต่อกันเลขบ่
ช้าง	เฮ้อ
กลอย	จะได้ขบวนสีแดง
คาร์	ทำได้
กลอย	สิบสามโบกี้

จากโปร โดคคอลและการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถถอดไฟตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $(-5) + (-8)$ ต่อเป็นรถไฟ สองขบวนที่มีสีแดงเหมือนกัน และนำมาต่อกัน ผลลัพธ์เป็น 13 โบกี้ และเป็นขบวนสีแดง และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ -13 นั่นคือ นักเรียนมีการสร้างมโนคติอยู่ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบอยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ไปสู่ความเข้าใจมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่ โดยให้เขียนตอบและอธิบายเหตุผลว่า “เป็นจำนวนเต็มลบเหมือนกันมาต่อกัน” ดังภาพที่ 24 แต่จะพบว่านักเรียนเข้าใจผิดนี้คิดว่าเอาสองจำนวนมาลบกันแต่พอผู้วิจัยถามเพื่อความแน่ใจนักเรียนกลับตอบใหม่ได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ ดังโปร โดคคอลการสัมภาษณ์

- ผู้วิจัย ข้อนี้ตอบเท่าไร
 ดาร์ ตอบลบสี่ครับ
 ผู้วิจัย ใช่หรือ ทำยังไง
 ดาร์ มันเป็นจำนวนเต็มลบก็เลยมาค่ากัน ก็เลยเหลือลบสี่
 ผู้วิจัย เอ๊ะลบหกแทนรถไฟสี่อะไร
 ช้าง สี่แดงครับ
 ผู้วิจัย แล้วลบสิบ
 กลอย สี่แดงค่ะ
 ดาร์ ตอบลบสิบหกครับ สี่แดงวิ่งไปทางเดียวกันจะต่อกัน

14. $(-6) + (-10) = \dots -4 \dots$
 เหตุผล... *เพราะเอา 6 มาลบ 10 แล้วได้ลบสี่*
กับลบ 6 แล้วได้ลบสี่

ภาพที่ 24 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ดาร์)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ และให้เหตุผลว่า “จำนวนเต็มลบ บวกกับจำนวนเต็มลบ เท่ากับ จำนวนเต็มลบ” ดังภาพที่ 25 ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติมเกี่ยวกับการให้เหตุผลของนักเรียน และนักเรียนได้อธิบายว่า “นี่ก็ถึงรถไฟสีแดง 2 ขบวน ไปทางเดียวกันมาต่อกันเป็นขบวนสีแดง ก็เลยเป็นจำนวนเต็มลบ”

22. จำนวนเต็มลบ บวกกับ จำนวนเต็มลบจะได้จำนวนเต็ม

เหตุผล.....
จำนวนเต็มลบ บวกกับ จำนวนเต็มลบ = จำนวนเต็มลบ

ภาพที่ 25 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

3.1.2.3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $6 + (-4)$ โดยใช้รถไฟ แสดงดังภาพที่ 26 และ โปรโตคอล ดังนี้

กลอย	หก บวกลบ สี่ จะได้ขบวนสี่
ต้าร์	หกแทนรถไฟสีน้ำเงิน ลบสี่แทนรถไฟสีแดง บวกกัน
กลอย	สีน้ำเงินไปทางซ้าย สีแดงไปทางขวา
ต้าร์	แสดงว่ามันชดเชยกัน
ช้าง	ตำจักคู่
กลอย	สี่คู่ เหลือสองโบกสีน้ำเงิน



ภาพที่ 26 แสดงการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จากโปรโตคอล และการสัมภาษณ์ของผู้วิจัย นักเรียนสามารถต่อรถไฟตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $6 + (-4)$ ต่อเป็นรถไฟ สองขบวนคือสีน้ำเงินและขบวนสีแดง จับคู่กันได้สี่คู่และตกลงเหลือสองโบกี้ จึงตอบขบวนสีน้ำเงิน และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ 2 นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติอยู่ในระดับการจัดกระทำ ในกรณีที่เป็นการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ไปสู่ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “5 เป็นจำนวนเต็มบวกแทนสีน้ำเงิน (-4) เป็นจำนวนเต็มลบแทนสีแดง จึงมาชนกันออกทีละอัน จึงเหลือ 1”

$$6.5+(-4) = \dots\dots\dots$$

เหตุผล... เพราะบวก เป็นจำนวนเต็มลบมากกว่าจำนวนเต็มบวก จึงใช้กฎการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ
 $(-A)$ เป็นจำนวนเต็มลบแทนค่า
 จึงลบค่าที่บวกออกที่ลบด้วย จึงเหลือ ๒.๕

ภาพที่ 27 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ
 กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบของ
 นักเรียน กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช่าง, ต๋าว)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีค่าจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่อย่างใด แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวนบอกรัดไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่าเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผลว่า “ขบวนรถไฟสีน้ำเงินยาวกว่าขบวนสีแดงมาชนกัน เหลือสีน้ำเงิน เป็นจำนวนเต็มบวก”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

2) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-3) + 5$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีแดงจำนวน 3 โบกี้ และขบวนที่ 2 มีสีน้ำเงินจำนวน 5 โบกี้ จากนั้นนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกัน เหลือขบวนสีน้ำเงิน 2 โบกี้ และเขียนตอบในใบกิจกรรม ดังภาพที่ 28

2. $(-3) + 5$ จะได้ขบวนสี.....^{น้ำเงิน} และมีจำนวน.....²..... โบกี้
 ดังนั้น $(-3) + 5 = \dots\dots 2 \dots\dots$

ภาพที่ 28 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีค่าสัมบูรณ์
 ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ 2
 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จะเห็นว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก
 กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก การตอบในใบ
 กิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติอยู่ในระดับการจัด
 กระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ใน โจทย์ที่เกี่ยวกับการบวกจำนวน
 เต็มลบกับจำนวนเต็มบวกกรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็ม
 บวก โดยการจัดกระทำกับรถไฟผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับ
 กระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน โดยให้เขียนตอบและ
 อธิบายเหตุผลพร้อมทั้งสัมภาษณ์ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า
 นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมาไม่ถูกต้อง ดังภาพที่ 29 พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “3 เป็นค่าบวกเป็น
 สีน้ำเงิน (-8) เป็นค่าลบ เป็นสีแดง สีน้ำเงินและสีแดงมาชนกัน จึงตรงจึงได้ 5” แต่เมื่อผู้วิจัย
 สัมภาษณ์เพิ่มเติม นักเรียนได้อธิบายเหตุผลเพิ่มเติมอ้างไปยังรถไฟ 2 ขบวนคือ “รถไฟขบวนที่ 1 มี
 สีน้ำเงิน จำนวน 3 โบกี้ และรถไฟอีกขบวนมีสีแดงจำนวน 8 โบกี้ คนละสี มาชนกันหักล้าง ตรง
 เหลือสีแดง 5 โบกี้ จึงตอบ -5”

9. $3 + (-8) = \dots\dots 5 \dots\dots$
 เหตุผล.....^{เพราะว่า 3 เป็นค่าบวก กับสีน้ำเงิน 2 สี}
 (-8) เป็นค่าลบ สีน้ำเงิน
^{สีน้ำเงิน และสีแดง มาชนกัน จึงตรงจึงได้ 5}

ภาพที่ 29 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ เมื่อค่า
 สัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ของนักเรียน
 กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)



นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่อย่างใด แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวนโบกัรลไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่าเป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผลว่า “ขบวนสีน้ำเงินน้อยกว่าขบวนสีแดง มาชนกัน เหลือขบวนสีแดงจึงเป็นจำนวนเต็มลบ”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

(3) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $7 + (-7)$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีน้ำเงินจำนวน 7 โบกั และขบวนที่ 2 มีสีแดงจำนวน 7 โบกั จากนั้นนักเรียนนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกันจับคู่กัน ไม่เหลือขบวนรถไฟ นักเรียนจึงสรุปคำตอบคือ 0

จะเห็นได้ว่าจากการทำกิจกรรมที่ 1 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลอยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโบกัรลไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกัรลไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไป เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจโมเดลทางคณิตศาสตร์

ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบไปสู่ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง ($5 + (-5)$) พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “5 เป็นจำนวนเต็มบวก รถไฟสีน้ำเงิน -5 เป็นจำนวนเต็มลบ รถไฟสีแดง วิ่งมาชนกันจับคู่ ตกราง ไม่เหลือซักโบกี้ จึงเป็นศูนย์”

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นศูนย์ นักเรียนในกลุ่มได้อธิบายว่า “รถไฟ 2 ขบวนมีจำนวนโบกี้เท่ากัน แต่คนละสี ชนกัน จึงจับคู่ตกรางหมด ไม่เหลือ จึงเป็นศูนย์”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวกับ การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

3.1.2.4 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-8) + 5$ โดยใช้รถไฟ แสดงดังภาพที่ 30 และโปรโตคอลดังนี้



ภาพที่ 30 แสดงการทำกิจกรรมที่ 2 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

กลอย	ลบแปด บวกห้า จะได้ขบวนสี่
ต้าร์	ลบแปดสีแดง ห้าสีน้ำเงิน
กลอย	มันสีดำกัน
ซ่าง	ตกลงจ๊กกู่
ต้าร์	ห้ากู่
กลอย	เหลือสาม โบกี้สีแดง

จากโปรโตคอลและการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถถอดรหัสได้ตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $(-8) + 5$ ต่อเป็นรถไฟ สองขบวนคือลบแปดแทนขบวนสีแดง และห้าแทนขบวนสีน้ำเงิน จับคู่กันได้ห้ากู่และตกลงเหลือสาม โบกี้ จึงตอบขบวนแดง และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ -3 นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจมโนคติ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก อยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ไปสู่ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง เช่น $(-8) + 3$ ได้ผลลัพธ์คือ -5 พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “รถไฟขบวนที่ 1 สีน้ำแดง 8 โบกี้ รถไฟขบวนที่ 2 สีน้ำเงิน 3 โบกี้ วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน และจับคู่ตกราง เหลือสีแดง 5 โบกี้ เป็น -5”

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ “จำนวนเต็มบวก บวกกับจำนวนเต็มลบ กรณีจำนวนเต็มลบมากกว่าจะได้จำนวนใด” ในที่ผู้วิจัยไม่หมายถึงว่าจำนวนเต็มลบมีค่ามากกว่าจำนวนเต็มบวกแต่

อย่างไร แต่ต้องการให้นักเรียนพิจารณาที่จำนวนโบริกัรไฟที่นำมาพิจารณาเท่านั้น ซึ่งนักเรียนในกลุ่มตอบว่าเป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งถือว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และให้เหตุผลว่า “เมื่อนึกถึงรถไฟขบวนรถไฟทั้งสองขบวนคนละสี่คัน วิ่งไปคนละทาง มาชนกัน ตกรางไป เหลือเป็นสี่แดง คือจำนวนเต็มลบ เพราะขบวนสี่แดงมีจำนวนโบริกัรไฟมากกว่าสีน้ำเงิน จึงออกมาเป็นสี่แดง คือ จำนวนเต็มลบ”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

2) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-4) + 6$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ คือ นักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟ โดยที่ขบวนแรกมีสี่แดง จำนวน 4 โบริกั และขบวนที่ 2 สีน้ำเงินจำนวน 6 โบริกั รถไฟสองขบวนมีสีคนละสี วิ่งเข้าชนกัน เหลือจำนวน โบริกัสีน้ำเงิน 2 โบริกั จากนั้นนักเรียนได้สรุปออกมาเป็นคำตอบ ในใบกิจกรรม

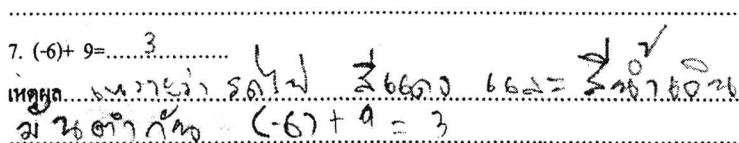
นักเรียนสามารถต่อรถไฟตามเงื่อนไขของกิจกรรมได้ คือ $(-4) + 6$ ต่อเป็นรถไฟสองขบวนคือ -4 แทนขบวนสี่แดง และ 6 แทนขบวนสีน้ำเงิน จับคู่กันได้ห้าคู่และตกรางเหลือสาม โบริกั จึงตอบขบวนแดง และนักเรียนตอบว่า ผลลัพธ์คือ 2

จะเห็นได้ว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลอยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับรถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่โมเดลในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน โดยให้เขียนตอบและอธิบายเหตุผลพร้อมทั้งสัมภาษณ์ ซึ่งได้ผลดังนี้

นักเรียนได้ให้เขียนคำตอบของการบวก $(-6) + 9$ ได้ถูกต้องและอธิบายเหตุผลคือ “รถไฟ สีแดงและสีน้ำเงินมันค่ากัน” ดังภาพที่ 31 เมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนได้อธิบายว่า “เพราะว่ารถไฟสีแดงและสีน้ำเงินมันค่ากัน ค่าหักคู่ ตกราง เหลือสาม สีน้ำเงิน ก็เลยตอบ 3”



ภาพที่ 31 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ของ นักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

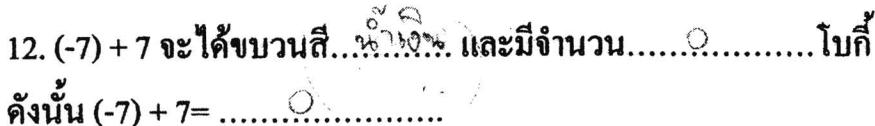
จากการทำกิจกรรมที่ 3 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก อยู่ในระดับกระบวนการ

3) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนติระดับการจัดกระทำ

(Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 1 ของนักเรียน กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลบวกของ $(-7) + 7$ โดยใช้รถไฟ นักเรียนได้ทำการต่อรถไฟสองขบวน โดยขบวนแรกมีสีแดงจำนวน 7 โบกี้ และขบวนที่ 2 มีสีน้ำเงินจำนวน 7 โบกี้ จากนั้นนักเรียนนำรถไฟทั้งสองขบวนมาชนกันจับคู่กัน ไม่เหลือขบวนรถไฟ นักเรียนจึงสรุปคำตอบคือ 0 ดังภาพที่ 32



ภาพที่ 32 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จะเห็นได้ว่าจากการทำกิจกรรมที่ 2 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก การตอบในใบกิจกรรม และการสัมภาษณ์ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติอยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการ
(Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโบกี้รถไฟอีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ไปสู่ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการหรือไม่

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ ได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “-5 เป็นจำนวนเต็มลบ รถไฟสีแดง 5 เป็นจำนวนเต็มบวก รถไฟสีน้ำเงิน วิ่งมาชนกันจับคู่ตรงราง ไม่เหลือชั๊กโบกี้ จึงเป็นศูนย์”

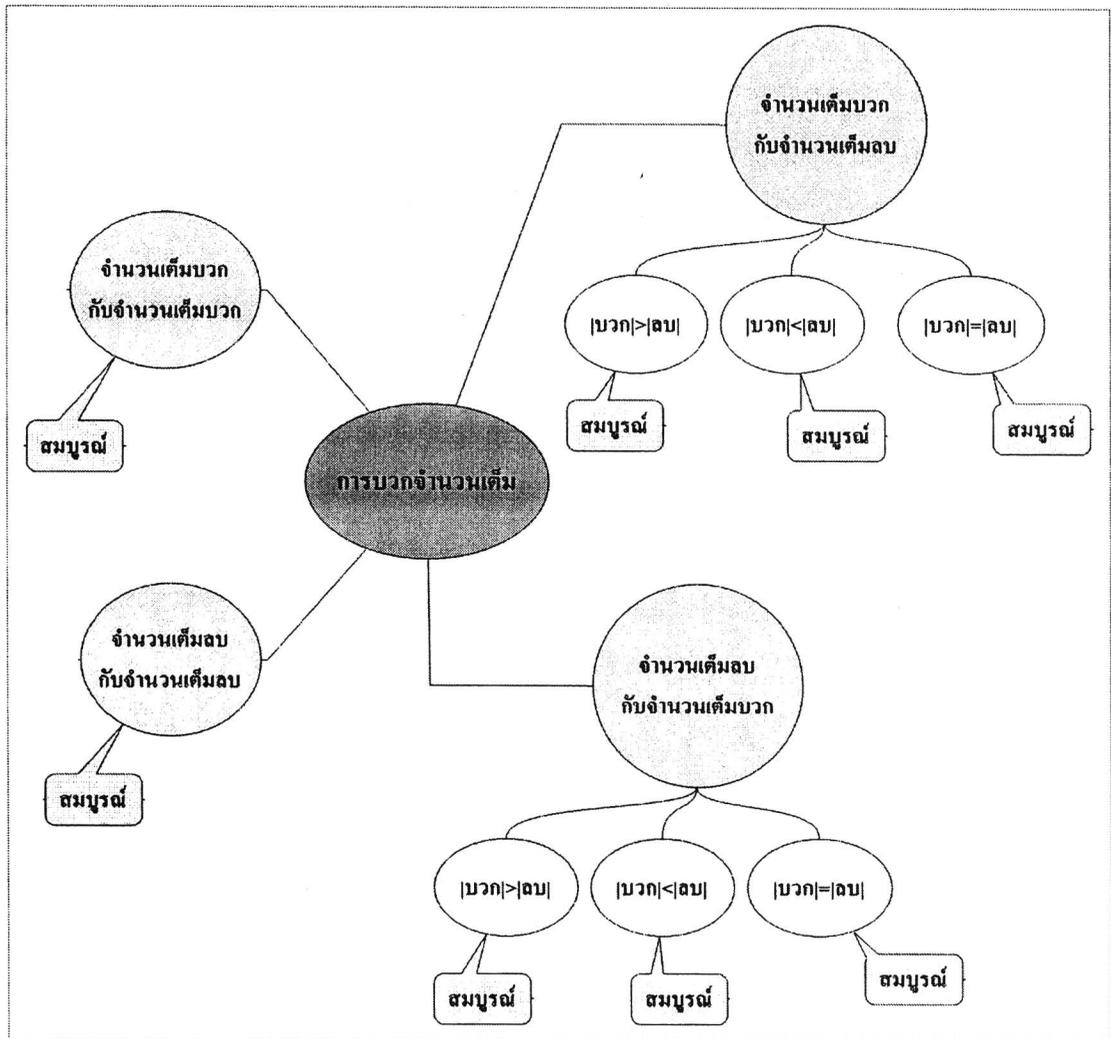
นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นศูนย์ นักเรียนในกลุ่มได้อธิบายว่า “รถไฟ 2 ขบวนมีจำนวนโบกี้เท่ากัน แต่คนละสี ชนกัน จึงจับคู่ตรงรางหมด ไม่เหลือ จึงเป็นศูนย์”

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

3.1.2.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือ โบกี้รถไฟ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อนักเรียนทำการบวกจำนวนไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยัง โบกี้รถไฟที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมและนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการ เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่เป็น $(-7) + 5 + (-4)$ พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยการบวกทีละคู่ และเมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่การต่อขบวนรถไฟ

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 3 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การบวกจำนวนสามจำนวนพบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการบวกจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือนักเรียนนำมโนคติเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ มาใช้หาผลบวกตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ดังเช่น $(-7) + 5 + (-4)$ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง



ภาพที่ 33 แสดงโครงสร้างของการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ดำร์)

3.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

3.2.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (ปีส, เอ, บอส)

3.2.1.1 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) กรณีตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจใหม่โนมตีระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 4 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น 9 – 4 นักเรียนได้ทำกิจกรรมโดยต่อขบวนรถไฟเป็นขบวนสีน้ำเงิน จำนวนเก้าโบกี้ และขบวนที่สองเป็นสีน้ำเงินจำนวนสี่โบกี้ พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรม ดังภาพที่ 34 นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ ดัง โปรโตคอลการทำกิจกรรมดังนี้

ให้หาผลลัพธ์ของ 9 - 4

รถไฟขบวนที่ 1

มีสี ^{น้ำเงิน} มีจำนวนโบกี้ 9 โบกี้

รถไฟขบวนที่ 2

มีสี ^{น้ำเงิน} มีจำนวนโบกี้ 4 โบกี้

รถไฟขบวนไหนยาวกว่ากัน

ตอบ ^{ขบวนที่ 1} 4

เมื่อเจอเครื่องหมายลบ(-) รถไฟขบวนที่ 2

มีสี ^{แดง} มีจำนวนโบกี้ 4 โบกี้

รถไฟ 2 ขบวนนี้ จะวิ่งมาชนกันหรือค่อกัน

ตอบ ^{ชนกัน}

เหลือรถไฟขบวนสี ^{น้ำเงิน} มีจำนวนโบกี้ 5 โบกี้

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ 9 - 4 คือ 5

ภาพที่ 34 แสดงการทำกิจกรรม การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

- เอ รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี
- บีส น้ำเงินเก้าโบกี้
- เอ รถไฟขบวนที่สองมีสี
- บีส : น้ำเงินสี่โบกี้
- เอ : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
- บีส : ขบวนที่สอง
- บอส : บ่แม่่น ขบวนที่หนึ่ง
- บีส : เออ หลง
- เอ : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี
- บีส : มีสีแดง
- เอ : จ๊กโบกี้

- บอส : สี่โบกี้
 เอ : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 บีส : ชนกัน คนละสี่แฉ่งเข้าหากัน
 บอส : เหลือรถไฟขบวนสี่

จากโปรโตคอล และการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม 9 - 4 นักเรียนบอกและแสดงได้ว่ารถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่น้ำเงินเก้าโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสี่น้ำเงินสี่โบกี้ เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเลยเปลี่ยนเป็นสี่แดงและวิ่งเข้าหาขบวนที่หนึ่ง วิ่งเข้าหากันก็คือชนกัน จับคู่ตกรางสี่คู่ เหลือขบวนสี่น้ำเงินจำนวนห้าโบกี้ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติอยู่ในระดับการจัดกระทำ ในการลบ กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 4 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนมติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน ในกรณีที่ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ออกมาได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลอ้างอิงไปยังการใช้รถไฟช่วยในการหาคำตอบ ดังนี้ “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นสี่น้ำเงินขบวนที่สองก็สี่น้ำเงิน มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง แสดงว่ารถไฟทั้งสองขบวนชนกัน จับคู่ตกลางห้าคู่ เหลือสามโบกี้สี่น้ำเงิน ตอบลบสาม”

และนักเรียนได้ตอบในกรณีทั่วไปว่า การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก พร้อมทั้งให้เหตุผลโดยการยกตัวอย่าง $8 - 7$ เมื่อเจอเครื่องหมาย (-) อยู่ข้างหน้าจำนวนที่ 2 จำนวนที่สองจะเปลี่ยนค่าทันที $8 - 7$ คือ $8 + (-7) = 1$ (1 มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก) ดังภาพที่ 35

16.1 ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ ลบกันจะได้จำนวนเต็ม ... 2.2D.....

เหตุผล สมมติว่า $8 - 7$ เมื่อลบค่าของ $8 - 7$
 จำนวนที่ $8 - 7$ คือ $8 + (-7)$
 $8 - (-7) = 1$ (นักเรียนมีใจจดจ่อ)

ภาพที่ 35 แสดงการตอบในกรณีทั่วไป การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกเมื่อตัวตั้ง
 มีค่ามากกว่าตัวลบของนักเรียน กลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ ระดับ
 กระบวนการ ในเรื่องการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้ง
 มากกว่าตัวลบ

(2) กรณีตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action

Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 4 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็น
 จำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น $4 - 9$ นักเรียนได้ทำกิจกรรมโดยต่อขบวนรถไฟ
 เป็นขบวนสีน้ำเงิน จำนวน 4 โบกี้ และขบวนที่สองเป็นสีน้ำเงินจำนวน 9 โบกี้ พร้อมทั้งเขียนลงใน
 ใบกิจกรรม และมีการเปรียบเทียบกันว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน จากนั้นนักเรียนได้ทำตามเงื่อนไขคือ
 เมื่อเจอตัวดำเนินการลบ ขบวนรถไฟขบวนที่สองจะเปลี่ยนทิศทางและเปลี่ยนสี จากนั้นนักเรียนก็
 นำรถไฟมาชนกัน เพราะเป็นรถไฟคนละสีกันแล้ว และจับคู่ตรงไป 4 คู่ เหลือรถไฟขบวนสีแดง
 จำนวน 5 โบกี้ นักเรียนจึงสรุปผลลัพธ์ที่ได้เป็น -5

จากการทำกิจกรรมของนักเรียนเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มบวกด้วย
 จำนวนเต็มบวก กรณีที่ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบนักเรียนสามารถต่อขบวนรถไฟ 2 ขบวน กลับด้าน
 รถไฟขบวนที่สอง และนำรถไฟมาชนกัน จากนั้นนับจำนวนโบกี้รถไฟที่เหลืออยู่เป็นผลลัพธ์ของ
 การลบ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ใน
 ระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process

Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 4 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบกรณีตัวตั้ง
 เป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการ
 ทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการ

ทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน โดยให้เขียนตอบและอธิบายเหตุผลพร้อมทั้งสัมภาษณ์ ซึ่งนักเรียนได้หาผลลัพธ์ของ $5 - 8$ ได้ถูกต้องคือ -3 พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลคือ “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นสีน้ำเงินขบวนที่สองก็สีน้ำเงิน มีเครื่องหมายลบบอยู่ตรงกลาง แสดงว่ารถไฟทั้งสองขบวนชนกัน จับคู่ตกลงห้าคู่ เหลือสามโบกี้สีแดง ตอบลบสาม”

และนักเรียนได้ตอบในกรณีทั่วไปว่า การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ พร้อมทั้งให้เหตุผลโดยการยกตัวอย่าง $8 - 9$ เมื่อเจอเครื่องหมาย (-) อยู่ข้างหน้าจำนวนที่ 2 จำนวนที่สองจะเปลี่ยนค่าทันที $8 - 9$ คือ $8 + (-9) = -1$ (-1 มีค่าเป็นจำนวนเต็มลบ) ดังภาพที่ 36

16.2 ตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบ ลบกันจะได้จำนวนเต็ม

เหตุผล
 ที่ 2
 (.....)

ภาพที่ 36 แสดงการตอบในกรณีทั่วไป การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกเมื่อตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบของนักเรียน กลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในโมเดล ระดับกระบวนการในเรื่องการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ

(3) กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 4 การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีที่ ตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ นักเรียนได้ปฏิบัติตามกิจกรรม คือ ต่อโบกี้รถไฟเป็นรถไฟขบวนที่ 1 มี 5 โบกี้สีน้ำเงิน พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรมว่า รถไฟขบวนที่ 1 มี 5 โบกี้ สีน้ำเงิน จากนั้นนักเรียนต่อรถไฟขบวนที่ 2 มี 5 โบกี้ สีน้ำเงิน พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรมว่า รถไฟขบวนที่ 2 มี 5 โบกี้ สีน้ำเงิน เมื่อเจอเครื่องหมายลบบอยู่ตรงกลางนักเรียนอธิบายว่า “ขบวนที่ 2 แปลงร่างเป็นสีแดง รถไฟสองขบวนนี้ชนกันตรงรางไป เหลือศูนย์ คำตอบคือ ศูนย์”

จากการทำกิจกรรมที่ 4 วิเคราะห์ชิ้นงาน และการสัมภาษณ์นักเรียน พบว่านักเรียนกลุ่มที่ 1 มีความเข้าใจในโมเดลเรื่อง การลบจำนวนเต็มบวก ด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ อยู่ในการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 8 กรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ พบว่านักเรียนตอบได้ว่าถ้าตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ผลลัพธ์จะได้ ศูนย์ และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประกอบ คือ 5 - 5 นักเรียนอธิบายว่า “เมื่อเจอเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า จำนวนที่ 2 จะเปลี่ยนค่าทันที เป็น $5 + (-5)$ ได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์” ดังภาพที่ 37 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้อธิบายการลบโดยการเชื่อมโยงไปที่กิจกรรมรถไฟที่นักเรียนได้ทำ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ อยู่ในระดับกระบวนการ

16.3 ตัวตั้งมีค่าเท่ากับตัวลบ ลบกันจะได้จำนวนเต็มศูนย์.....
เหตุผลลบด้วยลบ 5 - 5 ได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์
.....
.....
.....
.....

ภาพที่ 37 แสดงการตอบในกรณีทั่วไป การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกเมื่อตัวตั้งเท่ากับตัวลบของนักเรียน กลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)

3.2.1.2 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 5 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ $9 - (-2)$ นักเรียนได้ทำกิจกรรมดัง โปรโตคอล การทำกิจกรรมดังนี้

- เอ : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่
บีศ : น้ำมันเก้าโบกี้
เอ : รถไฟขบวนที่สองมีสี่
บีศ : แดงสองโบกี้
เอ : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
บีศ : ขบวนที่หนึ่ง
บีศ : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี่

- เอ : มีสีน้ำเงินสองโบกี้
 บีส : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 เอ : ต่อกัน แล่นไปทางเดียวกัน
 บีส : เหลือรถไฟขบวนสี
 เอ : น้ำเงิน
 บีส : มีจำนวน
 เอ : สิบเอ็ดโบกี้
 บีส : ดังนั้นผลลัพธ์ของเก้ายลบ ลบสองคือ 11

จากการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม 9 – (-2) นักเรียนต่อรถไฟขบวนที่หนึ่งมีสีน้ำเงินเก้าโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสีน้ำเงินสี่โบกี้ เปรียบเทียบได้ว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเลยเปลี่ยนสีและวิ่งต่อขบวนที่หนึ่ง เป็นขบวนเดียวกันสีน้ำเงินจำนวนสิบเอ็ดโบกี้และบอกผลลัพธ์ของ 9 – (-2) นั่นคือ 11 นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่อง การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 5 ในโจทย์ที่เกี่ยวข้องกับการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ 5 – (-4) นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมาคือ 9 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลว่า “5 เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นขบวนสีน้ำเงิน -4 เป็นจำนวนเต็มลบขบวนสีแดง แต่มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง ขบวนสีแดงแปลงร่างเป็นสีน้ำเงิน วิ่งไปทางเดียวกับขบวนแรก จึงนำมาต่อกัน และได้รถไฟมี 9 โบกี้ สีน้ำเงิน คำตอบคือ 9 นอกจากนี้แล้ว นักเรียนสามารถตอบกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มบวกลบด้วยจำนวนเต็มลบ ได้เป็นจำนวนเต็มบวก พร้อมทั้งเขียนอธิบายเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประกอบคือ 5 – (-4) และเขียนอธิบายต่อว่า “เมื่อเจอเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้าจำนวนที่ 2 จำนวนที่ 2 จะเปลี่ยนค่าทันที 5 – (-4) คือ $5 + 4 = 9$ เพราะเมื่อเปลี่ยนค่าแล้วจาก -4 มาเป็น 4 เท่ากับว่า จำนวนเต็มบวก $5 + 4 = 9$ ” ดังภาพที่ 38

17. กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ลบกันจะได้
 จำนวนเต็ม ... ๕๐.๖๖.....
 เหตุผล ... คิดลบอีก ๖ - (-4) แล้วลบอีก ๕๐.๖๖.....
 จำนวนเต็ม ๕๐.๖๖ ลบอีก ๖ ได้ลบเท่ากับ ๕๐.๖๖ - ๖ = ๔๔.๖๖.....
 ลบอีก ๕๐.๖๖ ลบอีก ๖ ได้ลบเท่ากับ ๔๔.๖๖ - ๖ = ๓๘.๖๖.....

ภาพที่ 38 แสดงการตอบในกรณีทั่วไป กรณีจำนวนเต็มบวกเป็นตัวตั้ง จำนวนเต็มลบเป็นตัวลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีส, เอ, บอส)

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบในระดับกระบวนการ

3.2.1.3 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 6 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก (-6) - 2 นักเรียนได้ทำกิจกรรมดังโปรโตคอล การทำกิจกรรมดังนี้

- เอ : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่
 บีส : แดงหกโบกี้
 เอ : รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 บีส : นำเงินสองโบกี้
 เอ : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
 บีส : ขบวนที่หนึ่ง
 บีส : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 เอ : มีสี่แดง สองโบกี้
 บีส : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 เอ : ต่อกัน แล่นไปทางเดียวกัน
 บีส : เหลือรถไฟขบวนสี่
 เอ : แดงแปดโบกี้
 บีส : ดังนั้นผลลัพธ์ของลบหก ลบสองคือ
 เอ : ลบแปด

จากการสังเกตนักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม(-6) -2 นักเรียนต่อรถไฟขบวนที่หนึ่งมีสีแดงหกโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสีน้ำเงินสองโบกี้ สามารถเปรียบเทียบได้ว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเปลี่ยนสีและวิ่งต่อขบวนที่หนึ่ง เป็นขบวนเดียวกันสีแดงจำนวนแปดโบกี้และบอกผลลัพธ์ของ $(-6) - 2$ นั่นคือ -8 นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่อง การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก อยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 6 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ $(-8) - 3$ นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมาคือ -11 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลว่า “ -8 เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นขบวนสีแดง 3 เป็นจำนวนเต็มบวกขบวนสีน้ำเงิน แต่มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง ขบวนสีน้ำเงินแปลงร่างเป็นสีแดง วิ่งไปทางเดียวกับขบวนแรก จึงนำมาต่อกัน และได้รถไฟมี 11 โบกี้ สีแดง คำตอบคือ -11 นอกจากนี้แล้ว นักเรียนสามารถตอบกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มลบ ลบด้วยจำนวนเต็มบวก ได้เป็นจำนวนเต็มลบ พร้อมทั้งเขียนอธิบายเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประกอบคือ $(-4) - 5$ และเขียนอธิบายต่อว่า “ $(-4) - 5$ คือ $(-4) + (-5)$ เมื่อเปลี่ยนค่าจาก 5 มาเป็น -5 เท่ากับว่า (-5) เามาบวกกับ (-4) จะได้เท่ากับ -9 ”

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ในระดับกระบวนการ

3.2.1.4 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action

Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 7 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบเช่น $(-9) - (-8)$ นักเรียนได้ทำกิจกรรมดังโปรโตคอลการทำกิจกรรมดังนี้

- เอ : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่
 บีส : แดงเก้าโบกี้
 เอ : รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 บอส : แดงแปดโบกี้
 เอ : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
 บีส : ขบวนที่หนึ่ง
 เอ : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 บีส : มีสีน้ำเงิน แปดโบกี้
 เอ : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 บอส : ชนกัน
 เอ : เหลือรถไฟขบวนสี่
 บีส : แดง หนึ่งโบกี้
 เอ : ดังนั้นผลลัพธ์ของลบเก้า ลบ ลบแปดคือ
 บีส : ลบหนึ่ง

จากโปรโตคอล และการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม (-9) – (-8) นักเรียนสามารถต่อรถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่แดงเก้าโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสี่แดงแปดโบกี้ สามารถเปรียบเทียบได้ว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเปลี่ยนสีและชนขบวนที่หนึ่ง เหลือสี่แดงหนึ่งโบกี้และบอกผลลัพธ์ของ(-9) – (-8) นั่นคือ -1 นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติอยู่ในระดับการจัดกระทำ เรื่องการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ที่ค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 7 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบและค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ (-10) – (-6) นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมา คือ -16 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลว่า “-10 เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นขบวนสี่แดง -6 เป็นจำนวนเต็มลบขบวนสี่

แดง แต่มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง ขบวนการสีแดงแปลงร่างเป็นสีน้ำเงิน วิ่งชนกัน จับคู่ตรงกลาง เหลือ รถไฟสีแดง 4 โบกี้ ตอ -4 นอกจากนี้แล้ว นักเรียนสามารถตอบกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มลบ ลบด้วยจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ได้เป็นจำนวนเต็มลบ

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้ง อธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ในระดับกระบวนการ

(2) กรณีค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

การทำกิจกรรมของนักเรียนในกรณีที่เป็นการลบจำนวนเต็ม ที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ นักเรียน เช่น หาผลลัพธ์ของ $(-8) - (-9)$ นักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟ โดยที่ขบวนแรกสีแดง จำนวน 8 โบกี้ และขบวนที่ 2 สีแดงจำนวน 9 โบกี้ เมื่อขบวนที่ 2 เจอเครื่องหมายลบ นักเรียนได้พลิกขบวนที่ 2 เป็นสีน้ำเงิน จำนวน 9 โบกี้และนำรถไฟทั้ง 2 ขบวนมาชนกัน จับคู่ตรงกลาง เหลือ สีน้ำเงิน 1 โบกี้ จากนั้นนักเรียนได้สรุปคำตอบที่ได้คือ 1 และเขียนลงในใบกิจกรรม นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 7 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับรถไฟผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ $(-3) - (-6)$ นักเรียนตอบผลลัพธ์ที่ได้คือ 3 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง พร้อมทั้งให้เหตุผลคือ “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นแดงขบวนที่สองก็สีแดง มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง แสดงว่ารถไฟขบวนที่สองขบวนวิ่งเปลี่ยนทาง ทำให้รถไฟชนกัน จับคู่ตรงกลาง เหลือ 3 โบกี้”

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้ง อธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติกรณีตัวตั้งเป็น

จำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ในระดับกระบวนการ

(3) **กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ**

1) **ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)**

การทำกิจกรรมของนักเรียนในกรณีที่เป็นการลบจำนวนเต็ม ที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ นักเรียน เช่น หาผลลัพธ์ของ $(-5) - (-5)$ นักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟ โดยที่ขบวนแรกสีแดง จำนวน 5 โบกี้ และขบวนที่ 2 สีแดงจำนวน 5 โบกี้ เมื่อขบวนที่ 2 เจอเครื่องหมายลบ นักเรียนได้พลิกขบวนที่ 2 เป็นสีน้ำเงิน จำนวน 5 โบกี้และนำรถไฟทั้ง 2 ขบวนมาชนกัน จับคู่ตัดราง ไม่เหลือรถไฟ จากนั้นนักเรียนได้สรุปคำตอบที่ได้คือ 0 และเขียนลงในใบกิจกรรม นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตในเรื่องการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) **ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)**

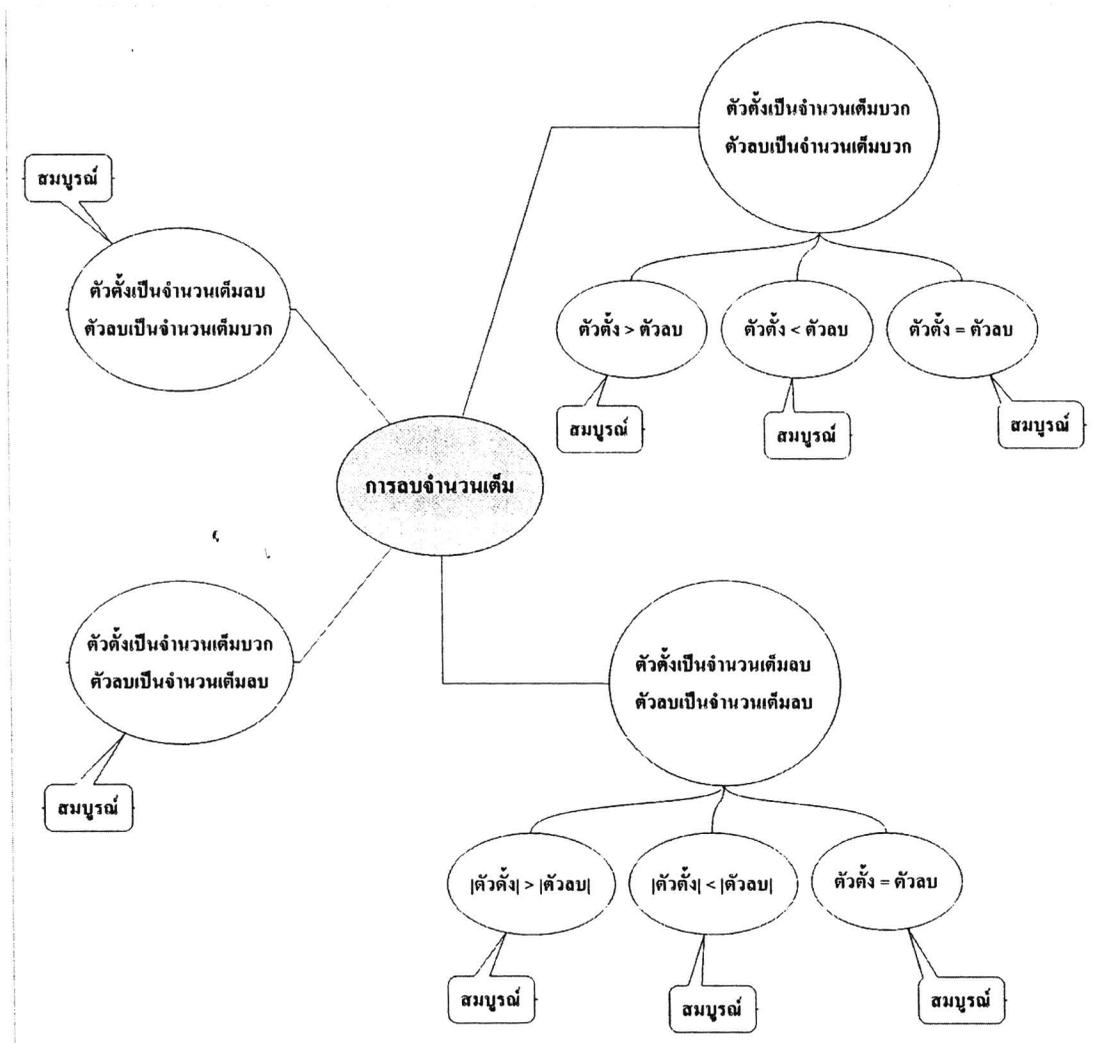
ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 8 กรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ กรณีตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ พบว่านักเรียนตอบได้ว่าถ้าตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ผลลัพธ์จะได้ ศูนย์ และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประกอบ คือ $(-5) - (-5)$ นักเรียนอธิบายว่า “เมื่อเจอเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า จำนวนที่ 2 จะเปลี่ยนค่าทันที เป็น $(-5) + 5$ ได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์” นอกจากนี้ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนกลุ่มที่ 1 ได้อธิบายการลบโดยการเชื่อมโยงไปที่กิจกรรมรถไฟที่นักเรียนได้ทำ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ อยู่ในระดับกระบวนการ

3.2.1.5 **สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตเรื่องการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)**

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั่นคือโบกี้รถไฟ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อให้นักเรียนทำการลบจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยังโบกี้รถไฟที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมและนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตเรื่องการลบจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการ เมื่อให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 9 และให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนมิตเกี่ยวกับการลบจำนวน

เต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่ การต่อขบวนรถไฟ

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำ กิจกรรมที่ 9 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การลบจำนวนสามจำนวน การบวกและการลบ จำนวนเต็มที่อยู่ในข้อเดียวกัน พบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการลบจำนวน เต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการลบจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือ นักเรียนนำมโนคติเกี่ยวกับ จำนวน การบวกจำนวนเต็ม การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ในกรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ตัวลบน้อยกว่าตัวตั้ง ตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ตัว ตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวน เต็มลบ มาใช้หาผลลัพธ์ ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ยกตัวอย่างเช่น $9 - (-6) - (-5)$ นักเรียนได้หา ผลลัพธ์ออกมาได้ถูกต้องทุกคน และอธิบายที่มา โดยการจับมาทำทีละคู่ คือ นำ $9 - (-6)$ พร้อมทั้ง อธิบายการดำเนินการลบ ว่า 9 เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นรถไฟขบวนสีน้ำเงิน 9 และ -6 เป็นจำนวน เต็มลบเป็นรถไฟขบวนสีแดง มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง รถไฟขบวนที่ 2 จากสีแดงจะแปลงร่าง เปลี่ยนทิศทางเปลี่ยนสีเป็นสีน้ำเงิน จากนั้นนำมาต่อกันได้เป็น 15 เมื่อได้แล้วนำ -5 มาลบ นักเรียน สรุปผลลัพธ์คือ 20 นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับ โครงสร้าง



ภาพที่ 39 แสดงโครงสร้างของการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็น
เครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (บีศ, เอ, บอส)

3.2.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของ
นักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

3.2.2.1 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) กรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action
Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 4 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็น
จำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น 9 - 4 นักเรียนได้ทำกิจกรรมโดยต่อขบวนรถไฟ
เป็นขบวนสีน้ำเงิน จำนวนเก้าโบกี้ และขบวนที่สองเป็นสีน้ำเงินจำนวนสี่โบกี้ พร้อมทั้งเขียนลงใน

ใบกิจกรรม ดังภาพที่ 40 นักเรียนกลุ่มที่ 2 ได้แสดงพฤติกรรมการเรียนรู้ ดังโปรโตคอลการทำกิจกรรมดังนี้

1. ให้นำผลลัพธ์ของ 9-4

รถไฟขบวนที่ 1 ✓
 มีสี มีจำนวนโบกี้ 9 โบกี้

รถไฟขบวนที่ 2 ✓
 มีสี มีจำนวนโบกี้ 4 โบกี้

รถไฟขบวนไหนยาวกว่ากัน
 ตอบ

เมื่อเจอเครื่องหมายลบ(-) รถไฟขบวนที่ 2
 มีสี มีจำนวนโบกี้ 4 โบกี้

รถไฟ 2 ขบวนนี้ จะวิ่งมาชนกันหรือต่อกัน
 ตอบ

เหลือรถไฟขบวนสี มีจำนวนโบกี้ 5 โบกี้

ดังนั้น ผลลัพธ์ของ 9-4 คือ 5

ภาพที่ 40 แสดงการทำกิจกรรม การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, คาร์)

- กลอย : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี
 คาร์ : นำเงินเก้าโบกี้
- กลอย : รถไฟขบวนที่สองมีสี
 คาร์ : นำเงินสี่โบกี้
- กลอย : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
 ช้าง : ขบวนที่หนึ่ง
- กลอย : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี
 คาร์ : มีสีแดง
- ช้าง : สี่โบกี้
- กลอย : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 คาร์ : ชนกัน
- กลอย : เหลือรถไฟขบวนสี



ช่าง : น้ำเงิน

ดาร์ : ห้าโบกี้

กลอย : คั้งนั้นผลลัพธ์ของเก้าลบสี่คือ

ดาร์ : ห้า

จากโปรโตคอล และการสัมภาษณ์ นักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม 9 – 4 นักเรียนบอกได้ว่ารถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่น้ำเงินเก้าโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสี่น้ำเงินสี่โบกี้ เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเลยเปลี่ยนและวิ่งชนขบวนที่หนึ่ง จับคู่ตรงสี่คู่ เหลือขบวนสี่น้ำเงินจำนวนห้าโบกี้ นั่นคือ นักเรียนมีการสร้างมโนคติอยู่ในระดับการจัดกระทำ ในการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 4 ใน โจทย์ที่เกี่ยวข้องการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน ในกรณีนี้ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ออกมาได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลอ้างไปยังการใช้รถไฟช่วยในการหาคำตอบ คั้งนี้ “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นสี่น้ำเงินขบวนที่สองก็สี่น้ำเงิน มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง พลิกด้านและเปลี่ยนทิศทาง ไปวิ่งชนกับขบวนที่ 1 จับคู่ตรงกลางห้าคู่ เหลือสามโบกี้สี่น้ำเงิน ตอบลบสาม”

และนักเรียนได้ตอบในกรณีทั่วไปว่า การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวก พร้อมทั้งให้เหตุผลโดยการยกตัวอย่าง $8 - 7$ เมื่อเจอเครื่องหมาย (-) อยู่ข้างหน้าจำนวนที่ 2 จำนวนที่สองจะเปลี่ยนค่าทันที $8 - 7$ คือ $8 + (-7) = 1$ (1 มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวก) ดังภาพที่ 41

16.1 ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบ ลบกันจะได้จำนวนเต็ม ...227.....

เหตุผล ผลลบว่า 8-7 เมื่อลบตัวตั้งที่มีค่ามากกว่าตัวลบ
 จำนวนที่ 2 จำนวนลบ (-) กับ (-) จะกลายเป็นบวก 8-7 หรือ 8-(-7)
 8-(-7) = 1 (1 มีค่ามากกว่า 0 หรือบวก)

ภาพที่ 41 แสดงการตอบในกรณีทั่วไป การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกเมื่อตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบของนักเรียน กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ ระดับกระบวนการในเรื่องการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมากกว่าตัวลบ

(2) กรณีตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก เช่น 4 – 9 นักเรียนได้ทำกิจกรรมโดยต่อขบวนรถไฟเป็นขบวนสีน้ำเงิน จำนวน 4 โบกี้ และขบวนที่สองเป็นสีน้ำเงินจำนวน 9 โบกี้ พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรม และมีการเปรียบเทียบกันว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน จากนั้นนักเรียนได้ทำตามเงื่อนไขคือ เมื่อเจอตัวดำเนินการลบ ขบวนรถไฟขบวนที่สองจะเปลี่ยนทิศทางและเปลี่ยนสี จากนั้นนักเรียนก็นำรถไฟมาชนกัน เพราะเป็นรถไฟคนละสีกันแล้ว และจับคู่ตรงไป 4 คู่ เหลือรถไฟขบวนสีแดงจำนวน 5 โบกี้ นักเรียนจึงสรุปผลลัพธ์ที่ได้เป็น -5

จากการทำกิจกรรมของนักเรียนเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีที่ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบนักเรียนสามารถต่อขบวนรถไฟ 2 ขบวน กลับด้านรถไฟขบวนที่สอง และนำรถไฟมาชนกัน จากนั้นนับจำนวน โบกี้รถไฟที่เหลืออยู่เป็นผลลัพธ์ของการลบ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 4 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบ ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับรถไฟผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน โดยให้เขียนตอบและอธิบายเหตุผลพร้อมทั้งสัมภาษณ์ ซึ่งได้ผลดังนี้

The image shows a student's handwritten solution for the problem $3.5 - 8 = \dots$. The student has written "3" in the blank space after the equals sign. The work is written on a grid background.

ภาพที่ 42 แสดงการตอบในกรณีทั่วไป การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกเมื่อตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบของนักเรียน กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, คาร์)

ผู้วิจัย	ข้อนี้ทำยังไง
คาร์	มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นสีน้ำเงินขบวนที่สองก็สีน้ำเงิน มีเครื่องหมาย ลบบนตรงกลาง แสดงว่ารถไฟขบวนที่สองวิ่งเปลี่ยนทาง
กลอย	รถไฟทั้งสองจะวิ่งชนกัน จับคู่ตรงกลางห้าคู่
คาร์	เหลือสีแดงสามโบกี้ เลขตอบลบสาม

จากการทำกิจกรรมที่ 3 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีการสร้างมโนคติในระดับกระบวนการ

(3) กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 4 การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีที่ ตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ นักเรียนได้ปฏิบัติตามกิจกรรม คือ ต่อโบกี้รถไฟเป็นรถไฟขบวนที่ 1 มี 5 โบกี้สีน้ำเงิน พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรมว่า รถไฟขบวนที่ 1 มี 5 โบกี้ สีน้ำเงิน จากนั้นนักเรียนต่อรถไฟขบวนที่ 2 มี 5 โบกี้ สีน้ำเงิน พร้อมทั้งเขียนลงในใบกิจกรรมว่า รถไฟขบวนที่ 2 มี 5 โบกี้ สีน้ำเงิน เมื่อเจอเครื่องหมายลบบนตรงกลางนักเรียนอธิบายว่า “ขบวนที่ 2 เปลี่ยนเป็นสีแดงรถไฟสองขบวนนี้ชนกันตรงไป เหลือศูนย์ คำตอบคือ ศูนย์”

จากการทำกิจกรรมที่ 4 วิเคราะห์ชิ้นงาน และการสัมภาษณ์นักเรียน พบว่านักเรียนกลุ่มที่ 2 มีความเข้าใจในมโนคติเรื่อง การลบจำนวนเต็มบวก ด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ อยู่ในการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 8 กรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ พบว่านักเรียนตอบได้ว่าถ้าตัวตั้งเท่ากับตัวลบ

ผลลัพธ์จะได้ ศูนย์ และนักเรียน ได้อธิบายเหตุผล โดยการว่าตัวตั้งกับตัวลบเท่ากัน ลบออกมาเหลือ 0 นอกจากนี้ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนกลุ่มที่ 2 ได้อธิบายการลบโดยการเชื่อมโยงไปที่กิจกรรมรถไฟที่นักเรียนได้ทำ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ อยู่ในระดับกระบวนการ

3.2.2.2 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 5 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ $9 - (-2)$ นักเรียนได้ทำกิจกรรมดังโปรโตคอล การทำกิจกรรมดังนี้

- กลอย : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่
 ดาร์ : นำเงิน เก้า โบกี้
- กลอย : รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 ดาร์ : แดง สอง โบกี้
- กลอย : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
 ดาร์ : ขบวนที่หนึ่ง
- กลอย : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 ดาร์ : มีสีนำเงินสอง โบกี้
- กลอย : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 ช้าง : ต่อกัน
- กลอย : เหลือรถไฟขบวนสี่
 ช้าง : นำเงิน
- กลอย : มีจำนวน
 ดาร์ : สิบเอ็ด โบกี้
- กลอย : ดังนั้นผลลัพธ์ของเก้าลบ ลบสองคือ
 ดาร์ : สิบเอ็ด

จากการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม 9 – (-2) นักเรียนต่อรถไฟขบวนที่หนึ่งมีสีน้ำเงินเก้าโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสีน้ำแดงสี่โบกี้ เปรียบเทียบได้ว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเลขเปลี่ยนสีและวิ่งต่อขบวนที่หนึ่ง เป็นขบวนเดียวกันสีน้ำเงินจำนวนสิบเอ็ดโบกี้และบอกผลลัพธ์ของ 9 – (-2) นั่นคือ 11 นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่อง การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ 5 – (-4) นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมา คือ 9 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลว่า “5 เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นขบวนสีน้ำเงิน -4 เป็นจำนวนเต็มลบขบวนสีแดง แต่มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง ขบวนสีแดงเปลี่ยนเป็นสีน้ำเงิน วิ่งไปทางเดียวกับขบวนแรก จึงนำมาต่อกัน และได้รถไฟมี 9 โบกี้ สีน้ำเงิน คำตอบคือ 9 นอกจากนี้แล้ว นักเรียนสามารถตอบกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มบวกลบด้วยจำนวนเต็มลบ ได้เป็นจำนวนเต็มบวก

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีการสร้างมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบในระดับกระบวนการ

3.2.2.3 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 6 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก (-6) – 2 นักเรียนได้ทำกิจกรรมดังโปรโตคอล การทำกิจกรรมดังนี้

กลอย : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี

ตัว : แดง หกโบกี้

กลอย : รถไฟขบวนที่สองมีสี

ตัว : น้ำเงิน สองโบกี้

- กลอย : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
 ดาร์ : ขบวนที่หนึ่ง
 กลอย : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี
 ดาร์ : มีสีแดง สอง โบกี้
 กลอย : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 ดาร์ : ต่อกัน
 กลอย : เหลือรถไฟขบวนสี
 ช้าง : แดง แปด โบกี้
 กลอย : ดังนั้นผลลัพธ์ของลบหก ลบสองคือ
 ช้าง : ลบแปด

จากการสังเกตนักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม(-6)–2 นักเรียนต่อรถไฟขบวนที่หนึ่งมีสีแดงหก โบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสีน้ำเงินสอง โบกี้ สามารถเปรียบเทียบได้ว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สองเปลี่ยนสีและวิ่งต่อขบวนที่หนึ่ง เป็นขบวนเดียวกันสีแดงจำนวนแปด โบกี้และบอกผลลัพธ์ของ (-6)–2 นั่นคือ -8 นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่อง การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก อยู่ในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 6 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับ โบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่ มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ (-8)–3 นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมาคือ -11 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลว่า “-8 เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นขบวนสีแดง 3 เป็นจำนวนเต็มบวกขบวนสีน้ำเงิน แต่มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง ขบวนสีน้ำเงินแปลงร่างเป็นสีแดง วิ่งไปทางเดียวกับขบวนแรก จึงนำมาต่อกัน และได้รถไฟมี 11 โบกี้ สีน้ำเงิน คำตอบคือ -11 นอกจากนี้แล้ว นักเรียนสามารถตอบกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มบวก ได้เป็นจำนวนเต็มลบ

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ในระดับกระบวนการ

3.2.2.4 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action

Conceptual Understanding)

พิจารณาตัวอย่างการทำกิจกรรมที่ 7 ข้อที่เป็นการลบ โดยที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบเช่น (-9) - (-8) นักเรียนได้ทำกิจกรรมดังโปรโตคอลการทำกิจกรรมดังนี้

- กลอย : รถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่
 คาร์ : แดง เก้าโบกี้
 กลอย : รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 คาร์ : แดง แปดโบกี้
 กลอย : รถขบวนไหนยาวกว่ากัน
 คาร์ : ขบวนที่หนึ่ง
 กลอย : เมื่อเจอเครื่องหมายลบ รถไฟขบวนที่สองมีสี่
 คาร์ : มีสีน้ำเงิน แปดโบกี้
 กลอย : รถสองขบวนนี้จะวิ่งชนหรือต่อกัน
 คาร์ : ชนกัน
 กลอย : เหลือรถไฟขบวนสี
 ช้าง : แดง หนึ่งโบกี้
 กลอย : ดังนั้นผลลัพธ์ของลบเก้า ลบ ลบแปดคือ
 ช้าง : ลบหนึ่ง

จากโปรโตคอล และการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถทำตามเงื่อนไขของกิจกรรม (-9) - (-8) นักเรียนสามารถต่อรถไฟขบวนที่หนึ่งมีสี่ แดงเก้าโบกี้ รถไฟขบวนที่สองมีสี่ แดงแปดโบกี้ นักเรียนสามารถเปรียบเทียบได้ว่าขบวนไหนยาวกว่ากัน เจอเครื่องหมายลบขบวนที่สอง

เปลี่ยนสีและขนขบวนที่หนึ่ง เหลือสีแดงหนึ่ง โบกี้และบอกผลลัพธ์ของ (-9) – (-8) นั่นคือ -1 นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่อง การลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 7 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบและค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโบกี้รถไฟ ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ (-10) – (-6) นักเรียนได้ตอบผลลัพธ์ออกมา คือ -16 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลว่า “-10 เป็นจำนวนเต็มลบ เป็นขบวนสีแดง -6 เป็นจำนวนเต็มลบขบวนสีแดง แต่มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง ขบวนสีแดงแปลงร่างเป็นสีน้ำเงิน วิ่งชนกัน จับคู่ตรงกลาง เหลือรถไฟสีแดง 4 โบกี้ ตอบ -4 นอกจากนี้แล้ว นักเรียนสามารถตอบกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มลบ ลบด้วยจำนวนเต็มลบ กรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ได้เป็นจำนวนเต็มลบ

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ในระดับกระบวนการ

(2) กรณีค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

การทำกิจกรรมของนักเรียนในกรณีที่เป็นการลบจำนวนเต็ม ที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ นักเรียน เช่น หาผลลัพธ์ของ (-8) – (-9) นักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟ โดยที่ขบวนแรกสีแดง จำนวน 8 โบกี้ และขบวนที่ 2 สีแดงจำนวน 9 โบกี้ เมื่อขบวนที่ 2 เจอเครื่องหมายลบ นักเรียนได้พลิกขบวนที่ 2 เป็นสีน้ำเงิน จำนวน 9 โบกี้และนำรถไฟทั้ง 2 ขบวนมาชนกัน จับคู่ตรงกลาง เหลือ สีน้ำเงิน 1 โบกี้ จากนั้นนักเรียนได้สรุปคำตอบที่ได้คือ 1 และเขียนลงในใบกิจกรรม นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 7 ในโจทย์ที่เกี่ยวกับการลบซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับรถไฟผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนมิตในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน คือ (-3) – (-6) นักเรียนตอบผลลัพธ์ที่ได้คือ 3 ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้อง พร้อมทั้งให้เหตุผลคือ “มีรถไฟสองขบวน ขบวนที่หนึ่งเป็นแดงขบวนที่สองก็สีแดง มีเครื่องหมายลบอยู่ตรงกลาง แสดงว่ารถไฟขบวนที่สองขบวนวิ่งเปลี่ยนทาง ทำให้รถไฟชนกัน จับคู่ตรงกลาง เหลือ 3 โบกี้”

จากการทำกิจกรรมที่ 8 นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้องพร้อมทั้งอธิบายการได้มาของคำตอบโดยใช้รถไฟ แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ ในระดับกระบวนการ

(3) กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ

1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

การทำกิจกรรมของนักเรียนในกรณีที่เป็นลบจำนวนเต็ม ที่ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ นักเรียน เช่น หาผลลัพธ์ของ (-5) – (-5) นักเรียนได้ต่อขบวนรถไฟ โดยที่ขบวนแรกสีแดงจำนวน 5 โบกี้ และขบวนที่ 2 สีแดงจำนวน 5 โบกี้ เมื่อขบวนที่ 2 เจอเครื่องหมายลบ นักเรียนได้พลิกขบวนที่ 2 เป็นสีน้ำเงิน จำนวน 5 โบกี้และนำรถไฟทั้ง 2 ขบวนมาชนกัน จับคู่ตรงกลาง ไม่เหลือรถไฟ จากนั้นนักเรียนได้สรุปคำตอบที่ได้คือ 0 และเขียนลงในใบกิจกรรม นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตในเรื่องการลบจำนวนเต็ม กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ และตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ และค่าสัมบูรณ์ของตัวตั้งเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของตัวลบ อยู่ในระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 8 กรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ กรณีตัวตั้ง เท่ากับ ตัวลบ พบว่านักเรียนตอบได้ว่าถ้าตัวตั้งเท่ากับตัวลบผลลัพธ์จะได้ ศูนย์ และนักเรียนได้อธิบายเหตุผลโดยการยกตัวอย่างประกอบ คือ (-5) – (-5) นักเรียนอธิบายว่า “เมื่อเจอเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้า จำนวนที่ 2 จะเปลี่ยนค่าทันที เป็น (-5) + 5 ได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์” นอกจากนี้ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนกลุ่มที่ 2 ได้อธิบายการ

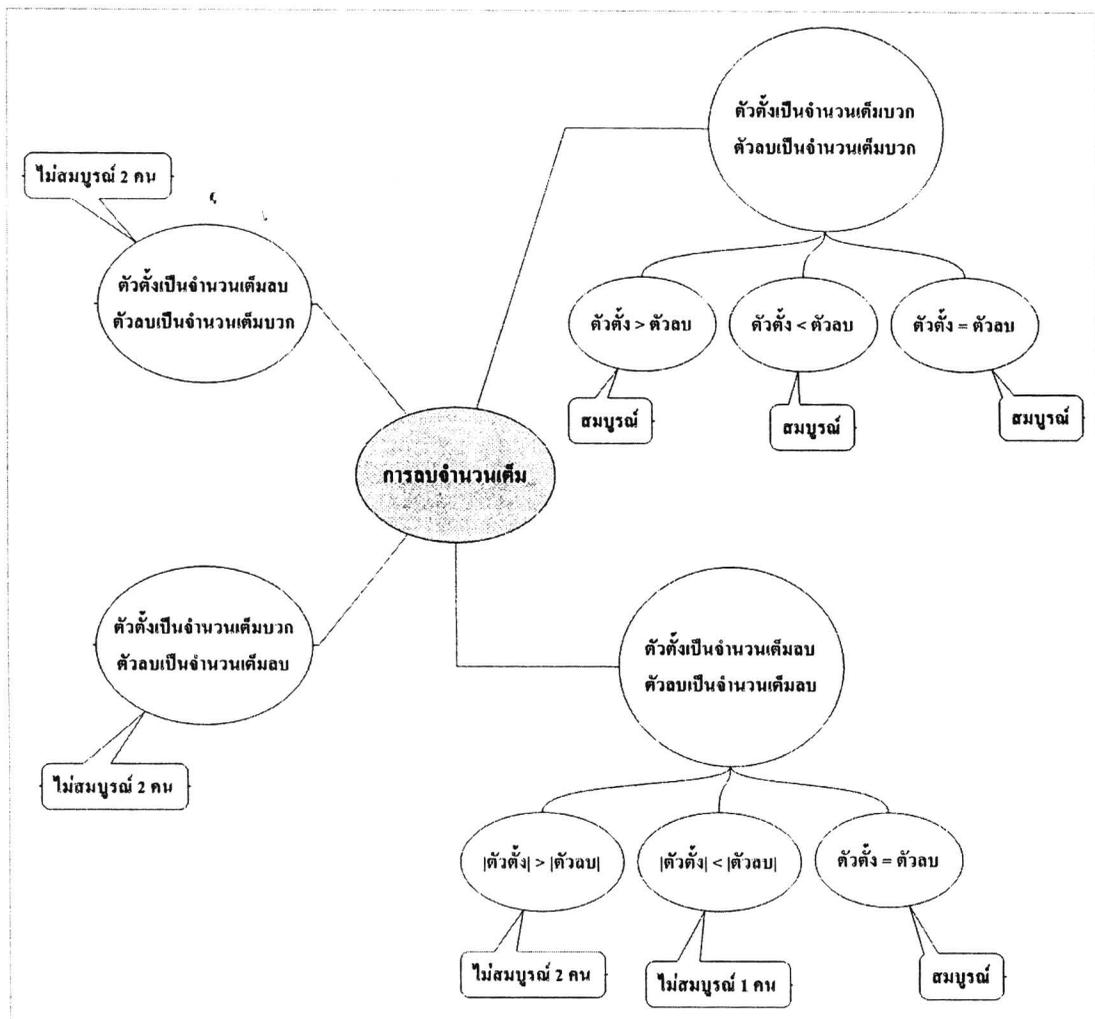
ลบโดยการเชื่อมโยงไปที่กิจกรรมรถไฟที่นักเรียนได้ทำ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งเท่ากับตัวลบ อยู่ในระดับกระบวนการ

3.2.2.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (กลอย, ช่าง, ต้าร์)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือโบกี้รถไฟ นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อนำนักเรียนมาทำการลบจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยังโบกี้รถไฟที่นักเรียนได้ทำกิจกรรมและนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการ เมื่อนำนักเรียนมาทำกิจกรรมที่ 9 และให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนคติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่การต่อขบวนรถไฟ

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 9 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การลบจำนวนสามจำนวน การบวกและการลบจำนวนเต็มที่อยู่ในข้อเดียวกัน พบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการลบจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการลบจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือนักเรียนนำมโนคติเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็ม การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ในกรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ตัวลบน้อยกว่าตัวตั้ง ตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ มาใช้หาผลลัพธ์ ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ยกตัวอย่างเช่น $9 - (-6) - (-5)$ นักเรียนได้หาผลลัพธ์ออกมาได้ถูกต้อง 1 คน และอธิบายที่มา โดยการจับมาทำทีละคู่ คือ นำ $9 - (-6)$ พร้อมทั้งอธิบายการดำเนินการลบ ว่า 9 เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นรถไฟขบวนสีน้ำเงิน 9 และ -6 เป็นจำนวนเต็มลบเป็นรถไฟขบวนสีแดง มีเครื่องหมายลบบ่อยตรงกลาง รถไฟขบวนที่ 2 จากสีแดงจะเปลี่ยนทิศทาง เปลี่ยนสีเป็นสีน้ำเงิน จากนั้นนำมาต่อกันได้เป็น 15 เมื่อได้แล้วนำ -5 มาลบ นักเรียนสรุปผลลัพธ์คือ 20 นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง แต่มีนักเรียนจำนวน 2 คนในกลุ่มนี้ที่ไม่สามารถเชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการลบจำนวนเต็มมาใช้เพื่อหาคำตอบได้ เช่น $9 - (-6) - (-5)$ นักเรียนได้หาผลลัพธ์โดยการนำเอา $9 - (-6)$ ได้ 15 แต่นักเรียนสลับที่เป็น $(-5) - 15$ และได้ผลลัพธ์เป็น -20 ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม ในกรณีที่จำนวนเต็มบวกเป็นตัวตั้งและจำนวนเต็มลบเป็นตัวลบ

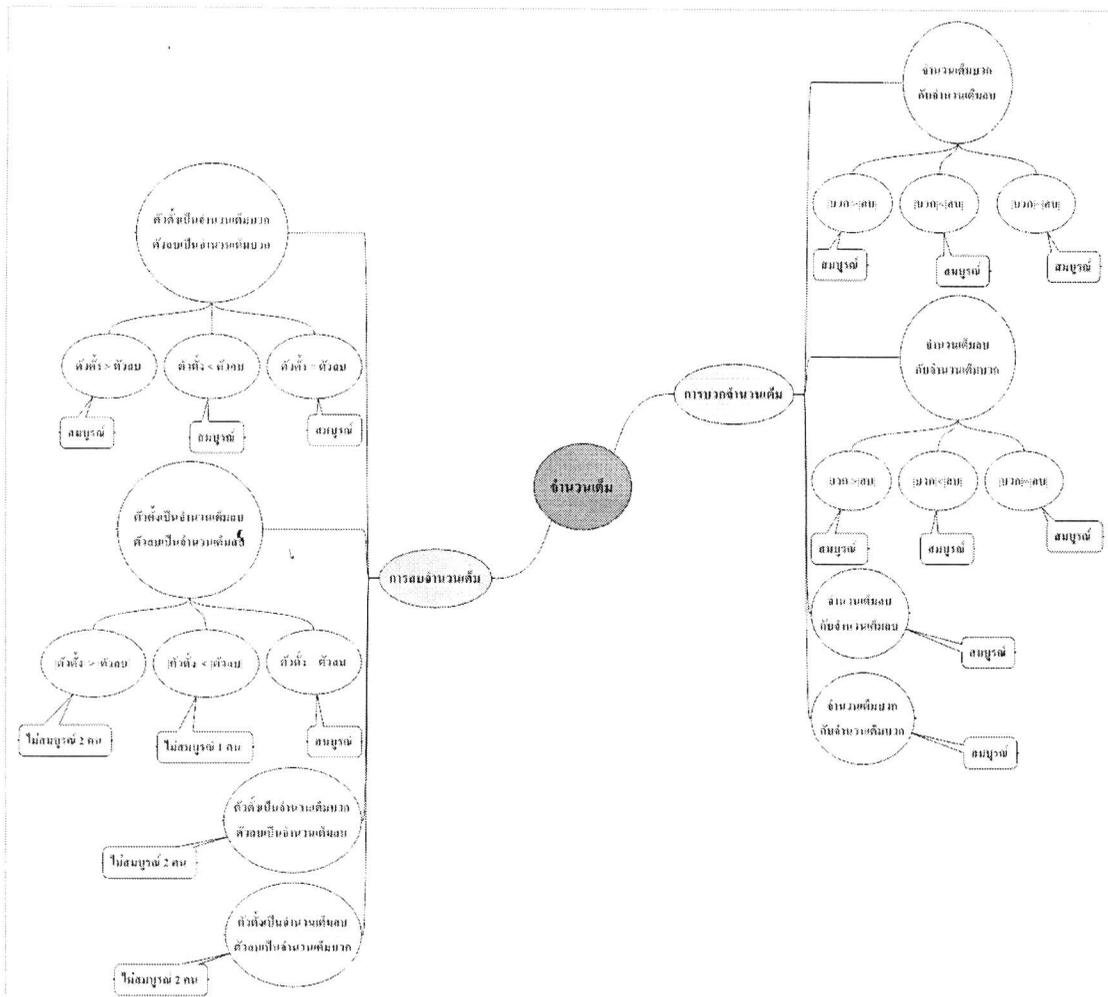
ไม่สมบูรณ์ เพราะนักเรียนมีการสลับที่การลบ นอกจากนี้แล้วนักเรียนยังไม่สามารถทำข้อ 12 ได้ คือ $(-10) - 5 - (-8)$ นักเรียนได้นำ $(-10) - 5$ ก่อนได้เป็น -15 จากนั้นนักเรียนไม่ได้ทำการลบระหว่าง $(-15) - (-8)$ แต่นักเรียนสลับที่การลบทำให้ได้ผลลัพธ์ที่ออกมา นั่นคือ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจใหม่ โนมติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบไม่สมบูรณ์ ดังนั้นนักเรียนไม่สามารถพัฒนาความเข้าใจใหม่ โนมติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มไปสู่ระดับโครงสร้างได้



ภาพที่ 43 แสดงโครงสร้างของการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (กลอย, ช้าง, ต้าร์)

3.3 สรุปผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

จากกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ นักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม มีความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็มระดับการจัดกระทำคือ นักเรียนสามารถต่อขบวนรถไฟ เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มได้ เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจในระดับการจัดกระทำแล้ว นักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจในมโนคติไปสู่ระดับกระบวนการ นั่นคือ นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกและการลบจำนวนเต็มได้และมองเห็นรูปทั่วไปของการบวกและการลบจำนวนเต็มในแต่ละกรณีได้ และนักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มไปสู่ ระดับโครงสร้างได้ นั่นคือ นักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่มีอยู่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็ม ในการหาผลลัพธ์การบวกจำนวนเต็ม ได้ถูกต้องพร้อมทั้งสามารถอธิบายที่มาของคำตอบได้อย่างชัดเจน แต่มีนักเรียนในกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้จำนวน 2 คนไม่สามารถพัฒนาไปสู่ระดับโครงสร้างได้ เนื่องจากนักเรียนมีมโนคติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม ในกรณีที่ การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ การลบจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ การลบจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ ไม่สมบูรณ์ ดังสรุปได้ตามภาพที่ 44



ภาพที่ 44 แสดงโครงสร้างของการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

4. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

4.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

เริ่มต้นผู้วิจัยอธิบายทบทวนการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) หลังจากนั้นผู้ช่วยผู้วิจัยแจกใบกิจกรรมให้นักเรียนแต่ละกลุ่มซึ่งมี 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน ลำดับต่อไปให้นักเรียนเปิดคอมพิวเตอร์และเปิดไปยังไฟล์โปรแกรม GSP ในหน้าแรกก่อนเริ่มทำกิจกรรมให้นักเรียนอ่านและทำความเข้าใจเกี่ยวกับข้อตกลงเบื้องต้น ซึ่งเป็นดังนี้

- 1) กำหนดรูปวงกลมสีน้ำเงิน ● ให้แทนจำนวนเต็มบวกมีค่าเท่ากับ 1
- 2) กำหนดรูปวงกลมสีแดง ● ให้แทนจำนวนเต็มลบมีค่าเท่ากับ -1
- 3) สีเดียวกันให้นับเพิ่ม
- 4) ต่างสีกันให้หักล้างกัน
- 5) ถ้าสีน้ำเงินและสีแดงจับคู่กัน ● ● ได้เรียกว่าคู่ศูนย์มีค่าเท่ากับ 0
- 6) ถ้าตัวดำเนินการเป็นเครื่องหมายบวก (+) จะทำให้รูปวงกลมมีสีเหมือนเดิม
- 7) ถ้าตัวดำเนินการเป็นเครื่องหมายลบ (-) จะทำให้รูปวงกลมเปลี่ยนสีไปเป็นสี

ตรงกันข้าม

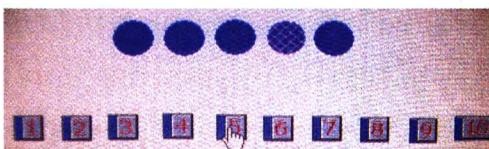
เมื่อนักเรียนได้อ่านข้อตกลงแล้ว ผู้วิจัยให้นักเรียนเริ่มทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็ม ซึ่งผู้วิจัยได้เสนอผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ ทั้ง 2 กลุ่ม ดังต่อไปนี้

4.1.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

4.1.1.1 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

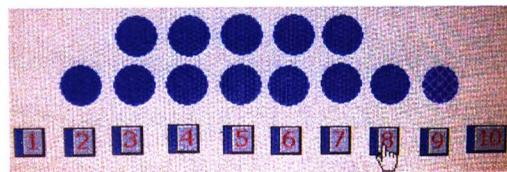
(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

หลังจากนักเรียนกลุ่มที่ 1 ทำความเข้าใจเกี่ยวกับข้อตกลงเบื้องต้นเสร็จแล้ว นักเรียนก็ปฏิบัติตามคำสั่งในใบกิจกรรมที่ 1 ซึ่งมีโจทย์ที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มบวกที่นักเรียนได้ทำ เนื่องจากโจทย์มีลักษณะคล้ายกัน ผู้วิจัยจึงนำมาแสดงการวิเคราะห์เพียงบางข้อเท่านั้น ซึ่งโจทย์ที่นำมาวิเคราะห์เป็นดังนี้ ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $5 + 8$ เริ่มต้นจากการที่นักเรียนอ่านเงื่อนไขคำสั่งในใบกิจกรรมที่ 1 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 5 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่หนึ่ง ซึ่งปรากฏเห็นรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูปบนหน้าจอ GSP ดังภาพที่ 45 จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 1 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูป



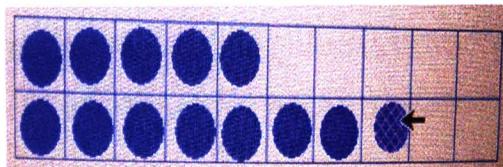
ภาพที่ 45 แสดงการคลิกปุ่มหมายเลข 5 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 8 ในหน้าจอ GSP และปรากฏเห็นรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 8 รูปบนหน้าจอ GSP ดังภาพที่ 46 จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 1 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 8 รูป



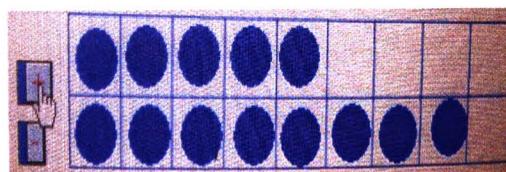
ภาพที่ 46 แสดงการคลิกปุ่มหมายเลข 8 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก
ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหิบบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สองเมื่ออ่านคำสั่งเสร็จ สมาชิกในกลุ่มก็ทำการคลิกเลือกรูปวงกลมสีไปวางในช่องสี่เหลี่ยมตามที่กำหนด ดังภาพที่ 47



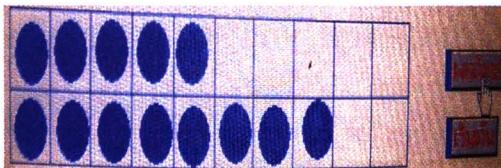
ภาพที่ 47 แสดงการนำวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยม กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับ
จำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

จากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มเลือกเครื่องหมายบวกซึ่งนักเรียนสังเกตเห็นวงกลม ในช่องสี่เหลี่ยมก็เหมือนเดิม ดังภาพที่ 48



ภาพที่ 48 แสดงการคลิกตัวดำเนินการบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก
ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

หลังจากนั้นนักเรียนคลิกที่ป้ายผลลัพธ์ ดังแสดงในภาพที่ 49 และนักเรียนได้สังเกตเห็นรูปร่างกลมในช่องสี่เหลี่ยมก็ยังคงเหมือนเดิม



ภาพที่ 49 แสดงการคลิกป้ายผลลัพธ์ การบวกรับจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก
ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

เมื่อต้องบอกผลลัพธ์ นักเรียนก็นับจำนวนรูปร่างกลมที่อยู่บนหน้าจอและสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $5 + 8$ คือ 13 และให้เหตุผลว่า รูปร่างกลมเป็นสีน้ำเงินไม่มีสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 13 ดังแสดงในโปรโตคอลการพูดคุยในขณะทำกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และเมื่อผู้วิจัยทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนได้อธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่ 1 มีวงกลมสีน้ำเงิน 5 รูปและแถวที่ 2 มีวงกลมสีน้ำเงิน 8 รูป ไม่มีสีแดงจึงนับเพิ่มได้ 13 รูป ซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 13

- เจน หันเค ปุ่มเลขห้าคลิกแม่ะ
- อ้อม เออ
- เจน คลิกเลขแปดนำ
- เจน เอาไปใส่ช่องสี่เหลี่ยม
- อ้อม เขียนตอบและบ่
- เต๋ย อ้อ
- อ้อม เฮ็ดจั่งไคมันคือบ่ไป
- เต๋ย คลิกค้างไว้แล้วลากไป
- เจน มาเฮาเฮ็ดเอง
- เต๋ย เอามาครบยัง
- เจน ครบแล้ว ต่อไปคลิกเครื่องหมายบวกเดเนาะ
- เต๋ย เออ
- เจน คือบ่เห็นเป็นหยัง
- เจน คลิกป้ายผลลัพธ์ ก็ยังคือเก่าตอบท่ไค

อ้อม	สิบสาม
เจน	คือตอบสิบสาม
เต๋ย	ก็นับเบ็ง

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 1 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกบวกกับจำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ทำตามคำสั่งได้ สามารถนำรูปวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยมตามที่กำหนด บอกได้ว่ามีวงกลมสีแทนจำนวนเท่าใด ที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP และเขียนคำตอบลงในใบกิจกรรม ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad อีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ไปสู่ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “รูปวงกลมสีน้ำเงินทั้งหมดมารวมกันได้ 17 ไม่มีรูปวงกลมสีแดง” ดังแสดงในภาพที่ 50 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนได้ให้เหตุผลของการได้มาซึ่งคำตอบ 17 คือ “มีวงกลมสีน้ำเงินเก้ารูป และวงกลมสีน้ำเงินแปดรูป สีเดียวกันนับเพิ่มก็เลขตอบ สิบบแปด และสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวก”

$$1. 9 + 8 = \dots 17 \dots$$

เหตุผล. เพราะถ้า... รูปวงกลมสีน้ำเงินทั้งหมดมารวมกันได้ 17
ไม่มีรูปวงกลมสีแดง

ภาพที่ 50 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวกและให้เหตุผลว่า “สี่น้ำเงินบวกกับสี่น้ำเงินเท่ากับสี่น้ำเงิน” พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ คือ $7 + 5 = 12$ และเขียนอธิบายว่า “7 เป็นจำนวนเต็มบวก 5 เป็นจำนวนเต็มบวก รวมกันก็ได้จำนวนเต็มบวก” ดังแสดงในภาพที่ 51 นั่นคือ นักเรียนสามารถเขียนตอบคำถามพร้อมอธิบายเหตุผล เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มในกรณีทั่วไปและนักเรียนได้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสี่ของรูปวงกลม

21. จำนวนเต็มบวก บวกกับ จำนวนเต็มบวกจะได้จำนวนเต็ม
 เหตุผล..... เพราะ..... สี่น้ำเงิน + กับสี่น้ำเงิน เท่ากับ สี่น้ำเงิน
 เช่น $7 + 5 = 12$ 7 เป็นจำนวนเต็มบวก 5 ก็เป็นจำนวนเต็มบวก รวมกัน ก็ได้จำนวนเต็มบวก

ภาพที่ 51 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีเดียวกันนับรวมกัน และตอบในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

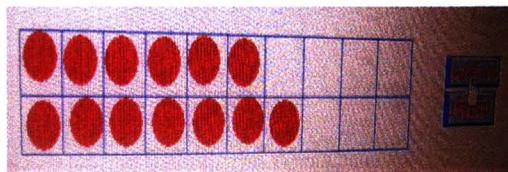
4.1.1.2 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมดูลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งในใบกิจกรรมที่ 1 เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-6) + (-7)$ นักเรียนเริ่มต้นจากการอ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมจากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข -6 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่หนึ่ง และปรากฏเห็นรูปวงกลมสีแดง 6 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 2 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดง 6 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข (-7) ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมสีแดงลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จาก

จำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่มเครื่องหมายบวก ซึ่งนักเรียนสังเกตเห็นวงกลมในช่องสี่เหลี่ยมเหมือนเดิมและหลังจากนั้นนักเรียนก็ที่ป้ายผลลัพธ์ ดังภาพที่ 52 จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมสีแดงที่มองเห็น และเขียนคำตอบของ $(-6) + (-7)$ คือ -13 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดง จึงได้ผลลัพธ์เท่ากับ -13 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบายนักเรียนอธิบายว่า “หลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่ 1 มีวงกลมสีแดง 6 รูปและแถวที่ 2 มีวงกลมสีแดง 7 รูป จึงนับเพิ่มได้ 13 รูปซึ่งสีแดงแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -13 ”

เจน คลิกปุ่มเลขลบหก สีแดงตัวนี้ คลิกปุ่มเลขลบเจ็ด นำไปวางในช่องสี่เหลี่ยม
 อ้อม แล้วยัง
 เจน ยัง คลิกบวก คลิกผลลัพธ์ ได้สิบสาม เขียนร้อยยัง
 เต๋ย เขียนแล้ว



ภาพที่ 52 แสดงการคลิกป้ายผลลัพธ์การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 1 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มลบบวกกับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ทำตามคำสั่งได้ สามารถนำรูปวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยมตามที่กำหนด บอกได้ว่ามีวงกลมสีแทนจำนวนเท่าใด ที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP และเขียนคำตอบลงในใบกิจกรรม ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad อีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบ

กรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจโมเดลทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ไปสู่ความเข้าใจในโมเดลระดับกระบวนการหรือไม่ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “เครื่องหมายเหมือนกันบวกกัน” ดังแสดงในภาพที่ 53 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนได้ให้เหตุผลของการได้มาซึ่งคำตอบ -12 คือ “เพราะเครื่องหมายเหมือนกันบวกกัน เป็นสีแดงทั้งสองจำนวน ก็เลยนับเพิ่ม สีแดงแทนจำนวนลบ เลขตอบลบสิบสอง”

15. $(-5) + (-7) = \dots -12 \dots$

เหตุผล... เพราะว่าเครื่องหมายเหมือนกันบวกกัน

ภาพที่ 53 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ และให้เหตุผลว่า “สีแดงบวกกับสีแดง เท่ากับสีแดง” พร้อมทั้งยกตัวอย่างประกอบ คือ $(-5) + (-2) = -7$ และเขียนอธิบายว่า “-5 เป็นจำนวนเต็มลบ -2 เป็นจำนวนเต็มลบ รวมกันก็ได้จำนวนเต็มลบ” ดังแสดงในภาพที่ 54 นั่นคือ นักเรียนสามารถเขียนตอบคำถามพร้อมอธิบายเหตุผล เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มในกรณีทั่วไปและนักเรียนได้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสีของรูปวงกลม

22. จำนวนเต็มลบ บวกกับ จำนวนเต็มลบจะได้จำนวนเต็มลบ.....

เหตุผล... เพราะ สีเขียว + กับสีเขียว = สีเขียว

เลข -5 + -2 = -7 -5 เป็นจำนวนเต็มลบ -2 ก็เป็นจำนวนเต็มลบ รวมกัน ก็ได้อาหรือหาค่า

หรือหาค่า

ภาพที่ 54 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

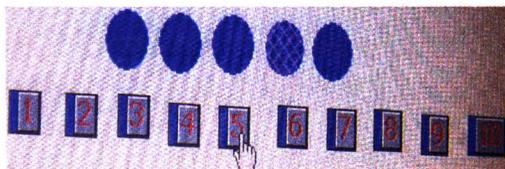
จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีเดียวกันนับรวมกัน และตอบในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

4.1.1.3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ

(1) กรณีค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ

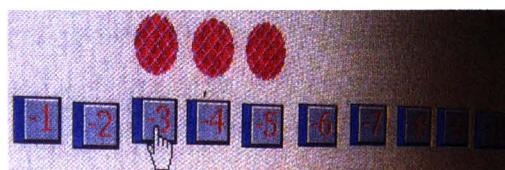
1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(5 + (-3))$) นักเรียนเริ่มต้นจากการอ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 2 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 5 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่หนึ่ง และปรากฏเห็นรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูปบนหน้าจอ GSP ดังภาพที่ 55 จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรม ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูป



ภาพที่ 55 แสดงการคลิกปุ่มหมายเลข 5 ของกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

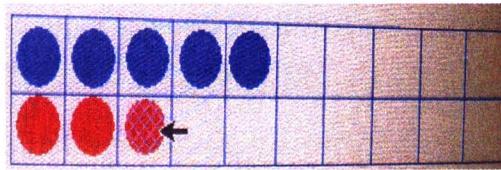
ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข -3 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 3 รูปบนหน้าจอ GSP ดังภาพที่ 56 จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 3 รูป



ภาพที่ 56 แสดงการคลิกปุ่มหมายเลข -3 ของกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

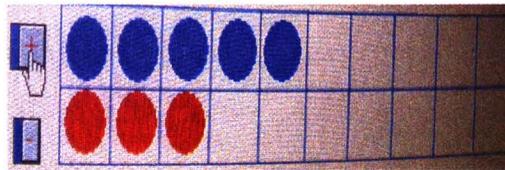
จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูป

วงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง เมื่ออ่านคำสั่งเสร็จ สมาชิกในกลุ่มก็ทำการคลิกเลื่อนรูปวงกลมสีไปวางในช่องสี่เหลี่ยมตามที่กำหนด ดังภาพที่ 57



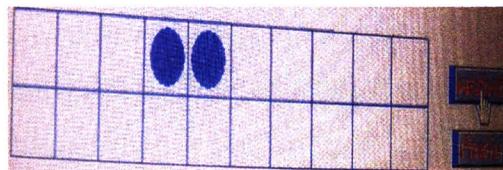
ภาพที่ 57 แสดงการนำวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยมของกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวกดังภาพที่ 58 ปรากฏว่าในหน้าจอยังเหมือนเดิม



ภาพที่ 58 แสดงการคลิกเลือกตัวดำเนินการบวกของกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

ต่อจากนั้นก็คลิกที่ป้ายผลลัพธ์ ดังภาพที่ 59 ซึ่งสังเกตเห็นว่าที่หน้าจอมีรูปวงสีน้ำเงิน 2 รูป



ภาพที่ 59 แสดงการคลิกป้ายผลลัพธ์ของกลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และเขียนคำตอบของ $5 + (-3)$ คือ 2 โดยเหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีน้ำเงิน ไม่มีสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 2 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่ามีวงกลมสีน้ำเงิน 2 รูป ไม่มีสีแดงซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 2

เจน คลิกปุ่มเลขห้าและลบสาม

อ้อม เห็นสีน้ำเงินห้าอัน สีแดงสามอัน

เจน	คลิกบวก คลิกผลลัพธ์
เอ๋อม	เหลือสีน้ำเงิน 2 อัน เขียนยัง
เต๋ย	เขียนแล้ว

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียน ในกิจกรรม เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกบวกกับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสีเหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติระดับการจัดกระทำ

2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad อีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนมติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ไปสู่ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการหรือไม่ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “เครื่องหมายต่างกันจับคู่กันได้คู่ศูนย์” ดังแสดงในภาพที่ 60 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนได้ให้เหตุผลของการได้มาซึ่งคำตอบ 3 คือ “เพราะรูปวงกลมสีน้ำเงินเก้ารูปและรูปวงกลมสีแดงหก รูป จับคู่ศูนย์ได้หกคู่ เลยตอบสาม”

$$8. 9 + (-6) = \dots 3 \dots$$

เหตุผล.....เพราะ รูปวงกลมน้ำเงิน 9 อัน และรูปวงกลมสีแดง 6 อัน จับคู่กันได้ 6 คู่
 แล้วจึง $9 + (-6) = 3$

ภาพที่ 60 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบของนักเรียน
 กลุ่ม (เจน, เอ๋อม, เต๋ย)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวกนักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่ศูนย์และหักล้าง และตอบในกรณีทั่วไปได้นั้นคือ นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

4.1.1.4 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมดูลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-5) + 3$) นักเรียนเริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 2 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข -5 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 5 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 2 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 5 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 3 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 3 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 2 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 3 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมสีแดงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวก และผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $(-5) + 3$ คือ -2 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -2 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่ามีวงกลมสีแดง 2 รูป สีแดงซึ่งแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -2 ดังโปรโตคอล

เจน	คลิกลบห้าและสาม เห็นวงกลมสีแดงห้ารูปสีน้ำเงินสามรูป
อ้อม	คลิกผลลัพธ์
เจน	คลิกผลลัพธ์
เต๋ย	เหลือสีแดงสองรูป ตอบลบสอง
เอ	สีแดง เอ้อ ได้ขบวนสีน้ำเงิน

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่2 เป็นกรณีที่จำนวนการบวก จำนวนเต็มลบบวกกับจำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำ วงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวน วงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนคติใน ระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบ กับจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยให้นักเรียนทำ กิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำกับกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad อีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบ กรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถ พัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ไปสู่ ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการหรือไม่ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “เครื่องหมายต่างกันจับคู่กันได้คู่ศูนย์” ดังแสดงในภาพที่ 61 และเมื่อผู้วิจัย สัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนได้ให้เหตุผลของการได้มาซึ่งคำตอบ -5 คือ “เพราะรูปวงกลมสี แดงแปดรูปและรูปวงกลมสีน้ำเงินสามรูป จับคู่ศูนย์ได้ 3 คู่ เลยตอบลบห้า”

10. $(-8) + 3 = \dots -5 \dots$
 เหตุผล. เพราะ รูปวงกลมสีที่จับคู่ได้ 3 คู่ และ รูปวงกลม
 สีน้ำเงิน 4 รูป สามารถจับคู่ได้คู่ศูนย์ 3 คู่
 ดังนั้น $(-8) + 3 = -5$

ภาพที่ 61 แสดงการทำกิจกรรม การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียน
 กลุ่ม (เจน, เอ็ม, เต้ย)

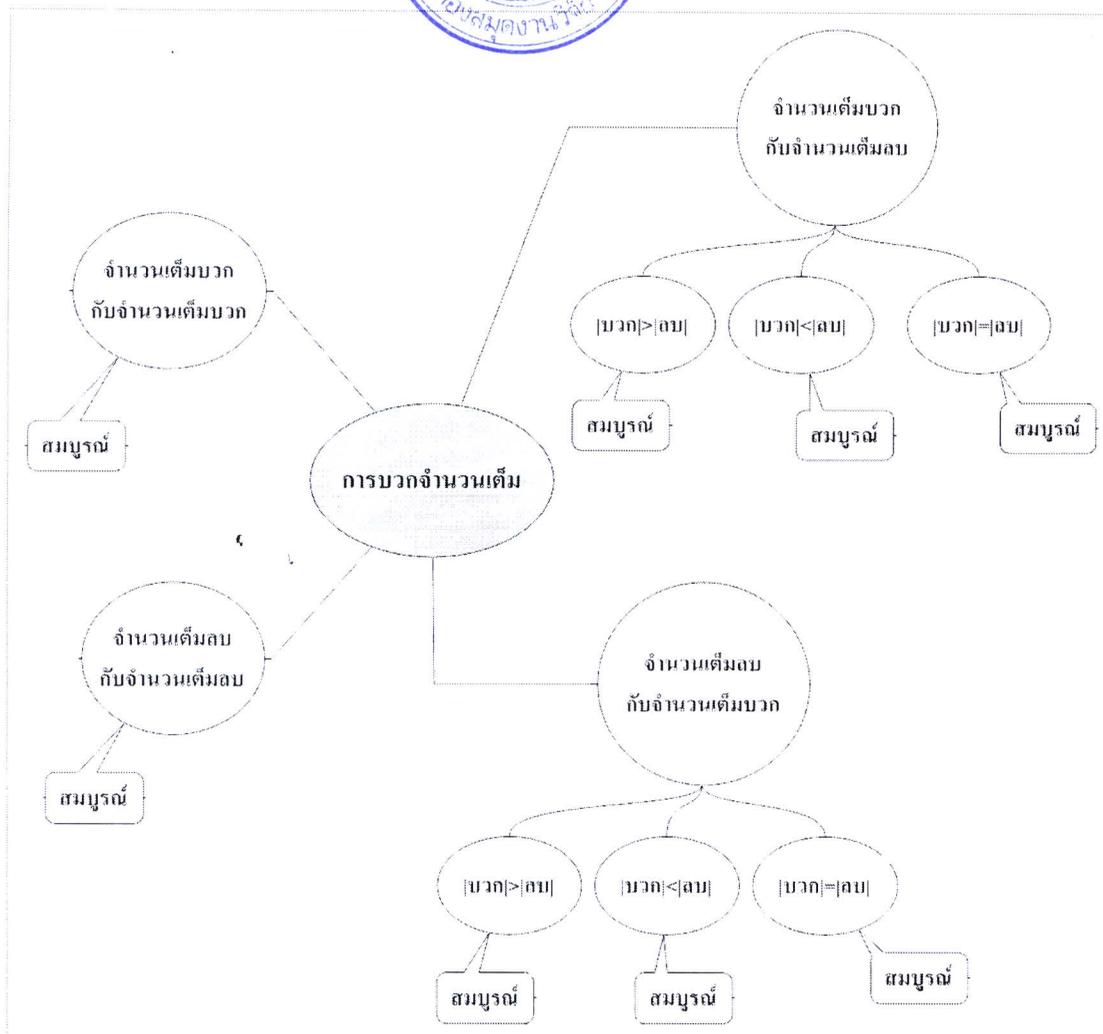
จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบ กับจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวก

จำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบนักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่ศูนย์และหักล้าง และตอบในกรณีทั่วไปได้นั้นคือ นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

4.1.1.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (เจน, อ่อม, เต๋ย)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือโปรแกรม The Geometer's Sketchpad นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อนักเรียนทำการบวกจำนวนไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยังรูปวงกลมสีแดงและสีน้ำเงินที่นักเรียนได้ทำกิจกรรม และนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้นั้นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการเมื่อนักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่เป็น $(-7) + 5 + (-4)$ พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยการบวกทีละคู่ และเมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่รูปวงกลมสี

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 3 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การบวกจำนวนสามจำนวนพบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการบวกจำนวนเต็มดังกล่าว นั้นคือนักเรียนนำมโนคติเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ มาใช้หาผลบวกตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ดังเช่น $(-7) + 5 + (-4)$ นั้นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง ดังภาพที่ 62



ภาพที่ 62 แสดงโครงสร้างของการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม

The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (เจน, อ้อม, เต๋ย)

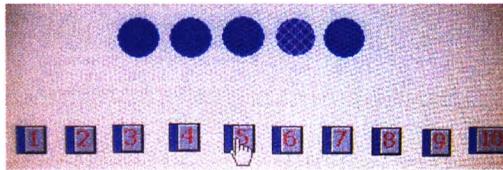
4.1.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

4.1.2.1 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

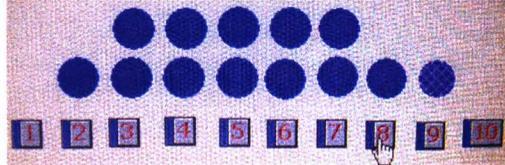
หลังจากนักเรียนกลุ่มที่ 2 ทำความเข้าใจเกี่ยวกับข้อตกลงเบื้องต้นเสร็จแล้ว นักเรียนก็ปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกด้วย

จำนวนเต็มบวก (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $5 + 8$) นักเรียนเริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 1 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข 5 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูปบนหน้าจอ GSP ดังภาพที่ 63 จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 1 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูป



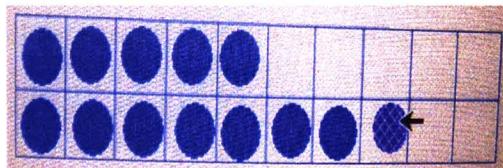
ภาพที่ 63 แสดงการคลิกปุ่มหมายเลข 5 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก
ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 8 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 8 รูปบนหน้าจอ GSP ดังภาพที่ 64 จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 1 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 8 รูป



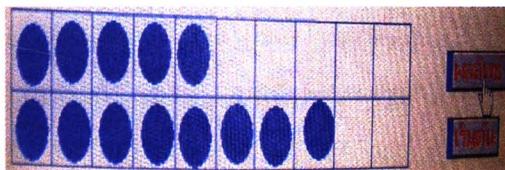
ภาพที่ 64 แสดงการคลิกปุ่มหมายเลข 8 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก
ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง ดังภาพที่ 65



ภาพที่ 65 แสดงการนำวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยม กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับ
จำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวก และผลลัพธ์ ดังภาพที่ 66 จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $5 + 8$ คือ 13 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีน้ำเงินไม่มีสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 13 ดังแสดงในโปรโตคอลการพูดคุย ในขณะที่ทำกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มที่ 2 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่มีวงกลมสีน้ำเงิน 5 รูป และแถวที่ 2 มีวงกลมสีน้ำเงิน 8 รูป ไม่มีสีแดงจึงนับเพิ่มได้ 13 รูปซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 13



ภาพที่ 66 แสดงการคลิกป้ายผลลัพธ์ การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

- | | |
|------|---|
| ป๊อก | หาผลลัพธ์ของห้า บวก แปด |
| ตาล | คลิกเลขห้าปรากฏว่ามีรูปวงกลมสีน้ำเงิน คลิกเลขแปดก็ปรากฏวงกลมสีน้ำเงิน |
| แนน | เอาไปใส่ช่องสี่เหลี่ยม |
| แนน | ต่อไปคลิกเครื่องหมายบวก |
| แนน | คลิกป้ายผลลัพธ์ |
| ตาล | สีเดียวกันนับเพิ่มได้สิบสาม |

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 1 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกบวกกับจำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ทำตามคำสั่งได้ สามารถนำรูปวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยมตามที่กำหนด บอกได้ว่ามีวงกลมสีแทนจำนวนเท่าใด ที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP และเขียนคำตอบลงในใบกิจกรรม ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก โดยจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโปรแกรม

The Geometer's Sketchpad อีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบ กรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถ พัฒนาความเข้าใจในมิติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ไปสู่ ความเข้าใจในมิติระดับกระบวนการหรือไม่ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “9 และ 8 เป็นวงกลม” ดังแสดงในภาพที่ 67 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียน เพิ่มเติม นักเรียนได้ให้เหตุผลของการได้มาซึ่งคำตอบ 17 คือ “มีวงกลมสีน้ำเงินเก้ารูป และวงกลมสี น้ำเงินแปดรูป สีเดียวกันนับเพิ่มก็เลยตอบ สิบแปดสีน้ำเงินมันแทนบวก”

$$1. 9 + 8 = \dots\dots\dots 17 \dots\dots\dots$$

เหตุผล.....เพราะว่า 9 และ 8 เป็นจำนวนเต็มบวก.....

ภาพที่ 67 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ของนักเรียน กลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อ, ตาล)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวน เต็มบวก ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มบวกและให้เหตุผลว่า “จำนวนเต็มบวกสีน้ำเงินแทน พอสี น้ำเงินบวกกับสีน้ำเงินก็จะได้สีน้ำเงิน” ดังแสดงในภาพที่ 68 นั่นคือ นักเรียนสามารถเขียนตอบ คำถามพร้อมอธิบายเหตุผล เกี่ยวการบวกจำนวนเต็มในกรณีทั่วไปและนักเรียนได้เหตุผลเชื่อมโยง ไปยังสีของรูปวงกลม

21. จำนวนเต็มบวก บวกกับ จำนวนเต็มบวกจะได้จำนวนเต็มสีน้ำเงิน.....

เหตุผล.....เพราะว่า สีน้ำเงินเป็นวงกลม + ดังสีน้ำเงิน
ได้สีน้ำเงิน = สีน้ำเงินบวกสีน้ำเงิน
สีน้ำเงินเป็นวงกลม สีน้ำเงินแทนของสีน้ำเงิน + ดัง
สีน้ำเงินคือได้สีน้ำเงิน

ภาพที่ 68 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกใน รูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อ, ตาล)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวกับ การบวกจำนวนเต็มบวก กับจำนวนเต็มบวก และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถเขียนคำตอบ ได้อย่าง ถูกต้อง โดยไม่ได้ คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบ โดยการมอง

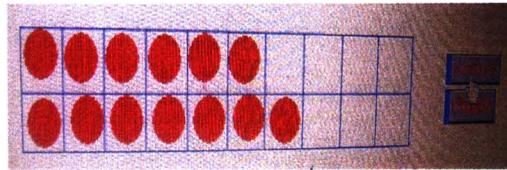
จำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีเดียวกันนับรวมกัน และตอบในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก

4.1.2.2 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งในใบกิจกรรมที่ 1 เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-6) + (-7)$ นักเรียนเริ่มต้นจากการอ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมจากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข -6 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่หนึ่ง และปรากฏเห็นรูปวงกลมสีแดง 6 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่สอง ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดง 6 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข (-7) ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมสีแดงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่มเครื่องหมายบวก ซึ่งนักเรียนสังเกตเห็นวงกลมในช่องสี่เหลี่ยมเหมือนเดิมและหลังจากนั้นนักเรียนก็ป้ายผลลัพธ์ ดังภาพที่ 69 และโปรโตคอลการพูดคุยกันของนักเรียนในขณะที่ทำกิจกรรม จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมสีแดงที่มองเห็น และเขียนคำตอบของ $(-6) + (-7)$ คือ -13 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -13 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่า “หลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่ 1 มีวงกลมสีแดง 6 รูป และแถวที่ 2 มีวงกลมสีแดง 7 รูป จึงนับเพิ่มได้ 13 รูป ซึ่งสีแดงแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -13”

แนน	คลิกเลขลบหกดได้รูปวงกลมสีแดง คลิกเลขลบเจ็ดได้รูปวงกลมสีแดง
ตาล	นำไปวางในช่องสี่เหลี่ยม
แนน	ยัง คลิกบวก คลิกผลลัพธ์
ป๊อก	ได้สิบสาม



ภาพที่ 69 แสดงการคลิกป้ายผลลัพธ์การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่ม (แนน, ป๊อก, ตาล)

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 1 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มลบบวกกับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ทำตามคำสั่งได้ สามารถนำรูปวงกลมไปวางในช่องสี่เหลี่ยมตามที่กำหนด บอกได้ว่ามีวงกลมสีแทนจำนวนเท่าใด ที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP และเขียนคำตอบลงในใบกิจกรรม ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติ เรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ **ระดับการจัดกระทำ**

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการ(Process Conceptual Understanding)

เมื่อนักเรียนได้ทำกิจกรรมที่ 1 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ โดยจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผู้วิจัยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ซึ่งเป็นการหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม โดยไม่ต้องจัดกระทำกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad อีก พร้อมทั้งให้เหตุผลอธิบายที่มาของคำตอบ และให้นักเรียนตอบกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ เพื่อนำมาวิเคราะห์ว่านักเรียนสามารถพัฒนาความเข้าใจมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบไปสู่ความเข้าใจในมโนคติระดับกระบวนการหรือไม่ ซึ่งได้ผลดังนี้

ผลจากการวิเคราะห์จากชิ้นงานและการสัมภาษณ์นักเรียนกลุ่มที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบได้ถูกต้อง พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า “เครื่องหมายเหมือนกันบวกกัน” ดังแสดงในภาพที่ 70 และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียนเพิ่มเติม นักเรียนได้ให้เหตุผลของการได้มาซึ่งคำตอบ -12 คือ “เพราะเครื่องหมายเหมือนกันบวกกัน เป็นสีแดงทั้งสองจำนวน ก็เลยนับเพิ่ม สีแดงแทนจำนวนลบ เลขตอบลบสิบสอง”

$$15. (-5) + (-7) = \dots -12 \dots$$

เหตุผล... เพราะถ้า 6 เครื่องหมายลบเหมือนกัน...

ภาพที่ 70 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ของนักเรียน
กลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

นักเรียนสามารถบอกในรูปทั่วไปได้ว่า การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ ผลลัพธ์ออกมาเป็นจำนวนเต็มลบ และให้เหตุผลว่า “จำนวนเต็มลบ แทนด้วยสีแดง เมื่อแดง บวกกับ แดง ก็จะได้แดง” ดังแสดงในภาพที่ 71 คือ นักเรียนสามารถเขียนตอบคำถามพร้อมอธิบายเหตุผล เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มในกรณีทั่วไปและนักเรียนได้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสีของรูปวงกลม

22. จำนวนเต็มลบ บวกกับ จำนวนเต็มลบจะได้จำนวนเต็ม คน

เหตุผล... เพราะถ้า จำนวนของเครื่องหมายลบ + กันก็จะเป็นลบ...
กฎ = จำนวนของเครื่องหมายลบ
จำนวนเต็มลบ + เครื่องหมายลบสีแดง เมื่อ แดง + กันแดง
ก็จะได้สีแดง

ภาพที่ 71 แสดงการทำกิจกรรมที่ 3 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบใน
รูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม GSP ในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2
(แนน, ป๊อก, ตาล)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีแดงก็นับรวมกัน และตอบในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ ในเรื่องการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ

4.1.2.3 กรณีการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่ เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $5 + (-3)$) นักเรียน เริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 2 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข 5 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่หนึ่ง และปรากฏเห็นรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้น นักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรม ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 5 รูป ในลำดับต่อมา นักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข -3 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 3 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 3 รูป จากนั้น นักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้น คลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวก ปรากฏว่าในหน้าจอยังเหมือนเดิมต่อจากนั้นก็คลิกที่ป้ายผลลัพธ์ ซึ่ง สังเกตเห็นว่าที่หน้าจอมีรูปวงสีน้ำเงิน 2 รูป จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และเขียน คำตอบของ $5 + (-3)$ คือ 2 โดยเหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีน้ำเงินไม่มีสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 2 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ ปรากฏว่า มีวงกลมสีน้ำเงิน 2 รูป ไม่มีสีแดงซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 2

แนน	คลิกปุ่มเลขห้าและลบสาม
ตาล	มีวงกลมสีน้ำเงินห้ารูป มีวงกลมสีแดงสามรูป
แนน	คลิกบวก คลิกผลลัพธ์
ตาล	เหลือวงกลมสีน้ำเงิน 2 รูป
ป๊อ	ตอบสอง

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรม เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกบวก กับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวน ไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้าย ผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนคติในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมโนมิติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการทำกิจกรรมที่ 3 ของนักเรียน ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ และการสัมภาษณ์นักเรียน นักเรียนสามารถเขียนคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยรูปวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีเขียวก็นับรวมกัน และตอบในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับกระบวนการ

4.1.2.4 กรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมโนมิติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

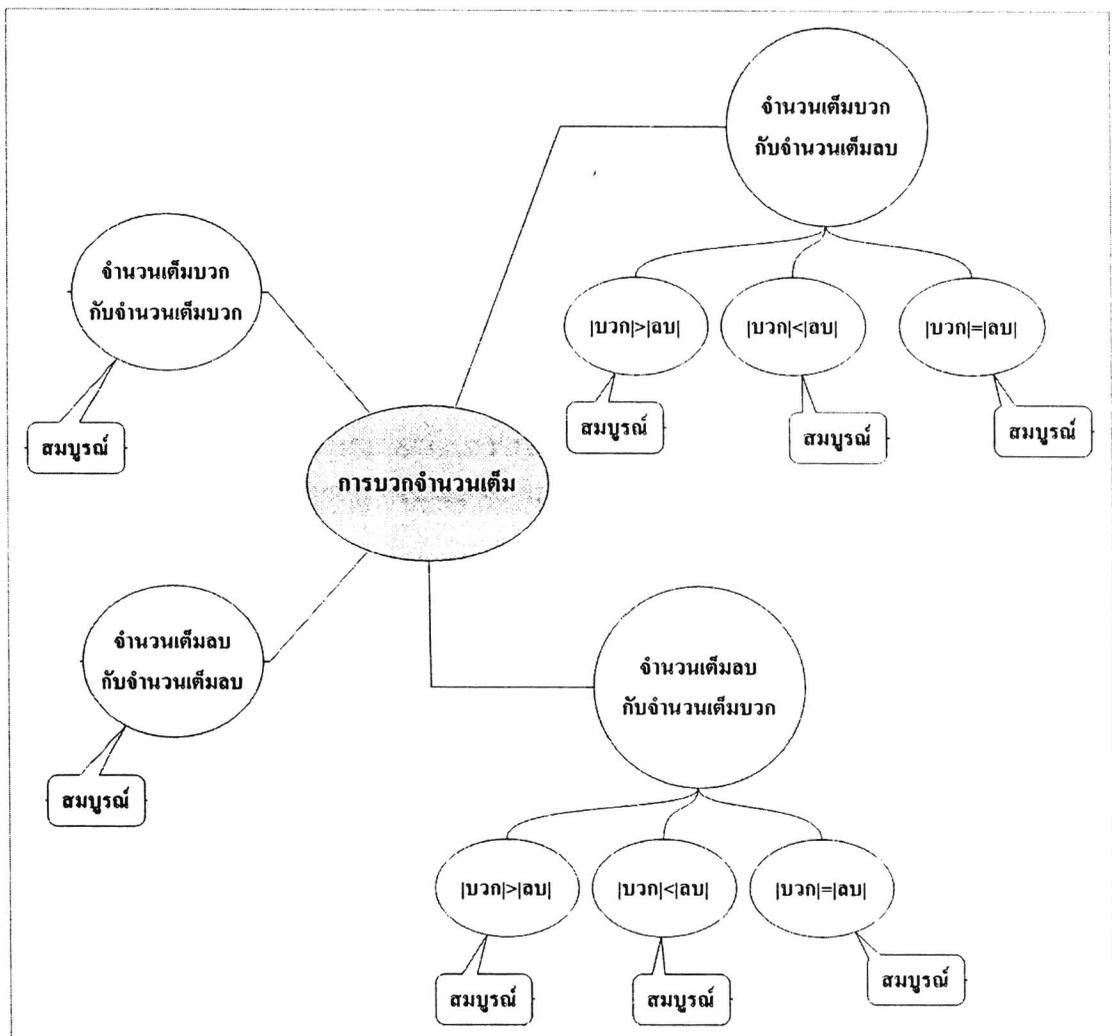
จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 2 ในข้อที่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-5) + 3$) นักเรียนเริ่มต้นจากการอ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 2 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข -5 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 5 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 2 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 5 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 3 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 3 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 2 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 3 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวก และผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $(-5) + 3$ คือ -2 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -2 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่ามีวงกลมสีแดง 2 รูป สีแดงซึ่งแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -2

แนน	คลิกลบห้าและคลิกสาม เห็นวงกลมสีแดงห้ารูป สีน้ำเงินสามรูป
ตาล	เอาไปใส่ช่องสี่เหลี่ยม
ตาล	คลิกผลลัพธ์
ป๊อ	เหลือสีแดงสองรูป ตอบลบสอง

4.1.2.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อ, ตาล)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือโปรแกรม The Geometer's Sketchpad นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อนักเรียนทำการบวกจำนวนไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยังรูปวงกลมสีแดงและสีน้ำเงินที่นักเรียนได้ทำกิจกรรม และนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการเมื่อนักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่เป็น $(-7) + 5 + (-4)$ พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ได้โดยการบวกทีละคู่ และเมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่รูปวงกลมสี

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 3 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การบวกจำนวนสามจำนวนพบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่เกี่ยวข้องกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการบวกจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือนักเรียนนำมโนคติเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ การบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ มาใช้หาผลบวกตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ดังเช่น $(-7) + 5 + (-4)$ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง แต่มีนักเรียนจำนวน 1 คนที่ไม่สามารถเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็ม ที่ใช้ในการผลลัพธ์ เนื่องจากนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติที่ไม่สมบูรณ์ ดังภาพที่ 73 ในเรื่องของการบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบ ทั้งในกรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกมากกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และกรณีที่ค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มบวกน้อยกว่าค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเต็มลบ และการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มลบ นั่นคือนักเรียนยังไม่สามารถพัฒนาระดับความเข้าใจในมโนคติถึงระดับโครงสร้างได้



ภาพที่ 73 แสดง โครงสร้างของการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อ, ตาล)

4.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

4.2.1 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ่อม, เจน, เต๋ย)

4.2.1.1 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 4 ในข้อที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $9 - 4$) นักเรียนเริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 4 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 9 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 9 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 4 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 9 รูป ในลำดับต่อมา นักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 4 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 4 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 4 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 4 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมสีน้ำเงินในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นนักเรียนเลือกคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายลบปรากฏว่าในแถวที่ 2 ของช่องสี่เหลี่ยมเปลี่ยนสีจากวงกลมสีน้ำเงินเป็นวงกลมสีแดง และเมื่อคลิกผลลัพธ์ปรากฏว่ามีแถววงกลมสีน้ำเงินในแถวที่หนึ่ง จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $9 - 4$ คือ 5 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีน้ำเงิน ไม่มีสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 5 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบายนักเรียนอธิบายว่ามีสีน้ำเงิน 5 รูป สีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 5

เจน เรื่องลบตัวหนึ่ คลิกเก้าและก็ลบสี่

อ่อม บ่แม่นลบสี่ สี่สี่อ่า

เจน แม่นยุบ

อ่อม เบิ่งดี ๆ แก่ลบกับสี่เต๊

เจน เออแม่นอิหสิ่ คลิกเก้ามองเห็นวงกลมสีน้ำเงินเก้ารูปและวงกลมสีน้ำเงินสี่รูปเมื่อคลิกสี่

เต๋ย ลากไปใส่ช่องสี่เหลี่ยมคือเก้า คลิกลบเต๊อ

เจน เออรู้แล้ว มันเปลี่ยนสีตัวหนี
 เต๋ย ใส
 เจน หนีเต๊ะ แต่กัมันเป็นสีน้ำเงินตอนนี้เป็นสีแดง
 เต๋ย เออเนาะ
 เจน คลิกผลลัพธ์ เหลือสีน้ำเงินห้ารูป

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่4 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกลบกับจำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมี โนมติในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่4 ในโจทย์ที่คล้ายกัน ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโปรแกรมGSPผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนมติระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมที่ 8 โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้

*2. ๑ - 1 = ๒ เพราะสีน้ำเงินแทนเลข ๑ และ เลข ๒ ผลบวกก็เท่ากับจำนวน
 กว.เหลือแค่ ๑ ก็ ๒ เป็นสีน้ำเงินคือเลข ๑ แล้วก็ ๑-๑=๐ ผู้วิจัย
 ๓ กว. และ เหลือสีน้ำเงิน ๑ รูป ดังนั้น ๑-๑ = ๒*

ภาพที่ 74 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบในรูปทั่วไปของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรมThe Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

ผู้วิจัย เรื่องลบไข่ใหม่
 เจน ค่ะ
 ผู้วิจัย ทำได้ไหม
 เจน พอได้ค่ะ
 ผู้วิจัย แก้ลบเจ็ดได้เท่าไร
 อ้อม สอง

- ผู้วิจัย ทำไมตอบสอง
 เจน เพราะว่าสีน้ำเงินแทนเลขเก้ากับเลขเจ็ด พอคลิกตัวดำเนินการแล้วแถวที่สองก็เป็น
 สีแดง ได้คู่ศูนย์เจ็ดคู่ เหลือสีน้ำเงินสองรูป ก็เลยตอบสองค่ะ
 ผู้วิจัย ทำไมไม่ตอบลบสอง
 อ้อม เพราะสีน้ำเงินแทนจำนวนบวก

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่กันเป็นคู่ศูนย์ตอบคำตอบสีที่เหลือและตอบในกรณีทั่วไป การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการของกรณีการบวกจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มบวก

4.2.1.2 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 5 ในข้อที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $8 - (-3)$) นักเรียนเริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมจากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข 8 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปร่างกลมสีน้ำเงิน 8 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 5 ว่ามีจำนวนรูปร่างกลมสีน้ำเงิน 8 รูป ในลำดับต่อมา นักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข (-3) ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปร่างกลมสีแดงจำนวน 3 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมว่ามีจำนวนรูปร่างกลมสีแดงจำนวน 3 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปร่างกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปร่างกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปร่างกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายลบปรากฏว่าในแถวที่สองเปลี่ยนวงกลมจากสีแดงเป็นสีน้ำเงิน และเมื่อคลิกป้ายผลลัพธ์ นักเรียนนับจำนวนรูปร่างกลมสีน้ำเงินที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $8 - (-3)$ คือ 11 และให้เหตุผลว่า รูปร่างกลมเป็นสีน้ำเงินก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 11 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบายนักเรียนอธิบายว่า “หลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่หนึ่งมีวงกลมสีน้ำเงิน 8 รูป และแถวที่สอง มีวงกลมสีน้ำเงิน 3 รูป จึงนับเพิ่มได้ 11 รูปซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 11”

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 5 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกลบกับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมิติในระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 5 ในโจทย์ที่คล้ายกัน ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโปรแกรม GSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่สมมติระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมที่ 8 โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้

$$5 - 5 \div (-4) = \dots\dots\dots 9 \dots\dots\dots$$

ภาพที่ 75 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มบวกกว่าตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

- | | |
|----------|---|
| ผู้วิจัย | ข้อนี้ได้เท่าไรนะ |
| เต๋ย | เก้าครับ |
| ผู้วิจัย | ทำไมยังงี้ |
| เจน | เพราะมีวงกลมสีน้ำเงินห้าอัน และวงกลมสีแดงสี่อัน คลิกตัวดำเนินการแถวที่สอง เป็นสีน้ำเงิน |
| เจน | สีเดียวกันนับเพิ่มเลยได้เก้า |

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีเดียวกันก็รวมกันและตอบในกรณีทั่วไปการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่านักเรียนมีมโนทัศน์ในระดับกระบวนการของกรณีการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

4.2.1.3 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 6 (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-2) - 6$) นักเรียนเริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 6 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข (-2) ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 2 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 6 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 2 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 6 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 6 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 6 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 6 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมสีแดงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายลบปรากฏว่าในรูปวงกลมในแถวที่สอง เปลี่ยนจากวงกลมสีน้ำเงินเป็นสีแดง และเมื่อคลิกผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $(-2) - 6$ คือ -8 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงไม่มีสีน้ำเงินก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -8 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่า หลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่มีวงกลมสีแดง 2 รูป และแถวที่ 2 มีวงกลมสีแดง 6 รูป ไม่มีสีน้ำเงินจึงนับเพิ่ม ได้ 8 รูปซึ่งสีแดงแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -8

- เจน คลิกลบสองกับลบหก มองเห็นวงกลมสีน้ำเงินหกรูปสีแดงสองรูป
- อ้อม ลาก ไปใส่ช่องสี่เหลี่ยมคือเก้า และคลิกลบ
- อ้อม แถวที่สองเปลี่ยนจากสีน้ำเงินเป็นสีแดง คลิกผลลัพธ์
- เจน นับได้แปดแสดงว่าตอบลบแปด

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 6 เป็นการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1 ในโจทย์ที่คล้ายกัน ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโปรแกรม GSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่โมติระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมที่ 8 โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้

$4(-3) - 3 = 11$ เพราะสี่เหลี่ยมที่ลบออก - 3 แล้ว = -3 พอคิดค่าด้านหนึ่ง
 มาลบเอาออก 2 ก็แล้ว 3 = 6 หรือคิดหรือว่าลบออก แล้ว 0 คือหน้าแทน 41
 อีกหนึ่ง $(-3) - 3 = 11$

ภาพที่ 76 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

ผู้วิจัย	ข้อนี้ตอบเท่าไร
เจน	สิบเอ็ดค่ะ
ผู้วิจัย	จริงเหรอ
เจน	อ้อไม่ใช่
ผู้วิจัย	แล้วตอบเท่าไร
อ้อม	ลบสิบเอ็ดค่ะ
ผู้วิจัย	ในนี้ทำไมเขียนสิบเอ็ดหละ
อ้อม	เขียนผิดค่ะ
ผู้วิจัย	ถ้าตอบสิบเอ็ดคิดยังไง
เจน	ลบแปดแทนด้วยรูปวงกลมสีแดง สามแทนด้วยวงกลมสีน้ำเงิน คลิกตัวดำเนินการแถวที่สองเปลี่ยนเป็นสีแดง คลิกผลลัพธ์ได้วงกลมสีแดงนับรวมกันได้สิบเอ็ดแต่สีแดงเป็นลบ เลยตอบลบสิบเอ็ด

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่กันเป็นคู่ศูนย์ ตอบคำตอบที่ที่เหลือและตอบในกรณีทั่วไป การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่า



นักเรียนมีความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับกระบวนการของกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

4.2.1.4 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 7 (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-7) - (-4)$) นักเรียนเริ่มต้นจากการอ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 7 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข -7 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 7 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูป ในลำดับต่อมา นักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข -4 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 4 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 7 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 4 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหิบบรูปวงกลมสีแดงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวก และผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $(-7) - (-4)$ คือ -3 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -3 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่า มีวงกลมสีแดง 3 รูป สีแดงซึ่งแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -3

เจน	คลิกลบเจ็ดกับลบสี่ มองเห็นวงกลมสีแดงเจ็ดและรูปสี่แดงสี่รูป
เต๋ย	ลากไปใส่ช่องสี่เหลี่ยมคือเก้า และก็คลิกลบ
อ้อม	แถวที่สองเปลี่ยนจากสีแดงเป็นสีน้ำเงินสี่รูป คลิกผลลัพธ์
เจน	เหลือสีแดงอยู่สามรูป
เต๋ย	แสดงว่าตอบลบสาม
เจน	แม่นแล้ว

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 7 เป็นการลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับ

จำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 ในโจทย์ ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโปรแกรม GSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนมิตระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมที่ 8 โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผล พร้อมทั้งสัมภาษณ์ ซึ่งได้ผลดังนี้

$$(-10) - (-6) = -4 \text{ เพราะ สีแดงแทนลบที่ } 10 \text{ และ } -6 \text{ พอคลิกตัว} \\ \text{สีฟ้าจะแทนลบที่ } 6 \text{ ก็ลบ } 2 \text{ ลงไปก็เท่ากับ } 4 \\ \text{ตัวอื่น } (-10) - (-6) = -4$$

ภาพที่ 77 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (อ้อม, เจน, เต๋ย)

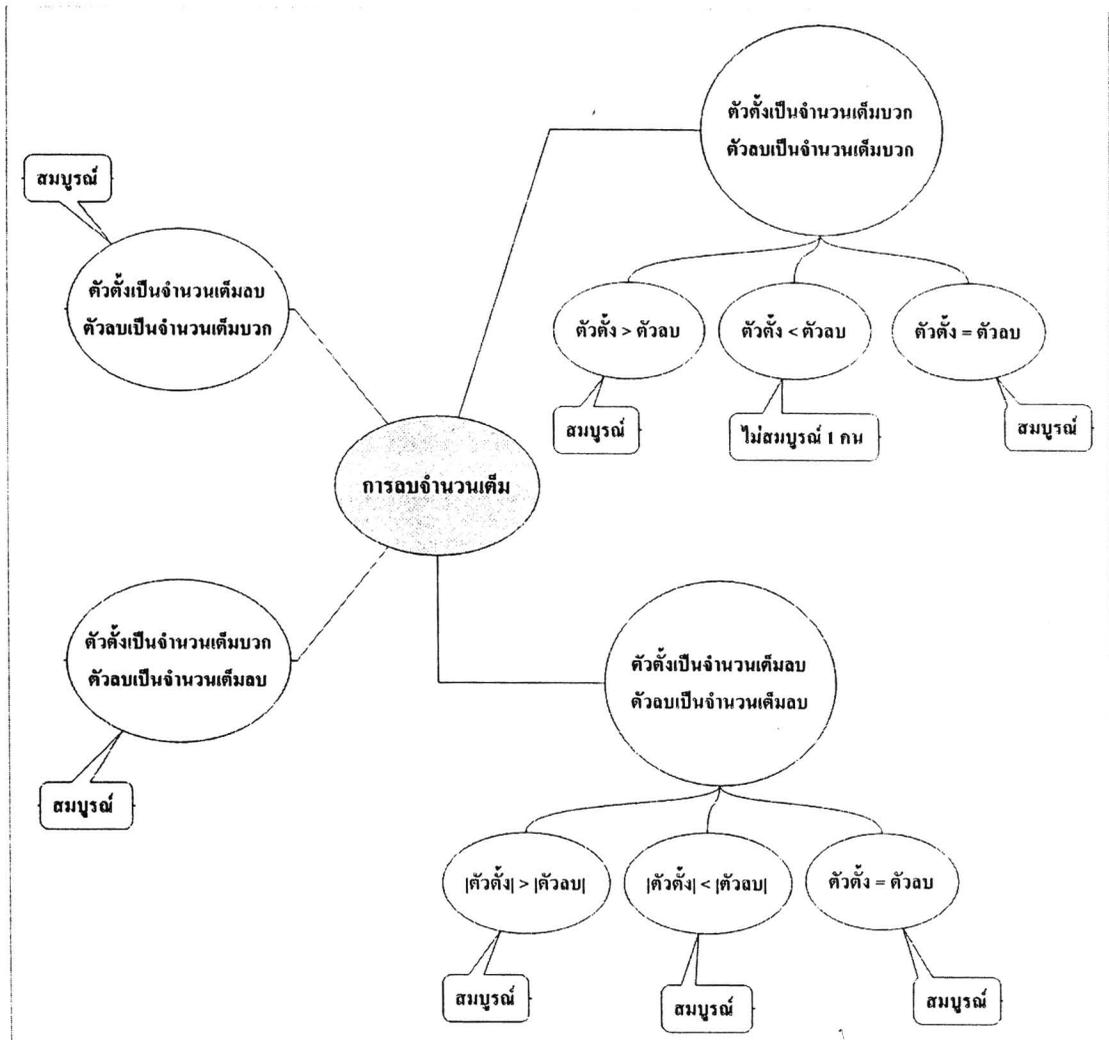
- | | |
|----------|--|
| ผู้วิจัย | ข้อนี้โจทย์ว่ายังไงนะ |
| เต๋ย | ลบลบลบลบ |
| ผู้วิจัย | ว่าไงนะ |
| เจน | ลบลบ ลบกับ ลบหาค่ะ |
| ผู้วิจัย | ฟังดูดีหน่อย แล้วได้เท่าไร |
| เจน | ลบสี่ค่ะ |
| ผู้วิจัย | หรือ ทำยังไง |
| เจน | เพราะสีแดงแทนลบสิบและลบหก พอคลิกตัวดำเนินการเปลี่ยนเป็นสีน้ำเงินได้คู่ ศูนย์หกคู่ เหลือสีแดงสี่คู่ ไม่ใช่สีแดงสี่แดงสี่รูป จึงตอบลบสี่ |

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่กันเป็นคู่ศูนย์ ตอบคำถามที่ที่เหลือ และตอบในกรณีทั่วไป การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่านักเรียนมีมโนมิตในระดับกระบวนการของกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

4.2.1.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในโมเดลเรื่องการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 (เจน, อ้อม, เต๋ย)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือโปรแกรม The Geometer's Sketchpad นักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อนักเรียนทำการลบจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยังรูปวงกลมสีแดงและสีน้ำเงินที่นักเรียนได้ทำกิจกรรม และนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลเรื่องการลบจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการ เมื่อนักเรียนทำกิจกรรมที่ 9 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ได้ถูกต้อง และเมื่อนักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำโมเดลเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการลบจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่รูปวงกลมสี

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 9 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การลบจำนวนสามจำนวน การบวกและการลบจำนวนเต็มที่อยู่ในข้อเดียวกัน พบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงโมเดลที่เกี่ยวข้องกับการลบจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการลบจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือ นักเรียนนำโมเดลเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็ม การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ในกรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ตัวลบน้อยกว่าตัวตั้ง ตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ มาใช้หาผลลัพธ์ ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ยกตัวอย่างเช่น $9 - (-6) - (-5)$ นักเรียนได้หาผลลัพธ์ออกมาได้ถูกต้อง และอธิบายที่มา โดยการจับมาทำทีละคู่ คือ นำ $9 - (-6)$ พร้อมทั้งอธิบายการดำเนินการลบ ว่า 9 เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นรูปวงกลมสีน้ำเงิน 9 และ -6 เป็นจำนวนเต็มลบเป็นรูปวงกลมสีแดง คลิกที่ตัวดำเนินการลบ รูปวงกลมแถวที่ 2 เปลี่ยนจากสีแดงเป็นสีน้ำเงิน จากนั้นเมื่อคลิกที่ผลลัพธ์จะเหลือรูปวงกลมสีน้ำเงิน 15 รูป ได้เป็น 15 เมื่อได้แล้วนำ -5 มาลบ นักเรียนสรุปผลลัพธ์คือ 20 นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลในเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง แต่มีนักเรียนจำนวน 1 คนที่ไม่สามารถทำการลบเมื่อ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกในกรณีที่ ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ คือ $5 - 9 + 7$ นักเรียนได้นำ $5 - 9$ ก่อนและได้เป็น 4 นั่นคือ นักเรียนสลับที่การลบ โดยการนำ 9 เป็นตัวตั้งและนำ 4 มาลบ ซึ่งได้ผลลัพธ์ออกมาผิด จากนั้นนักเรียนนำ $4 + 7$ ซึ่งได้ผลลัพธ์เป็น 11 ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีความเข้าใจในโมเดลเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม เมื่อจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวกกรณีตัวตั้งมีค่าน้อยตัวลบไม่สมบูรณ์ ดังนั้นนักเรียนไม่สามารถพัฒนาความเข้าใจในโมเดลในเรื่องการลบจำนวนเต็มถึงระดับโครงสร้างได้ ดังภาพที่ 78



ภาพที่ 78 แสดงโครงสร้างของการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 1 (เจน, อ้อม, เต๋ย)

4.2.2 ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การลบจำนวนเต็ม ของ นักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

4.2.2.1 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งไปกิจกรรมที่ 4 ในข้อที่ เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $9 - 4$) นักเรียนเริ่มต้น

จากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 4 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข 9 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 9 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 4 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 9 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 4 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 4 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 1 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 4 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหิบบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นนักเรียนเลือกคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายลบปรากฏว่าในแถวที่ 2 ของช่องสี่เหลี่ยมเปลี่ยนสีจากวงกลมสีน้ำเงินเป็นวงกลมสีแดง และเมื่อคลิกผลลัพธ์ปรากฏว่ามีแต่วงกลมสีน้ำเงินในแถวที่หนึ่ง จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $9 - 4$ คือ 5

- แนน คลิกแก้ คลิกสี่
- แนน คลิกแก้มองเห็นวงกลมสีน้ำเงินเก้ารูปและวงกลมสีน้ำเงินสี่รูปเมื่อคลิกสี่
- ป๊อก ลากไปใส่ช่องสี่เหลี่ยม คลิกลบ
- แนน แถวที่สองเปลี่ยนเป็นวงกลมสีแดง
- แนน คลิกผลลัพธ์ เหลือสีน้ำเงินห้ารูป

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 4 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกลบกับจำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

9-7 = 9 ลบด้วย 7 ได้ในความคิดว่า
 1) พอดีคิดที่ตัวคิดใจทบทวนแล้วจึงทำคำตอบ แต่หลังจากที่ทำหาคำตอบ
 ของผลลบแล้วคิดว่าถ้าทำหาคำตอบ 2 เพราะว่า สอนให้

ภาพที่ 79 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 4 ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับ โปรแกรม GSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนคติในระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงวิเคราะห์จากการทำกิจกรรมที่ 8 ของนักเรียน โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้

ผู้วิจัย	แก้ ลบ เจ็ด ได้เท่าไร
แนน	สองคะ
ผู้วิจัย	ทำได้ไหม
แนน	แก้และเจ็ดเป็นจำนวนเต็มบวก
ตาล	พอคลิกตัวดำเนินการแถวข้างล่างก็เปลี่ยนจากสีน้ำเงินเป็นสีแดง
ตาล	จับคู่หักล้างเจ็ดคู่ เหลือสองคะ

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่กันเป็นคู่ศูนย์ ตอบคำตอบสีที่เหลือ และตอบในกรณีทั่วไปการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่านักเรียนมีมโนคติในระดับกระบวนการของกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

4.2.2.2 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนคติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 5 ในข้อที่เกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ (ให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $8 - (-3)$) นักเรียนเริ่มต้นจากการอ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมจากนั้นนักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 8 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงิน 8 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 5 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงิน 8 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข (-3) ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 3 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 3 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหิบบรูปวงกลมสีแดงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายลบปรากฏว่าในแถวที่สองเปลี่ยนวงกลมจากสีแดงเป็นสีน้ำเงิน และเมื่อคลิกป้ายผลลัพธ์ นักเรียน

นับจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ 8 - (-3) คือ 11 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีน้ำเงินก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ 11 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบายนักเรียนอธิบายว่า “หลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่หนึ่งมีวงกลมสีน้ำเงิน 8 รูป และแถวที่สอง มีวงกลมสีน้ำเงิน 3 รูป จึงนับเพิ่มได้ 11 รูปซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 11”

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 5 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มบวกลบกับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 5 ในโจทย์ที่คล้ายกัน ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับ โปรแกรม GSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนทัศน์ระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมเพิ่มเติม โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้

8 - (-4) = ... 9 ... เพราะ 8 เป็นจำนวนลบ 4 เป็นจำนวนลบ ... 12 ...
 เพราะ 8 เป็นจำนวนลบ 4 เป็นจำนวนลบ ... 12 ...

ภาพที่ 80 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบ

เป็นจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad

เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

ผู้วิจัย	ห้า ลบ ลบสี่ ได้เท่าไร
แนน	เก้า
ผู้วิจัย	ทำยังไง
แนน	เพราะห้าเป็นจำนวนเต็มบวกมีสีน้ำเงิน ลบสี่เป็นจำนวนเต็มลบมีสีแดง
ตาล	พอคลิกตัวดำเนินการแถวข้างล่างก็เปลี่ยนเป็นสีน้ำเงิน
ตาล	จับสี่เดียวกันนับเพิ่มได้เก้า

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวน แทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีเดียวกันรวมกันเหลือ และตอบในกรณีทั่วไปการลบกรณีตัวตั้งเป็น จำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจใน มโนมิตรระดับกระบวนการของการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

4.2.2.3 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมิตรระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 6 ให้นักเรียน หาผลลัพธ์ของ $(-2) - 6$ ซึ่งการทำกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มที่ 2 ก็คล้ายกับกลุ่มที่ 1 เริ่มต้นจากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 6 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข (-2) ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่ง ที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 2 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบ กิจกรรมที่ 6 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 2 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข 6 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 6 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียน ตอบลงในใบกิจกรรมที่ 6 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีน้ำเงินจำนวน 6 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่ สอง โดยหยิบรูปวงกลมสีแดงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จาก จำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมาย ลบปรากฏว่าในรูปวงกลมในแถวที่สองเปลี่ยนจากวงกลมสีน้ำเงินเป็นสีแดง และเมื่อคลิกผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ $(-2) - 6$ คือ -8 และให้ เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงไม่มีสีน้ำเงินก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -8 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่าในแถวที่ 1 มีวงกลมสีแดง 2 รูป และแถวที่ 2 มีวงกลมสีแดง 6 รูป ไม่มีสีน้ำเงินจึงนับเพิ่มได้ 8 รูปซึ่งสีแดงแทนจำนวนเต็ม ลบจึงตอบ -8

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 6 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มลบลบกับ จำนวนเต็มบวก นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวน ไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้าย ผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิตรระดับ การจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 6 ในโจทย์ที่คล้ายกัน ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโปรแกรมGSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนมิติระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมเพิ่มเติมโดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้



ภาพที่ 81 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

ผู้วิจัย	ข้อนี้ตอบเท่าไร
แนน	ลบสิบเอ็ดค่ะ
ผู้วิจัย	ทำไม
แนน	ลบแปลเป็นจำนวนเต็มลบ สามเป็นจำนวนเต็มบวก คลิกตัวดำเนินการแถวที่สอง เปลี่ยนเป็นสีแดง คลิกผลลัพธ์ได้วงกลมสีแดงนับรวมกันได้สิบเอ็ดแต่สีแดงเป็นลบ เลขตอบลบสิบเอ็ด

จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำตอบได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าเป็นสีแดงกันจะนับเพิ่มและตอบในกรณีทั่วไปการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนมิติในระดับกระบวนการของการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก

4.2.2.4 กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

(1) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมิติระดับการจัดกระทำ (Action Conceptual Understanding)

จากการที่ผู้วิจัยให้นักเรียนในกลุ่มที่ 2 ปฏิบัติตามคำสั่งใบกิจกรรมที่ 7 โดยให้นักเรียนหาผลลัพธ์ของ $(-7) - (-4)$ ซึ่งการทำกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มที่ 2 ก็จะคล้ายกับกลุ่ม

ที่ 1 จากการ อ่านเงื่อนไขในใบกิจกรรมที่ 7 จากนั้นนักเรียนคลิกที่ ปุ่มหมายเลข -7 ในหน้าจอ GSP ตามคำสั่งที่ 1 และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 7 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 7 รูป ในลำดับต่อมานักเรียนคลิกที่ปุ่มหมายเลข -4 ในหน้าจอ GSP และปรากฏรูปวงกลมสีแดงจำนวน 4 รูปบนหน้าจอ GSP จากนั้นนักเรียนเขียนตอบลงในใบกิจกรรมที่ 7 ว่ามีจำนวนรูปวงกลมสีแดงจำนวน 4 รูป จากนั้นนักเรียนทำตามคำสั่งที่สอง โดยหยิบรูปวงกลมใส่ลงในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ โดยแถวแรก จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนแรก และแถวที่สอง จะเป็นรูปวงกลมที่ได้จากจำนวนที่สอง จากนั้นคลิกที่ปุ่ม เครื่องหมายบวก และผลลัพธ์ จากนั้นนักเรียนนับจำนวนรูปวงกลมที่เหลือ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของ(-7) - (-4) คือ -3 และให้เหตุผลว่า รูปวงกลมเป็นสีแดงก็เลยได้ผลลัพธ์เท่ากับ -3 และเมื่อทำการสัมภาษณ์ โดยการให้นักเรียนอธิบาย นักเรียนอธิบายว่าหลังจากคลิกป้ายผลลัพธ์ปรากฏว่ามีวงกลมสีแดง 3 รูป สีแดงซึ่งแทนจำนวนเต็มลบจึงตอบ -3

จากการทำกิจกรรม ของนักเรียนในกิจกรรมที่ 7 เป็นกรณีที่จำนวนเต็มลบลบกับจำนวนเต็มลบ นักเรียนในกลุ่มสามารถคลิกเมาส์ตามคำสั่งได้ สามารถนำวงกลมสีที่แทนจำนวนไปวางในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนดให้ และบอกผลลัพธ์ที่ได้จากนับจำนวนวงกลมหลังคลิกป้ายผลลัพธ์ในหน้าจอ GSP ซึ่งจากที่กล่าวมานี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับการจัดกระทำ

(2) ผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนทัศน์ระดับกระบวนการ (Process Conceptual Understanding)

จากการที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 7 ซึ่งอาศัยการจัดกระทำกับโปรแกรม GSP ผู้วิจัยต้องการทราบว่านักเรียนสามารถพัฒนาไปสู่มโนทัศน์ระดับกระบวนการหรือไม่ ผู้วิจัยจึงได้ให้นักเรียนในกลุ่มนี้ทำใบกิจกรรมเพิ่มเติม โดยให้นักเรียนเขียนตอบพร้อมอธิบายเหตุผลซึ่งได้ผลดังนี้

$(-3) - (-6) = 3$ เพราะ $-3, -6$ เป็นจำนวนเต็มลบ
 ลบลบก็บวก $3 - 6$ คือ 3 ลบ 6 ได้ 3 เพราะ 3 ลบ 6 ไม่พอให้ลบ 3 จึง
 จึงลบ 3 ลบ 3 ก็ตอบ 3

ภาพที่ 82 แสดงการทำกิจกรรมที่ 8 การลบจำนวนเต็มกรณีตัวตั้งมีเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อก, ตาล)

ผู้วิจัย	ข้อนี้ตอบเท่าไร
แนน	สามค่ะ
ผู้วิจัย	ทำยังไง
แนน	เพราะลบสามกับลบหกเป็นจำนวนเต็มลบ
ताल	พอดคิดตัวดำเนินการลบหกที่เคยเป็นสีแดงเปลี่ยนเป็นสีน้ำเงิน จึงจับคู่หักล้างกัน
ताल	ก็เลยตอบสาม

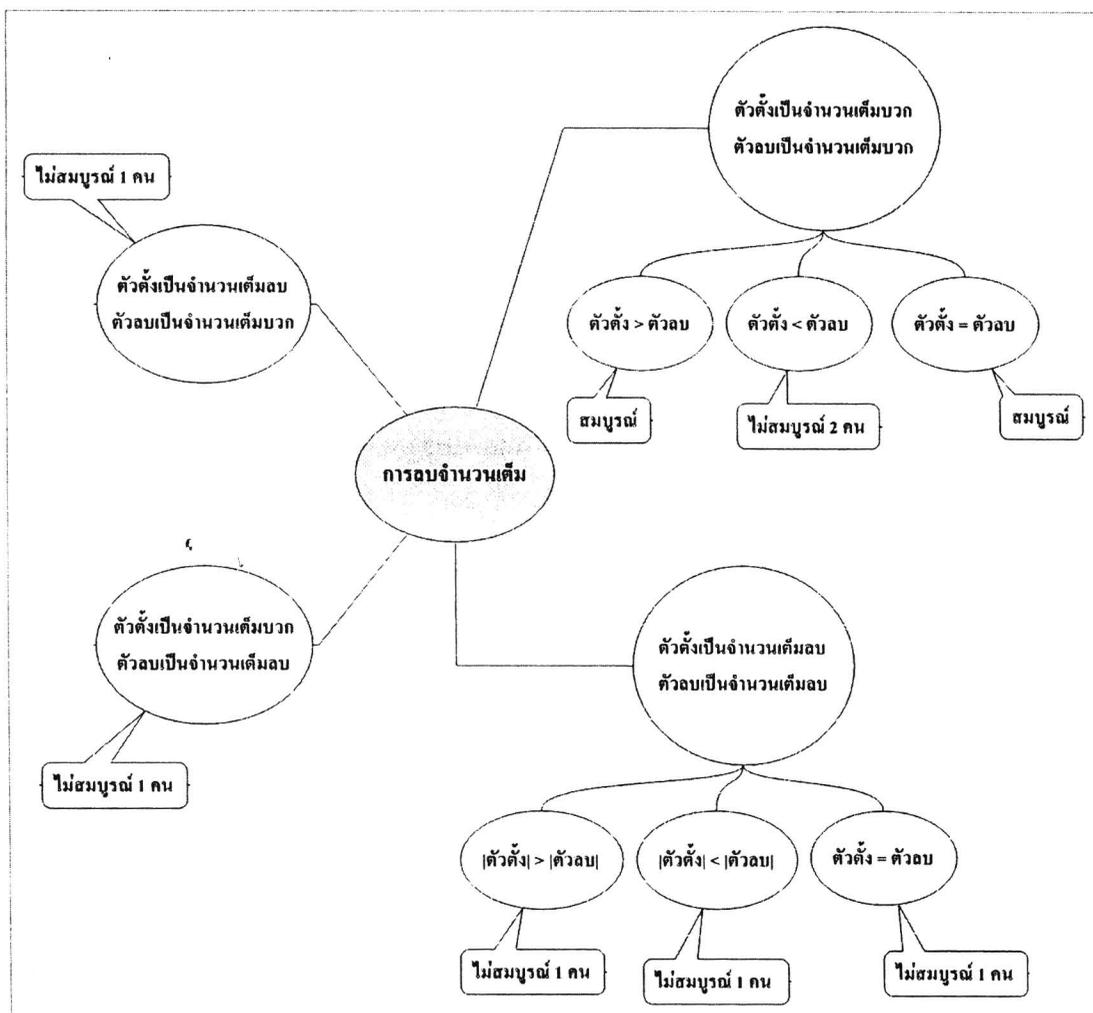
จากข้อมูลข้างต้นทำให้ทราบว่านักเรียนสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง โดยไม่ได้คลิกเมาส์หรือจัดกระทำอีก และอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบ โดยการมองจำนวนแทนด้วยวงกลมสี ซึ่งถ้าต่างสีกันจะจับคู่หักล้างกัน ตอบคำตอบจากสีที่เหลือและตอบในกรณีทั่วไป การลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบได้ จากเหตุผลที่กล่าวมาแสดง นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติระดับกระบวนการของการลบกรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ

4.2.2.5 สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในมโนมติเรื่องการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ 2 (แนน, ป๊อ, ทาล)

จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมนั้นคือโปรแกรม The Geometer's Sketchpad นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับจัดกระทำ จากนั้นเมื่อให้นักเรียนทำการลบจำนวนเต็มโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก นักเรียนสามารถหาคำตอบได้ถูกต้องพร้อมให้เหตุผลอ้างอิงไปยังรูปวงกลมสีแดงและสีน้ำเงินที่นักเรียนได้ทำกิจกรรม และนักเรียนสามารถตอบผลลัพธ์ในกรณีทั่วไปได้ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติเรื่องการลบจำนวนเต็มอยู่ในระดับกระบวนการ เมื่อให้นักเรียนทำกิจกรรมที่ 9 พบว่านักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ได้ถูกต้อง และเมื่อให้นักเรียนทำแบบทดสอบเป็นรายบุคคล นักเรียนสามารถนำมโนมติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มไปใช้เพื่อหาคำตอบของการลบจำนวนเต็มในแต่ละข้อได้ พร้อมทั้งแสดงเหตุผลอ้างอิงไปที่รูปวงกลมสี

สรุปผลการวิเคราะห์ความเข้าใจในระดับโครงสร้าง จากผลการวิเคราะห์การทำกิจกรรมที่ 9 เกี่ยวกับข้อที่ให้นักเรียนหาผลลัพธ์การลบจำนวนสามจำนวน การบวกและการลบจำนวนเต็มที่อยู่ในข้อเดียวกัน พบว่านักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนมติที่เกี่ยวข้องกับการลบจำนวนเต็มในทุกกรณี มาใช้ในการดำเนินการลบจำนวนเต็มดังกล่าว นั่นคือ นักเรียนนำมโนมติเกี่ยวกับจำนวน การบวกจำนวนเต็ม การลบจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มบวก ในกรณีตัวตั้งมากกว่าตัวลบ ตัวลบน้อยกว่าตัวตั้ง ตัวตั้งเท่ากับตัวลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวน

เต็มลบ มาใช้หาผลลัพธ์ ตามที่โจทย์กำหนดให้ได้ ยกตัวอย่างเช่น $9 - (-6) - (-5)$ นักเรียนได้หาผลลัพธ์ออกมาได้ถูกต้อง และอธิบายที่มา โดยการจับมาทำทีละคู่ คือ นำ $9 - (-6)$ พร้อมทั้งอธิบายการดำเนินการลบ ว่า 9 เป็นจำนวนเต็มบวก เป็นรูปวงกลมสีน้ำเงิน 9 และ -6 เป็นจำนวนเต็มลบเป็นรูปวงกลมสีแดง คลิกที่ตัวดำเนินการลบ รูปวงกลมแถวที่ 2 เปลี่ยนจากสีแดงเป็นสีน้ำเงิน จากนั้นเมื่อคลิกที่ผลลัพธ์จะเหลือรูปวงกลมสีน้ำเงิน 15 รูป ได้เป็น 15 เมื่อได้แล้วนำ -5 มาลบ นักเรียนสรุปผลลัพธ์คือ 20 นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการลบจำนวนเต็มในระดับโครงสร้าง แต่มีนักเรียนจำนวน 1 คนที่ไม่สามารถทำการลบได้ในทุกกรณี เช่น ในกรณีที่ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกในกรณีที่ ตัวตั้งน้อยกว่าตัวลบ คือ $5 - 9 + 7$ นักเรียนได้นำ $5 - 9$ ก่อนและได้เป็น 4 นั่นคือ นักเรียนสลับที่การลบ โดยการนำ 9 เป็นตัวตั้งและนำ 4 มาลบ ซึ่งได้ผลลัพธ์ออกมาผิด ในกรณีที่ ตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ เช่น $9 - (-6) - (-5)$ นักเรียนได้หาผลลัพธ์โดยการนำเอา $9 - (-6)$ ได้ 15 แต่นักเรียนสลับที่เป็น $(-5) - 15$ และได้ผลลัพธ์เป็น -20 ซึ่งเป็นคำตอบที่ผิด แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มไม่สมบูรณ์ ดังนั้นนักเรียนไม่สามารถพัฒนาความเข้าใจในมโนคติในเรื่องการลบจำนวนเต็มถึงระดับ โครงสร้าง ได้ ดังภาพที่ 83



ภาพที่ 83 แสดงโครงสร้างของการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม

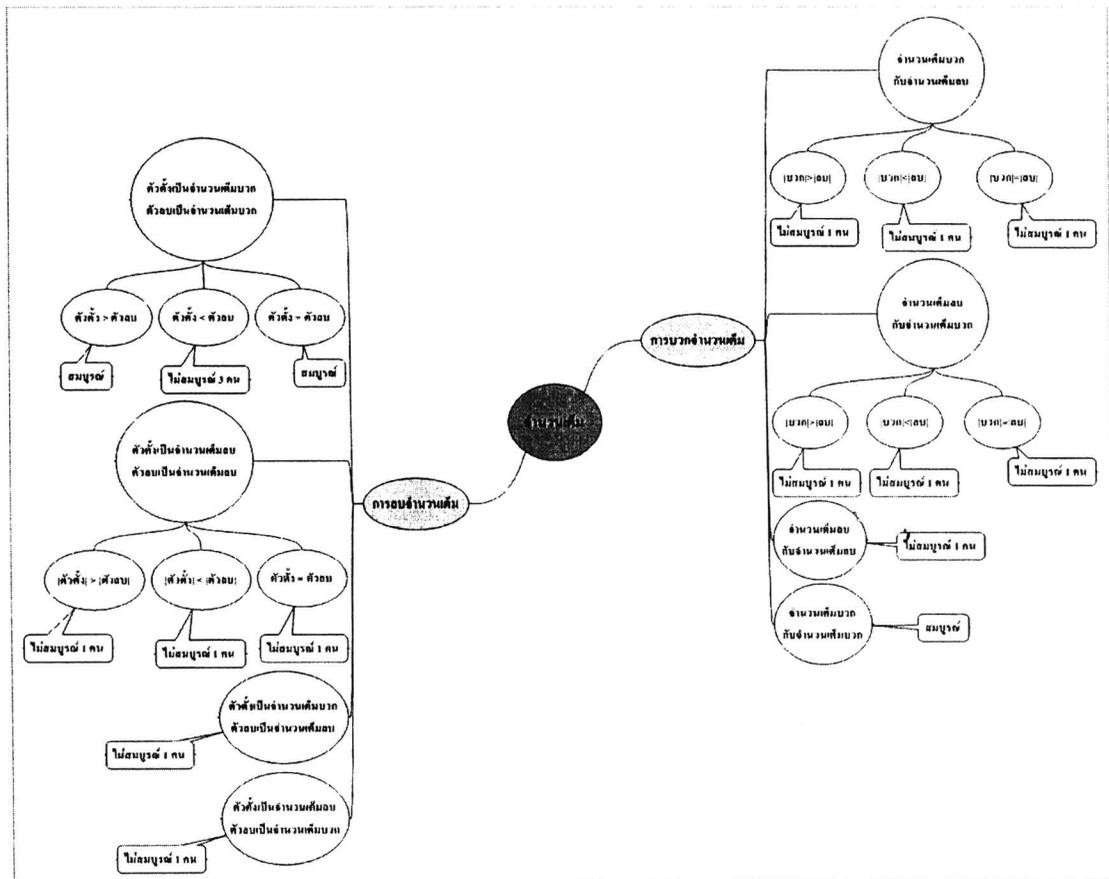
The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ กลุ่มที่ 2

(แนน, ป๊อก, ตาล)

4.3 สรุปผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็ม ของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

จากกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ นักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม มีความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่อง การบวกและการลบจำนวนเต็มระดับการจัดกระทำคือ นักเรียนสามารถปฏิบัติตามคำสั่ง คือคลิกเลือกจำนวน นำรูปวงกลมมาใส่ในช่องได้ถูกต้อง และคลิกที่ตัวดำเนินการและผลลัพธ์แล้วสังเกตเห็นจำนวนและสีของรูปวงกลมที่เหลืออยู่ และหาคำตอบของการบวกและการลบจำนวนเต็มได้ เมื่อนักเรียนมีความเข้าใจในระดับการจัดกระทำแล้ว นักเรียนได้

พัฒนาความเข้าใจในมโนคติไปสู่ระดับกระบวนการ นั่นคือ นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็มได้และมองเห็นรูปทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มในแต่ละกรณีได้ และนักเรียนได้พัฒนาความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มไปสู่ระดับโครงสร้างได้ นั่นคือ นักเรียนสามารถเชื่อมโยงมโนคติที่มีอยู่เกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็ม ในการหาผลลัพธ์การบวกจำนวนเต็ม ได้ถูกต้องพร้อมทั้งสามารถอธิบายที่มาของคำตอบได้อย่างชัดเจน แต่มีนักเรียนในกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้จำนวน 3 คนไม่สามารถพัฒนาไปสู่ระดับโครงสร้างได้ เนื่องจากนักเรียนมีมโนคติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม ในกรณีที่ การลบจำนวนเต็มบวกด้วยจำนวนเต็มลบ การลบจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบ การลบจำนวนเต็มลบด้วยจำนวนเต็มลบไม่สมบูรณ์ ดังสรุปได้ตามภาพที่ 84



ภาพที่ 84 แสดง โครงสร้างของการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

5. การเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

จากการทำกิจกรรมเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ เพื่อเป็นการเปรียบเทียบให้เห็นพฤติกรรมของนักเรียนที่มีความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ ในระดับการจัดกระทำ ระดับกระบวนการ และระดับโครงสร้าง ของทั้ง 2 กลุ่ม ดังแสดงได้ในตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 3 ตารางสรุปผลการเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

ระดับความเข้าใจ ในมโนคติทาง คณิตศาสตร์	พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	
	กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้	กลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
ระดับการจัดกระทำ	<p>นักเรียนหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม สามารถปฏิบัติตามคำสั่งคือ ต่อ โบกี้รถ ไฟเป็น 2 ขบวนตามข้อกำหนดนั่นคือ ถ้าเป็นจำนวนเต็มบวกต่อ โบกี้เป็นขบวนสีน้ำเงิน ถ้าเป็นจำนวนเต็มลบต่อ โบกี้เป็นขบวนสีแดงและมีจำนวน โบกี้เท่ากับตัวเลข เมื่อต่อได้ทั้ง 2 ขบวน นักเรียนนำทั้ง 2 ขบวนมากระทำกัน ถ้าเป็นขบวนที่มีสีเหมือนกันจะนำมาต่อกัน แต่ถ้าเป็นขบวนที่มีสีต่างสีกันจะวิ่งสวนทางกันจะชนกันและจับคู่ตุ๊กตาร่างไปทีละคู่และนักเรียน</p>	<p>นักเรียนหาผลลัพธ์ของการบวกจำนวนเต็ม สามารถปฏิบัติตามคำสั่งคือ คลิกเมาส์ ที่ปุ่มหมายเลขที่กำหนด ถ้าคลิกจำนวนเต็มบวกจะได้รูปวงกลมสีน้ำเงิน และถ้าคลิกจำนวนเต็มลบจะได้รูปวงกลมสีแดง สามารถนำรูปวงกลมไปใส่ในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนด คลิกตัวดำเนินการบวก และคลิกป้ายผลลัพธ์ ถ้าสีของรูปวงกลมของจำนวนทั้งสองเหมือนกันจะนับเพิ่มแต่ถ้าสีต่างกันจะจับคู่ เป็นคู่ศูนย์หักล้างกันและสามารถสรุป</p>

ตารางที่ 3 ตารางสรุปผลการเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ (ต่อ)

ระดับความเข้าใจ ในมโนคติทาง คณิตศาสตร์	พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	
	กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้	กลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
	สามารถสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากจำนวน โบกัรด์ไฟที่เหลือและจะเป็นจำนวนเต็มบวกหรือเต็มลบตามสีของโบกัรด์ไฟ	ผลลัพธ์ที่ได้จากจำนวนรูปวงกลมที่เหลือจะเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบตามสีของรูปวงกลม
ระดับกระบวนการ	นักเรียนสามารถหาคำตอบการบวกจำนวนเต็มได้ถูกต้องพร้อมทั้งให้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสีและทิศทางของขบวนการไฟนั่นคือถ้าเป็นจำนวนเต็มบวกแทนด้วยโบกีสีน้ำเงินและถ้าเป็นจำนวนเต็มลบแทนด้วย โบกีสีแดง ทั้งสองขบวนการวิ่งไปคนทาง ถ้าสีเดียวกันจะวิ่งไปทางเดียวกันจะนำมาต่อกัน แต่ถ้าสีต่างกันวิ่งสวนทางกันมาชนกันตกลงไปที่ละคู่ได้ผลลัพธ์คือจำนวน โบกัรด์ไฟขบวนการที่เหลือและนักเรียนสามารถบอกกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มได้ ยกตัวอย่างและอธิบายเหตุผลอ้างอิงไปยังรถไฟ	นักเรียนสามารถหาคำตอบการบวกจำนวนเต็มได้ถูกต้องพร้อมทั้งให้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสีของรูปวงกลมที่นักเรียนได้ปฏิบัติในโปรแกรมGSPพร้อมทั้งบอกกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็ม ยกตัวอย่าง และอธิบายเหตุผลอ้างอิงไปยังรูปวงกลมสีแดงและสีน้ำเงิน

ตารางที่ 3 . ตารางสรุปผลการเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ (ต่อ)

ระดับความเข้าใจ ในมโนคติทาง คณิตศาสตร์	พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	
	กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้	กลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
ระดับโครงสร้าง	นักเรียนเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี เช่นหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มได้ถูกต้องและมีนักเรียนที่มีมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้างจำนวน 6 คน	นักเรียนเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี เพื่อหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มได้ถูกต้อง และมีนักเรียนที่มีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้างจำนวน 5 คน และที่ไม่เกิดความเข้าใจในระดับโครงสร้างจำนวน 1 คน

ตารางที่ 4 ตารางสรุปผลการเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและ โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้

ระดับความเข้าใจ ในมโนคติทาง คณิตศาสตร์	พฤติกรรมกรเรียนรู้ของนักเรียน	
	กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้	กลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
ระดับการจัดกระทำ	<p>นักเรียนหาผลลัพธ์ของการลบจำนวนเต็ม สามารถปฏิบัติตามคำสั่งคือ ต่อ โบกี้รด ไฟเป็น 2 ขบวนการตามข้อกำหนดนั้นคือ ถ้าเป็นจำนวนเต็มบวกต่อ โบกี้เป็น ขบวนการสีน้ำเงิน ถ้าเป็นจำนวนเต็มลบต่อ โบกี้เป็น ขบวนการสีแดงและมีจำนวน โบกี้เท่ากับตัวเลข เมื่อต่อได้ทั้ง 2 ขบวนการ นักเรียนนำทั้ง 2 ขบวนการมากระทำกัน ถ้าเป็นขบวนการที่มีสีเหมือนกันจะนำมาต่อกัน แต่ถ้าเป็นขบวนการที่มีสีต่างสีกันจะวิ่งสวนทางกันจะชนกันและจับคู่ตกลงไปที่ตะกั่วและนักเรียนสามารถสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากจำนวน โบกี้รดไฟที่เหลือและจะเป็นจำนวนเต็มบวกหรือเต็มลบตามสีของ โบกี้รดไฟ</p>	<p>นักเรียนหาผลลัพธ์ของการลบจำนวนเต็ม สามารถปฏิบัติตามคำสั่งคือ คลิกเมาส์ ที่ปุ่มหมายเลขที่กำหนด ถ้าคลิกจำนวนเต็มบวกจะได้รูปวงกลมสีน้ำเงิน และถ้าคลิกจำนวนเต็มลบจะได้รูปวงกลมสีแดงสามารถนำรูปวงกลมไปใส่ในช่องสี่เหลี่ยมที่กำหนด คลิกตัวดำเนินการลบจะสังเกตเห็นสีของรูปวงกลมของตัวลบเปลี่ยนเป็นตรงกันข้าม และคลิกป้ายผลลัพธ์ ถ้าสีของรูปวงกลมของจำนวนทั้งสองเหมือนกันจะนับเพิ่มแต่ถ้าสีต่างกันจะจับคู่ เป็นคู่ศูนย์หักล้างกันและสามารถสรุปผลลัพธ์ที่ได้จากจำนวนรูปวงกลมที่เหลือจะเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบตามสีของรูปวงกลม</p>

ตารางที่ 4 ตารางสรุปผลการเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติเรื่องการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรมThe Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ (ต่อ)

ระดับความเข้าใจ ในมโนคติทาง คณิตศาสตร์	พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	
	กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้	กลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้
ระดับกระบวนการ	นักเรียนสามารถหาคำตอบการลบจำนวนเต็มได้ถูกต้องพร้อมทั้งให้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสี่และทิศทางของขบวนการไฟฟ้า นั่นคือถ้าเป็นจำนวนเต็มบวกแทนด้วยโบกี้สีน้ำเงินและถ้าเป็นจำนวนเต็มลบแทนด้วยโบกี้สีแดง ทั้งสองขบวนวิ่งไปคนทาง ถ้าสี่เดียวกันจะวิ่งไปทางเดียวกันจะนำมาต่อกัน แต่ถ้าสี่ต่างกันวิ่งสวนทางกันมาชนกันตกลงไปที่ละคู่ได้ผลลัพธ์คือจำนวนโบกี้รถไฟขบวนที่เหลือ และนักเรียนสามารถบอกกรณีทั่วไปของการบวกจำนวนเต็มได้ ยกตัวอย่างและอธิบายเหตุผลอ้างอิงไปยังรถไฟ	นักเรียนสามารถหาคำตอบของการลบจำนวนเต็มได้ถูกต้องพร้อมทั้งให้เหตุผลเชื่อมโยงไปยังสี่ของรูปวงกลมที่นักเรียนได้ปฏิบัติในโปรแกรมGSPพร้อมทั้งบอกกรณีทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม ยกตัวอย่าง และอธิบายเหตุผลอ้างอิงไปยังรูปวงกลมสีแดงและสีน้ำเงิน
ระดับโครงสร้าง	นักเรียนเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มในทุกกรณี เช่นหาคำตอบของการบวกจำนวนเต็มได้ถูกต้องและมีนักเรียนที่มีมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้างจำนวน 4 คน ที่ไม่เกิดความเข้าใจในระดับโครงสร้าง 2 คน	นักเรียนเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มในทุกกรณี เพื่อหาคำตอบของการลบจำนวนเต็มได้ถูกต้อง และมีนักเรียนที่มีความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกจำนวนเต็มในระดับโครงสร้างจำนวน 3 คน และที่ไม่เกิดความเข้าใจในระดับโครงสร้างจำนวน 3 คน

จากตารางสรุปผลการเปรียบเทียบความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ สามารถบอกข้อเหมือนและข้อแตกต่างได้ดังนี้

กลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงจะมีการจัดกระทำกับอุปกรณ์ที่ใช้แทนโบกี้รถไฟจริง ซึ่งมีการกำหนดให้โบกี้รถไฟสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวก โบกี้รถไฟสีแดงแทนจำนวนเต็มลบ ส่วนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะจัดกระทำกับโปรแกรมผ่านการคลิกเมาส์โดยกำหนดรูปร่างกลมสีน้ำเงินและสีแดงแทนจำนวนเต็มบวกและจำนวนเต็มลบตามลำดับ

ในการหาผลลัพธ์ของการบวกหรือการลบจำนวนเต็มโดยใช้สถานการณ์จริง นักเรียนจะต้องมีการต่อหรือจับคู่หักล้างของโบกี้รถไฟ คือถักรถไฟมีสีเหมือนกันจะไปในทิศทางเดียวกัน รถไฟจะต่อกัน และผลลัพธ์ที่ได้คือจำนวนโบกี้รถไฟโดยที่จะเป็นจำนวนเต็มบวกหรือเต็มลบให้ดูที่สีตามเงื่อนไขที่กำหนดในตอนแรก โดยนักเรียนจะต้องเป็นคนนับและเป็นคนต่อขบวนหรือชนแล้วจับคู่หักล้างด้วยตัวเอง ส่วนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ นักเรียนจะต้องคลิกที่ป้ายผลลัพธ์แล้วจะทำให้รูปร่างกลมที่มีสีต่างกันจับคู่กันแล้วหายไป แต่ถ้ามีสีเดียวกันจะเป็นการนับจำนวนรูปร่างกลมที่เหลือ คือผลลัพธ์ ซึ่งจะเป็นจำนวนเต็มบวกหรือจำนวนเต็มลบให้พิจารณาที่สีของรูปร่างกลมที่เหลือ

ความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ในระดับกระบวนการ สำหรับกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงจะอธิบายเหตุผลของการได้คำตอบโดยนึกภาพการแทนจำนวนด้วยขบวนรถไฟสีน้ำเงินและสีแดง ส่วนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะอธิบายเหตุผลของการคำตอบโดยนึกภาพการแทนจำนวนด้วยรูปร่างกลมสีน้ำเงินและสีแดง แต่ทั้งกลุ่มก็สามารถสรุปคำตอบของการบวกและการลบจำนวนเต็มในกรณีทั่วไปได้เช่นกัน

ความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ในระดับโครงสร้าง นักเรียนทั้งสองกลุ่มก็สามารถเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวนเต็มในทุกกรณี เพื่อหาคำตอบของการลบจำนวนเต็มได้อย่างถูกต้องได้เช่นกัน ถึงแม้ว่าจะมีนักเรียนบางคนในแต่ละกลุ่มจะไม่สามารถพัฒนาความเข้าใจในมโนคติเรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มถึงระดับโครงสร้างได้

6. อภิปรายผล

การทำวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเต็มโดยใช้สถานการณ์จริงและใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สำหรับนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ผู้วิจัยได้ทำการแบ่งนักเรียนออกเป็น 4 กลุ่ม ๆ ละ 3 คน กลุ่มที่ 1 และกลุ่มที่ 2 ศึกษาโดยใช้สถานการณ์จริง กลุ่มที่ 3 และกลุ่มที่ 4 ศึกษาโดยใช้โปรแกรม GSP ซึ่ง



ในการวิเคราะห์ห้โมเดลทางทฤษฎีคณิตศาสตร์ในครั้งนี้ผู้วิจัยใช้กรอบทฤษฎี Action – Process – Structure (APS) ที่พัฒนาโดย Heingraj (2006) เริ่มต้นด้วยผู้วิจัยให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำความเข้าใจในข้อตกลงก่อนทำกิจกรรมที่กำหนดไว้ หลังจากนั้นให้นักเรียนแต่ละกลุ่มเริ่มทำกิจกรรม โดยทำทีละกิจกรรมโดยเริ่มตั้งแต่กิจกรรมที่หนึ่งเป็นต้นไป ซึ่งกิจกรรมประกอบไปด้วยทั้ง 2 ชุดกิจกรรม โดยชุดที่ 1 เป็นกิจกรรมที่ศึกษาความเข้าใจในโมเดลเกี่ยวกับการบวกจำนวนเต็มของนักเรียน มีทั้งหมด 3 กิจกรรม คือกิจกรรมที่ 1, 2 และ 3 ส่วนชุดที่ 2 เป็นกิจกรรมที่ศึกษาความเข้าใจในโมเดลเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็มของนักเรียน มีทั้งหมด 5 กิจกรรม คือกิจกรรมที่ 4, 5, 6, 7 และ 8 และเมื่อนักเรียนทำกิจกรรมเสร็จทุกกิจกรรมผู้วิจัยได้ให้นักเรียนแต่ละคนทำแบบทดสอบเพื่อศึกษาความเข้าใจในโมเดลเกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวนเต็มของนักเรียนเป็นรายบุคคลหลังจากที่ทุกคนได้ทำการศึกษามาแล้ว

จากการทำกิจกรรมของนักเรียนในกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ พบว่ามีความเข้าใจในโมเดลในระดับจัดกระทำ โดยสังเกตจากการที่นักเรียนสามารถ ทำการจัดกระทำกับขบวนการไฟสีน้ำเงินและสีแดง ต่อขบวนการไฟได้ ปฏิบัติตามคำสั่ง สามารถนับจำนวนโบกี้และเขียนคำตอบลงในใบกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง เช่นในโจทย์ให้หาผลลัพธ์ของ $5 + (-3)$ นักเรียนต่อขบวนการไฟสีน้ำเงิน 5 โบกี้หันหัวไปทางด้านซ้าย และขบวนการไฟสีน้ำแดง 3 โบกี้หันหัวไปทางด้านขวา รถไฟสองขบวนนี้วิ่งสวนทางกันจึงชนกันจับคู่ตรงกลางได้สามคู่เหลือสองโบกี้สีน้ำเงินจึงตอบ 2 โดยให้เหตุผลว่าสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวก และสามารถพัฒนาไปสู่ความเข้าใจในโมเดลในระดับกระบวนการ ซึ่งจากพิจารณาการที่นักเรียนหาผลลัพธ์ได้ไม่ต้องผ่านการจัดกระทำเช่นนักเรียนสามารถบอกผลลัพธ์ของ $5 + (-4) = 1$ ได้เลย และเมื่อทำการสัมภาษณ์ของการได้มาซึ่งคำตอบ นักเรียนก็สามารถอธิบายได้ว่า มอง 5 เป็นขบวนการไฟสีน้ำเงินห้าโบกี้และมอง (-4) เป็นเป็นขบวนการไฟสีแดงสี่โบกี้ เมื่อเห็นเครื่องหมายขบวนการไฟสองขบวนนี้วิ่งสวนทางกันจึงชนกันจับคู่ตรงกลางได้สี่คู่เหลือหนึ่งโบกี้สีน้ำเงินจึงตอบ 1 และยังสามารถสรุปรูปทั่วไปของการบวกและการลบได้ทุกกรณี เช่นในการบวกจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มบวกบวกกับจำนวนเต็มบวกได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มบวกบวกกับจำนวนเต็มลบกรณีที่จำนวนเต็มบวกมากกว่าได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบกรณีที่จำนวนเต็มลบมากกว่าได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มลบและในการลบนักเรียนสามารถสรุปรูปทั่วไปของการลบจำนวนเต็ม ได้ดังนี้ กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบลบกันจะได้จำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบลบกันได้จำนวนเต็มลบ ตัวตั้งมีค่าเท่ากับตัวลบลบกันได้จำนวนเต็มศูนย์กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบลบกันได้จำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกลบกันได้จำนวนเต็มลบ

กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวตั้งมีค่าสัมบูรณ์มากกว่าตัวลบลบกัน ได้จำนวนเต็มลบ ตัวตั้งมีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่าตัวลบลบกัน ได้จำนวนเต็มบวก ตัวตั้งกับตัวลบมีค่าเท่ากันลบกันจะได้ผลลัพธ์จำนวนเต็มศูนย์

นักเรียนในกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ มีความเข้าใจในมโนคติในระดับจัดกระทำได้เช่นเดียวกัน โดยสังเกตจากการที่นักเรียนในกลุ่มสามารถปฏิบัติตามคำสั่งในใบกิจกรรมทำการคลิกเมาส์ เลื่อนรูปวงสีน้ำเงินและสีแดง สามารถนับจำนวนรูปวงกลมที่ปรากฏในหน้าจอคอมพิวเตอร์ได้และเขียนตอบลงในใบกิจกรรมได้อย่างถูกต้อง เช่นในโจทย์ให้หาผลลัพธ์ของ $5 + (-3)$ นักเรียนทำการคลิกที่ปุ่ม 5 จะมองเห็นเป็นวงกลมสีน้ำเงินห้ารูป และมองเห็นเป็นวงกลมสีแดงสามรูปเมื่อคลิกที่ปุ่ม -3 และสามารถเลื่อนวงกลมไปวางในช่องสี่ตามที่โจทย์กำหนดได้ และสามารถพัฒนาไปสู่การสร้างมโนคติในระดับกระบวนการพิจารณาการที่นักเรียนหาผลลัพธ์ได้ไม่ต้องผ่านการจัดกระทำเช่นนักเรียนสามารถบอกผลลัพธ์ของ $5 + (-4) = 1$ ได้เลย โดยไม่คลิกเมาส์หรือทำอะไรเลย และเมื่อทำการสัมภาษณ์ของการได้มาซึ่งคำตอบ นักเรียนก็สามารถอธิบายได้ว่า มอง 5 เป็นวงกลมน้ำเงินห้ารูปและมอง (-4) เป็นวงกลมสีแดงสี่รูป เมื่อเห็นเครื่องหมายบวกของวงกลมทั้งสองก็ยังคงเหมือนเดิมจึงทำการจับคู่ศูนย์ ซึ่งได้คู่ศูนย์สี่คู่หักล้างไปและเหลือสีน้ำเงินหนึ่งรูป ซึ่งสีน้ำเงินแทนจำนวนเต็มบวกจึงตอบ 1 นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถสรุปรูปทั่วไปของการบวกและการลบได้ทุกกรณี เช่นในการบวกจำนวนเต็ม กรณีจำนวนเต็มบวกบวกกับจำนวนเต็มบวกได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบกรณีที่จำนวนเต็มบวกมากกว่าได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มบวก การบวกจำนวนเต็มบวกกับจำนวนเต็มลบกรณีที่จำนวนเต็มลบมากกว่าได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มลบและในการลบ นักเรียนสามารถสรุปทั่วไปของการลบจำนวนเต็มได้ดังนี้ กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมีค่ามากกว่าตัวลบลบกันจะได้จำนวนเต็มบวก ตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบลบกัน ได้จำนวนเต็มลบ ตัวตั้งมีค่าเท่ากับตัวลบลบกัน ได้จำนวนเต็มศูนย์กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มบวกตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบลบกัน ได้จำนวนเต็มบวก กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบลบกัน ได้จำนวนเต็มลบ กรณีตัวตั้งเป็นจำนวนเต็มลบและตัวลบเป็นจำนวนเต็มลบ ตัวตั้งมีค่าสัมบูรณ์มากกว่าตัวลบลบกัน ได้จำนวนเต็มลบ ตัวตั้งมีค่าสัมบูรณ์น้อยกว่าตัวลบลบกัน ได้จำนวนเต็มบวก ตัวตั้งกับตัวลบมีค่าเท่ากันลบกันจะได้ผลลัพธ์จำนวนเต็มศูนย์

ในการพิจารณาความเข้าใจในมโนคติระดับในโครงสร้างของนักเรียนเป็นรายบุคคลผู้วิจัยพิจารณาจากการทำแบบทดสอบของนักเรียน ปรากฏว่าในกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงและใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีนักเรียนบางคนสามารถเชื่อมโยงมโนคติเกี่ยวกับการบวกและการลบจำนวนเต็มได้อย่างถูกต้องในทุกกรณี และหาคำตอบของการบวกและการลบจำนวน

เต็มในแบบทดสอบ ได้ถูกต้อง ซึ่งถ้าพิจารณาตามกลุ่มที่ทำการศึกษาพบว่ากลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริง มีนักเรียนที่มีความเข้าใจถึงระดับ โครงสร้างจำนวน 4 คนและไม่ถึงระดับ โครงสร้างจำนวน 2 คน ส่วนกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีนักเรียนที่มีความเข้าใจถึงระดับ โครงสร้าง จำนวน 3 คนและไม่ถึงจำนวน 3 คน

สำหรับนักเรียนที่มีความเข้าใจไม่ถึงระดับ โครงสร้าง ผู้วิจัยได้พิจารณาจากการทำแบบทดสอบของนักเรียนปรากฏว่านักเรียนส่วนจะทำผิดในข้อที่เป็นเกี่ยวกับการลบจำนวนเต็ม กรณีที่ตัวตั้งและตัวลบเป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ตัวตั้งมีค่าน้อยกว่าตัวลบ ซึ่งเหล่านี้จะทำการสลับที่จำนวน โดยเอาตัวลบมาเป็นตัวตั้งเอาตั้งไปเป็นตัวลบแทน ซึ่งเมื่อลบกันแล้วก็จะทำให้ได้คำตอบเป็นค่าบวก ซึ่งในความเป็นจริงแล้วคำตอบต้องเป็นค่าลบ ซึ่งเมื่อพิจารณาแล้วผู้วิจัยคิดว่าสาเหตุของการที่ให้นักเรียนมีความเข้าใจที่คลาดเคลื่อน สำหรับกลุ่มที่ใช้สถานการณ์จริงเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ อาจเป็นเพราะว่านักเรียนอาจจะสับสนระหว่างรศ.ไฟขบวนที่ 1 กับรศ.ไฟขบวนที่ 2 ว่าการลบก็สามารถสลับที่ได้เหมือนการบวก ซึ่งจะให้รศ.ไฟขบวนไหนเป็นขบวนที่ 1 หรือขบวนที่ 2 ก็ได้ ซึ่งแตกต่างจากกิจกรรมที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ที่มองเห็นได้อย่างชัดเจนว่าตัวใดเป็นตัวตั้ง และตัวใดเป็นตัวลบ ดังนั้นควรปรับกิจกรรมและเงื่อนไขให้มีความชัดเจนมากยิ่งขึ้นเพื่อให้นักเรียนเห็นได้อย่างชัดเจนว่าตัวใดคือตัวตั้งหรือตัวใดคือตัวลบ และนอกจากนี้ อาจจะเนื่องมาจากรูปแบบของกิจกรรมเป็นกิจกรรมกลุ่ม ในบางครั้งนักเรียนบางคนไม่มีส่วนร่วมในกิจกรรม เช่น การคลิกเมาส์ในกลุ่มที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ การสังเกต การตอบในใบกิจกรรมที่อาจจะคล้อยตามเพื่อนเสมอ ไม่ค่อยจัดกระทำในขณะที่ทำกิจกรรมเพราะเวลาที่ทำกิจกรรมจะมีนักเรียนบางคนที่ทำอยู่คนเดียว บางคนไม่ได้ทำ จึงทำให้ไม่สามารถพัฒนาระดับความเข้าใจไปสู่ระดับ โครงสร้างได้ ในการทำกิจกรรมครั้งต่อไปควรกระตุ้นให้นักเรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรม ในส่วนของโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ก็ให้ทุกคนได้มีส่วนร่วม

ถึงแม้ว่าจะมีนักเรียนเพียงบางคนเท่านั้นที่สามารถพัฒนาความเข้าใจไปถึงระดับ โครงสร้าง แต่สามารถสรุปได้ว่า กิจกรรมใช้สถานการณ์จริงและใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad สามารถทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็ม ในระดับ โครงสร้างได้ ดังนั้นถ้าให้นักเรียนทุกคนได้มีส่วนร่วมในการทำกิจกรรมผู้วิจัยคิดว่านักเรียนทุกคนน่าจะมีความเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่องการบวกและการลบจำนวนเต็มในระดับ โครงสร้างได้ โดยเฉพาะในส่วนของโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพราะเป็นโปรแกรมที่ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และเข้าใจได้ง่าย จึงควรนำโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนนักเรียนเพราะสามารถทำให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจ

ในมโนคติทางคณิตศาสตร์ถึงระดับโครงสร้างได้ ซึ่งก็จะสอดคล้องกับนักวิจัยท่านอื่นๆเช่นกฤษมณี กาศีชา (2550) กล่าวว่า การส่งเสริมให้ผู้เรียนได้ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะพัฒนา บทบาทความสัมพันธ์ของภาพและการอธิบายเพื่อให้ผู้เรียนได้เกิดความเข้าใจลึกซึ้งมากขึ้นในมโนคติทางคณิตศาสตร์ซึ่งสอดคล้องกับกาญจนา ฉลาดสัน(2550) ที่ว่าการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ช่วยให้เรียนคณิตศาสตร์เรียนได้ง่ายขึ้นและเข้าใจโดยการเปรียบเทียบและสังเกตการณ์เปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้น เกิดความสนุกสนานเพราะเป็นภาพที่เคลื่อนไหวได้และมองเห็นภาพได้ชัดเจนมากขึ้น และHeingraj(2006) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะช่วยให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจของนักเรียน