

บทที่ 3

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ปัจจุบันได้มีการพัฒนาความสามารถทางด้านโปรแกรมที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้านกลศาสตร์ของไหลให้มีความแม่นยำถูกต้อง และง่ายต่อการใช้งาน ซึ่งสิ่งนี้จะเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ และออกแบบระบบที่เกี่ยวข้องของไหลให้สะดวก และประหยัดเวลามากขึ้น

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) ที่ใช้อธิบายลักษณะการไหลภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งโดยทั่วไปแล้วสมการสำหรับการไหลมักสร้างขึ้นบนหลักการความสอดคล้องของสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) สมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และสมการพลังงาน (Energy Equation) หรือเรียกสมการทั้ง 3 นี้รวมกันว่า สมการควบคุม (Governing Equation) ซึ่งสมการทั้ง 3 นี้เป็นสมการ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่ประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่าหลายตัวด้วยกัน ได้แก่ ตัวแปรความเร็วในทิศทางต่างๆ ตัวแปรความดัน ตัวแปรความหนาแน่น และตัวแปรอุณหภูมิ เป็นต้น โดยจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ปรากฏอยู่ในสมการจะมีจำนวนขึ้นอยู่กับมิติที่ใช้การวิเคราะห์ และข้อสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้นๆ เช่น หากทำการวิเคราะห์ปัญหาเป็นแบบ 3 มิติ ก็จะมีตัวแปรความเร็ว ตัวแปรความดัน ตัวแปรความหนาแน่น และตัวแปรอุณหภูมิ เพิ่มขึ้นมากกว่าการวิเคราะห์แบบ 2 มิติ อีกหนึ่งทิศทางหรือหากตั้งข้อสมมุติฐานให้ของไหลเป็นการไหลในสภาวะคงตัวจะส่งผลให้ค่าความหนาแน่นเป็นค่าคงที่ ที่ทราบค่าและไม่ต้องคำนวณหา แต่ในทางกลับกันหากของไหลเป็นการไหลในสภาวะไม่คงตัว (Compressible Flow) ค่าความหนาแน่นจะเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเพิ่มขึ้นมาในสมการอีกหนึ่งตัว เป็นต้น

ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ และเป็นไปในทิศทางเดียวกัน การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้จะตั้งอยู่บนสมมุติฐานภายใต้เงื่อนไขหลักของการวิเคราะห์ที่กำหนดไว้ดังนี้ คือ เป็นปัญหาการไหลแบบคงที่ (Steady Flow) ในสภาวะคงตัว (Incompressible Flow) ในทิศทาง 3 มิติ และไม่คิดการแผ่รังสีความร้อน

1. ระเบียบวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics, CFD)

ระเบียบวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเป็นการวิเคราะห์ระบบที่เกี่ยวข้องกับการไหล การถ่ายโอนความร้อน และปรากฏการณ์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการไหล และการถ่ายโอนความร้อน เช่น ปฏิกริยาเคมี โดยการทำการจำลองแบบในคอมพิวเตอร์ ซึ่งในปัจจุบันเป็นที่นิยมมากเนื่องจาก

เครื่องคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพสูง และโปรแกรมทางพลศาสตร์ของไหลในปัจจุบันก็ออกแบบมาให้ง่ายต่อความเข้าใจ และสะดวกในการใช้งาน

1.1 สมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation)

พิจารณากฎอนุรักษ์มวลของปริมาตรควบคุม (Control Volume)

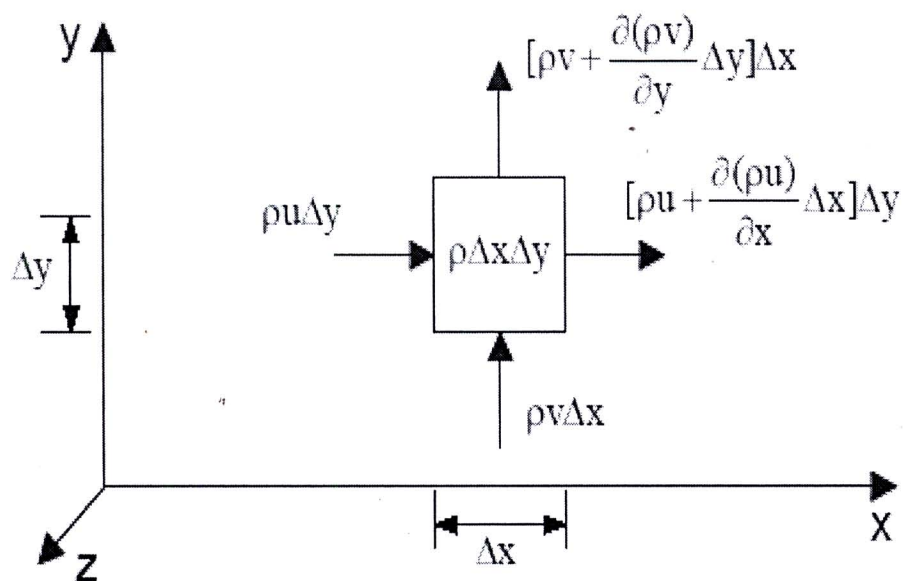
$$\frac{\partial M_{cv}}{\partial t} = \sum_{\text{inlet ports}} \dot{m} - \sum_{\text{outlet ports}} \dot{m} \quad (3-1)$$

โดยที่ M_{cv} คือมวลภายในปริมาตรควบคุม ณ เวลานั้น และ m คืออัตราการไหลเข้าและออกปริมาตรควบคุม พิจารณาปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ ภาพที่ 1 ให้ u และ v เป็นส่วนประกอบความเร็วเฉพาะที่ ณ จุด (x,y) สมการที่ (3-1) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \Delta x \Delta y) = \rho u \Delta y + \rho v \Delta x - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \quad (3-2)$$

นำ $\Delta x \Delta y$ มาหารสมการ (3-2) ตลอดสมการ จะได้สมการที่ (3-3) ซึ่งเป็นสมการความต่อเนื่องใน 2 มิติ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3-3)$$



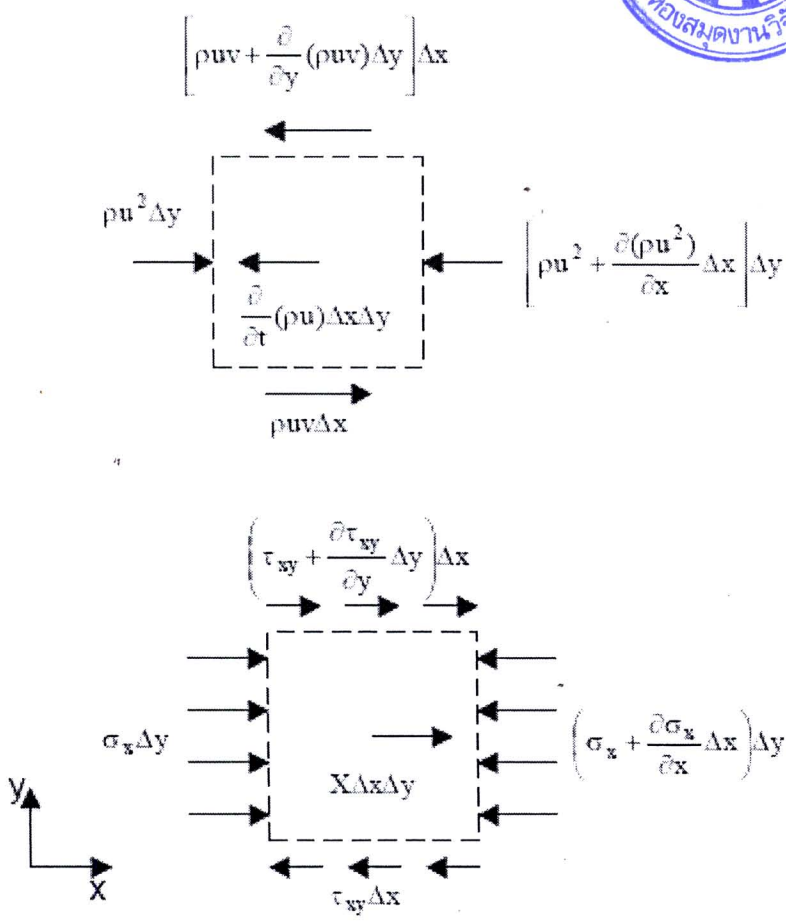
ภาพที่ 1 สมดุลมวลในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

1.2 สมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

พิจารณาสมดุลของแรงที่เกิดขึ้นทันทีที่ทันใดบนปริมาตรควบคุม

$$\frac{\partial}{\partial t}(Mv_n)_{cv} = \sum F_n + \sum_{\substack{\text{inlet} \\ \text{ports}}} \dot{m}v_n - \sum_{\substack{\text{outlet} \\ \text{ports}}} \dot{m}v_n \tag{3-4}$$

โดย n เป็นทิศทางที่เลือกใช้ในการวิเคราะห์ และ (v_n, F_n) เป็นโปรเจกชันของความเร็วของของไหล และแรงที่กระทำในแนว n



ภาพที่ 2 สมดุลแรงในแนว x บนปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ

พิจารณาปริมาตรควบคุมของการไหลใน 2 มิติ ภาพที่ 2 เราสามารถพิจารณาสมดุลของแรงได้ 2 แนว คือ ในแนว x และในแนว y ในขั้นแรกจะพิจารณาแรงในแนว x ก่อน เมื่อแตกแรงทั้งหมดให้อยู่ในแนว x จะได้ว่า

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(pu\Delta x\Delta y) + pu^2\Delta y - \left[pu^2 + \frac{\partial}{\partial x}(pu^2)\Delta x \right]\Delta y + puv\Delta x - \left[puv + \frac{\partial}{\partial y}(puv)\Delta y \right]\Delta x \\ &+ \sigma_x\Delta y - \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\Delta x \right)\Delta y - \tau_{xy}\Delta x + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\Delta y \right)\Delta x + X\Delta x\Delta y = 0 \end{aligned} \tag{3-5}$$

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ

ห้องสมุดงานวิจัย

วันที่ 05 ต.ค 2555

เลขทะเบียน 249154

เลขวิทยุ หนังสือ

นำ $\Delta x \Delta y$ มาหารสมการ (3-5) ตลอดสมการ (โดย $(\Delta x \Delta y) \rightarrow 0$) จะได้

$$p \frac{Du}{Dt} + u \left[\frac{Dp}{Dt} + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X \quad (3-6)$$

และจากความสัมพันธ์ในเชิงเอมไพริคัลของ σ_x และ τ_{xy}

$$\sigma_x = P - 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (3-7)$$

แทนสมการที่ (3-7) ลงในสมการที่ (3-6) จะทำให้ได้สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equation)

$$p \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + X \quad (3-8)$$

ส่วนสมมูลของแรงในแนวแกน y ก็สามารทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$p \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + Y \quad (3-9)$$

โดยที่ Material Derivative นิยามโดยสมการที่ (3-10)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (3-10)$$

1.3 Turbulent Model

การจำลองแบบปั่นป่วนเป็นการคำนวณของระบบปิดของการไหลแบบเฉลี่ย (Mean Flow) ตามสมการดังต่อไปนี้

ตารางที่ 1 แสดง Turbulent Flow Equations for Compressible Flows

Continuity

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(pU) = 0$$

Reynolds equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial(pU)}{\partial t} + \text{div}(pUU) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad}U) + \left[-\frac{\overline{pu'^2}}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pu'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pu'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mx} \\ \frac{\partial(pV)}{\partial t} + \text{div}(pVU) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad}V) + \left[-\frac{\partial(\overline{pv'^2})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pu'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pv'w'})}{\partial z} \right] + S_{My} \\ \frac{\partial(pW)}{\partial t} + \text{div}(pWU) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad}W) + \left[-\frac{\partial(\overline{pw'^2})}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{pu'w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pv'w'})}{\partial y} \right] + S_{Mz} \end{aligned}$$

Scalar transport equation

$$\frac{\partial(p\Phi)}{\partial t} + \text{div}(p\Phi U) = \text{div}(\Gamma_\Phi \text{grad}\Phi) + \left[-\frac{\partial(\overline{pu'\phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pv'\phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pw'\phi'})}{\partial z} \right] + S_\Phi$$

ซึ่งการคำนวณจะพิจารณาผลกระทบแบบปั่นป่วนของการไหลเฉลี่ยเราต้องการนิพจน์สำหรับสมการ Reynold Stress และเทอมของ Turbulent Scalar Transport ในสมการ Scalar Transport ซึ่งการใช้แบบจำลองแบบปั่นป่วนนี้จะนิยมใช้ในการเขียน CFD Code เพราะใช้ง่าย มีความแม่นยำ ประหยัดทรัพยากรของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการ Run ดังแสดงในตาราง

ตารางที่ 2 แสดงวิธีการทาง CFD

Classical model	Base on (time-average) Reynolds equation 1. zero equation model-mixing length model 2. two-equation model-k-ϵ model 3. Reynold stresses equation model 4. algebraic stresses model
Large eddy simulation	Base on space-filtered equation

- ใน classical model the mixing length และ k- ϵ model จะพิจารณาบนพื้นฐานของ viscous stresses and Reynold stresses บนการไหลเฉลี่ย ซึ่งค่า Stress ทั้งสองจะพบได้บนด้านขวามือของ Momentum Equation ในการพิจารณาปัญหาการไหล Simple Turbulent Flow ซึ่ง Turbulent Level และ Turbulent Stresses จะเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปสู่จุดหนึ่ง ในการไหล
- Mixing Length Model จะศึกษาในรายละเอียดของ Stresses โดย Mean of Simple Algebraic ของสูตรสำหรับ μ_t ซึ่งจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันตำแหน่ง
- k- ϵ Model จะสนใจรายละเอียดของการไหลแบบปั่นป่วน โดยจะพิจารณาถึงอิทธิพลของการส่งถ่ายคุณสมบัติของการปั่นป่วนโดยการไหลเฉลี่ย และการแพร่โดยสมการ การส่งถ่ายจะสนใจ 2 สมการ ซึ่งเป็น (Partial Differential Equation PDEs)
- สมการ Turbulent Kinetic Energy (k)
- สมการ Rate of Dissipation ของ Trubulent Kinetic Energy(ϵ)
- ทั้งสอง Model ข้างต้นจะใช้บนข้อสมมุติ คือ มีลักษณะทางกายภาพของ Turbulent Viscosity (μ_t) เหมือนกัน หรือพูดอีกอย่างก็คือ มีอัตราส่วนของค่า Reynold Stresses กับค่าของอัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนรูปมีค่าเท่ากันทุกทิศทุกทาง

1.4 The k-ε Model

วิธีการของ k-ε Model จะสนใจ Mechanism ของผลกระทบ The Turbulent Kinetic Energy จากสมการ Navier-Stokes

- เป็น Incompressible Flow
- Constant Viscosity

พิจารณา Vector ความเร็ว U ซึ่งประกอบไปด้วย x-component u , y-component v , z-component w

$$\text{div}U = 0 \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(uU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad } u) \quad (3-12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(vU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad } v) \quad (3-13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(wU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } w) \quad (3-14)$$

ในสมการ (3-11) - (3-14) สามารถแทนตัวแปรการไหล $U(u, v, w)$ เนื่องจากอิทธิพลของ Fluctuation และความดัน ด้วยผลรวมของค่าเฉลี่ย และส่วนประกอบของ Fluctuating

$$U = \bar{U} + U', u = \bar{u} + u', v = \bar{v} + v', w = \bar{w} + w'; p = \bar{p} + p'$$

พิจารณาสมการความต่อเนื่อง (3-11) โดยกำหนดให้ $\overline{\text{div}u} = \text{div}\bar{U}$ เป็นจุด Yield ของสมการ Continuity สำหรับการไหลเฉลี่ย

$$\text{div}\bar{U} = 0 \quad (3-15)$$

จะพิจารณาสมการ (3-12) ก่อน โดยพิจารณาที่เวลาเฉลี่ย จะทำให้เขียนเทอมต่างๆ ให้อยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial U}{\partial t}; \overline{div(uU)} = \overline{div(UU)} + \overline{div(u'u')}$$

$$-\overline{\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x}} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x}; \overline{v div(grad u)} = v \overline{div(grad U)}$$

จะสามารถเขียนสมการเวลาเฉลี่ยของ x-momentum equation ได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overline{div(UU)} + \overline{div(u'u')} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + v \overline{div(grad U)} \quad (3-16a)$$

เพราะฉะนั้น ในสมการในแนวแกนอื่นๆ ก็พิจารณาเหมือนกันจะได้

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \overline{div(VU)} + \overline{div(v'u')} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + v \overline{div(grad V)} \quad (3-16b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \overline{div(WU)} + \overline{div(w'u')} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial z} + v \overline{div(grad W)} \quad (3-16c)$$

แต่ในเทอมที่ 3 จะมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อมีการเพิ่มการพิจารณา Turbulent Stresses บน Mean Velocity Component u, v, w จนได้รูปใหม่เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \overline{div(UU)} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + v \overline{div(grad U)} + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \quad (3-17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \overline{div(VU)} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + v \overline{div(grad V)} + \left[-\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \quad (3-18)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } W) + \left[-\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} \right] \tag{3-19}$$

Governing Equation สำหรับ Mean Flow. Kinetic Energy (K) สำหรับสมการ Mean Kinetic Energy (k) เกิดจากการคูณ U เข้ากับสมการ Component Reynold (3-17) จะได้

$$\frac{\partial(pK)}{\partial t} + \text{div}(pKU) = \text{div}(-PU + 2\mu UE_{ij} - pU\overline{u'_i u'_j}) - 2\mu E_{ij} \cdot E_{ij} + \overline{p u'_i u'_j} \cdot E_{ij}$$

(3-1)

(3-2)

(3-3)

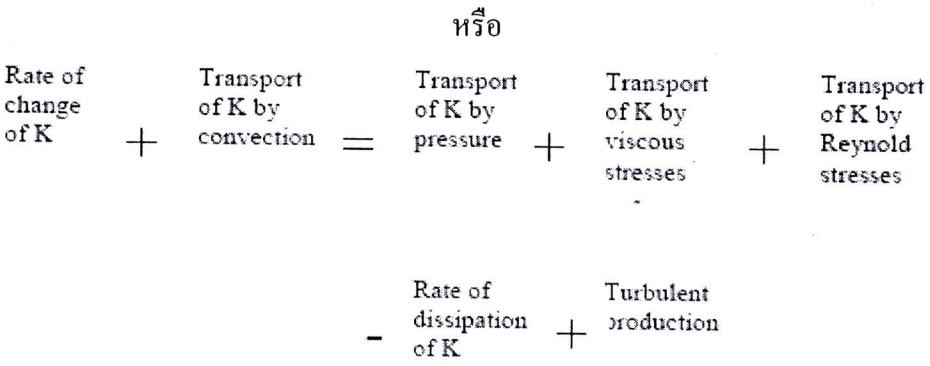
(3-4)

(3-5)

(3-6)

(3-7)

(3-20)



Governing Equation for Turbulent Kinetic Energy (k) คือ การคูณสมการ Instantaneous Navier-Stokes ด้วย Appropriate Fluctuating Velocity Component (ยกตัวอย่างเช่น คูณสมการ x-component equation ด้วย u') จะได้

$$\frac{\partial(pk)}{\partial t} + \text{div}(pkU) = \text{div}\left(-\overline{p'u'} + 2\mu\overline{u'e'_{ij}} - p\overline{\frac{1}{2}u'_i u'_i u'_j}\right) - 2\mu\overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} + \overline{p u'_i u'_j} \cdot E_{ij}$$

(3-1)

(3-2)

(3-3)

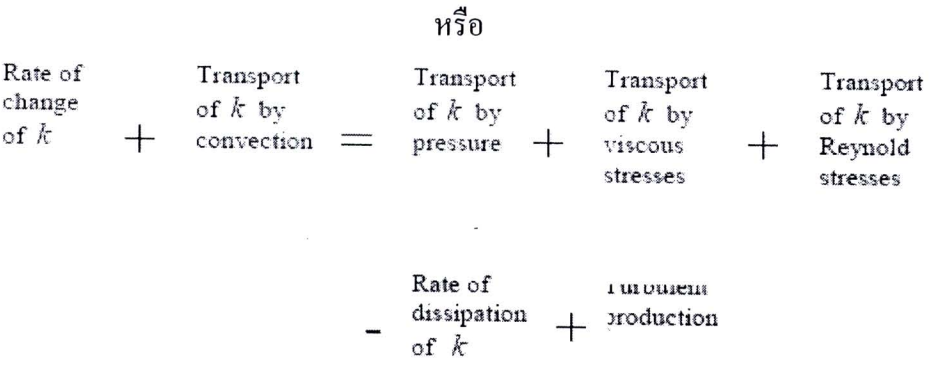
(3-4)

(3-5)

(3-6)

(3-7)

(3-21)



พิจารณาเทอม Viscous Dissipation (3-6) ในสมการ (3-21)

$$-2\mu e'_{ij} \cdot e'_{ij} = -2\mu(\overline{e'^2_{11}} + e'^2_{22} + e'^2_{33} + 2e'^2_{12} + 2e'^2_{13} + 2e'^2_{23}) \quad (3-22)$$

การกระจายเทอมที่มีค่าเป็น Negative ซึ่งจะอยู่ในรูปผลรวมของการยกกำลังของ อัตราการเปลี่ยนรูป e'_{ij} ซึ่ง Dissipation ของ Turbulent Kinetic Energy จะเกิดปรากฏการณ์ Eddies ที่มีขนาดเล็กมากกับ Viscous Stressess ซึ่งค่าดังกล่าวจะอยู่ในหน่วยของ m^2/s^3 จะเขียนได้เป็น

$$\varepsilon = 2\nu \overline{e'_{ij} \cdot e'_{ij}} \quad (3-23)$$

1.5 The Standard k-ε Model

โมเดลที่สมบูรณ์ที่ง่ายที่สุดของ turbulence คือสองสมการโมเดลที่ผลลัพธ์ของ สมการสองสมการนั้นทำให้ Turbulent velocity และ length scales เป็นผลลัพธ์ที่เป็นอิสระต่อกัน The Standard k-ε โมเดลใน Fluent ได้กลายเป็น turbulence model ใช้งานกันจริง ด้านการคำนวณ การไหลในทางวิศวกรรมตั้งแต่มันถูกค้นพบโดย Jones and Launder ความทนทาน ประหยัด และ สมเหตุสมผลสำหรับ turbulence flow ในวงกว้างทำให้มันเป็นที่นิยมในวงการอุตสาหกรรมของกา จำลองการไหลและการถ่ายเทความร้อน The Standard k-ε โมเดลเป็นโมเดลที่การทดลองที่ได้มา จากการสังเกตปรากฏการณ์จริง

ซึ่ง The Standard k-ε โมเดลใช้ transport equation ของ k และ ε ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu}{\rho_k} \text{grad } k \right] - 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (3-24)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \text{div} \left[\frac{\mu_t}{\rho_e} \text{grad } \varepsilon \right] + C_{1e} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2e} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (3-25)$$

หรือ

Rate of change of k or ε	+	Transport of k or ε by convection	=	Transport of k or ε by diffusion	+	Rate of production of k or ε	+	Rate of destruction of k or ε
--	---	---	---	--	---	--	---	---

สมการดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าคงที่ 5 ค่า คือ C_μ , σ_k , σ_ϵ , $C_{1\epsilon}$, $C_{2\epsilon}$ ซึ่งค่าดังกล่าวจะหาได้จากการทดลอง

$$C_\mu = 0.09; \sigma_k = 1.00; \sigma_\epsilon = 1.30; C_{1\epsilon} = 1.44; C_{2\epsilon} = 1.92$$

1.6 The RNG k- ϵ Model

RNG k- ϵ โมเดลได้มาจาก rigorous statistical technique หรือที่เรียกกันว่า renormalization group theory รูปแบบจะเหมือนกับ standard k- ϵ โมเดล แต่จะรวมรายละเอียดต่างข้างล่างนี้ลงไปด้วย

- RNG model มีเงื่อนไขเพิ่มเติมในสมการของ ϵ ที่ปรับปรุงความแม่นยำของ rapidly strained flows.
- ผลของ swirl ใน turbulence ถูกรวมไปใน RNG โมเดลทำให้ความแม่นยำของ swirling flows ดีขึ้น
- ทฤษฎีของ RNG มีการวิเคราะห์ Turbulent Prandtl numbers ขณะที่ standard k- ϵ โมเดลให้ผู้ใช้เป็นผู้กำหนด และค่าคงตัว
- ขณะที่ Standard k- ϵ โมเดลเป็นโมเดล high-Reynolds-number ทฤษฎีของ RNG จะมีการสูตรที่วิเคราะห์ความหนืดที่เหมาะสมที่จะอธิบายผลของ low-Reynolds-number อย่างไรก็ดีตามผลการใช้งานที่มีประสิทธิภาพก็ขึ้นอยู่กับใช้ที่เหมาะสมกับบริเวณที่ใกล้ผนัง ลักษณะเด่นดังกล่าวทำให้ RNG k- ϵ โมเดลมีความแม่นยำและเชื่อถือได้กับลักษณะการไหลรูปแบบต่างๆ มากกว่า Standard k- ϵ โมเดล

Transport Equation for the RNG k- ϵ โมเดล RNG k- ϵ โมเดลมีรูปร่างเหมือนกับ standard k- ϵ โมเดล

$$\rho \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha k \mu_{\text{eff}} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M \quad (3-26)$$

และ

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} - R \quad (3-27)$$

ในสองสมการนี้ G_k แสดงการเกิดของ turbulent kinetic energy เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของ mean velocity, G_b คือการกำเนิดของ turbulent kinetic energy เนื่องจาก buoyancy, Y_M แสดงถึงการมีส่วนร่วมของ fluctuating dilatation ใน compressible turbulence กับ dissipation rate โดยรวม, ปริมาณของ α_k และ α_ϵ คือ inverse effective Prandtl numbers สำหรับ k และ ϵ ตามลำดับ

Modeling the effective Viscosity

กระบวนการจัด scale ในทฤษฎีของ RNG มีผลใน differential equation สำหรับ turbulent viscosity

$$d\left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\epsilon} \mu}\right) = 1.72 \frac{\hat{\nu}}{\sqrt{\hat{\nu}^3 - 1 + C_v}} d\hat{\nu} \tag{3-28}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} \hat{\nu} &= \mu_{\text{eff}} / \mu \\ C_v &\approx 100 \end{aligned}$$

สมการ (3-28) ถูกรวมเพื่อที่จะอธิบายว่า effective turbulent transport เปลี่ยนแปลงตาม effective Reynolds number อย่างไร (หรือ eddy scale) และยังยอมให้โมเดลอธิบาย low-Reynolds-number และ near-wall flows ได้ดีอีกด้วย

ในขอบเขตของ high-Reynolds-number สมการ (28) ให้

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \tag{3-29}$$

ที่ $C_\mu = 0.0845$ ที่ได้จากทฤษฎีของ RNG ที่น่าสังเกตคือค่าของ C_μ สังเกตคือค่าจะใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการสังเกตจากการทดลอง 0.09 ที่ใช้ใน standard k- ϵ โมเดล

ใน FLUENT โดยปกติแล้ว Effective viscosity จะถูกคำนวณโดยสมการ high-Reynolds number (3-29) อย่างไรก็ตามยังมีออฟชั่นที่ยอมให้เลือก differential relation คือสมการที่ (3-28) เมื่อต้องการที่จะรวมผลของ low-Reynolds-number



RNG Swirl Modification

Turbulence โดยทั่วไปจะเกิดผลกระทบจากการหมุนหรือ Swirl ใน mean flow RNG โมเดลจัดหาออฟชั่นที่จะอธิบายผลจาก swirl หรือการหมุนโดยการแก้ไข turbulent viscosity อย่างเหมาะสม การแก้ไขสมการข้างล่างนี้

$$\mu_t = \mu_{to} f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\epsilon}\right) \quad (3-30)$$

ขณะที่ μ_{to} คือขนาดของ turbulent viscosity ที่ถูกคำนวณมาโดยไม่มี การแก้ไข สำหรับ swirl ที่มาจากสมการ (28) และ (29) Ω คือหน้าตาของ swirl number ที่หามาโดย FLUENT และ α_s คือ swirl constant ที่สมมุติค่าต่างๆขึ้นอยู่กับ การไหลเป็นแบบ swirl-dominated หรือ เป็นเพียงแค่ mildly swirling การแก้ไข swirl จะมีผลสำหรับ axisymmetric swirling flow และ three-dimensional flows เมื่อ RNG โมเดลถูกเลือก สำหรับ mildly swirling flows α_s จะถูก กำหนดให้เท่ากับ 0.05 และไม่สามารถที่จะแก้ไขได้ สำหรับ strongly swirling flows ค่า α_s ที่สูง ขึ้นมาสามารถใช้ได้

การคำนวณ Inverse Effective Prandtl Numbers

Inverse Effective Prandtl Numbers α_k และ α_ϵ จะถูกคำนวณโดยใช้สูตรดัง ข้างล่างที่ได้มาจากทฤษฎีของ RNG

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha - 2.3929}{\alpha_0 - 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \quad (3-31)$$

ขณะที่ $\alpha_0 = 1.0$ ในช่วงของ high-Reynolds-number limit

$$(\mu_{mol} / \mu_{eff} \ll 1), \alpha_k = \alpha_\epsilon \approx 1.393$$

The R Term in the ϵ Equation

ความแตกต่างหลักระหว่าง RNG และ standard k- ϵ โมเดลที่อยู่ในพจน์เพิ่มเติมใน สมการของ ϵ คือ

$$R = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \epsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3-32)$$

$$\text{ขณะที่ } \eta \equiv Sk / \epsilon, \eta_0 = 4.38, \beta = 0.012$$

ผลของพจน์นี้ในสมการ RNG ϵ สามารถเห็นได้ชัดขึ้นโดยการเรียบเรียงสมการ (3-27) การใช้สมการ (3-32) สองพจน์สุดท้ายในสมการ (3-27) สามารถนำมารวมกันได้ และสามารถเขียนได้ใหม่เป็นดังข้างล่างนี้

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_\epsilon \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon}^* \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3-33)$$

$$\text{โดยที่ } C_{2\epsilon}^* \text{ คือ } C_{2\epsilon}^* \equiv C_{2\epsilon} + \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (3-34)$$

ในบริเวณที่ $\eta < \eta_0$ พจน์ R จะมีผลทางด้านบวก และ $C_{2\epsilon}^*$ จะมีความมากกว่า $C_{2\epsilon}$ ใน logarithmic layer ยกตัวอย่างเช่น มันสามารถแสดงได้ว่า $\eta \approx 3.0$ $C_{2\epsilon}^* \approx 2.0$ ซึ่งจะค่อนข้างใกล้เคียงกับขนาดของ $C_{2\epsilon}^*$ ใน standard k- ϵ โมเดล เนื่องจากดังกล่าว สำหรับ strained flows แบบอ่อนๆ และปานกลาง RNG โมเดลค่อนข้างจะให้ผลที่มากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับ standard k- ϵ โมเดล

ในบริเวณที่มี strain rate ค่อนข้างสูง ($\eta < \eta_0$) พจน์ R จะเป็นลบ ทำให้ค่าของ $C_{2\epsilon}^*$ น้อยกว่าค่าของ $C_{2\epsilon}$ และเมื่อเปรียบเทียบกับ standard k- ϵ โมเดล การตัดทอนของส่วนขยาย ϵ จะลด k และท้ายที่สุดจะมีผลกับ viscosity จากผลดังกล่าว ใน rapidly strained flows RNG โมเดล ให้ turbulent viscosity ที่ต่ำกว่า standard k- ϵ โมเดล

ดังนั้น RNG โมเดลจะมีการตอบสนองกับ rapid stain และ streamline curvature มากกว่า standard k- ϵ โมเดล นี่คือการที่ทำไม RNG มีประสิทธิภาพดีกว่าในการไหลบางประเภท

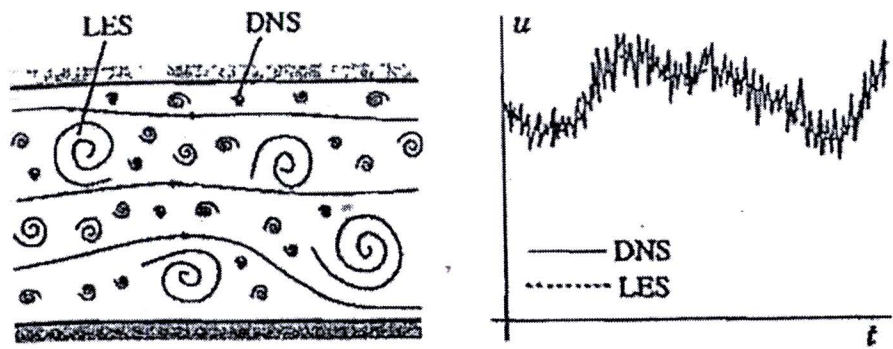
Model Constants

ค่า model constants $C_{1\epsilon}$ และ $C_{2\epsilon}$ ในสมการ (27) มีค่าที่ได้มาจากการวิเคราะห์ในทฤษฎีของ RNG ค่าเหล่านี้ถูกใช้ใน FLUENT คือ

$$C_{1\epsilon} = 1.42, \quad C_{2\epsilon} = 1.68$$

1.7 สมการการไหลของแบบจำลองความปั่นป่วนแบบ Large Eddy Simulation

ในการไหลแบบปั่นป่วนจะประกอบด้วยสเกลของความยาว (Length Scale) และสเกลของเวลา (Time Scale) ในย่านที่กว้าง ซึ่งนั่นก็คือย่านของขนาดเอ็ดดี้ที่อาจจะพบในการไหล ดังที่ได้แสดงไว้ในภาพที่ 3 (ซ้าย) ซึ่งในรูปแบบนี้ได้แสดงถึงองค์ประกอบของความเร็ว ในแต่ละลักษณะ ในแต่ละตำแหน่งของการไหล เราจะเห็นขนาดของสเกลต่างๆ กระจายอยู่ทั่วไป (Fluctuate)



ภาพที่ 3 การเคลื่อนที่ของการไหลแบบปั่นป่วน (ซ้าย) และความสัมพันธ์ของเวลากับองค์ประกอบของความเร็วจนในตำแหน่งคงที่ของการไหล (ขวา) (Ferziger J.H. et al, 2002)

จากความจริงที่ว่า สเกลขนาดใหญ่ในกระแสน้ำไหลมีผลกระทบโดยตรงอย่างมากต่อลักษณะการไหลแบบปั่นป่วน โดยโครงสร้างและขนาดของสเกลขนาดใหญ่จะขึ้นกับ 2 รูปทรงหรือธรรมชาติของการไหล ในขณะที่สเกลขนาดเล็กนั้นจะมีขนาดและรูปทรงค่อนข้างคงที่ในทุกรูปแบบการไหล อีกทั้งพลังงานส่วนมากในการไหลแบบปั่นป่วนจะถูกแฝงอยู่ที่สเกลขนาดใหญ่ เหตุผลนี้เองจึงเป็นที่มาของหลักการของวิธีการจำลองแบบลาร์จเอ็ดดี้ เนื่องจากว่าสเกลขนาดเล็กมีผลกระทบน้อยมากต่อการไหลแบบปั่นป่วน วิธีการจำลองแบบลาร์จเอ็ดดี้ จึงไม่สนใจและทำ

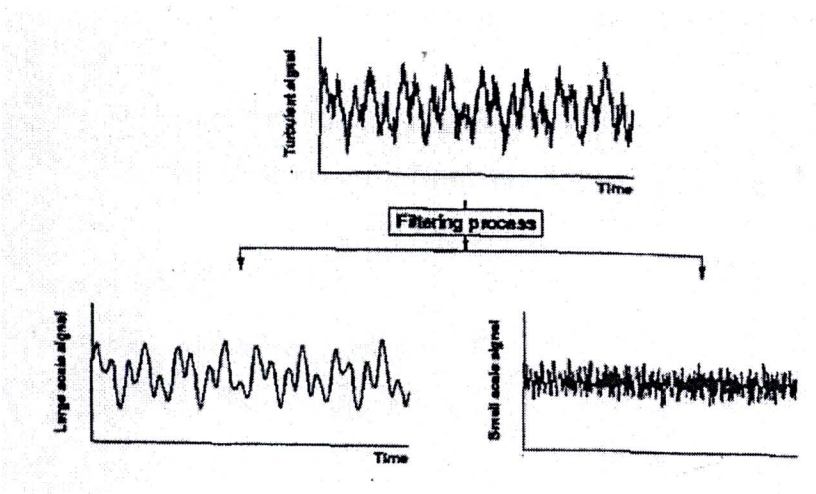
การจำลองสเกลขนาดเล็ก (Subgrid Scale Models) ส่วนสเกลขนาดใหญ่ซึ่งมีผลกระทบอย่างมากต่อการไหล วิธีการจำลองแบบลาร์จเอ็ดดีจะทำการคำนวณหาผลเฉลยบนกริด ที่ใช้คำนวณ

การจำลองการไหลแบบลาร์จเอ็ดดี เป็นการจำลองในสามมิติและเป็นการคำนวณมีเวลาเข้ามาเกี่ยวข้อง ดังแสดงในภาพที่ 3 (ซ้าย) ทำให้การคำนวณมีความซับซ้อนมาก แต่ถึงอย่างไรก็ตามการคำนวณจะยังซับซ้อนน้อยกว่าการใช้ DNS เมื่อเทียบกับการไหลแบบเดียวกัน วิธี DNS จะถูกใช้เมื่อการไหลนั้นไม่ซับซ้อนเกินไป ส่วนวิธีการจำลองแบบลาร์จเอ็ดดีนั้นจะเหมาะกับการไหลที่มีค่าตัวเลขเรย์โนลด์สูงมากเกินไป หรือรูปทรงมีความซับซ้อนมากเกินไปที่จะใช้วิธี DNS

สำหรับการคำนวณการไหลแบบปั่นป่วน สมการควบคุมการไหลทั้งสองจะถูกนำเข้าสู่กระบวนการกรอง (Filtering Process) เพื่อทำการแบ่งแยกตัวแปร Φ (โดยที่ Φ แทนค่าตัวแปรใดๆ ที่สนใจ เช่น U, V, W, หรือ P) ออกเป็นองค์ประกอบของสเกลขนาดใหญ่ (Large Scale, $\bar{\Phi}$) และองค์ประกอบของสเกลขนาดเล็ก (Small Scale, ϕ) ซึ่งสามารถแสดงได้ด้วยค่าสัญญาณของตัวแปรใดๆ ในการไหลแบบปั่นป่วน ดังแสดงในภาพที่ 4

$$\Phi = \bar{\Phi} + \phi$$

(3-35)



ภาพที่ 4 กระบวนการกรองเพื่อทำการแยกตัวแปร (Ferziger J.H. et al, 2002)

เมื่อนำสมการควบคุมการไหลทั้งสองเข้าสู่กระบวนการกรองจะได้สมการควบคุมการไหลที่มีการกรอง (Filtered Equations) ดังนี้

สมการอนุรักษ์มวล

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = 0 \quad (3-36)$$

สมการโมเมนตัม

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3-37)$$

แบบจำลองสเกลขนาดเล็ก (Subgrid Scale Models)

เทนเซอร์ของสเกลขนาดเล็ก (Subgrid Scale Tensor, τ_{ij}) จะเป็นตัวแทนของผลของสเกลขนาดเล็กที่มีต่อการไหลแบบปั่นป่วน โดยเทอมนี้จะถูกจำลองลงในสมการการกรอง

ดังสมการ (3.11) โดยทั่วไปการจำลอง τ_{ij} จะยึดหลักเดียวกันกับแบบจำลองค่าสัมประสิทธิ์ ความหนืดของเอ็ดดี้ (Eddy - Viscosity Model) ที่ว่า

$$\tau_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} \quad (3-38)$$

ในการศึกษานี้ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดเอ็ดดี้ (Eddy - Viscosity, ν_t) สามารถหาได้จากหลายแบบจำลอง สำหรับโปรแกรมการคำนวณทางพลศาสตร์ของไหล ฟลูเอน รุ่นที่ 12 (CFD Fluent V.12) นี้ แบบจำลองที่ใช้คือ แบบจำลองของสมกอรินสกี ลิลลี่ (Smagorinsky-Lilly)

แบบจำลอง สมกอรินสกี ลิลลี่

ในแบบจำลอง สมกอรินสกี ลิลลี่ ค่าสัมประสิทธิ์ความหนืดเอ็ดดี้ จะถูกจำลอง-
แบบโดย

$$v_t = \rho L_s^2 |\bar{S}| \quad (3-39)$$

โดยที่ L_s คือ ค่าเฉลี่ยความกว้างของการกรอง

C_s คือ ค่าคงที่ของสมกอรินสกี = 0.1

และ

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3-40)$$

โดยที่

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3-41)$$

สำหรับโปรแกรมการคำนวณของฟลูเอน ค่า L_s จะถูกคำนวณจาก

$$L_s = \min(Kd, C_s V^{1/3}) \quad (3-42)$$

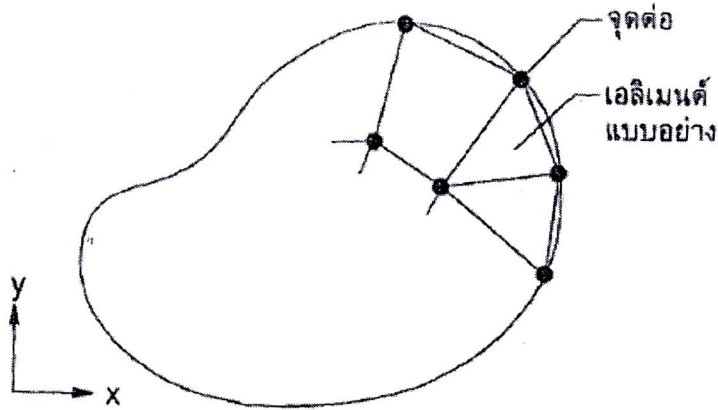
เมื่อ $K = 0.42$, d คือ ระยะที่ใกล้ผนังมากที่สุด และ V คอปริมาตรของเซลล์ที่ใช้
คำนวณ รายละเอียดเพิ่มเติมในหนังสือแนะนำการใช้งานโปรแกรมฟลูเอน (Fluent User's Guide
2001)

2. ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

2.1 ขั้นตอนทั่วไปของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์

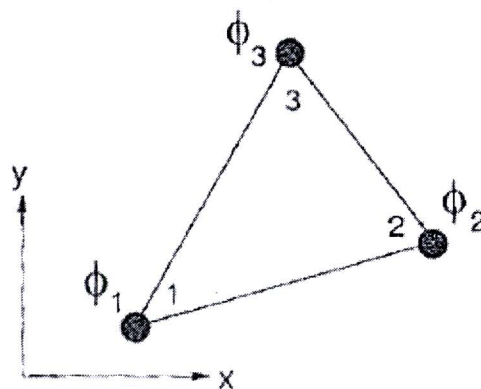
วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วยขั้นตอนใหญ่ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างลักษณะของปัญหาที่ต้องการที่จะหาผลลัพธ์นั้นออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยๆ ดังแสดงในภาพที่ 5 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่างๆ กัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (Elasticity problem) ปัญหาที่เกี่ยวกับอุณหภูมิและความร้อน (Thermal problem) รวมทั้งปัญหาของการไหล (Fluid problem)



ภาพที่ 5 การแบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (element- interpolation functions) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (เอลิเมนต์แบบอย่างดังแสดงในภาพที่ 12) เอลิเมนต์ดังกล่าวประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในรูป 15



ภาพที่ 6 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างประกอบด้วยสามจุดต่อ โดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

โดยที่จุดต่อนี้เป็นตำแหน่งของตัวไม่รู้ค่า (nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อเหล่านี้ อาจเป็นค่าการยืด หรือหดตัว (displacement) หากเรา ทำ ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเท ความร้อน หรือไม่ก็อาจเป็นความเร็วของของเหลวหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันการประมาณ ภายใน และตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ ดังนี้

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (3-43)$$

โดย $N_i(x, y)$, $i = 1, 2, 3$ คือฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ สมการ (3-43) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 N_2 N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= \underset{(1 \times 3)}{[N]} \underset{(3 \times 1)}{\{\phi\}} \end{aligned} \quad (3-44)$$

โดย $[N]$ คือ เมทริกซ์ของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ในตำราเล่มนี้ สัญลักษณ์ $[]$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวอน (row matrix) และ $\{ \}$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวตั้ง (column matrix)

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ดังตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างดังแสดงในรูป 15 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (3-45)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (3-46)$$

ขั้นตอนขั้นที่ 3 นี้ ถือว่าเป็นหัวใจสำคัญของวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการ (3-85) สามารถทำได้โดย

- ก. วิธีการโดยตรง (direct approach)
- ข. วิธีการแปรผัน (variational approach)
- ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals)

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน ก่อให้เกิดระบบสมการพร้อมกันขึ้น (system of simultaneous equations) รูปแบบดังนี้

$$\sum(\text{element equations}) \Rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\phi\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (3-47)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในสมการ (3-47) แล้วจึงแก้สมการนั้นเพื่อหา $\{\phi\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (nodal unknowns) ซึ่งอาจจะเป็นค่าของการเคลื่อนตัว ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้าง หรือค่าของอุณหภูมิที่จุดต่างๆ หากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นค่าของความเร็วของของเหลวหากเป็นปัญหาที่เกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถทำการหาค่าอื่นๆ ที่ต้องการทราบต่อไปได้ เช่น เมื่อรู้ค่าการเคลื่อนตัว (displacement) ณ ตำแหน่งต่างๆ ของโครงสร้างเราสามารถนำไปใช้ในการหาความเครียด (strain) และความเค้น (stress) ได้ต่อไป หรือเมื่อรู้อุณหภูมิที่จุดต่างๆ ก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายเทความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ความเร็วของไหลก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราการไหลทั้งหมดได้ เป็นต้น

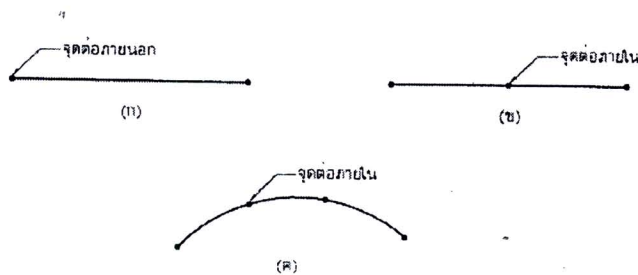
2.2 ชนิดของเอลิเมนต์

การวิเคราะห์โครงสร้าง หรือชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องแบ่งเป็นโครงสร้าง หรือชิ้นส่วนออกเป็นส่วนเล็กๆ และเลือกใช้ชนิดของเอลิเมนต์ให้เหมาะสมกับรูปร่างลักษณะของงาน และการกระทำของโหลด ชนิดของเอลิเมนต์อาจจะแบ่งออกได้ 3 ประเภทตามมิติคือ เอลิเมนต์สำหรับปัญหามิติเดียว สองมิติ และสามมิติ

2.3 เอลิเมนต์มิติเดียว

เอลิเมนต์มิติเดียวเป็นเอลิเมนต์ที่นิยมนำไปใช้ในการวิเคราะห์ปัญหามิติเดียว เช่น ชิ้นส่วนที่มีแรงกระทำในแนวแกน ชิ้นส่วนที่รับแรงบิด การโค้งงอของคาน การนำความร้อนในทิศทางเดียว เป็นต้น

ภาพที่ 7 (ก) คือเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยจุดต่อที่ปลายทั้งสองด้านของแต่ละเอลิเมนต์ ซึ่งเรียกว่าจุดต่อภายนอก ส่วนภาพที่ 7 (ข) เป็นเอลิเมนต์มิติเดียวที่ประกอบด้วยสามจุดต่อคือจุดต่อภายนอกสองจุดต่อ และจุดต่อภายในหนึ่งจุดต่อ และภาพที่ 7 (ค) คือเอลิเมนต์มิติเดียวที่เป็นเส้นโค้งประกอบด้วยสี่จุดต่อ คือ สองจุดต่อภายนอก และสองจุดต่อภายในซึ่ง

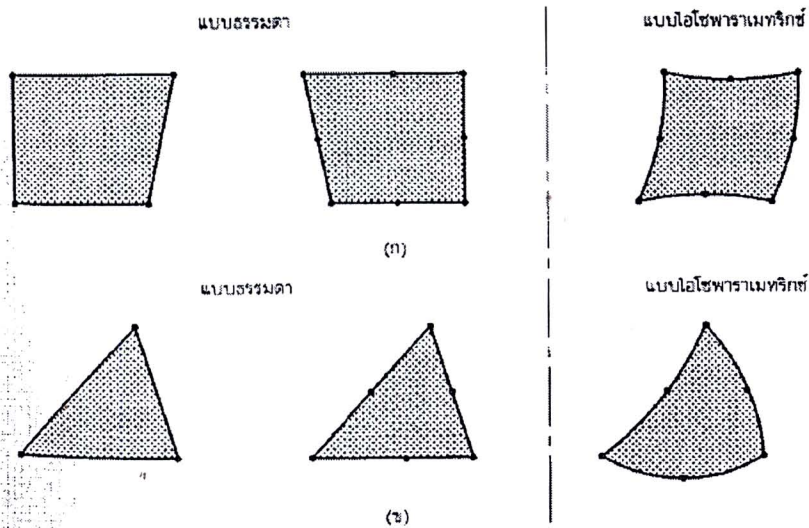


ภาพที่ 7 เอลิเมนต์มิติเดียว (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

เหมาะสำหรับใช้วิเคราะห์ปัญหาของโครงสร้าง หรือชิ้นงานที่มีการยึดตัวไม่เป็นเส้นตรง เช่น การยึดตัวของท่อนโลหะ อันเนื่องมาจากมวลของท่อนโลหะเอง เป็นต้น

2.4 เอลิเมนต์สองมิติ

เอลิเมนต์สองมิตินิยมใช้กับการวิเคราะห์ความเค้น-ความเครียดระนาบ โดยทั่วไปเอลิเมนต์สองมิติจะมีลักษณะเป็นรูปสามเหลี่ยม และสี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยด้าน ที่เป็นเส้นตรง หรือเส้นโค้ง เช่น รูปในภาพที่ 8 (ก) เป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วยสี่จุดต่อ และ 8 จุดต่อ

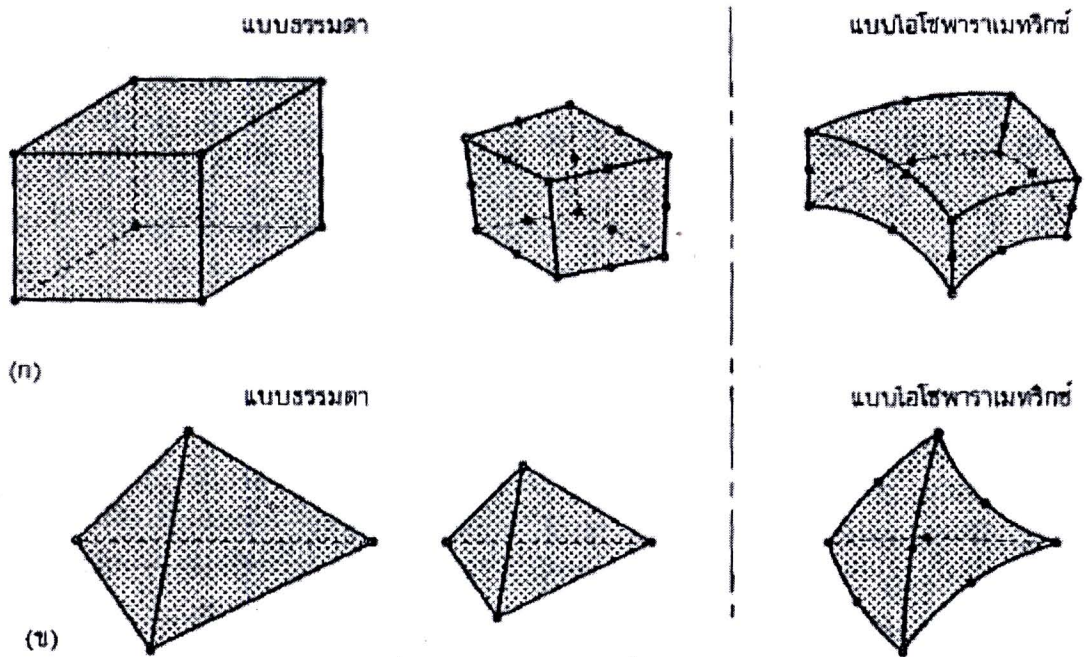


ภาพที่ 8 เอลิเมนต์สองมิติ (ก) เอลิเมนต์สี่เหลี่ยม (ข) เอลิเมนต์สามเหลี่ยม
(ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

ชนิดด้านตรง และด้านโค้งแบบไอโซพารามетริก ส่วนภาพที่ 8 (ข) เป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ และ 6 จุดต่อด้านตรง และด้านโค้งแบบไอโซพารามетริก โดยทั่วไปเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมจะได้รับความนิยมมากกว่าเอลิเมนต์สามเหลี่ยม ทั้งนี้เพราะในกรณีที่ระดับชั้นความเสริเท่ากันเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้ผลเฉลยที่ถูกต้องแม่นยำกว่า ส่วนจะเลือกใช้เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมด้านตรง หรือด้านโค้งขึ้นอยู่กับลักษณะรูปร่างของชิ้นงานจริง และโดยทั่วไปจะสมมุติให้ความหนาของเอลิเมนต์มีค่าคงตัว แต่อาจจะกำหนดให้ความหนาเป็นฟังก์ชันกับพิกัดก็ได้

2.5 เอลิเมนต์สามมิติ

เอลิเมนต์สามมิติจะใช้กับการวิเคราะห์ปัญหาสามมิติต่างๆ ไป ลักษณะของเอลิเมนต์จะเป็นสี่เหลี่ยมปริซึม และรูปกรวยสามเหลี่ยม เช่น ในภาพที่ 9 (ก) และ (ข) ตามลำดับ

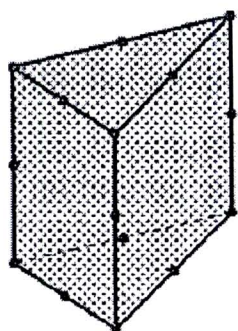


(ก) ชนิดปริซึม หรือชนิดทรงหกหน้า (ข) ชนิดกรวยสามเหลี่ยม หรือชนิดทรงสี่หน้า

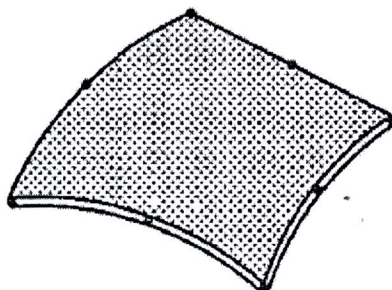
ภาพที่ 9 เอลิเมนต์สามมิติ (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

ภาพที่ 9 (ก) เป็นเอลิเมนต์สามมิติทรง 6 หน้า (hexahedron) ชนิดด้านตรง (linear) 8 จุดต่อ, ชนิดเส้นตรงกำลังสอง (straight-line quadratic) 20 จุดต่อ และชนิดเส้นโค้งกำลังสอง (quadratic with curved faces) 20 จุดต่อ ส่วนภาพที่ 9 (ข) เป็นเอลิเมนต์สามมิติ ทรง 4 หน้า (tetrahedra) ชนิดด้านตรง 4 จุดต่อ ชนิดเส้นตรงกำลังสอง 10 จุดต่อ, และชนิดเส้นโค้งกำลังสอง 10 จุดต่อตามลำดับ

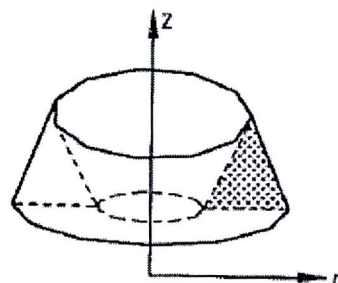
นอกจากเอลิเมนต์สามมิติตามที่กล่าวมาแล้ว ยังมีเอลิเมนต์อีกกลุ่มหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะรูปทรงกระบอก เช่น ในภาพที่ 10 (ก) ปัญหาในลักษณะแผ่นโค้ง (shell) เช่น



(ก)



(ข)



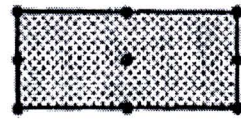
(ค)

ภาพที่ 10 (ก) เอลิเมนต์ทรงกระบอก (ข) เอลิเมนต์แผ่นโลหะโค้ง (สองมิติ) (ค) เอลิเมนต์กรวยสมมาตร (สองมิติ) (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

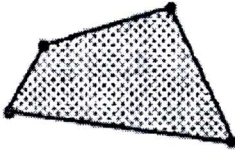
ในภาพที่ 10 (ข) และเอลิเมนต์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหารูปกรวยสมมาตร ซึ่งอาจจะเป็นเอลิเมนต์ชนิดสามเหลี่ยม หรือสี่เหลี่ยมหมุนรอบแกนสมมาตร (360°) เช่น ภาพที่ 10 (ค) โดยทั่วไป เอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อมาก ๆ จะให้ผลเฉลยใกล้เคียงกับค่าแน่นอนมากกว่าเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยจำนวนจุดต่อน้อย แต่จะเพิ่มความยุ่งยากในการแก้สมการ และใช้เวลาในการคำนวณมาก ตัวอย่างเช่น เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติ ภาพที่ 11 ประกอบด้วยจุดต่อ 4 จะให้ผลเฉลยคลาดเคลื่อนมากกว่าเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมที่ประกอบด้วย 8 และ 16 จุดต่อเป็นต้น



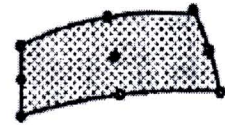
มุมฉาก 4 จุดต่อ



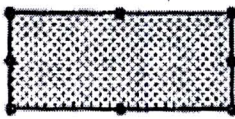
มุมฉาก 9 จุดต่อ



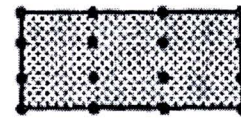
มุมใดๆ 4 จุดต่อ



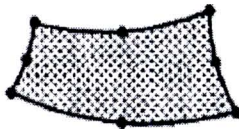
ด้านโค้ง 9 จุดต่อ



มุมฉาก 8 จุดต่อ



มุมฉาก 16 จุดต่อ



ด้านโค้ง 8 จุดต่อ



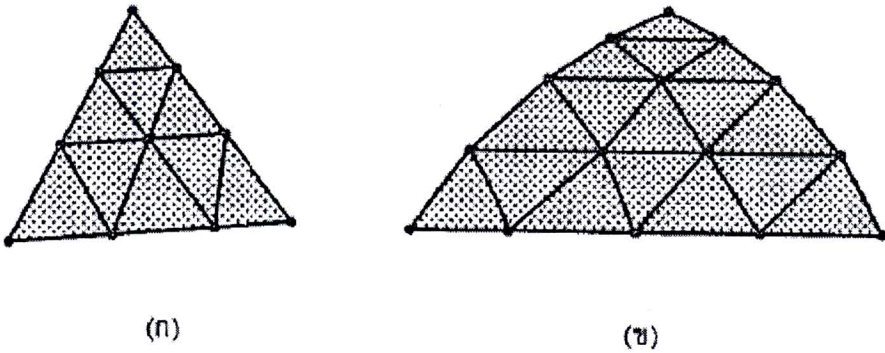
ด้านโค้ง 16 จุดต่อ

ภาพที่ 11 เอลิเมนต์สี่เหลี่ยมสองมิติที่ประกอบด้วยจุดต่อต่างๆ (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

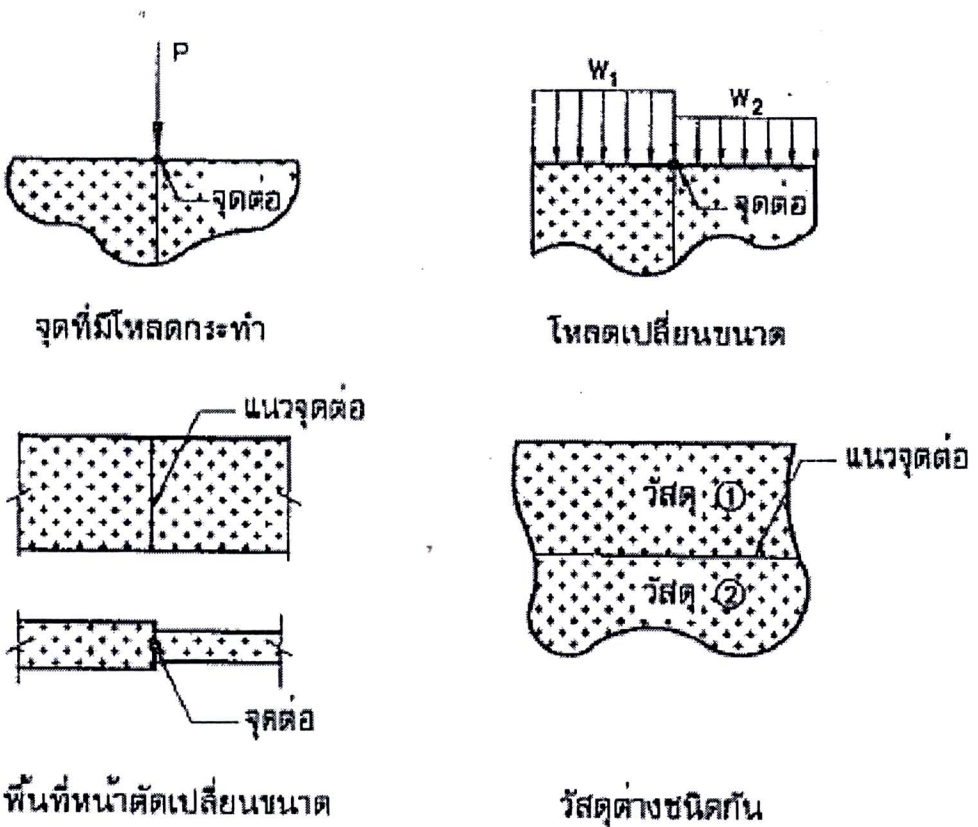
2.6 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย

การวิเคราะห์ชิ้นส่วนเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จำเป็นต้องแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์ย่อยที่เกี่ยวข้องกันด้วยจุดต่อ เพื่อความสะดวกจะพิจารณาปัญหาสามมิติ โดยเลือกใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านตรงที่ประกอบสามจุดต่อ เช่น ในภาพที่ 12 (ก) ส่วนปัญหาสามมิติก็ใช้หลักการเดียวกัน

การแบ่งชิ้นส่วนอาจจะเริ่มแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม หรือสามเหลี่ยมที่มีขนาดใหญ่ๆ ก่อนแล้วจึงแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยอีกครั้งหนึ่ง ตำแหน่งของจุดต่อ (node) ภายนอกของเอลิเมนต์ย่อยควรจะอยู่ในตำแหน่งที่มีการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของชิ้นส่วน หรือตำแหน่งที่มีโหลดกระทำ หรือตำแหน่งที่มีการใช้วัสดุต่างกัน ตำแหน่งจุดต่อเหล่านั้นดูได้จากภาพที่ 13



ภาพที่ 12 การแบ่งชิ้นส่วนออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)



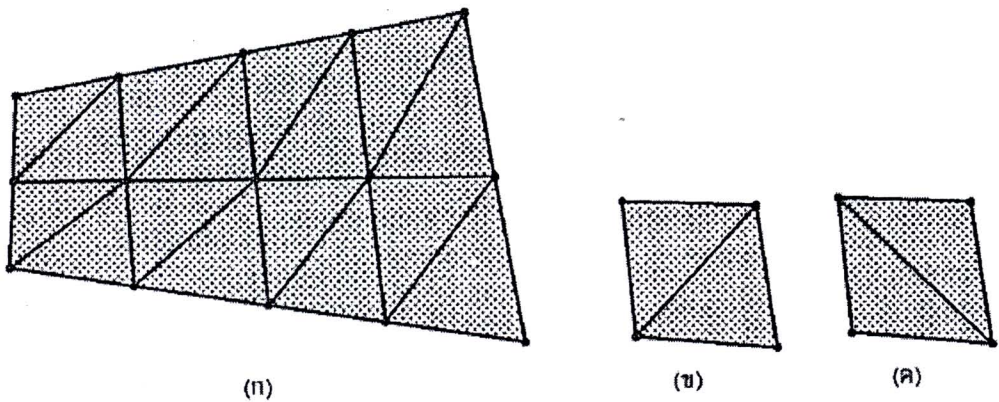
ภาพที่ 13 ตำแหน่งของจุดต่อที่สำคัญ (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

ชิ้นส่วนรูปสามเหลี่ยมในรูป ภาพที่ 12 (ก) ก่อนข้างจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อยได้
ง่ายคือ กำหนดจุดต่อในแต่ละด้านของสามเหลี่ยมให้มีจำนวนเท่ากัน หากเส้นโยงระหว่าง จุดต่อจะ
ได้จุดต่อตรงที่เส้นตัดกันเพิ่มขึ้น ตามภาพที่ 12 (ก) ชิ้นส่วนจะถูกแบ่งออกเป็น 9 เอลิเมนต์ แต่ละ
ด้านจะมีสี่จุดต่อ ระยะระหว่างจุดต่อของแต่ละด้านของสามเหลี่ยมไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ขนาดของ

เอลิเมนต์แต่ละเอลิเมนต์จึงมีขนาดแตกต่างกันตามที่ต้องการ ถ้าเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้วยกัน เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านเท่าจะให้ผลเฉลยที่ดีที่สุด แต่ถ้าจำเป็นต้องใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมใดๆ มุมภายในของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมควรจะอยู่ระหว่าง 30° ถึง 120°

ในกรณีของชิ้นส่วนเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านโค้ง เราอาจใช้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมด้านตรงแทน เช่น ในภาพที่ 12 (ข) ซึ่งทำให้ขนาดของแบบจำลองคลาดเคลื่อนไปเล็กน้อยตามเส้นไขว้ปลา ส่วนจำนวนของเอลิเมนต์ทั้งหมดในชิ้นส่วนจะเท่ากับ $(n-1)^2$, n คือจำนวนจุดต่อของแต่ละด้านของชิ้นส่วนสามเหลี่ยมที่ต้องการจะแบ่งเป็นเอลิเมนต์ย่อย

สำหรับชิ้นส่วนรูปสี่เหลี่ยมในภาพที่ 14 (ก) การแบ่งเอลิเมนต์ย่อยๆ นั้น ทำให้สะดวกคือ กำหนดจุดต่อในแต่ละด้านของสี่เหลี่ยม ลากเส้นระหว่างจุดต่อที่อยู่ตรงข้าม,

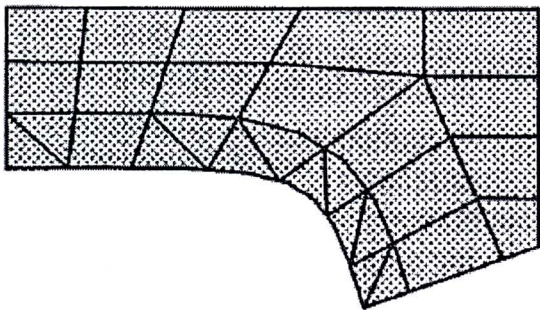


ภาพที่ 14 การแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

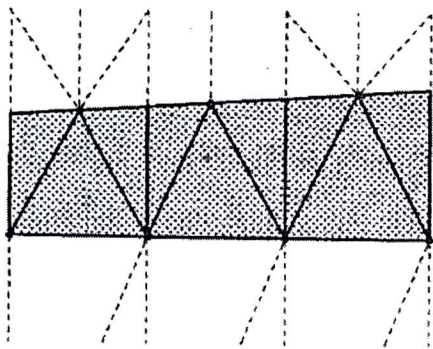
จุดตัดของแต่ละเส้นจะเป็นจุดต่อภายในของชิ้นส่วน และถ้าประสงค์ จะแบ่งเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยก็ทำได้ โดยลากเส้นทแยงมุมของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม การลากเส้นทแยงมุมนั้นควรจะเลือกเส้นทแยงมุมที่สั้นที่สุด เพราะจะทำให้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมมีสัดส่วนใกล้เคียงสามเหลี่ยมด้านเท่ามากขึ้น ดูตัวอย่างในภาพที่ 14 (ข) และ (ค) ในกรณีที่เลือกใช้อิเลเมนต์สี่เหลี่ยม สัดส่วนด้านยาวสุดต่อด้านสั้นสุดของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมควรจะเท่ากับ 1 จึงจะทำให้เฉลยใกล้เคียงกับค่าแม่นยำตรง มากขึ้น

จำนวนจุดต่อบนด้านที่ใกล้กันของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมอาจจะแตกต่างกัน แต่จำนวนจุดต่อที่ด้านตรงข้ามจะต้องมีจำนวนเท่ากัน เว้นแต่ต้องการลด หรือขยายขนาดของเอลิเมนต์ระยะระหว่างจุดต่ออาจจะแตกต่างกันซึ่งทำให้เอลิเมนต์มีขนาดเล็กใหญ่ตามต้องการ จำนวนจุดต่อบนด้านประกอบมุมของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมที่ต้องการแบ่งออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย

ในภาพที่ 15 ระยะระหว่างจุดต่อของชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมจะมีขนาดต่างกัน ทั้งนี้เพื่อให้เอลิเมนต์ในบริเวณขอบที่เป็นส่วนโค้งมีขนาดเล็ก คือพยายามทำให้แบบจำลองมีขนาดใกล้เคียงกับขนาดของชิ้นส่วนจริงมากที่สุด ปกติไม่นิยมแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดเท่ากัน และมีรูปร่างเหมือนกันตลอดชิ้นส่วน เพราะบริเวณที่มีความเค้นสูง หรือบริเวณที่มีความแตกต่างของอุณหภูมิ ควรจะแบ่งให้มีเอลิเมนต์ขนาดเล็กๆ ส่วนบริเวณที่ไกลออกไปจะแบ่ง



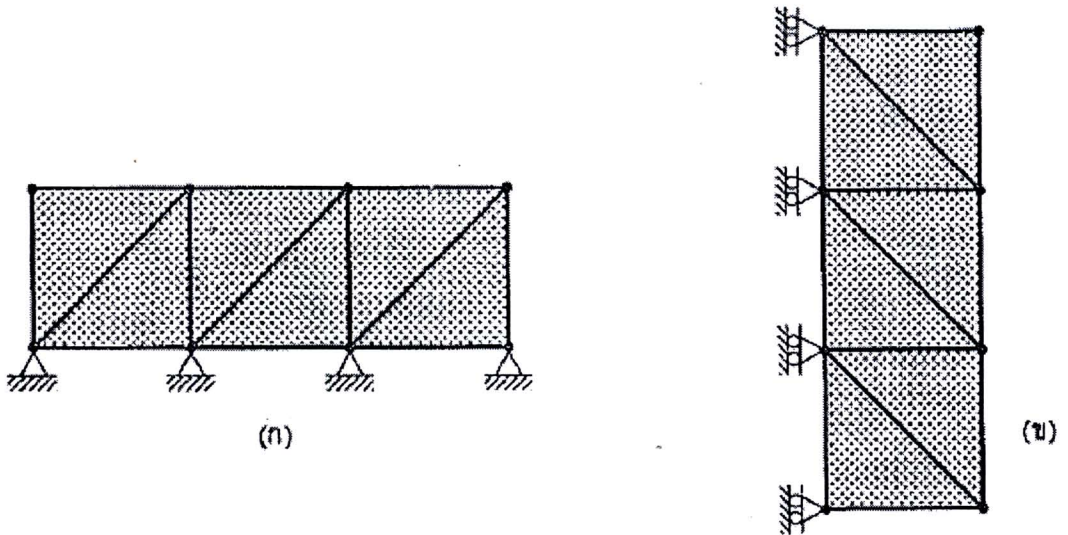
ภาพที่ 15 การแบ่งชิ้นส่วนสี่เหลี่ยมโค้งออกเป็นเอลิเมนต์สี่เหลี่ยม และสามเหลี่ยมย่อย (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)



ภาพที่ 16 การขยายขนาดของเอลิเมนต์สามเหลี่ยม (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

ให้มีขนาดโตขึ้น การเปลี่ยนขนาดของเอลิเมนต์จะมีประโยชน์มากสำหรับการวิเคราะห์ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน วิธีที่ง่ายที่สุดของการเปลี่ยนแปลงขนาดของเอลิเมนต์คือ กำหนดให้จำนวนจุดต่อบนด้านตรงข้ามของเอลิเมนต์สี่เหลี่ยมให้แตกต่างกันเช่นในภาพที่ 16 เป็นต้น

การวิเคราะห์ปัญหาทางกลศาสตร์ของแข็ง จำเป็นต้องกำหนดลักษณะการเคลื่อนที่ของจุดต่อต่างๆ ด้วย โดยทั่วไปจุดต่อที่ไม่มีการเคลื่อนที่จะแทนด้วยการยึดแบบสลัก (pin connection) เช่น ในภาพที่ 17 (ก) แต่ถ้าจุดต่อเคลื่อนที่ในทิศทางเดียวจะแทนด้วย



ภาพที่ 17 การยึดจุดต่อ (ก) ยึดแบบสลัก (ข) ยึดแบบล้อหมุน (ปราโมทย์ เตชะอำไพ, 2547)

การยึดแบบล้อหมุน ภาพที่ 17 (ข) ซึ่งชิ้นส่วนสามารถจะเคลื่อนที่ในแนวดิ่งได้ แต่ไม่สามารถเคลื่อนที่ในแนวระดับ ส่วนการที่จะกำหนดให้จุดต่อเคลื่อนที่อย่างไรนั้นจะขึ้นอยู่กับลักษณะของปัญหา

3. การวิเคราะห์การสั่นสะเทือนด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

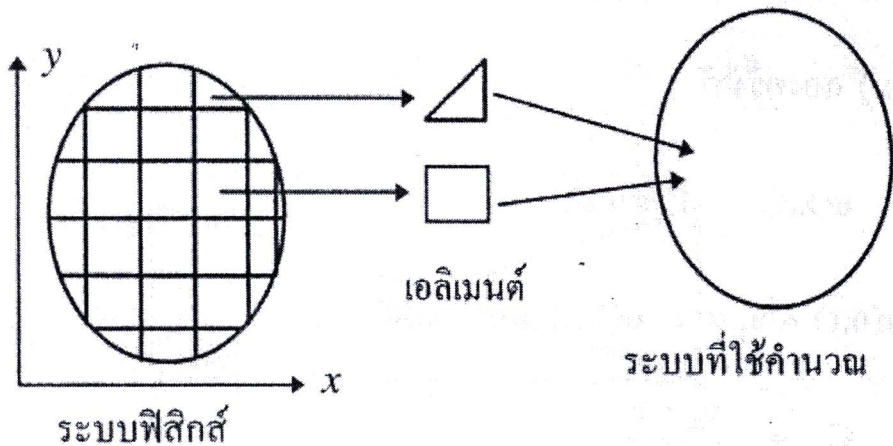
วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ เป็นวิธีการคำนวณเชิงตัวเลขวิธีหนึ่งที่ได้รับคามนิยมมาก ในปัจจุบัน เนื่องจากการคำนวณด้วยวิธีนี้จะต้องอาศัยคอมพิวเตอร์ช่วยในการคำนวณ และปัจจุบันคอมพิวเตอร์มีความเร็วสูง และมีหน่วยความจำขนาดใหญ่ ทำให้สามารถคำนวณงานต่างๆ โดยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ง่ายขึ้น และเร็วขึ้นกว่าสมัยก่อนมาก

การคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถประยุกต์ใช้ในการคำนวณได้หลายสาขาวิชา เช่น สถิติศาสตร์ พลศาสตร์ ไฟฟ้า ความร้อน และของไหล เป็นต้น การคำนวณอาจคำนวณปัญหาแบบเชิงเส้น หรือไม่เชิงเส้นก็ได้ ขึ้นอยู่กับงานที่ต้องการวิเคราะห์

หลักการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ จะทำโดย แบ่งระบบใหญ่ๆ ออกเป็นเอลิเมนต์เล็กๆ แล้วใช้ทฤษฎีของระบบแบบต่อเนื่องสร้างเมทริกซ์สำหรับเอลิเมนต์ทุกๆ เอลิเมนต์

ในระบบใหญ่นั้น แล้วนำเมทริกซ์ของเอลิเมนต์เหล่านั้นมารวมกันเพื่อคำนวณหาผลเฉลยของทั้งระบบออกมา

ในบทนี้จะแนะนำวิธีการสร้างเมทริกซ์มวลและเมทริกซ์สปริงด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ ที่จะใช้ในการคำนวณหาค่าเจาะจงและเวกเตอร์เจาะจงของ ระบบ โครงสร้างที่ประกอบขึ้นมาจากคาน ทั้งแบบมิติเดียวและสองมิติ เพื่อใช้เป็นแนวทางที่จะใช้ศึกษาวิธีการคำนวณด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ของระบบแบบอื่นๆต่อไป

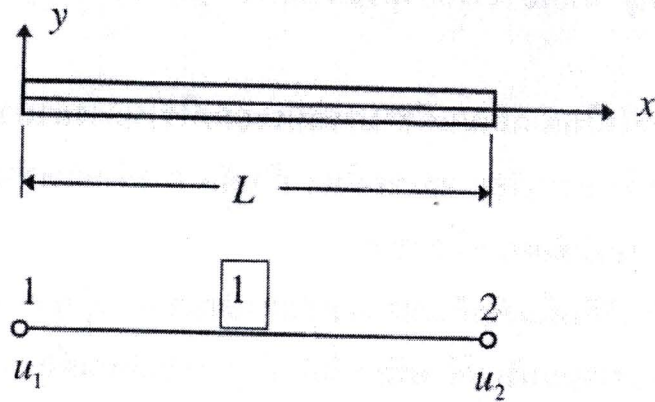


ภาพที่ 18 แนวความคิดของวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (ธนู นุญฉาย, 2541)

3.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ในการพิจารณาคานที่มีการสั่นสะเทือนในแนวแกน จะพิจารณาว่าคานเป็นเอลิเมนต์ที่มี 2 ปลาย โดยที่แต่ละปลายมีการเคลื่อนที่ในแนวแกนเป็น u ดังนั้นในแต่ละปลายจะมีระดับความเป็นเสรีขึ้นเดียว แต่เมื่อพิจารณาทั้งคาน จะกลายเป็นระดับความเสรีสองชั้น ในภาพที่ 19 แสดงถึงคานในทางฟิสิกส์ เมื่อทำแบบจำลองในรูปของเอลิเมนต์แล้ว แต่ละปลายจะเรียกว่าจุดต่อ และตัวเอลิเมนต์ของคานจะเรียกว่าเอลิเมนต์แบบอย่าง สำหรับในภาพที่ 19 นี้ เอลิเมนต์แบบอย่างมี 2 จุดต่อคือ จุดต่อ 1 และจุดต่อ 2 โดยที่แต่ละจุดต่อมีเงื่อนไขที่ขอบคือ จุดต่อ 1 มีการกระจัดเป็น u_1 และจุดต่อ 2 มีการกระจัดเป็น u_2 และจากสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยของการสั่นสะเทือน

$$EA = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x} = m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad (3-48)$$



ภาพที่ 19 ระบบคานและเอลิเมนต์แบบต่างๆ (ชนู นุชฉาย, 2541)

ถ้าพิจารณาระบบแบบสถิตยศาสตร์ ดังนั้น $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0$ สมการ (3-48) จะได้

$$\frac{d^2 u(x,t)}{dx^2} = 0 \quad (3-49)$$

อินทิเกรตสมการ (3-49) สองครั้งได้

$$u(x,t) = c_1 x + c_2 \quad (3-50)$$

แทนเงื่อนไขที่ขอบ $u(0,t) = u_1$ และ $u(L,t) = u_2$ จะได้

$$C_1 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$C_2 = u_1$$

แทนค่าคงที่ C_1 และ C_2 กลับใน (3-50) ได้

$$u(x,t) = \frac{u_2 - u_1}{L} x + u_1$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \frac{x}{L} u_2 \quad (3-51)$$

หรือกำหนดให้

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L}$$

$$N_2(x) = \frac{x}{L}$$

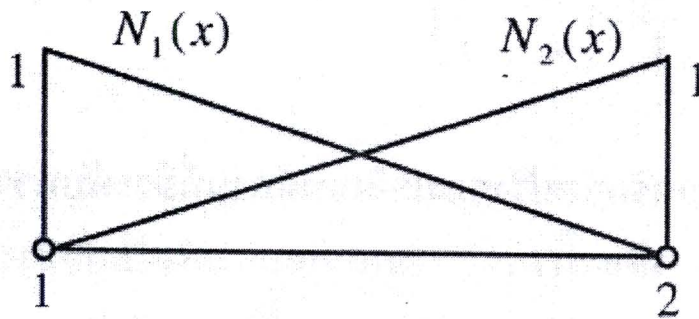
$$\therefore u(x,t) = N_1(x)u_1 + N_2(x)u_2 = \{N(x)\}^T \{u\} \quad (3-52)$$

โดยที่

$$\{N(x)\} = \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} \quad (3-53)$$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

ในที่นี้ $\{N(x)\}$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ โดยที่ $N_i(x), (i=1,2)$ จะเป็น 1 ที่จุดต่อ i และ เป็น 0 ที่จุดต่ออื่นๆ



ภาพที่ 20 แสดงฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (ธนุ จุฑาย, 2541)

3.2 เมทริกซ์ความแข็งดิ่งและเมทริกซ์มวล

ในการหาเมทริกซ์ $[K]$ จะหาได้จากพลังงานศักย์ของคาน ซึ่งพิจารณาได้จากสมการ โดยคิดว่าพื้นที่หน้าตัดของคานสม่ำเสมอ จะทำให้ EA เป็นค่าคงที่เป็น

$$V(t) = \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx \quad (3-54)$$

จากสมการ (3-52)

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \left\{ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right\}^T \{u\} \quad \{u\} = \{N'(x)\}^T \{u\}$$

แทน $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ในสมการ (3-54) ได้

$$V(t) = \frac{EA}{2} \int_0^L \{u\}^T \{N'(x)\} \{N'(x)\}^T \{u\} dx$$

หรือ

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u\}^T [K]_e \{u\} \quad (3-55)$$

โดย

$$[K]_e = EA \int_0^L \{N'(x)\} \{N'(x)\}^T dx \quad (3-56)$$

ทำอนุพันธ์ $\{N(x)\}$ เทียบ x แล้วแทนลงในสมการ (3-56) ได้

$$\begin{aligned} [K]_e &= EA \int_0^L \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{pmatrix} dx \\ \therefore [K]_e &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-57)$$

สมการ (3-57) เป็นเมทริกซ์สปริงของเอลิเมนต์คานที่มีระดับความเสรีสองชั้น และมีการสั่นสะเทือนตามแนวแกนเท่านั้น

สำหรับเมทริกซ์มวล $[M]_e$ ของเอลิเมนต์คาน จะหาได้จากพลังงานจลน์ จากหัวข้อ

พลังงานของระบบสมการ $T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$ สมมติว่าคานมีพื้นที่หน้าตัดสม่ำเสมอ

ดังนั้น ρA จะเป็นค่าคงที่สมการ $T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A(x) \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$T(t) = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx \quad (3-58)$$

จากสมการ (3-52) ถ้าพิจารณาเอลิเมนต์ในกรณีของระบบแบบพลศาสตร์ จะได้ว่าเงื่อนไขที่ขอบเปลี่ยนไปกับเวลานั้นคือ u_1 และ u_2 เป็นฟังก์ชันของเวลา ส่วนรูปร่างของการเคลื่อนที่ตามแนวแกนของส่วนต่างๆ ของคานยังถูกกำหนดด้วยฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (ฟังก์ชันรูปร่าง) $\{N(x)\}$ เหมือนเดิม ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยของสมการ (3-52) จะเป็น

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \{N(x)\}^T \{\dot{u}\} \quad (3-59)$$

แทนสมการ (3-59) ในสมการ (3-58) ได้

$$T(t) = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \{\dot{u}\}^T \{N(x)\} \{N(x)\}^T \{\dot{u}\} dx$$

หรือ

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}^T [M]_e \{\dot{u}\} \quad (3-60)$$

โดยที่

$$[M]_e = \rho A \int_0^L \{N(x)\} \{N(x)\}^T dx$$

$$[M]_e = \rho A \int_0^L \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} dx$$

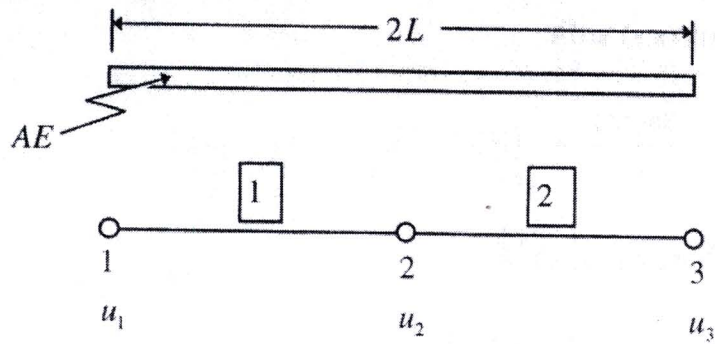
$$\therefore [M]_e = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (3-61)$$

สมการ (3-61) เป็นเมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์คานที่มีการสั่นสะเทือนตามแนวแกน

3.3 เมทริกซ์ระบบรวม

ในกรณีที่คานถูกแบ่งออกเป็นหลายเอลิเมนต์ ดังนั้นแต่ละเอลิเมนต์ก็จะมีเมทริกซ์เป็นของเอลิเมนต์ เมื่อจะทำการคำนวณพร้อมกันทั้งคาน จำเป็นที่จะต้องเอาเมทริกซ์ของ แต่ละเอลิเมนต์มารวมกันเสียก่อน เมทริกซ์ที่รวมกันแล้วเรียกว่า เมทริกซ์ระบบรวม กำหนดได้จาก

$$\left. \begin{aligned} [K]_G &= \sum_{i=1}^N [K]_{ei} \\ [M]_G &= \sum_{i=1}^N [M]_{ei} \end{aligned} \right\} \quad (3-62)$$



ภาพที่ 21 คานที่แบ่งออกเป็น 2 เอลิเมนต์ (ธนุ จุฑาฉาย, 2541)

เพื่อความเข้าใจในการสร้างเมทริกซ์ระบบรวมจะพิจารณาระบบในรูปที่ 8.4 คานยาว $2L$ เมื่อแบ่งคานออกเป็น 2 เอลิเมนต์ ทำให้แต่ละเอลิเมนต์ยาว L แต่ละเอลิเมนต์จะมีเมทริกซ์ $[K]$ เป็น

$$[K]_{e1} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \end{matrix} \quad (3-63)$$

$$[K]_{e2} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{matrix} \quad (3-64)$$

โดยที่ K_{ij}^e หมายถึง เทอมที่ ij ของเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ e

เมื่อนำเมทริกซ์ $[K]_{e1}$ และ $[K]_{e2}$ มารวมกันให้เป็นเมทริกซ์ระบบรวม $[K]_G$ จะต้องทำการรวมกันให้ตรงตามตำแหน่งของ u_i โดยที่ตำแหน่งของ u_i ตรงกันก็จะรวมกัน จากตัวอย่าง เมื่อนำสมการ (3-63) รวมกับสมการ (3-64) จะได้เมทริกซ์ระบบรวมเป็น

$$[K]_G = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow u_1 \\ \leftarrow u_2 \\ \leftarrow u_3 \end{matrix} \quad (3-65)$$

3.4 การสั่นสะเทือนของคานแบบมิตติเดียว

ในการวิเคราะห์การสั่นสะเทือนของคาน จะทำโดยตั้งสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบเดียวกันกับในบทก่อนๆ ในกรณีของคานนี้สามารถตั้งสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยได้โดยง่าย เนื่องจากได้ทำการหาเมทริกซ์มวลและเมทริกซ์สปริงมาก่อนแล้ว ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่จะกำหนดได้จาก

$$[M]_G \{\ddot{u}\} + [K]_G \{u\} = 0 \quad (3-66)$$

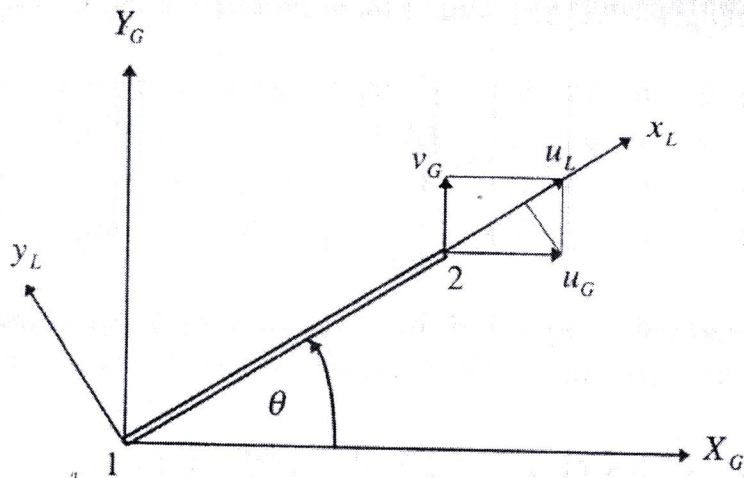
สมการ (3-66) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบอิสระของระบบที่ไม่มีตัวหน่วง ซึ่งจะใช้หลักการวิเคราะห์แบบเดียวกันกับระบบมวลแบบเป็นก้อน โดยเปลี่ยนสมการ (3-66) ให้เป็นปัญหาแบบไอเกน แล้วหาค่าเฉพาะและเวกเตอร์เฉพาะออกมา

3.5 การสั่นสะเทือนของคานแบบสองมิติ

จากหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึง การสั่นสะเทือนของคานแบบมิตติเดียว ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะการสั่นสะเทือนในแนวแกนของคานเท่านั้น แต่ถ้าระบบประกอบขึ้นจากคานหลายอันที่มีได้ อยู่ในแนวเดียวกัน เช่น คานอาจจะอยู่ในลักษณะที่เอียงทำมุมกับแกน x เป็น θ ตามรูปที่ 22 ในกรณีนี้ เมทริกซ์ของเอลิเมนต์ $[K]_L$ และ $[M]_L$ ในแบบเดิมไม่สามารถนำมาใช้ได้โดยตรงแต่จะต้องทำการแปลงเมทริกซ์ของเอลิเมนต์เสียก่อน จึงจะนำมาใช้ในการคำนวณได้

พิจารณารูปที่ 22 เอลิเมนต์คานอยู่ในระบบแกนย่อย x_L, y_L ซึ่งเอียงทำมุมกับ X_G เป็นมุม θ โดยที่ X_G, Y_G เป็นระบบแกนรวมใหญ่ เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ที่ปลายด้านหนึ่งของคาน สมมติว่าที่ปลายด้านขวาของคานมีการเคลื่อนตัวไปเป็น u_L และเมื่อแตก u_L ออกมาให้ อยู่ในระบบแกนรวมใหญ่จะได้เป็น u_G และ v_G ซึ่งจะทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ที่ปลายคานในระบบแกนย่อย u_L และระบบแกนรวมใหญ่ u_G, v_G เป็น

$$u_L = u_G \cos \theta + v_G \sin \theta \quad (3-67)$$



ภาพที่ 22 คานที่เอียงทำมุมกับระบบแกนรวมใหญ่ (ธนุ จุฑาฉาย, 2541)

แต่เนื่องจากคานมี 2 ปลาย แต่ละปลายมีการเคลื่อนตัวในระบบแกนย่อยเป็น u_{1L} และ u_{2L} ดังนั้น สมการ (3-67) จะเขียนใหม่สำหรับคานแบบ 2 ปลายได้

$$\left. \begin{aligned} u_{1L} &= u_{1G} \cos \theta + v_{1G} \sin \theta \\ u_{2L} &= u_{2G} \cos \theta + v_{2G} \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (3-68)$$

เพื่อความกะทัดรัดในการเขียน จะกำหนดให้ $c = \cos \theta$ และ $s = \sin \theta$ สมการ (3-68) จะเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} u_{1L} \\ u_{2L} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1G} \\ v_{1G} \\ u_{2G} \\ v_{2G} \end{Bmatrix} = [P] \{u\}_G \quad (3-69)$$

โดยที่ $[P] = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของการแปลงการเคลื่อนตัวที่ปลายคานของระบบแกนรวมใหญ่ไปเป็นระบบแกนย่อย

สำหรับเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ $[K]_e$ และ $[M]_e$ ของคานที่ทำมุม θ ใดๆ กับระบบแกนรวมใหญ่ จะหาได้จากสมการ (8.8) และ (8.14) แต่เมทริกซ์ของเอลิเมนต์ถูกสร้างขึ้นจาก

ระบบแกนย่อย ดังนั้นเพื่อให้มีให้สับสนจะเขียนสมการ (3-55) และ (3-61) ใหม่โดยใช้ดัชนี L เพื่อแสดงถึงระบบแกนย่อย เป็น

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u\}_L^T [K]_{eL} \{u\}_L \quad (3-70)$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_L^T [M]_{eL} \{\dot{u}\}_L \quad (3-71)$$

เมื่อแทนเมทริกซ์ $\{u\}_L$ จากสมการ (3-69) ลงในสมการ (3-70) และ (3-71) จะได้

$$V(t) = \frac{1}{2} \{u\}_G^T [P]^T [K]_{eL} [P] \{u\}_G$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_G^T [P]^T [M]_{eL} [P] \{\dot{u}\}_G$$

หรือ
$$V(t) = \frac{1}{2} \{u\}_G^T [K]_{eG} \{u\}_G$$

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{u}\}_G^T [M]_{eG} \{\dot{u}\}_G$$

โดยที่
$$\begin{cases} [K]_{eG} = [P]^T [K]_{eL} [P] \\ [M]_{eG} = [P]^T [M]_{eL} [P] \end{cases} \quad (3-72)$$

จากสมการ (3-69) และ (3-72) เมทริกซ์ $[K]_{eG}$ ของเอลิเมนต์ e คือ

$$[K]_{eG} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

ส่วนเมทริกซ์ $[M]_{eG}$ ของเอลิเมนต์ e หาได้โดยแทนสมการ (3-69) ลงใน (3-72) จะได้

$$[M]_{eG} = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2c^2 & 2cs & c^2 & cs \\ 2cs & 2s^2 & cs & s^2 \\ c^2 & cs & 2c^2 & 2cs \\ cs & s^2 & 2cs & 2s^2 \end{bmatrix} \quad (3-74)$$

3.6 เมทริกซ์เอลิเมนต์ของคานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด

จากหัวข้อก่อนๆ ได้กล่าวถึงเอลิเมนต์ของคานที่อยู่ภายใต้การกระทำของแรงในแนวแกนซึ่งทำให้จุดต่อของเอลิเมนต์มีระดับความเสรีขึ้นเดียว และเมื่อคิดในระบบแกนรวมใหญ่จะได้ว่าแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์จะมีระดับความเสรีสองชั้น สำหรับในกรณีของเอลิเมนต์ที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์จะมีระดับความเสรีสองชั้นในระบบแกนย่อย และ

ระบบแกนรวมใหญ่ แต่ถ้านำเอลิเมนต์ที่ถูกกระทำด้วยแรงในแนวแกนมารวมด้วยแล้วก็จะทำให้แต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์มีระดับความเสรีสามขั้นทั้งในระบบแกนย่อยและระบบแกนรวมใหญ่

3.7 ฟังก์ชันการประมาณของเอลิเมนต์

พิจารณารูปที่ 23 เอลิเมนต์คานยาว L ถูกกระทำด้วยโมเมนต์คัตที่จุดต่อทั้งสองที่จุดต่อที่ 1 ถูกกระทำด้วยโมเมนต์คัต M_1 ทำให้เกิดการกระจัดทางแกน y เป็น v_1 และหมุนไปเป็นมุม θ_1 ส่วนที่จุดต่อที่ 2 ถูกกระทำด้วยโมเมนต์คัต M_2 ทำให้เกิดการกระจัดเป็น v_2 และหมุนไปเป็นมุม θ_2 จะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ในกรณีนี้จะมี 2 ตัวแปรต่อจุดต่อคือ v และ θ ทำให้ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ไม่สามารถใช้ได้ เพราะฟังก์ชันการประมาณ ใช้ได้กับเอลิเมนต์ที่มี 1 ตัวแปรต่อจุดต่อเท่านั้น ดังนั้นในกรณีนี้จะหาฟังก์ชันการประมาณโดยพิจารณาจากทฤษฎีการสันสะเทือนของคานที่อยู่ภายใต้โมเมนต์คัต โดยใช้สมการ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \quad \text{และสมมติว่าคานไม่มีการสันสะเทือนและคาน}$$

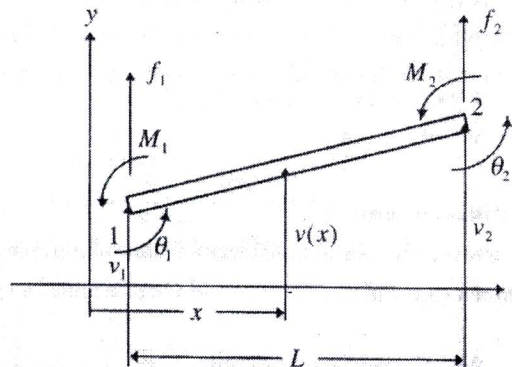
สมคูล ดังนั้นความเร่ง $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = 0$ และสมมติอีกว่าคานมีพื้นที่หน้าตัดสม่ำเสมอ และเปลี่ยน

การกระจัดจาก y เป็น v ดังนั้นสมการ $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right] = -\rho A(x) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ จะได้เป็น

$$EI \frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} = 0 \quad (3-75)$$

เมื่ออินทิเกรต 4 ครั้งจะได้

$$v(x,t) = \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (3-76)$$



ภาพที่ 23 เอลิเมนต์คานอยู่ภายใต้การกระทำของโมเมนต์คัตที่จุดต่อทั้งสอง (ธน ญฉาย, 2541)



จากรูป 23 คานมีเงื่อนไขที่จุดต่อทั้งสองเป็น

$$\begin{aligned} v(0,t) &= v_1 \\ \frac{\partial v(0,t)}{\partial x} &= \theta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(L,t) &= v_2 \\ \frac{\partial v(L,t)}{\partial x} &= \theta_2 \end{aligned}$$

เมื่อแทนเงื่อนไขที่ขอบลงในสมการ (3-76) จะหาค่าคงที่ต่างๆ ของสมการ (3-76) ได้เป็น

$$C_1 = \frac{6}{L^3} (2v_1 + L\theta_1 - 2v_2 + L\theta_2)$$

$$C_2 = \frac{2}{L^2} (-3v_1 - 2L\theta_1 + 3v_2 - L\theta_2)$$

$$C_3 = \theta_1$$

$$C_4 = v_1$$

เมื่อแทนค่าคงที่ที่กลับลงในสมการ (3-76) ได้

$$\begin{aligned} v(x,t) = & \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] v_1 + \left[\frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] L\theta_1 \\ & + \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] v_2 + \left[-\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] L\theta_2 \end{aligned} \quad (3-77)$$

$$v(x,t) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2$$

หรือ

$$v(x,t) = \{N(x)\}^T \{v\} \quad (3-78)$$

$$\{N(x)\}^T = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

โดยที่

$$\{v\}^T = [v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (3-79)$$

- เมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์

ในการหาเมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์คานในกรณีนี้ก็จะหาได้เช่นเดียวกันกับวิธีก่อนๆ โดยคิดจากพลังงานจลน์ของคานจากสมการ (3-58) ได้

$$T(t) = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \{\dot{v}\}^T \{N(x)\} \{N(x)\}^T \{\dot{v}\} dx \quad (3-80)$$

หรือ

$$T(t) = \frac{1}{2} \{\dot{v}\}^T [M]_e \{\dot{v}\} \quad (3-81)$$

โดยที่

$$[M]_e = \rho A \int_0^L \{N(x)\} \{N(x)\}^T dx \quad (3-82)$$

เมื่อแทนสมการ (3-78) ลงในสมการ (3-82) ได้

$$[M]_e = \rho A \int_0^L \begin{Bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ -\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ \frac{x}{L} - 2\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\ -\left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^3 \end{Bmatrix}^T dx$$

$$\therefore [M]_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

สมการ (3-83) เป็นเมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์คานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดที่จุดต่อทั้งสอง

- เมทริกซ์สปริงของเอลิเมนต์

สำหรับเมทริกซ์สปริงของเอลิเมนต์คานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดที่จุดต่อทั้งสอง จะหาได้จาก

พลังงานศักย์ โดยใช้สมการ โดยสมมติว่าคานมีพื้นที่หน้าตัดสม่ำเสมอ และการกระจัดในแนวแกน y เป็น $v(x,t)$ จะได้

$$V(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (3-84)$$

แทนสมการ (3-78) ลงใน (3-84) ได้

$$V(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L \{v\}^T \{N''(x)\} \{N''(x)\}^T \{v\} dx \quad (3-85)$$

$$[K]_e = EI \int_0^L \{N''(x)\} \{N''(x)\}^T dx \quad (3-86)$$

โดยที่

จากสมการ (3-77) อนุพันธ์อันดับที่สองของฟังก์ชันรูปร่างคือ

$$\{N''(x)\} = \frac{2}{L_2} \begin{Bmatrix} -3 + 6\frac{x}{L} \\ -2 + 3\frac{x}{L} \\ 3 - 6\frac{x}{L} \\ -1 + 3\frac{x}{L} \end{Bmatrix} \quad (3-87)$$

แทนสมการ (3-87) ในสมการ (3-86) ได้

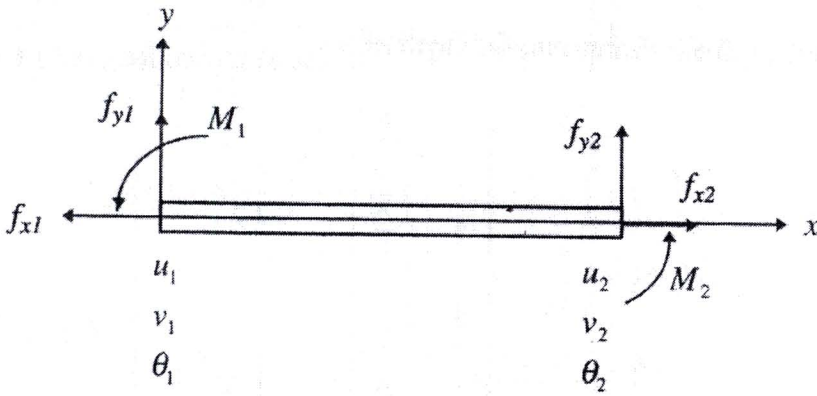
$$[K]_e = \frac{4EI}{L^4} \int_0^L \begin{Bmatrix} -3 + 6\frac{x}{L} \\ -2 + 3\frac{x}{L} \\ 3 - 6\frac{x}{L} \\ -1 + 3\frac{x}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -3 + 6\frac{x}{L} \\ -2 + 3\frac{x}{L} \\ 3 - 6\frac{x}{L} \\ -1 + 3\frac{x}{L} \end{Bmatrix}^T dx$$

$$[K]_e = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (3-88)$$

สมการ (3-88) เป็นเมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์คานที่ถูกกระทำด้วยโมเมนต์คัตที่จุดต่อทั้งสองของคาน

จากภาพที่ 24 และจากสมการ (3-83) และสมการ (3-88) เมื่อนำมาเขียนให้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ของการเคลื่อนที่ที่ปลายของคานเป็น

$$\frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22 & 54 & -13 \\ 22 & 4 & 13 & -3 \\ 54 & 13 & 156 & -22 \\ -13 & -3 & -22 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ M_1 \\ f_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (3-89)$$



ภาพที่ 24 คานที่มีระดับความเสรีสามขั้นต่อจุดต่อ (ชนู นุชฉาย, 2541)

และเมื่อนำเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ในกรณีของคานอยู่ภายใต้โมเมนต์คัตไปรวมกับเมทริกซ์ของเอลิเมนต์ของคานที่อยู่ภายใต้แรงตามแนวแกน ก็จะทำให้คานมีระดับความเสรีสามขั้นต่อจุดต่อ ซึ่งจะทำให้ได้เมทริกซ์ของเอลิเมนต์ของมวลและสปริงเป็น

$$[M]_e = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 & 0 & 54 & -13 \\ 0 & 22 & 4 & 0 & 13 & -3 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 & 0 & 156 & -22 \\ 0 & -13 & -3 & 0 & -22 & 4 \end{bmatrix} \quad (3-90)$$

$$[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^3} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{2EI}{L^3} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^3} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^3} \\ 0 & \frac{6EI}{L^3} & \frac{2EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^3} & \frac{4EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (3-91)$$

และเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่ของปลายคานคือ

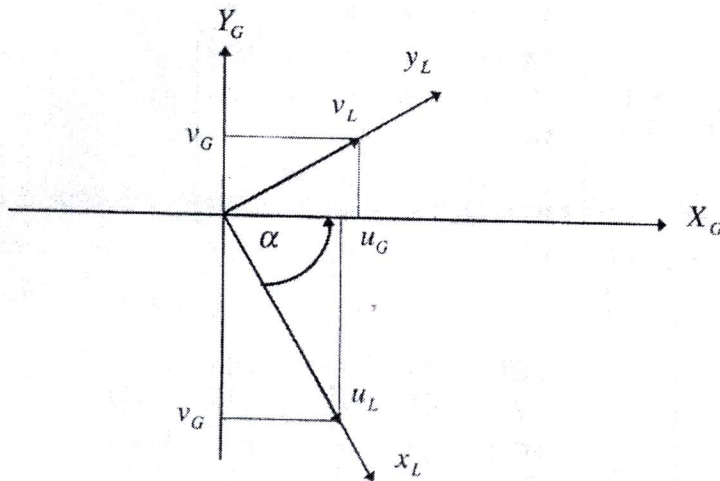
$$\{v\}^T = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2] \quad (3-92)$$

3.8 เอลิเมนต์ในระบบแกนรวมใหญ่

ในกรณีที่เอลิเมนต์เอียงทำมุม α กับระบบแกนใหญ่ จำเป็นที่จะต้องแปลงเอลิเมนต์จากระบบแกนย่อยไปเป็นระบบแกนใหญ่เสียก่อน ในกรณีนี้ระบบของการแปลงการเคลื่อนตัวที่ปลายของคานจะแตกต่างจากหัวข้อ 3.3.6 เนื่องจากคานมีการเคลื่อนตัวไปทั้งแกน x และ y ดังนั้น เมทริกซ์การแปลงจะหาได้โดยพิจารณาจากภาพที่ 25 ซึ่งกำหนดการเคลื่อนตัวในระบบแกนย่อยเทียบกับระบบแกนรวมใหญ่ได้เป็น

$$u_L = u_G \cos \alpha - v_G \sin \alpha$$

$$v_L = u_G \sin \alpha + v_G \cos \alpha$$



ภาพที่ 25 ลักษณะการเคลื่อนตัวที่จุดต่อในระบบแกนย่อยเทียบกับระบบแกนรวมใหญ่

(ธนุ จุฑาย, 2541)

และเมทริกซ์การแปลงเมื่อคิดการหมุนตัวของจุดต่อไปเป็นมุม θ ด้วยจะได้

$$\begin{Bmatrix} u_L \\ v_L \\ \theta_L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_G \\ v_G \\ \theta_G \end{Bmatrix} \quad (3-93)$$

และสำหรับเอลิเมนต์คานที่มีสองจุดต่อจะกำหนดสมการ (3-93) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ v_{L1} \\ \theta_{L1} \\ u_{L2} \\ v_{L2} \\ \theta_{L2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ v_{G1} \\ \theta_{G1} \\ u_{G2} \\ v_{G2} \\ \theta_{G2} \end{Bmatrix} \quad (3-94)$$

$$\{u\}_L = [P]\{u\}_G$$

โดยที่ $c = \cos \alpha, s = \sin \alpha$

เมทริกซ์ของเอลิเมนต์คานที่เอียงทำมุม α กับระบบแกนรวมใหญ่จะกำหนดได้เช่นเดียวกันกับสมการ (3-72) คือ

$$\begin{aligned} [K]_{eG} &= [P]^T [K]_{eL} [P] \\ [M]_{eG} &= [P]^T [M]_{eL} [P] \end{aligned}$$

โดยที่

$$[P] = \begin{bmatrix} c & -s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & -s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ส่วน $[K]_{eL}$ และ $[M]_{eL}$ กำหนดได้จากสมการ (3-90) และ (3-91) ตามลำดับ