

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยแบบกรณีศึกษา (Case Study) ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพที่เน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล (Protocol Analysis) และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ (Analytical Description) มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 กลุ่มเป้าหมายของการวิจัยครั้งนี้เป็น ครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 1 คน และนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ซึ่งได้รับการจัดการเรียนรู้จากครูกลุ่มเป้าหมาย จำนวน 3 คน จากโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยและการอภิปรายผลตามหัวข้อ ดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา
2. ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับกลุ่มเป้าหมาย
 - 2.1 ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับครูกลุ่มเป้าหมาย
 - 2.2 ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย
3. การวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
 - 3.1 การวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในแต่ละกิจกรรม
 - 3.1.1 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
 - 3.1.2 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
 - 3.1.3 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ต่อ)
 - 3.1.4 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
 - 3.1.5 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ต่อ)
 - 3.1.6 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 6 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ต่อ)

3.2 สรุปรูปการวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.2.1 สรุปรูปการวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.2.2 ขั้นตอนวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4. การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren

4.1 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประเภทของสมการ

4.2 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.3 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.4 สรุปรูปการวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren

5. สรุปรูปการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

6. อภิปรายผล

6.1 อภิปรายผลการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

6.2 อภิปรายผลระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

6.3 อภิปรายผลการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

6.4 อภิปรายผลความสัมพันธ์ระหว่างการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

1. ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา

โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา เปิดสอนนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึงระดับมัธยมศึกษาปีที่ 6 ระดับชั้นละ 6 ห้องเรียน และมีอาคารเรียนทั้งหมด 6 หลัง จำนวนนักเรียน 1,303 คน จำนวนครู 83 คน

2. ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ ประกอบด้วย ครูที่สอนคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 1 คน และนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ซึ่งได้รับการจัดการเรียนรู้จากครูกลุ่มเป้าหมาย จำนวน 3 คน จากโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น(ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น สังกัดสำนักงานคณะกรรมการการอุดมศึกษา ซึ่งกลุ่มเป้าหมายเข้าร่วมการวิจัยด้วยความสมัครใจ ผู้วิจัยขอแนะนำเสนอข้อมูลพื้นฐานของกลุ่มเป้าหมาย ดังนี้

2.1 ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับครูกลุ่มเป้าหมาย

ครูในกรณีศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นครูที่สอนคณิตศาสตร์ โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น จบการศึกษาระดับปริญญาตรี ศึกษาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา วิชาเอก เกม – คณิตศาสตร์ จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น และจบการศึกษาระดับปริญญาโท ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา จากมหาวิทยาลัยขอนแก่น มีประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ 7 ปี และประสบการณ์การสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 6 ปี ภาระงานที่ได้รับมอบหมาย ได้แก่ งานการสอน รับผิดชอบสอนวิชาคณิตศาสตร์ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 และ 2 จำนวน 19 คาบ/สัปดาห์ และกิจกรรมพัฒนาผู้เรียนจำนวน 4 คาบ/สัปดาห์ งานพิเศษ รับผิดชอบงานวิชาการ

2.2 ข้อมูลพื้นฐานเกี่ยวกับนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย

นักเรียนกลุ่มเป้าหมาย เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 ที่ได้รับการจัดการเรียนรู้จากครูกลุ่มเป้าหมาย จำนวน 3 คน และเพื่อให้ไม่เป็นการเปิดเผยข้อมูลของกลุ่มเป้าหมาย ผู้วิจัยขอใช้นามสมมติในการนำเสนอข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย ดังนี้

คนที่ 1 ชื่อ น้ำ เป็นนักเรียนหญิง บิดามีอาชีพรับราชการตำรวจ มารดาประกอบธุรกิจส่วนตัว น้ำเป็นลูกคนเดียว อาศัยอยู่กับบิดาและมารดาที่บ้านในตัวอำเภอเมืองขอนแก่น การไป-กลับโรงเรียน มารดาเป็นคนมาส่งและรับกลับ เข้าเรียนที่โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา เมื่อปีการศึกษา 2552 ผลการสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ 4.00 น้ำชอบวิชาคณิตศาสตร์ที่สุด เพราะเป็นวิชาที่ถนัดที่สุด น้ำเป็นคนเรียนเก่ง มีความสนใจและตั้งใจเรียน เป็นคนช่างถาม กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น มีความรับผิดชอบ ตั้งใจทำงานที่ได้รับมอบหมายเป็นอย่างดี ทำงานเป็นระเบียบ ขยันหมั่นเพียร เป็นคนร่าเริงแจ่มใส ในอนาคตใฝ่ฝันอยากเป็นแพทย์หญิง หรือเภสัชกร ในวันเสาร์อาทิตย์ไปเรียนพิเศษ งานอดิเรก เล่นเกม คอมพิวเตอร์ อินเทอร์เน็ต และอ่านหนังสือนิยาย

คนที่ 2 ชื่อ ปิง เป็นนักเรียนหญิง บิดาและมารดาประกอบธุรกิจส่วนตัว ปิงมีพี่น้อง 3 คน มีพี่ชาย 2 คน ปิงเป็นลูกสาวคนเล็ก อาศัยอยู่กับบิดาและมารดาที่บ้านในตัวอำเภอเมืองขอนแก่น การไป-กลับ โรงเรียน ผู้ปกครองเป็นคนมาส่งและรับกลับ เข้าเรียนที่โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา เมื่อปีการศึกษา 2552 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ 4.00 ปิงคิดว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากในบางเรื่อง ถ้าเรื่องที่ปิงเข้าใจจะไม่ยาก แต่ถ้าเป็นเรื่องที่ปิงไม่เข้าใจปิงจะคิดว่าเป็นวิชาที่ยาก แต่ใช้วิธีการถามเพื่อนหรือครู หรือย้อนกลับไปดูแบบฝึกหัดที่ได้ทำมาเปรียบเทียบกับแบบฝึกหัดข้อใหม่ที่ต้องทำ ปิงเป็นคนเรียนค่อนข้างเก่ง มีความสนใจและตั้งใจเรียน มีถามครูบ้างเมื่อเวลาที่ไม่เข้าใจ เมื่ออธิบายแล้วทำได้ แต่ต้องใช้เวลาในการคิดด้วยตัวเองหลังจากที่ครูอธิบายแล้ว พุดบ้างเวลาครูถาม ชอบทำแบบฝึกหัด มีความรับผิดชอบ ตั้งใจทำงานที่ได้รับมอบหมายแต่ต้องมีเงื่อนไข ทำงานเป็นระเบียบ ขยันหมั่นเพียร เป็นคนร่าเริงแจ่มใส ในอนาคตใฝ่ฝันอยากเป็นนักธุรกิจ ในวันเสาร์อาทิตย์ไปเรียนพิเศษ งานอดิเรก อ่านนิยาย เล่นเกม และเล่นเปียโน

คนที่ 3 ชื่อ ปาย เป็นนักเรียนหญิง บิดาเป็นอาจารย์อยู่คณะเภสัชศาสตร์มหาวิทยาลัยขอนแก่น มารดาเป็นพยาบาลวิชาชีพ อยู่ศูนย์บำบัดรักษาเยาเสพคิดขอนแก่น ปายมีพี่น้องสองคน มีน้องชาย 1 คน อาศัยอยู่กับบิดาและมารดาที่บ้านพักใกล้กับมหาวิทยาลัยขอนแก่น การไป-กลับ โรงเรียน บิดาเป็นคนมาส่งและรับกลับ เข้าเรียนที่โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา เมื่อปีการศึกษา 2552 ผลการสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อยู่ในระดับ 3.00 ปิงคิดว่าวิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก ต้องจำสูตรถึงจะทำได้ เป็นคนเรียนไม่ค่อยเก่ง และเรียนช้า ต้องอธิบายหลายๆ รอบจึงจะเข้าใจ ตั้งใจเรียนในห้องเป็นบางครั้ง และชอบจดถึงแม้ว่าจะเข้าใจสิ่งที่จดหรือไม่ก็ตาม จดไปเพื่อที่จะนำไปทบทวนและทำความเข้าใจใหม่อีกครั้ง แต่ไม่กล้าถาม หรือแสดงความคิดเห็น มีความรับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมายเป็นบางครั้ง ครู

จะต้องตามงานหรือทวงงาน เป็นคนร่าเริงแจ่มใส ในอนาคตไม่ได้ตั้งเป้าหมายไว้ในระยะยาว แต่อยากสอบผ่านเข้าเรียนในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่โรงเรียนเดิม ในวันเสาร์อาทิตย์ไปเรียนพิเศษ งานอดิเรก ดูหนัง ฟังเพลง เล่นคอมพิวเตอร์ และอ่านนิยาย

3. การวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.1 การวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในแต่ละกิจกรรมการเรียนรู้

3.1.1 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ครูเริ่มจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นเรียน โดยเล่าเรื่องที่เป็นอุทาหรณ์เตือนใจให้ทุกคนมอบความรักให้กับบุพการีของตนเองให้มาก พร้อมเน้นย้ำเกี่ยวกับเรื่องการสอบเก็บคะแนนท้ายบทในวันพรุ่งนี้ ซึ่งเป็นขั้นนำเพื่อให้ นักเรียนได้เตรียมพร้อมก่อนเริ่มเรียน ในลำดับต่อมา ครูเริ่มจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งเป้าหมายของครูเพื่อให้นักเรียนเกิดมโนคติเกี่ยวกับเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้วิเคราะห์การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 1 เป็นไปตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1.1.1 ขั้นตอนที่ 1 ครูอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

โดยครูเริ่มอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเขียนคำว่า “สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว” ลงบนกระดานพร้อมทั้งขีดเส้นใต้คำว่า สมการ เพื่อเป็นการเน้นคำว่าสมการ จากนั้น ครูทบทวนความหมายของสมการเพื่อให้นักเรียนเกิดการเชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ โดยการถามนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของสมการและถามถึงเพลงสมการที่นักเรียนได้เรียนในระดับประถมศึกษา “สมการ สมการ สมการ สมการคือ ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ” จากนั้นครูสรุปความหมายของสมการโดยครูพูดว่า “สมการ หมายถึงประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ” แต่ครูไม่ได้เขียนความหมายของสมการนี้ลงบนกระดาน และครูเน้นอีกครั้งว่า “ประโยคสัญลักษณ์ใดๆ ก็ตามที่มีเครื่องหมายเท่ากับเป็นสมการทั้งหมด” นอกจากนี้ ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อมาประกอบการอธิบายให้นักเรียนเข้าใจความหมายของสมการได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น โดยครูเขียนตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นสมการพร้อมทั้งถามนักเรียนว่า ประโยคสัญลักษณ์ดังกล่าวเป็นสมการหรือไม่ ดังต่อไปนี้

$$3 = 4$$

$$x + 2 = 5$$

$$4 + 3 = 8$$

$$2 = 1 + 1$$

จากนั้นครูอธิบายว่า ประโยคสัญลักษณ์เหล่านี้เป็นสมการทั้งหมด และประโยคสัญลักษณ์อื่นๆ ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ เป็นสมการทั้งหมด

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดและการเขียนในการนำเสนอคำว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งเน้นให้นักเรียนเห็นคำว่า สมการ จากนั้นจึงเชื่อมโยงไปในยังความรู้เดิมของนักเรียนเรื่องสมการ และครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาที่เป็น การพูด ในการอธิบายความหมายของคำว่า สมการ และจะเห็นว่าในขั้นตอนนี้ครูไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่ง นำเสนอเป็นตัวอักษรเพื่อประกอบการอธิบายความหมายของคำว่า สมการให้ชัดเจนยิ่งขึ้น

(3) ครูได้ใช้การนำเสนอตัวอย่างเพื่อประกอบการอธิบายความหมายของสมการที่หลากหลาย แต่ครูยังไม่ได้ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ที่ไม่ใช่สมการ

3.1.1.2 ขั้นตอนที่ 2 ครูอธิบายประเภทของสมการ

ในขั้นตอนนี้ครูพยายามอธิบายประเภทของสมการ โดยครูให้นักเรียนพิจารณาตัวอย่างสมการที่ได้แสดงในขั้นตอนที่ 1 ว่าสมการนั้นเป็นสมการที่เป็นจริงหรือไม่ ซึ่งครูสรุปดังนี้

(1) สมการ $3 = 4$ ครูพูดว่า “ไม่เป็นจริง เป็นเท็จ” และเขียนเครื่องหมาย \times แทนคำว่า เป็นเท็จ

(2) สมการ $x + 2 = 5$ ครูพูดว่า “ไม่รู้ ไม่แน่” และให้เหตุผลว่า ยังไม่ทราบค่า x คืออะไร

(3) สมการ $4 + 3 = 8$ ครูพูดว่า “ไม่จริง เป็นเท็จ” และเขียนเครื่องหมาย \times แทนคำว่า เป็นเท็จ

(4) สมการ $2 = 1 + 1$ ครูพูดว่า “เป็นจริง” และเขียนเครื่องหมาย \checkmark แทนคำว่า เป็นจริง

หลังจากที่ครูได้อธิบายค่าความจริงของสมการที่ยกตัวอย่างแล้ว ครูได้สรุปประเภทของสมการ แบ่งออกเป็นสองประเภท คือ 1. สมการที่เป็นเท็จ 2. สมการที่เป็นจริง ซึ่งครูได้เขียนประเภทของสมการลงบนกระดาน พร้อมทั้งอธิบายความหมายของสมการแต่ละ

ประเภท ดังนี้ “สมการที่เป็นเท็จ คือ สมการที่มีเพียงแต่เครื่องหมายเท่ากับแต่ฝั่งซ้ายและฝั่งขวาไม่ได้เท่ากัน ในขณะที่ สมการที่เป็นจริง คือ สมการที่มีฝั่งซ้ายและฝั่งขวาของสมการเท่ากัน” ในลำดับต่อมาครูให้นักเรียนพิจารณาสมการ $x + 2 = 5$ ว่าจะจัดให้อยู่ในสมการประเภทใด” นักเรียนได้ตอบว่า “สมการที่มีตัวแปร” จากนั้นครูได้กล่าวซ้ำอีกว่า “เป็นสมการที่มีตัวแปร ซึ่งจะจัดให้อยู่ในประเภทสมการที่เป็นจริง” โดยครูให้เหตุผลว่า “ไม่จำเป็นต้องหาคำตอบของสมการที่เป็นเท็จ เราจะหาคำตอบเฉพาะสมการที่เป็นจริง”

จากนั้นครูสรุปเกี่ยวกับ ความหมายของสมการและประเภทของสมการอีกครั้งโดยใช้การนำเสนอในรูปแบบการพูด ดังต่อไปนี้ “สมการ คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ สมการที่เป็นเท็จและสมการที่เป็นจริง ในกรณีที่มีตัวแปร จะพิจารณาให้สมการนั้นอยู่ในรูปสมการที่เป็นจริงเพื่อที่จะหาคำตอบของสมการได้”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง ประเภทของสมการ ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดและการเขียนในการอธิบาย ประเภทของสมการ ลักษณะสมการแต่ละประเภท พร้อมทั้งเน้นให้นักเรียนเห็นความหมายของสมการที่มีตัวแปรว่าอยู่ในประเภทใดของสมการพร้อมทั้งให้เหตุผล

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ซึ่งนำเสนอเป็นตัวอย่างเพื่อเปรียบเทียบให้นักเรียนได้พิจารณาถึงความเหมือนและความแตกต่างของลักษณะของสมการแต่ละประเภท

(3) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์แทน สมการที่เป็นเท็จ คือ เครื่องหมายผิด (×) และ แทน สมการที่เป็นจริงคือ เครื่องหมายถูก (✓)

(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างในการอธิบายประเภทของสมการ เพื่อให้เห็นว่าสมการในลักษณะใดบ้างที่จัดอยู่ในประเภทสมการที่เป็นจริง หรือสมการที่เป็นเท็จ รวมถึงสมการที่มีตัวแปรด้วย

จะเห็นว่าในขั้นตอนนี้ครูได้สรุป ความหมายของสมการ ประเภทของสมการ และสมการที่มีตัวแปร แต่ครูยังไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน มีเพียงแต่ความหมายของสมการ ตัวอย่างของสมการ และประเภทของสมการเท่านั้น

3.1.1.3 ขั้นตอนที่ 3 การเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์

ในขั้นนี้ครูเริ่มโดยยกตัวอย่างประโยคภาษาขึ้นมาหนึ่งประโยค โดยการพูดว่า “หนึ่งบวกสองได้สาม” พร้อมทั้งเขียนประโยคภาษานี้ลงบนกระดาน จากนั้นครูเริ่มอธิบายคำศัพท์ที่ละตัว เริ่มต้นจาก “หนึ่ง” แทนด้วยสัญลักษณ์ คือ เลข 1 พร้อมทั้งเขียนเลข 1

ลงบนกระดานให้ตรงกับคำว่าหนึ่ง “บวก” ใส่เครื่องหมายบวก (+) “สอง” ใส่เลข 2 จะเห็นได้ว่า ครูการนำเสนอคำว่า “ได้” ของครูคือ เครื่องหมายเท่ากับ (=) นั่นคือ ครูใช้รูปแบบการนำเสนอการเท่ากัน ใน 2 รูปแบบ คือ “ได้” ซึ่งเป็นภาษา และการนำเสนอที่อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ “=”

หญิงบวก สอง ได้ สาม.

$$1 + 2 = 3$$

ภาพที่ 6 แสดงการเขียนประโยคสัญลักษณ์เป็นประโยคภาษา

จากนั้นครูยกตัวอย่างการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมากยิ่งขึ้น คือ ห้าลบสามได้สอง เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น $5 - 3 = 2$ ครูได้สรุปว่า จากทั้งสองตัวอย่างที่กล่าวมาเป็นการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์อย่างง่าย และได้กล่าวถึงสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์โดยใช้การพูดแต่ไม่ได้เขียนสัญลักษณ์นั้นลงบนกระดาน ได้แก่ บวก ลบ คูณ หาร เท่ากับ น้อยกว่า มากกว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ มากกว่าหรือเท่ากับ เมื่อครูกล่าวถึงสัญลักษณ์แล้ว ครูได้ยกตัวอย่างการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ เพิ่มเติม มีความซับซ้อนขึ้น และมีเงื่อนไขมากขึ้น เช่น จำนวนหนึ่ง ผลบวกผลต่าง ดังต่อไปนี้

- (1) ยี่สิบหารด้วยสี่ได้เท่ากับห้า

เขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น $20 \div 4 = 5$

- (2) จำนวนหนึ่งบวกห้าได้ห้าสิบ

จากประโยคภาษาข้างต้น ครูเริ่มอธิบายคำว่า “จำนวนหนึ่ง” ให้แทนด้วยตัวแปร x และเน้นกับนักเรียนว่า “ถึงแม้ว่าจะทราบแล้วว่า สิบห้าบวกห้าได้ห้าสิบ แต่ไม่ต้องเขียน $45 + 5 = 50$ ให้เขียนตามประโยคภาษา” ครูเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น $x + 5 = 50$ จะเห็นว่าครูใช้การนำเสนอ ศัพท์คำว่า “จำนวนหนึ่ง” แทนด้วยสัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ คือตัวแปร ในที่นี้ครูใช้เป็นตัวอักษร “ x ”

- (3) สี่เท่าของจำนวนหนึ่งลบกับสิบห้า

ครูเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้เป็น $4x - 15 = 8$

ครูอธิบายว่า สี่เท่าของจำนวนหนึ่ง คือ $4x$ นั่นคือ ครูนำเสนอคำว่า สี่เท่า ด้วยการคูณ

(4) สองเท่าของผลบวกจำนวนๆหนึ่งกับเจ็ด

ครูเริ่มอธิบายการเปลี่ยนประโยคภาษานี้เป็นประโยคสัญลักษณ์โดยอธิบาย คำว่า สอง คือ เลข 2 และเปิดวงเล็บ แทนคำว่า เท่า จากนั้นครูเน้นคำว่า “ผลบวก” และอธิบายต่อไปว่าเป็นผลบวกของจำนวนๆหนึ่งกับเจ็ด ซึ่งสัญลักษณ์ที่ครูใช้นำเสนอคำว่า จำนวนๆหนึ่ง คือ ตัวอักษร x และสัญลักษณ์ที่ครูใช้นำเสนอคำว่า ผลบวก คือ เครื่องหมายบวก (+) และเขียนเป็นประโยคสัญลักษณ์ ได้เป็น $2(x + 7)$

นอกจากนี้ ครูได้ตั้งคำถามกับนักเรียน เกี่ยวกับคำว่า “ผลต่าง” หลังจากนักเรียนตอบว่าผลต่าง คือ การลบ ครูได้อธิบายซ้ำอีกว่าผลต่างคือ การลบ พร้อมทั้งยกตัวอย่าง ประโยคภาษาที่ใช้คำว่า ผลต่าง ดังนี้ “ผลต่างของจำนวนๆหนึ่งกับยี่สิบสาม” พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ $(x - 23)$ ลงบนกระดาน นั่นคือ ครูนำเสนอ จำนวนๆหนึ่ง ด้วยตัวอักษร x และ นำเสนอ ผลต่าง ด้วย คำว่าการลบ และใช้สัญลักษณ์ คือ เครื่องหมายลบ (-)

ครูได้สรุปความสำคัญของการเปลี่ยนประโยคภาษาไปเป็นประโยคสัญลักษณ์ ว่า “โจทย์ปัญหาทุกข้ออยู่ในรูปแบบประโยคภาษาทั้งหมด นักเรียนจะต้องตีความโจทย์ และเขียนออกมาเป็นประโยคสัญลักษณ์ให้ได้”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 3 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง การเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดและการเขียนในการอธิบาย การเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ โดยที่เน้นทีละคำ โดยการพูดทีละคำ และใช้การเขียนที่เป็นประโยคภาษาลงบนกระดาน เพื่อให้นักเรียนมองเห็นว่าประโยคที่ครูพูดนั้นคืออะไร จากนั้นครูใช้การเขียนสัญลักษณ์เขียนแทนประโยคภาษาแต่ละประโยค พร้อมทั้งใช้คำพูดอธิบายความสำคัญของการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ซึ่งครูได้อธิบายอย่างชัดเจน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์โดยการแทนภาษาเป็นสัญลักษณ์ เช่น คำว่า “ได้” ครูนำเสนอด้วย คำว่า “เท่ากับ” และใช้สัญลักษณ์ คือ เครื่องหมายเท่ากับ (=) หรือ คำว่า “จำนวนหนึ่ง” ครูได้นำเสนอเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ เป็นตัวแปร และใช้ตัวอักษร “ x ” แทนตัวแปร

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ โดยใช้ตัวอย่างที่หลากหลาย

3.1.1.4 ขั้นตอนที่ 4 ครูอธิบายหลักการแก้สมการและยกตัวอย่างการแก้สมการ

ในขั้นตอนนี้ครูพยายามอธิบายสมบัติที่นำมาใช้ในการแก้สมการ และหลักการแก้สมการ พร้อมทั้งยกตัวอย่างการแก้สมการ เริ่มตั้งแต่ตัวอย่างที่เป็นสมการในรูปอย่างง่าย ไปจนถึงสมการที่มีความยาก และสลับซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในมโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

(1) ครูอธิบายหลักการและสมบัติที่ใช้การแก้สมการ พร้อมทั้งยกตัวอย่างการแก้สมการอย่างง่าย ประกอบเพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นถึงหลักการแก้สมการและสมบัติที่ใช้ได้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น ดังนี้

ครูเริ่มอธิบายสมบัติการเท่ากัน โดยครูใช้คำศัพท์คำว่า “หลักการเท่ากัน” ซึ่งครูใช้รูปแบบการนำเสนอหลักการเท่ากันนี้ โดยใช้การพูดในการอธิบายหลักการเพียงอย่างเดียว แต่ไม่ได้เขียนลงบนกระดาน โดยครูกล่าวว่า “หลักการเท่ากัน แบ่งออกเป็น 4 รูปแบบแบบที่ 1 คือ หลักการบวก” และอธิบายต่อไปว่า “ถ้าสองจำนวนเท่ากัน ถ้าจะนำอะไรไปบวกต้องบวกทั้งสองข้าง เพื่อให้ทั้งสองข้างยังคงเท่ากัน” จากนั้นครูได้ยกตัวอย่างสมการอย่างง่ายขึ้นมาหนึ่งสมการเพื่อแสดงการแก้สมการ โดยเขียนสมการลงบนกระดานและอธิบายการแก้สมการโดยใช้หลักการบวกดังนี้

$$4 + x = 5$$

ครูใช้หลักการเท่ากันของการบวก และอธิบายขั้นตอนการแก้สมการ โดยครูอธิบายว่า “หลักการเท่ากันของการบวก นำจำนวนจำนวนหนึ่งมาบวกเพื่อจะให้ข้างหนึ่งของสมการเหลือเพียงแค่ตัวแปรตัวแปรเดียว ดังนั้นจะต้องบวก -4” ครูนำ (-4) บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ พร้อมทั้งเขียนอธิบายขั้นตอนการแก้สมการอย่างละเอียดลงบนกระดาน คือ นำ (-4) มาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ จากนั้นครูเขียนประโยคสัญลักษณ์ที่ใช้หลักการบวก ดังนี้

$$4 + x + (-4) = 5 + (-4)$$

ซึ่งครูเน้นว่า “ถ้าบวก (-4) เข้าด้านหนึ่งแล้ว อีกด้านหนึ่งของสมการจะต้องบวกด้วย (-4) ด้วยเช่นเดียวกัน” จากนั้นครูทำให้สำเร็จโดยการอธิบายไปที่ละด้านของสมการ โดยกล่าวว่า “บวกสี่ลบสี่เหลือ x ตัวเดียว เท่ากับ ห้าบวกกับลบสี่ได้ 1” และครูสรุปคำตอบของสมการข้อนี้ คือ 1 ดังนี้

$$4 + x = 5$$

นำ (-4) มาบวกกับทั้งสองข้างของสมการ.

$$\cancel{4} + x + \cancel{(-4)} = 5 + (-4)$$

$$x = 1$$

ภาพที่ 7 แสดงการเขียนอธิบายขั้นตอนและวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ครูได้สรุปการแก้สมการโดยใช้หลักการบวกเข้า คือ “ถ้าบวกด้วยจำนวนจำนวนใด ฟังซ้าย ฟังขวา ต้องบวกด้วยจำนวนนั้นเช่นเดียวกัน และสรุปคือ หลักการบวกเข้าและหลักการลบออก”

ในลำดับต่อมาครูได้อธิบายหลักการแบบที่ 2 ที่ใช้ในการในการแก้สมการคือ หลักการคูณ โดยครูอธิบายว่า “หลักการคูณเป็นไปในลักษณะเช่นเดียวกันกับหลักการบวก” แต่ครูไม่ได้อธิบายหลักการคูณเป็นอย่างไรในตอนแรก ครูใช้การอธิบายหลักการคูณโดยยกตัวอย่างการแก้สมการโดยใช้หลักการคูณมาประกอบเพื่ออธิบายหลักการนี้ ดังนี้

$$\frac{x}{7} = 3$$

โดยครูนำเสนอสมการนี้ในรูปของการเขียนสัญลักษณ์ $\frac{x}{7} = 3$ ลงบนกระดาน และใช้คำพูดว่า “xหารเจ็ดเท่ากับสาม” แสดงว่า ครูใช้การนำเสนอการหารในรูปสัญลักษณ์คือ เศษส่วน จากนั้นครูได้อธิบายการแก้สมการนี้โดยใช้หลักการคูณ โดยอธิบายโดยใช้การพูดและการเขียนบนกระดานว่า “นำ 7 มา คูณทั้งสองข้างของสมการ” จากนั้นครูเขียนประโยคสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ลงบนกระดาน คือ

$$\left(\frac{x}{7}\right) \times 7 = 3 \times 7$$

พร้อมทั้งอธิบายว่า “ฟังขวาคูณด้วยอะไร ฟังซ้ายต้องคูณด้วยตัวเลขนั้นด้วย เพราะเดิมสองข้างของสมการเท่ากันอยู่แล้ว เพิ่มน้ำหนักลงไปฟังขวาเท่าไร ฟังซ้ายต้องเพิ่มลงไปเท่านั้น” แสดงให้เห็นว่าครูกำลังใช้การนำเสนอที่เป็นการพูดเพื่ออธิบายหลักการแก้สมการโดยใช้หลักการคูณ แต่ครูไม่ได้อธิบายถึงเหตุผลของการนำ 7 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ จากนั้นครูสรุปคำตอบของสมการที่ได้คือ $x = 21$ เมื่อครูอธิบายตัวอย่างทั้งสองตัวอย่างนี้จบแล้ว ครูเชื่อมโยงไปที่ความรู้เดิมของนักเรียนที่เคยเรียนมาในระดับประถมศึกษาเกี่ยวกับเรื่อง “หลักการของการย้ายข้าง” โดยครูกล่าวว่า “หลักการของการย้ายข้าง ถ้าอีกฝั่งหนึ่งเป็นบวกย้ายไปอีกฝั่งเป็นลบ” และครูอธิบายเชื่อมโยงเกี่ยวกับที่มาของหลักการย้ายข้างว่ามาจาก การหลักการบวกเข้า การลบออก การคูณเข้า นี้

นอกจากนี้ครูยกตัวอย่างสมการอย่างง่ายเพิ่มอีกหนึ่งตัวอย่าง พร้อมทั้งอธิบายวิธีการแก้สมการ ดังนี้ “จากสมการ $x - 4 = 2$ นำ 4 มาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ เพื่อที่จะกำจัด -4 ให้เหลือเพียงแค่ x ตัวเดียว” แต่ครูใช้การอธิบายโดยใช้การพูดเพียงอย่างเดียว ไม่ได้ใช้การเขียนบนกระดาน ครูเขียนเพียง สมการ $x - 4 + 4 = 2 + 4$ และผลสำเร็จที่ได้ค่าของตัวแปร x ออกมา คือ $x = 6$ จากตัวอย่างนี้ จะเห็นได้ว่า ครูอธิบายถึงเหตุผลของการนำ 4 มาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ เพื่อกำจัด -4 ให้หมดไป และให้ข้างหนึ่งของสมการเหลือเพียงแค่ตัวแปร x เพียงตัวเดียว

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในชั้นตอนที่ 4(1) ครูใช้การนำเสนอภายนอก เพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง สมบัติการเท่ากัน และการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ ดังนี้

(1.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดและการเขียนในการอธิบายสมบัติการเท่ากัน และการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการอย่างง่าย โดยในตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 ครูได้อธิบายขั้นตอนการแก้สมการอย่างละเอียด ทั้งการพูด และการเขียน เช่น “นำ (-4) บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ” ซึ่งเป็นการอธิบายโดยใช้ภาษาที่เป็นทั้งการพูดและการเขียน แสดงการใช้สมบัติการบวกในการแก้สมการ แต่ในตัวอย่างต่อมาครูอธิบายโดยใช้เพียงแค่การพูดเท่านั้น นอกจากนี้ครูใช้การนำเสนอที่เป็นการพูด อธิบายเน้นย้ำให้เห็นถึงการใช้สมบัติการเท่ากัน เช่น “ฝั่งขวาคุณด้วยอะไร ฝั่งซ้ายต้องคุณด้วยตัวเลขนั้นด้วย เพราะเดิมสองข้างของสมการเท่ากันอยู่แล้ว เพิ่มน้ำหนักลงไปฝั่งขวาเท่าไร ฝั่งซ้ายต้องเพิ่มลงไปเท่านั้น” และครูยังเชื่อมโยงระหว่างหลักการเท่ากัน และหลักการย้ายข้าง โดยอธิบายด้วยการพูด

(1.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือสมการที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย เช่น ครูนำเสนอคำว่า หาร ด้วย การเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์อยู่ในรูปเศษส่วน

(1.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างการแก้สมการอย่างง่าย เพื่อประกอบการอธิบายสมบัติการเท่ากัน และการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการ

(1.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีของการแก้สมการ เริ่มจากการทำให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการเหลือเพียงตัวแปรเพียงตัวเดียว โดยใช้สมบัติการเท่ากัน หรือค่าที่ครูใช้คือ หลักการเท่ากัน ดังเห็นได้จากประโยคที่ครูกล่าวว่า “จากสมการ $x - 4 = 2$ นำ 4 มาบวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ เพื่อที่จะกำจัด -4 ให้เหลือเพียงแค่ x ตัวเดียว”

(2) ครูยกตัวอย่างสมการอย่างง่าย ที่ต้องใช้ทั้งหลักการบวก และหลักการคูณช่วยในการแก้สมการ คือ สมการ $2x - 4 = 5$



ในการอธิบายตัวอย่างการแก้สมการนี้ ครูเริ่มโดย ใช้คำถามกับนักเรียนว่า “กำจัดตัวไหนก่อน” หลังจากที่นักเรียนตอบแล้ว ครูได้สรุปอีกครั้งว่า “ต้องกำจัด -4 ก่อน” โดยครูอธิบายต่อไปว่า “ให้กำจัดตัวที่ไกลตัวแปรออกไปก่อน” จากนั้นครูถามถึงวิธีการที่จะกำจัด -4 หลังจากที่นักเรียนตอบคำถามของครูแล้ว ครูอธิบายว่า “ต้อง บวก 4 เข้าทั้งสองข้างของสมการ” ซึ่งครูไม่ได้เขียนวิธีการลงบนกระดาน ใช้เพียงแต่คำพูดอธิบายเท่านั้น ครูเขียนแค่เพียงประโยคสัญลักษณ์ คือ $2x = 9$ และอธิบายการกำจัด 2 โดยถามถึงรูปแบบการดำเนินการของตัวเลข 2 ที่กระทำอยู่กับ x หลังจากที่นักเรียนตอบแล้ว ครูสรุปอีกครั้งว่า “2 คูณกับ x ” จากนั้นครูอธิบายต่อไปว่า “จะต้องนำ 2 มาหารทั้ง 2 ข้างของสมการ” พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดาน คือ $x = \frac{9}{2} = 4.5$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 4(2) ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง สมบัติการเท่ากัน และการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ ดังนี้

(2.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดและการเขียนในการอธิบายสมบัติการเท่ากัน และการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการ แต่ในตัวอย่างนี้ครูจะเน้นที่การพูด

(2.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือสมการที่เขียนอยู่ในรูปประโยคสัญลักษณ์

(2.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างการแก้สมการที่ต้องใช้สมบัติการเท่ากันของการบวกและการคูณ

(2.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีของการแก้สมการ จะเห็นได้จาก การอธิบายของครูแสดงให้เห็นว่า ครูพยายามที่จะอธิบายลำดับขั้นตอนของการแก้สมการโดยใช้หลักการ คือ กำจัดตัวที่ไกลตัวแปรก่อน เมื่อได้ข้อสรุปว่าจะต้องกำจัดตัวไหนเป็นลำดับแรก ต้องไปพิจารณาตัวที่ต้องการกำจัดนั้นว่าจะใช้หลักการเท่ากันแบบใดในการแก้สมการ เช่น จากตัวอย่างนี้ ครูชี้ให้นักเรียนเห็นว่าถ้ามีจำนวนจำนวนหนึ่งคูณอยู่กับตัวแปร ให้ใช้หลักการหาร โดยครูอธิบายวิธีการคือ ต้องนำ 2 มาหารทั้งสองข้างของสมการ และจากประโยคสัญลักษณ์ที่ครูเขียนหลังจากที่ครูใช้คำว่า นำ 2 มาหารทั้งสองข้าง คือ $x = \frac{9}{2}$ จะเห็นว่าครูใช้การนำเสนอของคำว่า

หาร อยู่ในรูปของเศษส่วน นั่นคือ ครูใช้ $\frac{9}{2}$ นำเสนอข้อความ แก่หารด้วยสอง

(3) ครูยกตัวอย่างสมการที่ซับซ้อนขึ้น และมีวิธีการแก้สมการได้ 2 วิธี คือ สมการ $3(x-1)=5$ ซึ่งครูพยายามอธิบายว่าการแก้สมการสามารถทำได้หลายวิธี แต่ละวิธีมีขั้นตอนที่แตกต่างกัน แต่สามารถหาคำตอบของสมการได้ออกมาเหมือนกัน

วิธีที่ 1 ขั้นตอนการแก้สมการของครูเริ่มด้วย การกำจัด 3 ก่อน นั่นคือ “นำ 3 ไปหารทั้งสองข้างของสมการ” ซึ่งครูใช้การอธิบายโดยการพูดแต่ไม่ได้เขียนวิธีการลงบนกระดาน แต่เขียนประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการลงบนกระดานหลังจากที่นำ 3 ไปหารทั้งสองข้างของสมการแล้ว คือ $x-1=\frac{5}{3}$ (จะเห็นว่าครูใช้การนำเสนอการหาร ในรูปของเศษส่วน) จากนั้นครู

อธิบายลำดับขั้นตอนต่อไปของการแก้สมการคือ “กำจัด -1 โดย การบวก 1 เข้าทั้งสองข้างของสมการ”

และสรุป ออกมาเป็นคำตอบของสมการ ในรูปของเศษเกิน และจำนวนคละ คือ $x=\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$

วิธีที่ 2 ขั้นตอนการแก้สมการของครูเริ่มด้วย การใช้คำศัพท์คำว่า “กระจาย” พร้อมทั้งเขียนลูกศรโค้งจากเลข 3 ไปยัง x และเลข 1 ที่อยู่ในวงเล็บ พร้อมทั้งอธิบายโดยการใช้การพูดว่า “นำ 3 ไปคูณ x เป็น $3x$ และ นำ 3 คูณกับลบ 1 ได้ -3” นั่นคือ ครูใช้สมบัติการกระจายเพื่อช่วยในการแก้สมการ และใช้การนำเสนอคำว่า กระจาย โดยใช้สัญลักษณ์ คือ ลูกศรโค้ง และเป็นการนำเสนอว่า นำตัวที่อยู่นอกวงเล็บคูณกับตัวที่อยู่ในวงเล็บทีละตัว ดังภาพที่ 8

$$\begin{array}{l} \overbrace{3(x-1)} = 5 \\ 3x - 3 = 5 \end{array}$$

ภาพที่ 8 แสดงการนำเสนอของครูเพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่องการแจกแจง

จากนั้นครูใช้คำถามกับนักเรียนว่า “ย้ายอะไรก่อน” แสดงให้เห็นว่า ครูพยายามอธิบายวิธีการแก้สมการ โดยใช้หลักการของการย้ายข้าง และครูได้อธิบายต่อว่า “ย้ายลบสามก่อน เอลบสามมาบวก อีกด้านกลายเป็นแปด” นั่นคือ ครูพยายามอธิบายวิธีการแก้สมการโดยการย้ายข้าง จากที่เป็น ลบสาม ย้ายไปอีกข้างหนึ่งจะกลายเป็น บวกด้วยสาม เมื่อครูแก้สมการเสร็จ ครูได้ชี้ให้เห็นว่าคำตอบของสมการที่ได้จากทั้งสองวิธีมีค่าเท่ากัน ดังนั้นนักเรียนสามารถเลือกใช้วิธีการแก้สมการได้ทั้งสองวิธีตามที่ตนเองถนัด

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 4(3) ครูใช้การนำเสนอภายนอก เพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยใช้สมบัติการเท่ากัน ดังนี้

(3.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายขั้นตอนวิธีการแก้สมการ แต่ไม่ได้ใช้การเขียนขั้นตอน เช่น “นำ 3 ไปหารทั้งสองข้างของสมการ” ครูใช้เพียงแค่

การพูดเท่านั้น นอกจากนี้ครูใช้การนำเสนอที่เป็นการพูดนำเสนอ สมบัติการแจกแจงนอกจากนี้ครูใช้การถามนักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้คิดว่าจะกำจัดตัวไหนก่อน เช่น “ย้ายอะไรก่อน” ซึ่งแสดงให้เห็นว่า ครูใช้หลักการย้ายข้างในการแก้สมการ

(3.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือสมการที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย และนอกจากนี้ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นลูกศรโค้ง เพื่อแสดงการใช้สมบัติการกระจาย และบ่งบอกถึงสมบัติการกระจาย

(3.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่เป็นการแก้สมการที่ทำได้ 2 วิธี และใช้สมบัติที่เพิ่มขึ้นคือ สมบัติการกระจาย ซึ่งครูได้อธิบายและแสดงวิธีการทั้ง 2 วิธีเปรียบเทียบกัน

(3.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยครูได้แสดงวิธีการ 2 วิธีที่สามารถนำมาใช้ในการแก้สมการในตัวอย่างนี้ได้ โดยวิธีที่ 1 ครูเริ่มกำจัดตัวเลขเพื่อให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการเหลือเพียงแค่ตัวแปร x ตัวเดียว โดยใช้สมบัติการเท่ากัน สำหรับวิธีที่ 2 ครูใช้สมบัติการกระจายก่อน จากนั้นจึงกำจัดตัวเลข เพื่อให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการเหลือเพียงตัวแปร x เพียงตัวเดียว โดยใช้สมบัติการเท่ากัน ซึ่งครูแสดงวิธีทั้ง 2 วิธีเปรียบเทียบกัน พร้อมทั้งชี้ให้นักเรียนเห็นว่า ทั้ง 2 วิธีได้คำตอบออกมาเหมือนกัน สามารถเลือกใช้วิธีการใดก็ได้ตามที่นักเรียนถนัด

(4) ครูยกตัวอย่างสมการที่มีความยาก และซับซ้อนขึ้น และต้องนำความรู้เรื่องเศษส่วนเข้ามาช่วยในการแก้สมการ คือ $3(2x - 4) = 16$

ครูเริ่มต้นที่ การตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ย้ายอะไรก่อน” และ “กำจัดตัวไหน” จะเห็นได้ว่าครูพยายามอธิบายขั้นตอนการแก้สมการว่าต้องกำจัดตัวที่ไกลตัวแปรก่อน โดยใช้หลักการย้ายข้าง และครูอธิบายโดยการใช้การพูดว่า “เริ่มจากกำจัด 3 เป็นอันดับแรก โดยการย้าย 3 ไปหาร จากนั้นกำจัด -4 โดยการย้าย -4 ไปอีกด้านหนึ่ง จาก -4 กลายเป็น +4” พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดานดังนี้

$$2x - 4 = \frac{16}{3}$$

$$2x = \frac{16}{3} + 4$$

จากนั้นครูทบทวนการบวกการลบเศษส่วน ว่า ต้องทำตัวส่วนให้เท่ากัน พร้อมทั้งเขียนสมการหลังจากบวกเศษส่วนเสร็จแล้วดังนี้ $2x = \frac{28}{3}$ และครูกล่าวว่

“*x* เดียว ได้เป็น ยี่สิบแปดส่วนสามหารสอง” พร้อมทั้งเขียนสมการได้เป็น $x = \frac{3}{2}$ ลงบนกระดาน

นั่นคือ ครูใช้การนำเสนอ คำว่า *x* เดียว แทน คำตอบของสมการ และจากสมการ $x = \frac{3}{2}$ แสดงให้

เห็นว่าครูนำ 2 ไปหารทั้งสองข้างของสมการ และจากสมการ $x = \frac{3}{2}$ แสดงให้เห็นว่าครูใช้การ

นำเสนอการหาร ด้วย เศษส่วน จากนั้นใช้หลักการหารเศษส่วน โดยเปลี่ยนหารเป็นคูณ และกลับเศษเป็นส่วน พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดานดังนี้ $x = \frac{28}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 4(4) ครูใช้การนำเสนอภายนอก เพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(4.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยใช้การพูดในการอธิบาย ขั้นตอนวิธีการแก้สมการ แต่ไม่ได้ใช้การเขียนเป็นภาษา แต่เขียนเป็นสัญลักษณ์ที่เป็นสมการ และครูใช้คำพูดว่า “*x* เดียว” แทนคำตอบของสมการ นอกจากนี้ ครูได้ใช้การพูดอธิบายทบทวน เรื่อง การบวก การลบ การคูณ การหาร เศษส่วน

(4.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือ ครูเขียนสมการที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย และใช้สัญลักษณ์ที่อยู่ในรูปเศษส่วนแทนการหาร

(4.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่เป็นการแก้สมการที่มีลักษณะซับซ้อนขึ้น และต้องใช้ความรู้เรื่อง การบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนเต็ม และเศษส่วน พร้อมทั้งแสดงวิธีการแก้สมการอย่างชัดเจน

(4.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยครูได้แสดงให้เห็นวิธีการ ว่าจะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน โดยการย้ายข้าง

(5) ครูยกตัวอย่างสมการที่มีความยาก และซับซ้อนขึ้น และมีเศษส่วนเข้ามาเกี่ยวข้อง และต้องนำความรู้เรื่องเศษส่วนเข้ามาช่วยในการแก้สมการ คือ

$$\frac{3}{5}(2x - 5) + 3 = 9$$

ครูเริ่มอธิบายลำดับการแก้สมการในตัวอย่างนี้ โดยใช้คำถามกับนักเรียนว่า “กำจัดตัวไหนก่อน” หลังจากนั้นนักเรียนตอบคำถามนี้ ครูสรุปอีกครั้งว่า “กำจัดบวกสาม

ก่อน” พร้อมทั้งชี้ไปที่ +3 ในสมการที่อยู่บนกระดาน และครูอธิบายต่อว่า “นำสามไปลบทั้งสองด้าน” และอธิบายต่อไปว่า “ย้ายสามไปลบอีกด้านหนึ่งของสมการ จากบวกสามจะกลายเป็นลบสาม” และครูเขียนสมการออกมาเป็น $\frac{3}{5}(2x - 5) = 9 - 3$ แสดงให้เห็นว่า ครูใช้การนำเสนอว่า “นำสามไปลบทั้งสองด้านของสมการ” และใช้การนำเสนอว่า “ย้ายสามไปลบอีกด้านของสมการ”

มีความหมายเหมือนกัน จากนั้นครูเขียนสมการ $\frac{3}{5}(2x - 5) = 6$ และตั้งคำถามกับนักเรียนว่า

“จากนั้นย้ายตัวไหนต่อ” หลังจากนักเรียนตอบ ครูสรุปว่าย้าย $\frac{3}{5}$ พร้อมทั้งเน้น $\frac{3}{5}$ ที่อยู่ในสมการ

บนกระดานโดยการเขียนสี่เหลี่ยมล้อมรอบตัวเลข $\frac{3}{5}$ และถามนักเรียนว่า “ $\frac{3}{5}$ ดำเนินการอย่างไรอยู่กับ $(2x - 5)$ ”

หลังจากนักเรียนตอบว่า “คูณ” ครูกล่าวซ้ำอีกครั้งว่า “คูณ” พร้อมทั้งอธิบาย การแก้สมการ โดยการย้ายห้าไปคูณ และนำสามไปหารอีกด้านหนึ่งของสมการ และเขียนสมการลงบน

กระดานดังนี้ $2x - 5 = \frac{6 \times 5}{3}$ เมื่อได้สมการในรูป $2x - 5 = 10$ แล้ว ครูอธิบายขั้นตอนต่อไป ว่า

“ย้ายลบห้า ไปอีกข้างของสมการ ได้เป็น $2x = 15$ ” และครูสรุปว่า “ x เดียวคือ $\frac{15}{2}$ ” นั่นคือ ครู

นำเสนอว่าต้องย้าย 2 ไปหาร จึงกลายเป็น $\frac{15}{2}$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 4(5) ครูใช้การนำเสนอภายนอก เพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(5.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยใช้การพูดในการอธิบาย ขั้นตอนวิธีการแก้สมการ แต่ไม่ได้ใช้การเขียนเป็นภาษา และใช้การถามนักเรียนเพื่อแสดงให้เห็น ขั้นตอนการแก้สมการ รวมไปถึงวิธีการด้วย นอกจากนี้ ครูอธิบายถึงการใช้สมบัติการเท่ากัน กับการใช้หลักการย้ายข้างมีความหมายเหมือนกัน ดังคำพูดที่ครูพูดว่า “นำสามไปลบทั้งสองด้าน” และ “ย้ายสามไปลบอีกด้านหนึ่งของสมการ จากบวกสามจะกลายเป็นลบสาม”

(5.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือ ครูเขียนสมการที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย และใช้สัญลักษณ์ที่อยู่ในรูปเศษส่วนแทนการหาร

(5.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่เป็นการแก้สมการที่มีลักษณะ ซับซ้อนขึ้น และต้องใช้ความรู้เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหารจำนวนเต็ม และเศษส่วน พร้อมทั้งแสดงวิธีการแก้สมการอย่างชัดเจน

(5.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยครูได้แสดงให้เห็นวิธีการ ว่าจะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน โดยการย้ายข้าง

3.1.1.5 ขั้นตอนที่ 5 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในห้องเรียน โดยที่ลักษณะของสมการเป็นสมการที่มีความซับซ้อนและมีเศษส่วนและจำนวนลบเข้ามาเกี่ยวข้อง จำนวน 3 ข้อ ดังนี้

$$(1) \frac{2}{3}(x-1) + 2 = 5$$

$$(2) -\frac{3}{7}\left(2x + \frac{2}{5}\right) - 3 = 5$$

$$(3) -\frac{2}{5}\left(5x - \frac{3}{4}\right) + 2 = 11$$

ในขณะที่ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัด ครูได้อธิบายเพิ่มเติมในแบบฝึกหัดข้อ 2 คือ $-\frac{3}{7}\left(2x + \frac{2}{5}\right) - 3 = 5$ ครูอธิบายเริ่มโดยกำจัด -3 ก่อน โดยการย้ายไปบวกอีกด้านหนึ่งของสมการ และจากนั้นกำจัด $-\frac{3}{7}$ ซึ่งคูณอยู่กับ $2x + \frac{2}{5}$ ดังนั้นต้องย้าย $-\frac{3}{7}$ ไปหาร พร้อมทั้งอธิบายความหมายของเครื่องหมายลบ (-) หน้าตัวเลข $-\frac{3}{7}$ ว่าเป็นเครื่องหมายที่แสดงให้เห็นว่า $\frac{3}{7}$ เป็นจำนวนลบ ไม่ใช่ตัวดำเนินการ พร้อมทั้งอธิบายต่อไปว่า “เวลาย้ายไปยังคงเป็นลบ แต่ย้ายลบสามไปหารและย้ายเจ็ดไปคูณ” และครูเน้นให้นักเรียนแยกให้ได้ว่าเครื่องหมายลบตัวไหนเป็นตัวดำเนินการ และเครื่องหมายลบตัวไหนเป็นตัวบ่งบอกว่าจำนวนนั้นเป็นจำนวนลบ

3.1.1.6 ขั้นตอนที่ 6 ครูเฉลยแบบฝึกหัดทั้ง 3 ข้อ ในห้องเรียน โดยอธิบายขั้นตอนการแก้สมการทุกข้อ ดังต่อไปนี้

$$(1) \frac{2}{3}(x-1) + 2 = 5$$

ครูอธิบายวิธีการแก้สมการ โดย การกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน และครูกล่าวว่า “ตัวที่ไกลตัวแปรที่สุดคือ บวกสอง โดยย้าย บวกสอง ไปอีกด้านหนึ่งของสมการเป็นลบสอง” จากนั้นครูเขียนสมการเป็น $\frac{2}{3}(x-1) = 3$

จากนั้นครูอธิบายขั้นตอนต่อไปของการแก้สมการ โดยใช้การพูดว่า “ย้าย 3 ไปคูณและย้าย 2 ไปหาร” และครูได้นำเสนอในรูปแบบที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

$$x - 1 = \frac{3 \times 3}{2}$$

$$x - 1 = \frac{9}{2}$$

ครูอธิบายต่อไปว่า “ย้าย 1 ไปบวก” และครูใช้การนำเสนอในรูปแบบที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

$$x = \frac{9}{2} + 1$$

เนื่องจากค่า x อยู่ในรูปของการบวกเศษส่วนกับจำนวนเต็ม ดังนั้นครูได้กล่าวถึงวิธีการบวกและลบเศษส่วน ว่าจะต้องทำส่วนให้เท่ากัน จากนั้นครูสรุปคำตอบของสมการคือ

$$x = \frac{9}{2} + 1 = \frac{11}{2} = 5.5$$

$$(2) \quad -\frac{3}{7} \left(2x + \frac{2}{5} \right) - 3 = 5$$

ครูอธิบายการแก้สมการนี้ โดยใช้การพูดว่า “กำจัด -3 ก่อน โดยการย้าย -3 ไปอีกด้านของสมการ กลายเป็น $+3$ รวมกับ 5 ได้ 8” โดยครูนำเสนอในรูปแบบที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$-\frac{3}{7} \left(2x + \frac{2}{5} \right) = 8$$

จากนั้นครูอธิบายต่อว่า “กำจัด $-\frac{3}{7}$ โดยย้ายมาหารอีกด้านหนึ่งของสมการ” โดยครูนำเสนอในรูปแบบที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$2x + \frac{2}{5} = 8 \times \left(-\frac{7}{3} \right)$$

$$2x + \frac{2}{5} = -\frac{56}{3}$$

แสดงให้เห็นว่า ครูใช้หลักการหารเศษส่วน คือ กลับเศษเป็นส่วน เปลี่ยนเครื่องหมายคูณเป็นเครื่องหมายหาร จากนั้นครู ย้าย $\frac{2}{5}$ ไปลบ โดยครูนำเสนอในรูปแบบที่เป็นสัญลักษณ์ทาง

คณิตศาสตร์ดังนี้ $2x = -\frac{56}{3} - \frac{2}{5}$ และครูได้อธิบาย การบวก การลบเศษส่วน โดยต้องทำให้

เท่ากันก่อน จากนั้นครูได้แก่สมการจนได้คำตอบของสมการออกมา เมื่อครูแก่สมการเสร็จ มี

นักเรียนถามว่า “นำเจ็ดไปคูณได้ไหม” ครูอธิบายต่อว่า “สามารถนำ เจ็ดไปคูณทั้งสองข้างของ

สมการในขั้นตอน $-\frac{3}{7}\left(2x + \frac{2}{5}\right) = 8$ ได้” นอกจากนี้มีนักเรียนถามต่ออีกว่า “นำ ลบสามไป

หารทั้งสองข้างของสมการได้หรือไม่” ครูอธิบายชี้ให้นักเรียนเห็นว่า “ถ้า นำ -3 ไปคูณ -3 จะไม่ถูก

จำกัด ดังนั้นจะต้องนำไปหาร -3 ถึงจะถูกกำจัดไป” และครูอธิบายวิธีการอื่น คือ “สามารถกระจาย

-3 เข้าไปคูณตัวที่อยู่ในวงเล็บได้ในขั้นตอน $-\frac{3}{7}\left(2x + \frac{2}{5}\right) = 8$ ได้”

(3) $-\frac{2}{5}\left(5x - \frac{3}{4}\right) + 2 = 11$

ในแบบฝึกหัดข้อนี้ ครูอธิบายขั้นตอนการแก้สมการ คล้ายกับ

แบบฝึกหัดข้อ 2 โดยเริ่มที่ ย้าย 2 ไปลบ พร้อมทั้งเขียนสมการลงบนกระดาน คือ

$-\frac{2}{5}\left(5x - \frac{3}{4}\right) = 9$ จากนั้นย้าย $-\frac{2}{5}$ ไปหาร ได้สมการเป็น $5x - \frac{3}{4} = 9 \times \left(-\frac{5}{2}\right)$ ย้าย $-\frac{3}{4}$ ไป

บวก ได้เป็น $5x = -\frac{45}{2} + \frac{3}{4}$ และครูได้อธิบายถึงการบวกลบเศษส่วนว่าจะต้องทำให้เท่ากัน

ก่อน (แต่ครูไม่ได้อธิบายถึงวิธีการทำให้เท่ากัน เนื่องจากเป็นเรื่องที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว)

จากนั้นครูเขียนผลลัพธ์ออกมาเป็นสมการดังนี้

$$5x = -\frac{90}{4} + \frac{3}{4}$$

$$5x = -\frac{87}{4}$$

$$x = -\frac{87}{20}$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 6 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง แบบฝึกหัดการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยใช้การพูดในการอธิบาย

ขั้นตอนวิธีการแก้สมการ แต่ไม่ได้ใช้การเขียนเป็นภาษา และใช้การถามนักเรียนเพื่อแสดงให้เห็น

ขั้นตอนการแก้สมการ รวมไปถึงวิธีการด้วย

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือ ครูเขียนสมการที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นแบบฝึกหัดการแก้สมการที่มีลักษณะซับซ้อนขึ้น และต้องใช้ความรู้เรื่องการบวก การลบ การคูณ การหาร จำนวนเต็มและเศษส่วน พร้อมทั้งแสดงวิธีการแก้สมการอย่างชัดเจน

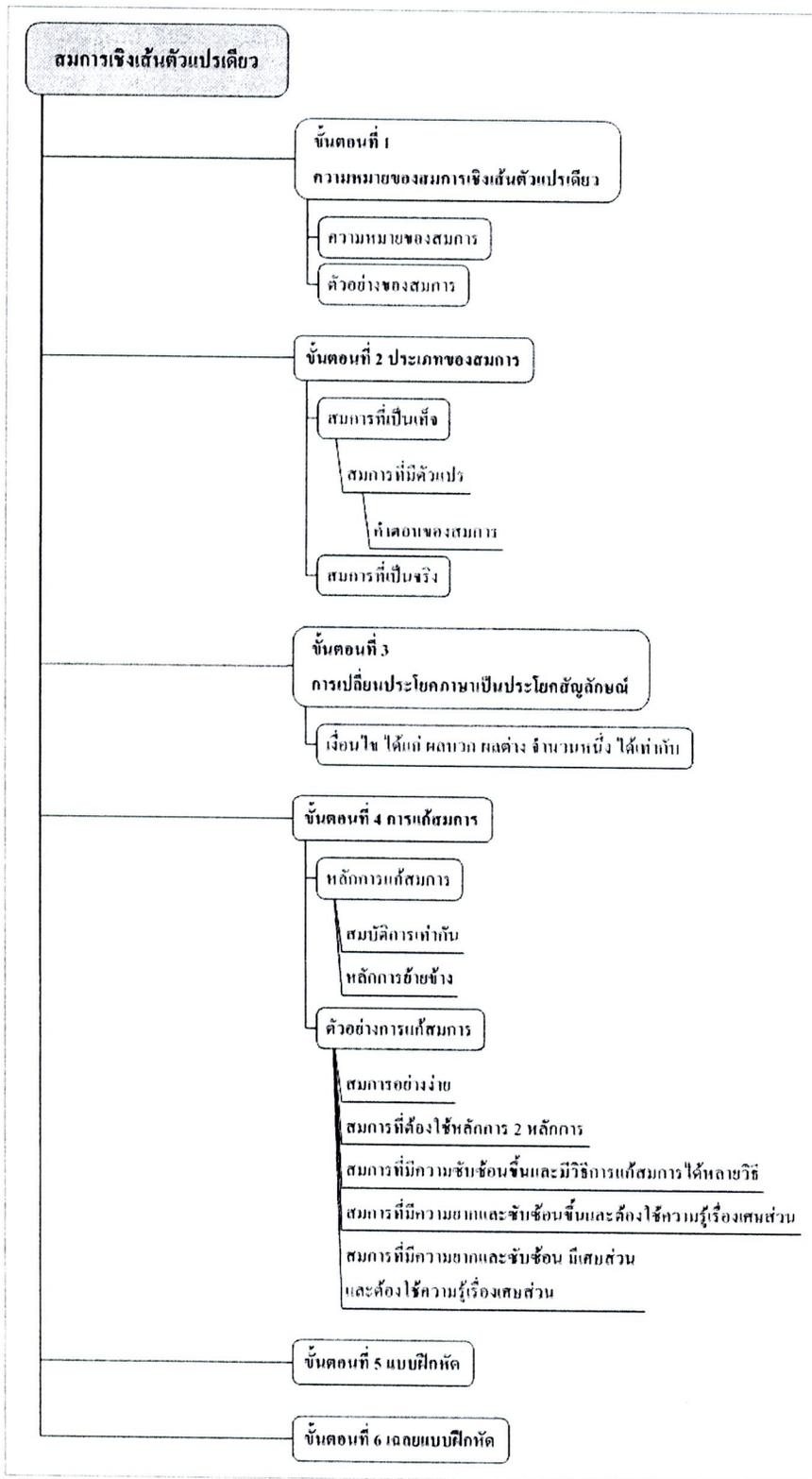
(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยครูได้แสดงให้เห็นวิธีการ ว่าจะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน โดยใช้หลักการย้ายข้าง

จากตัวอย่างและแบบฝึกหัดทั้งหมดซึ่งมีความหลากหลายและลำดับขั้นตอนการนำเสนอตัวอย่างเรียงจากตัวอย่างที่มีความง่ายไปยังตัวอย่างที่ยากขึ้นและสลับซับซ้อนมากยิ่งขึ้น ซึ่งครูได้อธิบายขั้นตอนและหลักการการแก้สมการ ซึ่งมีลำดับขั้นตอน โดยเริ่มจากการพิจารณาการกำจัด ตัวเลขที่อยู่ไกลตัวแปรออกไปก่อน และกำจัดตัวต่อไปเรื่อยๆ จนเหลือตัวแปร x เพียงตัวเดียวอยู่ด้านใดด้านหนึ่งของสมการ โดยหลักการที่ครูใช้คือ หลักของการเท่ากัน ได้แก่ หลักการบวก หลักการลบ หลักการคูณ และหลักการหาร ซึ่งในการอธิบายวิธีการแก้สมการในตัวอย่างอื่นๆ ครูจะเขียนอธิบายวิธีการเข้าไปด้วย เช่น จากตัวอย่างที่ 1 ที่ครูอธิบาย ครูจะใช้คำว่า “นำ (-4) บวกเข้าทั้งสองข้างของสมการ” เป็นต้น พร้อมทั้งเขียนลงในขั้นตอนการแก้สมการ แต่หลังจากที่ครูยกตัวอย่างการแก้สมการหลายตัวอย่าง ครูไม่ได้เขียนประโยคข้างต้นลงในขั้นตอนการแก้สมการ แต่ครูใช้การอธิบายโดยการใช้การพูดเพียงอย่างเดียว นอกจากนี้ในตัวอย่างต่อมา ครูเชื่อมโยงหลักการเท่ากัน กับ คำว่า “การย้ายข้าง” ซึ่งครูนำเสนอว่า การย้ายข้าง มาจากหลักการเท่ากัน และใช้การย้ายข้างมาช่วยในการแก้สมการ ซึ่งแสดงให้เห็นว่าครูใช้การนำเสนอการใช้หลักการเท่ากัน ในความหมายเดียวกับ การใช้หลักการย้ายข้าง

จากกิจกรรมการจัดการเรียนรู้ที่ 1 จะเห็นว่าการจัดการเรียนรู้ของครู จะเป็นในลักษณะที่ครูพยายามอธิบาย มโนมติเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และเมื่อมีมโนมติที่สำคัญครูได้อธิบายพร้อมยกตัวอย่างประกอบเพื่อให้นักเรียนเข้าใจในมโนมตินั้นมากยิ่งขึ้น ยกตัวอย่างเช่นในเรื่องความหมายของสมการและการใช้หลักการเท่ากันในการแก้สมการ เป็นต้น สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกิจกรรมนี้ ครูเน้นไปที่ การเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ และการแก้สมการ แต่ครูยังไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน ครูเพียงแต่กล่าวถึง ประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการ และประเภทของสมการเท่านั้น ซึ่งครูยังไม่ได้ยกตัวอย่างเปรียบเทียบให้เห็นความแตกต่างระหว่างประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการและ ไม่เป็นสมการ เมื่อครูกล่าวถึงประเภทของสมการ ซึ่งครูได้แบ่งเป็น 2 ประเภท คือ สมการที่เป็นเท็จ

และสมการที่เป็นจริง ในตอนท้ายของเรื่องนี้ ครูได้แทรกเรื่อง คำตอบของสมการเข้าไปด้วย เนื่องจากครูยกตัวอย่างสมการที่มีตัวแปร ซึ่งครูจัดไว้ในประเภทสมการที่เป็นจริง เนื่องจากต้องการหาคำตอบของสมการ แต่ในขั้นตอนที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้เกี่ยวกับการแก้สมการ ครูยังไม่ได้กล่าวถึง คำตอบของสมการอีก และไม่ได้ยกตัวอย่างว่า ถ้าไม่เป็นคำตอบของสมการแล้วจะทำให้สมการมีค่าความจริงเป็นเท็จ ในลำดับต่อมาครูได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องการแก้สมการ ซึ่งครูได้เน้นในเรื่องนี้ เห็นได้จาก การที่ครูอธิบายหลักการที่ใช้ในการแก้สมการ และลำดับขั้นตอนของการแก้สมการอย่างละเอียด และเป็นขั้นตอนที่ชัดเจน รวมไปถึงครูยกตัวอย่างที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจในเรื่องของการแก้สมการ โดยครูเรียงลำดับตัวอย่าง เริ่มจากตัวอย่างสมการอย่างง่าย ไปจนถึงสมการที่มีความยากและสลับซับซ้อนมากขึ้นเรื่อยๆ เช่น สมการที่ต้องใช้ความรู้เรื่องจำนวนเต็ม และเศษส่วนเข้ามาช่วยในการแก้สมการ เป็นต้น แต่ในกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 นี้ ครูยังไม่ได้ยกตัวอย่างที่เกี่ยวข้องกับเรื่องทศนิยม นอกจากนี้แล้ว ครูยังไม่ได้อธิบายวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้จากการแก้สมการนั้นเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ เมื่อยกตัวอย่างเสร็จ ครูมีแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำ เพื่อตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียนด้วย

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูแสดงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 9 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 1

3.1.2 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในวันนี้เริ่มด้วย ครูขานชื่อนักเรียนรายบุคคล จากนั้นครูเริ่มแจกใบความรู้เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จากนั้นครูได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1.2.1 ขั้นตอนที่ 1 ครูทบทวนมโนคติที่เรียนไปในกิจกรรมที่ 1 ดังต่อไปนี้

(1) ความหมายของสมการ

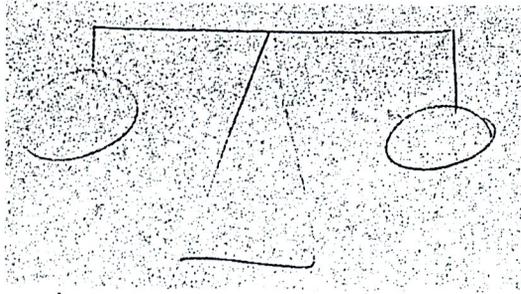
ครูทบทวนความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยครูถามนักเรียนเป็นรายบุคคลว่า “ความหมายของสมการคืออะไร” เมื่อนักเรียนตอบแล้ว ครูได้กล่าวซ้ำอีกว่า “สมการคือ ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ”

(2) ประเภทของสมการ

ครูทบทวนประเภทของสมการ โดยถามนักเรียนว่า “สมการแบ่งออกเป็นกี่ประเภท” เมื่อนักเรียนตอบ ครูอธิบายต่อไปว่า ประเภทของสมการ มี 2 ประเภท คือ สมการที่เป็นจริงและสมการที่เป็นเท็จ จากนั้นครูอธิบายความหมายของสมการที่เป็นจริงและสมการที่เป็นเท็จ ดังนี้ “สมการที่เป็นจริง คือสมการที่มีด้านซ้ายกับด้านขวาเท่ากันตามเครื่องหมาย แต่ถ้าสมการที่ด้านซ้ายและด้านขวาไม่ได้เท่ากัน จะเรียกสมการนั้นว่า สมการที่เป็นเท็จ หรือสมการที่ไม่เป็นจริง” จากนั้นครูบอกข้อตกลงของครูเกี่ยวกับสมการ คือ “ทุกครั้งที่ครูกล่าวถึงคำว่า สมการ ให้หมายถึงสมการที่เป็นจริงเท่านั้น ซึ่งหมายความว่า ฟังซ้าย ฟังขวาของเครื่องหมายเท่ากับ เท่ากันตามเครื่องหมายที่เขาให้มา”

(3) หลักการแก้สมการ

ครูทบทวนหลักการแก้สมการ โดยครูกล่าวว่า “หลักการแก้สมการ หรือการหาคำตอบของสมการ” จากที่ครูพูดแสดงให้เห็นว่าครูนำเสนอการแก้สมการว่ามีความหมายเดียวกับการหาคำตอบของสมการ นั่นคือการแก้สมการ คือ การหาคำตอบของสมการ โดยครูสรุปดังนี้ ใช้หลักการเท่ากันหรือสมบัติการเท่ากัน จากนั้นครูนำเสนอหลักการเท่ากัน โดยยกตัวอย่าง ตาซัง มาช่วยในการอธิบายหลักการเท่ากัน โดยครูถามนักเรียนว่า “ใครเกิดราศีตุลย์ บ้าง” (ซึ่งครูกล่าวเพื่อที่จะโยงไปหาภาพตาซัง) จากนั้นครูวาดรูป ตาซังลงบนกระดานดังภาพที่ 10



ภาพที่ 10 ภาพตาชั่งที่ครูวาดเพื่อใช้ในการอธิบายเรื่องการใช้สมบัติการเท่ากันในการแก้สมการ

และอธิบายว่า “ฝั่งซ้าย ฝั่งขวาเท่ากัน ถ้าใช้คำว่าหลักการเท่ากัน หมายความว่า ถ้านำสิ่งของที่มีลักษณะ 5 กิโลกรัม เข้าในฝั่งซ้ายมือ ขวามือจะต้องใส่ 5 กิโลกรัม เข้าไปเช่นเดียวกัน” จากนั้นครูได้สรุปลักษณะการกระทำแบบนี้ว่าเป็นการบวกเข้า และอธิบายต่อว่า “บวกเข้าด้วยจำนวนที่เท่ากัน ซึ่งจำนวนที่บวกเข้าอาจจะเป็นจำนวนบวก หรือจำนวนลบก็ได้” จากนั้นครูอธิบายสมบัติที่ 2 คือ สมบัติการนำออกหรือการตัดออก หรือการลบ จากนั้นครูยกตัวอย่าง “ถ้าฝั่งซ้ายลบออก 7 ฝั่งขวาจะต้องลบออก 7 เพื่อให้สมการยังคงเท่ากัน” และอธิบายสมบัติการคูณและการหาร โดยอธิบายว่า “ถ้าเพิ่มเข้าเป็นทวีคูณในฝั่งซ้าย ดังนั้นฝั่งขวาจะต้องเพิ่มเข้าเป็นทวีคูณเช่นเดียวกัน ถ้าหารจะต้องหารทั้งซ้ายและขวาด้วยตัวเลขตัวเดียวกัน” จากนั้นครูสรุปว่าสมบัติเหล่านี้เรียกว่า “สมบัติการเท่ากัน” เมื่ออธิบายเสร็จ ครูถามนักเรียนว่า “มีใครที่ตามไม่ทันบ้าง” เพื่อที่จะตรวจสอบนักเรียนว่า เข้าใจเนื้อหาที่เรียนมาในเรื่องสมบัติการเท่ากันหรือไม่

ครูเชื่อมโยงสมบัติการเท่ากัน กับการย้ายข้าง ดังนี้ การย้ายข้างต้องอาศัยสมบัติการเท่ากัน และครูอธิบายต่อว่า “จากอยู่ฝั่งซ้ายเป็นบวกย้ายไปฝั่งขวาเป็นลบ” จากนั้นครูบอกเป้าหมายของการย้ายข้าง คือ “การย้ายข้างเป็นการหาเพื่อที่จะให้ฝั่งใดฝั่งหนึ่งเหลือเพียงตัวแปรเพียงตัวเดียว ตัวเลขให้ย้ายไปอีกฝั่งให้หมด” จากนั้นครูอธิบายว่า “วิธีการย้ายข้างจากอีกฝั่งไปอีกฝั่งหนึ่ง การย้ายข้างจะเปลี่ยนเป็นตัวตรงข้าม จากบวกเป็นลบ จากลบเป็นบวก จากคูณเป็นหาร จากหารเป็นคูณ” ในลำดับต่อมา ครูอธิบายว่า “หลักการที่จะย้ายข้าง จะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรมากที่สุดออกไปก่อน” และอธิบายถึง การพิจารณาว่าตัวไหนที่อยู่ไกลตัวแปร โดยครูถามนักเรียนก่อนว่า “เวลาที่เรารู้ว่าตัวไหนอยู่ไกลหรือใกล้ตัวแปร ใช้ระยะทางเป็นตัวตัดสินใจหรือไม่” เมื่อนักเรียนตอบว่า “ไม่” ครูอธิบายต่อว่า “เราดูที่ความสัมพันธ์” พร้อมยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ เพื่อประกอบการอธิบายความสัมพันธ์ว่าตัวไหนอยู่ใกล้หรือไกลตัวแปรมากกว่ากัน พร้อมอธิบายลำดับการกำจัดตัวแปร ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$3x + 5$$

ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ใครอยู่ใกล้ตัวแปรที่สุด” เมื่อนักเรียนตอบว่า “5” ครูอธิบายต่อว่า “ใช้ 5 เพราะฉะนั้นต้องกำจัด 5 เป็นลำดับที่ 1 โดยการย้ายไปลบ” นั่นคือกำจัดตัวที่ใกล้ตัวแปรก่อน โดยครูอธิบายพร้อมกับเขียนบนกระดานคือ จีคเส้นทับเลข 5 และเขียนเลขหนึ่งกำกับใต้เลข 5 เพื่อแสดงให้เห็นว่า กำจัด 5 เป็นลำดับที่ 1 จากนั้นครูอธิบายว่ากำจัด 3 เป็นลำดับที่ 2 โดยครูอธิบายพร้อมกับเขียนบนกระดาน โดยจีคเส้นทับเลข 3 และเขียนเลขสอง กำกับใต้เลข 3 เพื่อแสดงให้เห็นว่า กำจัด 3 เป็นลำดับที่สอง จากนั้นครูอธิบายวิธีสรุป โดยให้กำจัดตัวที่ใกล้ตัวแปรออกไปก่อน แล้วตัวที่อยู่ใกล้ค่อยทยอยไปที่ละอัน ทีละอัน เพื่อให้เหลือเพียงแค่ตัวแปร x ดังแสดงให้เห็นตามภาพที่ 11

$$\begin{array}{c} \cancel{3}x + \cancel{5} \\ \textcircled{2} \qquad \textcircled{1} \end{array}$$

ภาพที่ 11 แสดงการลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร

จากนั้นครูยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ แสดงความสัมพันธ์กับตัวแปร และลำดับขั้นตอนการกำจัดเพื่อให้เหลือเพียงตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{3}{7}(2x-4)+8$$

ครูถามนักเรียนว่า “ใครใกล้ตัวแปรที่สุด” นักเรียนตอบว่า “8” จากนั้นครูสรุปว่า “8 ใกล้ตัวแปรที่สุด ดังนั้นจะต้องกำจัด 8 ก่อน โดยนำไปลบ” และครูได้จีคเส้นทับเลข 8 และ เขียนเลขหนึ่งกำกับไว้ใต้เลข 8 เพื่อแสดงให้เห็นว่า ลำดับที่ 1 ต้องกำจัด 8 ก่อน จากที่ครูอธิบายว่าต้องนำไปลบ จากที่ 8 บวกอยู่จะต้องนำไปลบ แต่ครูไม่ได้อธิบายละเอียดถึงเหตุผลที่ต้องนำ 8 ไปลบ อาจจะเนื่องจาก ครูได้สอนมาแล้วว่าจากบวกอยู่ เมื่อย้ายข้างไปอีกด้านต้องเป็นลบ หรือจากหลักการเท่ากันว่า ต้องนำ 8 ไปลบทั้งสองข้างของสมการ ครูจึงสรุปว่าวิธีการกำจัด 8 คือ ต้องนำไปลบ จากนั้นครูอธิบายตัวเลขต่อไปที่ต้องกำจัด โดยครูถามนักเรียน เมื่อครูเว้นช่วงให้นักเรียนตอบและนักเรียนได้ตอบแล้ว ครูอธิบายต่อไปว่า “ตัวต่อไปที่ต้องกำจัด คือ $\frac{3}{7}$ ” จากนั้น ครูถามนักเรียนว่า “ทำไมต้องเป็น $\frac{3}{7}$ ” หลังจากที่นักเรียนตอบว่า “เพราะมันใกล้” ครูได้อธิบายเพิ่มเติมว่า “เพราะมันใกล้ เพราะ เวลาดำเนินการจะต้องทำในวงเล็บก่อน แสดงว่า $2x - 4$ อยู่ใกล้ตัวแปรมากกว่า $\frac{3}{7}$ ดังนั้นต้องกำจัด $\frac{3}{7}$ ก่อน” พร้อมทั้งเขียนสี่เหลี่ยมล้อมรอบ $\frac{3}{7}$ เพื่อเป็นการเน้นให้นักเรียนเห็นได้อย่างชัดเจนว่าต้อง

กำจัด $\frac{3}{7}$ จากนั้นครูถามนักเรียนว่า $\frac{3}{7}$ ดำเนินการอย่างไรอยู่กับตัวในวงเล็บ เพื่อที่จะอธิบายวิธีการ

กำจัด $\frac{3}{7}$ โดยครูอธิบายต่อไปว่า “ $\frac{3}{7}$ คุณอยู่กับวงเล็บจะต้องย้ายไปหาร เมื่อย้ายไปหารต้องเปลี่ยน

หารเป็นคูณ กลับเศษเป็นส่วน กลับส่วนเป็นเศษ ตามหลักการที่ใช้ในเรื่องของการหารเศษส่วน”

เมื่อครูอธิบายเสร็จครูได้เขียนเลข 2 กำกับไว้ใต้ตัวเลข $\frac{3}{7}$ เพื่อแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นว่า กำจัด $\frac{3}{7}$ เป็น

ลำดับที่สอง ในลำดับต่อมา ครูอธิบายตัวเลขในลำดับต่อมาที่ต้องกำจัด คือ -4 โดยครูอธิบายว่า ตัว

ต่อไปที่ต้องกำจัดคือ -4 โดยการย้ายไปบวก พร้อมทั้งขีดเส้นทับตัวเลข 4 และเขียนหมายเลขสาม

กำกับไว้ใต้เลข 4 และในลำดับสุดท้ายครูได้อธิบายตัวเลขตัวสุดท้ายที่จะต้องกำจัดคือ 2 เป็นลำดับที่

สี่ โดยเขียนเส้นทับตัวเลข 2 และเขียนหมายเลขสี่ กำกับไว้ใต้เลข 2 เพื่อแสดงให้เห็นว่ากำจัด 2 เป็น

ลำดับที่สี่ ดังภาพที่ 12 แสดงลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร

$$\boxed{\frac{8}{7}}(\cancel{2x} - \cancel{4}) + \cancel{8}$$

(2) (4) (3) (1)

ภาพที่ 12 แสดงลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร

เมื่อครูได้อธิบายครบทุกลำดับแล้ว ครูได้สรุปว่า วิธีการที่กล่าวมาคือ การหาคำตอบของสมการโดยวิธีการย้ายข้าง หรือใช้สมบัติการเท่ากัน

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอก เพื่อให้ นักเรียนเข้าใจเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประเภทของสมการ และ หลักการแก้สมการ ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายความหมายของสมการ แต่ครูยังไม่ได้อธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน และ อธิบายประเภทของสมการ รวมไปถึงใช้การพูดอธิบายข้อตกลงว่าสมการที่มีตัวแปรที่จะกล่าวถึงต่อไปจะเป็นสมการที่เป็นจริง นอกจากนี้ครูใช้การพูดเพื่ออธิบายถึงขั้นตอนการแก้สมการ และครูได้ใช้คำพูดที่แสดงให้เห็นว่าการแก้สมการคือการหาคำตอบของสมการ ดังคำพูดของครูที่ว่า “หลักการแก้สมการหรือการหาคำตอบของสมการ” ครูได้พูดอธิบายหลักการที่นำมาใช้ในการแก้สมการ คือ สมบัติการเท่ากัน และหลักการย้ายข้าง รวมไปถึงวิธีและลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้าน

เดียวกับตัวแปร ซึ่งครูได้อธิบายอย่างชัดเจน พร้อมทั้งใช้การพูดอธิบายวิธีการกว่าตัวไหนไกลตัวแปรมากกว่ากัน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือ ประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย นอกจากนี้ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นเส้นตรงเฉียงแสดงให้เห็นว่าเป็นการกำจัดตัวเลขในสมการเพื่อให้สมการข้างใดข้างหนึ่งเหลือตัวแปรเพียงตัวเดียว และมีสัมประสิทธิ์เป็นหนึ่ง และครูใช้ตัวเลขเพื่อเป็นการบอกถึงลำดับของการกำจัดว่าจะกำจัดตัวไหนก่อนหรือหลัง

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นรูปภาพเพื่อประกอบการอธิบายเรื่อง สมบัติการเท่ากัน เพื่อให้นักเรียนเห็นภาพได้ชัดเจน ว่าสมการเหมือนตาชั่ง ถ้าเพิ่มอะไรเข้าบนตาชั่ง หรือ นำอะไรออกจากตาชั่ง ข้างใดข้างหนึ่ง อีกข้างหนึ่งจะต้องทำเหมือนกันด้วย เพื่อให้ตาชั่งสมดุล เช่นเดียวกับสมการ

(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างเชิงเปรียบเทียบให้เห็นสมบัติการเท่ากัน เช่น “ถ้านำสิ่งของที่มีลักษณะ 5 กิโลกรัม เข้าในฝั่งซ้ายมือ ขวามือจะต้องใส่ 5 กิโลกรัม เข้าไปเช่นเดียวกัน” และตัวอย่างที่เป็นการแสดงให้เห็นลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร เช่นประโยคสัญลักษณ์ $\frac{3}{7}(2x - 4) + 8$

(5) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยครูได้เริ่มจากทำให้ข้างใดข้างหนึ่งของสมการเหลือตัวแปรเพียงตัวเดียว มีสัมประสิทธิ์เป็นหนึ่ง และไม่มีตัวเลขตัวใดที่ดำเนินการอยู่กับตัวแปร ซึ่งวิธีการของครูคือ กำจัดตัวเลขที่อยู่ไกลตัวแปรมากที่สุดก่อน ซึ่งการพิจารณาว่าตัวไหนอยู่ไกลตัวแปรมากกว่ากันให้พิจารณาจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขนั้นกับตัวแปร จากนั้นจึงกำจัดตัวที่ใกล้กว่าตัวเลข และทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ ได้ตัวแปรเพียงตัวเดียว วิธีการที่ครูใช้กำจัดตัวเลข คือ ใช้สมบัติการเท่ากัน หรือ หลักการย้ายข้าง ตามที่ครูใช้เรียก ซึ่งครูได้แสดงลำดับให้เห็นอย่างชัดเจน โดยการเขียนตัวเลขกำกับไว้

จากขั้นตอนนี้ ครูได้ทบทวนเรื่องสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ คือ สมบัติการเท่ากัน โดยครูได้อธิบายสมบัติการเท่ากันโดยการพูดอธิบายพร้อมทั้งใช้ตาชั่งเข้าประกอบการอธิบายการใช้หลักการเท่ากัน นั่นคือนอกจากที่ครูใช้คำพูดอธิบายแล้วครูใช้รูปภาพมาประกอบเพื่อให้ นักเรียนเกิดมโนคติเกี่ยวกับสมบัติการเท่ากันชัดเจนมากยิ่งขึ้นด้วย จากนั้นครูเชื่อมโยงหลักการเท่ากันกับหลักการย้ายข้างว่า หลักการย้ายข้างมีที่มาจากหลักการเท่ากันโดยการอธิบาย นอกจากนี้ครูอธิบายหลักการแก้สมการ โดยการกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน โดยเริ่มอธิบาย การพิจารณาว่าตัวเลขตัวใดที่ไกลตัวแปร โดยให้พิจารณาที่ความสัมพันธ์ โดยครูได้อธิบายพร้อม

ยกตัวอย่างประกอบเป็นลำดับขั้นและเขียนตัวเลขกำกับว่าต้องกำจัดตัวไหนก่อน เป็นลำดับที่เท่าไร เพื่อเป็นการเน้นให้นักเรียนเห็นถึงลำดับการกำจัดตัวเลข อย่างชัดเจน และครูได้อธิบายวิธีการกำจัดตัวเลขแต่ละตัวด้วย โดยครูเน้นที่หลักการย้ายข้าง จากนั้นครูสรุปว่าที่กล่าวมาเป็นหลักการหาคำตอบของสมการ โดยการย้ายข้าง หรือการใช้สมบัติการเท่ากัน

3.1.2.2 ขั้นตอนที่ 2 ครูอธิบายแบบฝึกหัดในใบความรู้ เรื่อง การพิจารณาประโยคสัญลักษณ์ที่กำหนดให้ ข้อใดบ้างที่เป็นสมการ โดยครูถามนักเรียนว่าข้อใดบ้างที่เป็นสมการ โดยพิจารณาไปพร้อมๆ กับนักเรียนทีละข้อ เช่น

$$32 + 4 = 7 \text{ เป็นสมการ}$$

$$43 > 35 \text{ ไม่เป็นสมการ เพราะเป็นเครื่องหมายมากกว่า}$$

$53 + 5 \leq 20x$ ครูถามนักเรียนว่าเป็นสมการหรือไม่ หลังจากนักเรียนตอบว่า “เป็น” ครูถามเหตุผลนักเรียนว่าเป็นสมการเพราะอะไร นักเรียนตอบว่า “เพราะเป็นเครื่องหมายมากกว่าหรือเท่ากับ” หลังจากนั้นครูอธิบายต่อว่า “เครื่องหมายที่จะเป็นสมการมีเพียงเครื่องหมายเดียวคือเท่ากับ” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ “=” ลงบนกระดาน และอธิบายต่อว่า “เครื่องหมายอื่นไม่ใช่ทั้งหมด” และครูสรุปว่าประโยคสัญลักษณ์ $53 + 5 \leq 20x$ ไม่เป็นสมการ ถึงแม้จะมีเครื่องหมายเท่ากับด้วยก็ตาม ไม่ถือว่าเป็นสมการ

เมื่อครูเฉลยแบบฝึกหัดนี้ครบทุกข้อ ครูได้สรุปว่า “สมการคือประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ” อีกครั้ง

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 ในขั้นนี้เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเฉลยไปพร้อมๆ กัน เรื่อง ความหมายของสมการ ซึ่งเป็นการทบทวน และครูใช้การนำเสนอภายนอก ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายว่าประโยคสัญลักษณ์ที่กำหนดเป็นสมการหรือไม่เป็นสมการ พร้อมทั้งเหตุผล และอธิบายความหมายของอย่างถูกต้องและชัดเจน และครูได้เน้นความหมายของสมการคือประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับเท่านั้น แต่ครูยังไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่าง คือ การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รวมถึงเครื่องหมายที่แสดงการดำเนินการต่างๆ ด้วย และใช้เครื่องหมายเท่ากับ (=) แทนคำว่าเท่ากับ แสดงให้เห็นว่าประโยคสัญลักษณ์นั้นเป็นสมการ

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างหรือแบบฝึกหัดของครู มีความหลากหลายเพื่อเปรียบเทียบให้นักเรียนได้เห็นความหมายของสมการ

3.1.2.3 ขั้นตอนที่ 3 ครูให้นักเรียนดูแบบฝึกหัดในใบความรู้ โดยให้พิจารณาว่าสมการใดที่เป็นจริงและสมการใดที่เป็นเท็จ

โดยครูเริ่มอธิบายว่า “สมการที่เป็นจริงจะเหมือนกับตาชั่ง คือฝั่งซ้ายกับฝั่งขวาจะสมดุลกันหรือจะเท่ากัน แต่ถ้าสมการที่ไม่เป็นจริง อาจจะเอียงซ้ายหรือเอียงขวา” จากนั้นครูให้นักเรียนตรวจสอบสมการในแบบฝึกหัด โดยถ้าเป็นจริงฝั่งซ้ายเท่ากับฝั่งขวาให้เขียนเครื่องหมายถูก แต่ถ้าฝั่งซ้ายกับฝั่งขวามากกว่าหรือน้อยกว่า ให้ใส่เครื่องหมายผิด นั่นคือ ไม่ใช่สมการที่เป็นจริงและครูอธิบายและเฉลยแบบฝึกหัดทีละข้อ เช่น

(1) $14 \times 89 = 89 \times 14$ เป็นสมการ และครูอธิบายต่อและเน้นให้นักเรียนเขียนข้อความลงในสมุด คือ “การคูณมีสมบัติการสลับที่”

(2) $95 + 12 = 12 + 95$ เท่ากัน และครูอธิบายต่อว่า “การบวกมีสมบัติการสลับที่เช่นเดียวกับการคูณ”

(3) $72 + 9 = 9 + 72$ เท่ากัน

(4) $114 - 56 = 56 - 114$ ไม่เท่ากัน

(5) $1,802 = 1,000 + 800 + 2$ เท่ากัน ครูอธิบายต่อข้อนี้เรียกว่า

การกระจาย

(6) $(4 \times 8) + 2 = 4 \times (8 + 2)$ ไม่เท่ากัน และครูอธิบายต่อว่า ข้อนี้ไม่มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

(7) $5 \times (3 + 6) = (5 \times 3) + (5 \times 6)$ เท่ากัน และครูอธิบายว่า ใช้สมบัติการแจกแจง

(8) $23 \times (12 \times 5) = (23 \times 12) \times 5$ เท่ากัน และครูอธิบายว่า การคูณมีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

(9) $845 + (5 - 3) = (845 - 3) + 5$ เท่ากัน ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า 3 เป็นลบเหมือนเดิม 5 เป็นบวกเหมือนเดิม เพียงแค่เปลี่ยน ตำแหน่งเท่านั้น

(10) $5y + 2 = 7$ โดยครูอธิบายว่า ตอบได้ 2 กรณี คือ กรณีที่ 1 จะเป็นจริงในกรณีที่ $y = 1$ และกรณีที่ 2 ถ้า y เป็นตัวอื่นที่ไม่ใช่ 1 จะไม่จริงหรือเป็นเท็จ

(11) $3z \leq 0$ ครูอธิบายว่าประโยคสัญลักษณ์ข้อนี้ไม่ใช่สมการ ดังนั้นไม่เข้าเงื่อนไขตั้งแต่ไม่เป็นสมการแล้ว

(12) $4 + a = a + 4$ เท่ากัน

(13) $8 - (2 \times 4) > 0$ ไม่เป็นสมการ

(14) $3 - 2 < 2 - 3$ ไม่เป็นสมการ

$$(15) \quad 12 \div 4 = 4 \div 12 \text{ ไม่เท่ากัน}$$

$$(16) \quad 10 - 2 = 2 - 10 \text{ ไม่เท่ากัน}$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 3 ในขั้นนี้เป็นขั้นที่ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดเฉลยไปพร้อมๆ กัน เรื่อง ประเภทของสมการ ซึ่งเป็นการทบทวน และครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอก ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายว่าความหมายของสมการที่เป็นจริง และสมการที่เป็นเท็จ โดยใช้การอธิบายเปรียบเทียบกับตาชั่ง ดังนี้ “สมการที่เป็นจริงจะเหมือนกับตาชั่ง คือฝั่งซ้ายกับฝั่งขวาจะสมดุลกันหรือจะเท่ากัน แต่ถ้าสมการที่ไม่เป็นจริง อาจจะเอียงซ้ายหรือเอียงขวา” และอธิบายว่าสมการแต่ละข้อเป็นจริงหรือเท็จพร้อมทั้งบอกสมบัติทางคณิตศาสตร์ของแต่ละข้อด้วย ซึ่งครูได้อธิบายแบบฝึกหัดแต่ละข้ออย่างถูกต้องและชัดเจนเพื่อให้นักเรียนสามารถเข้าใจมโนคติในเรื่องสมบัติเหล่านี้

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั่นคือประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นแบบฝึกหัด รวมถึงเครื่องหมายที่แสดงการดำเนินการต่างๆ ด้วย

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างเปรียบเทียบให้เห็นลักษณะสมการแต่ละประเภท โดยยกตัวอย่างเรื่องตาชั่ง แบบฝึกหัด แบบฝึกหัดที่ครูให้นักเรียนทำ จะเห็นว่าสมการมีหลากหลายลักษณะที่แตกต่างกัน และมีสมบัติทางคณิตศาสตร์หลายสมบัติ เช่น สมบัติสลับที่สำหรับการบวก สมบัติสลับที่สำหรับการคูณ สมบัติการกระจาย สมบัติการแจกแจง สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เป็นต้น เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจสมบัติที่เป็นพื้นฐานที่นำมาใช้ในการแก้สมการมากยิ่งขึ้น

3.1.2.4 ขั้นตอนที่ 4 ครูยกตัวอย่างสมการที่มีลักษณะแตกต่างกันเพื่อเปรียบเทียบให้เห็นความแตกต่างของวิธีการแก้สมการในแต่ละรูปแบบ ซึ่งได้แก่สมการที่มีตัวแปรปรากฏอยู่ที่เดียว สมการที่มีตัวแปรเดียวแต่ปรากฏอยู่ 2 ที่ และสมการที่มีตัวแปรเดียวแต่ปรากฏอยู่ 2 ที่และมีความซับซ้อนมากขึ้น โดยครูได้ยกตัวอย่างพร้อมทั้งอธิบายเป็นไปตามลำดับ ดังต่อไปนี้

(1) ครูยกตัวอย่างพร้อมอธิบายการแก้สมการอย่างง่าย ครูยกตัวอย่างการแก้สมการ โดยยกตัวอย่างสมการที่สามารถทำได้ 2 วิธี คือ สมการ $3(2x + 1) = 1$ ครูเริ่มอธิบายวิธีการขั้นตอนการแก้สมการ โดยเริ่มจาก การใช้คำถามกับนักเรียนว่า “ใครไกลตัวแปรมากที่สุด” หลังจากนั้นนักเรียนตอบว่า 3 แล้ว ครูย้คำตอบของนักเรียนว่า “3 ไกลตัวแปรมากที่สุด เพราะฉะนั้นย้ายสามไปหาร” พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดาน คือ $2x + 1 = \frac{1}{3}$ จากนั้นครูอธิบายตัวที่จะต้องกำจัดตัวต่อไปคือ 1 ซึ่งต้องนำไปลบ พร้อมทั้งเขียน

ประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $2x = \frac{1}{3} - 1$ และครูอธิบาย “ $\frac{1}{3} - 1$ เป็นการลบเศษส่วน

จะต้องทำตัวส่วนให้เท่ากัน นั่นคือ ต้องทำส่วนให้เป็น 3” และครูเขียนประโยคสัญลักษณ์ คือ

$$2x = \frac{1-3}{3} \text{ และ } 2x = -\frac{2}{3} \text{ จากนั้นครูอธิบายขั้นตอนต่อไปคือ ย้าย 2 ไปหาร พร้อมทั้งเขียน}$$

$$-\frac{2}{3}$$

สมการ คือ $x = -\frac{3}{2}$ จะเห็นว่า ครูใช้การนำเสนอการหารในรูปของเศษส่วน และอธิบายวิธีการ

หารเศษส่วน โดยเปลี่ยนหารเป็นคูณ กลับส่วนเป็นเศษ กลับเศษเป็นส่วน และเขียนสัญลักษณ์ คือ

$$x = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \text{ ดังนั้นได้คำตอบของสมการคือ } x = -\frac{1}{3}$$

ครูสรุปโดยเน้นถึง วิธีการแก้สมการ “จะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัว

แปรที่สุดก่อน เวลาที่พิจารณาว่าไกลหรือใกล้ ให้พิจารณาที่ความสัมพันธ์ เราทำอะไรก่อนหลัง ไม่ใช่วัดจากระยะทาง”

จากสมการในข้อนี้ ลักษณะสมการคือ มีตัวเลขคูณอยู่กับวงเล็บ ซึ่งสามารถทำได้หลายวิธี แต่ครูนำเสนอเพียงวิธีการเดียว โดยเริ่มจากการกำจัดตัวเลข โดยใช้หลักการของการกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน ในข้อนี้ครูเริ่มกำจัดตัวที่อยู่นอกวงเล็บก่อน จากนั้นกำจัดตัวต่อไปเรื่อยๆ จนเหลือตัวแปร x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 อยู่ด้านใดด้านหนึ่งของสมการ

(2) ครูยกตัวอย่างการแก้สมการที่มีลักษณะที่ตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ คือ $11(2x-1) + 3x = 13$ โดยครูอธิบายวิธีการและขั้นตอนการแก้สมการนี้ ดังนี้

ครูเริ่มโดยการถามนักเรียนว่า “สมการในข้อนี้มีกี่ตัวแปร”

หลังจากนักเรียนตอบทั้ง 2, 3 และ 1 ตัวแปร ครูจึงสรุปว่า “สมการนี้มี 1 ตัวแปร แต่มีหลายที่มีตัวแปรเดียวคือตัวแปร x ” พร้อมทั้งเน้นให้นักเรียนเห็น โดยการขีดเส้นใต้ตัวแปร x ทั้ง 2 ที่

จากนั้นครูทบทวนไปถึงเรื่องเอกนาม โดยการอธิบายว่า “ถ้ามีเอกนามคล้ายปรากฏอยู่ เราเรียกว่า เอกนาม หรือพหุนามนั้นยังไม่สำเร็จรูป จะต้องทำให้สำเร็จรูปก่อน” จากนั้นครูได้ถามนักเรียนว่าทำให้สำเร็จรูปทำอย่างไร กำจัดได้ไหม หลังจากนักเรียนตอบว่าไม่ได้ ครูได้สรุปพร้อมให้เหตุผลว่า กำจัดไม่ได้ เพราะ x อยู่คนละที่ คนละตำแหน่ง เพราะฉะนั้นจะต้องรวมให้อยู่ด้วยกัน ก่อน จากนั้นครูอธิบายลำดับการรวมตัวแปรและการแก้สมการ มีลำดับดังนี้

(2.1) แปลง $11(2x - 1)$ ให้สำเร็จก่อน และครูดถามว่า 11 คำเนนิการ อย่งไรอยู่กับ $(2x - 1)$ ครูกล่าว “คุณ” และอธิบายต่อว่า “ต้องแจกแจงเข้าไป” พร้อมทั้งเขียน ลูกศรโค้งจาก 11 ไป $2x$ และ 1 ที่อยู่ในวงเล็บ ดังภาพที่ 13

$$11(2x - 1) + 3x = 13$$

ภาพที่ 13 แสดงการอธิบายการแจกแจงของครูโดยใช้สัญลักษณ์ลูกศรโค้ง

จากนั้นครูเปรียบเทียบว่า ตัวอย่างที่ 1 และตัวอย่างที่ 2 มีความแตกต่าง ต่างกัน นั่นคือ ตัวอย่างที่ 1 มีตัวแปรอยู่ที่เดียว แต่ตัวอย่างที่ 2 มีตัวแปรอยู่ 2 ที่ วิธีการจะต้องรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกันก่อน และเมื่อครูแจกแจงแล้ว ได้สมการออกมาเป็น

$$22x - 11 + 3x = 13$$

(2.2) ครูรวมพจน์ที่มีตัวแปร และพยายามเน้นให้นักเรียนเห็นว่าต้อง นำพจน์ใดมารวมกันบ้างโดยการขีดเส้นใต้พจน์นั้นๆ นั่นคือ ขีดเส้นใต้ $22x$ และ $3x$ ดังภาพที่ 14 และเมื่อครูรวมพจน์แล้ว ได้สมการออกมาเป็น $25x - 11 = 13$

$$22x - 11 + 3x = 13$$

ภาพที่ 14 แสดงให้เห็นการเน้นของครูในเรื่องพจน์ที่สามารถรวมกันได้

(2.3) ในขั้นต่อมาครูแสดงการกำจัดตัวเลข โดยใช้หลักการกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรออกก่อน ซึ่งจะเห็นได้จาก ครูใช้คำถามกับนักเรียนว่า “ใครอยู่ไกลตัวแปรที่สุด” เมื่อนักเรียนตอบ ครูอธิบายต่อเพิ่มเติมว่า “ตอนนี้ตัวแปรเป็นตัวเดียวและอยู่ที่เดียวแล้ว ดังนั้น กำจัด -11 ก่อน เป็นลบ ย้ายข้างไปกลายเป็นบวก” และครูเขียนสมการคือ $25x = 24$

(2.4) ครูดำเนินการต่อไปเพื่อให้ได้คำตอบของสมการ โดยครูดถามนักเรียนว่า “ x เดียวคืออะไร” แสดงให้เห็นว่า คำว่า “ x เดียว” เป็นการนำเสนอลักษณะคำตอบของสมการ และเป็นการแสดงให้เห็นว่า การหาคำตอบของสมการ ต้องทำให้อยู่ในรูป x เดียว นั่นคือ สัมประสิทธิ์และเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็น 1 จากนั้นครูได้เขียนสมการออกมาเป็น $x = \frac{24}{25}$ และได้

สรุปว่าค่า x คือ $\frac{24}{25}$ เป็นคำตอบของสมการ

(3) ครูยกตัวอย่างการแก้สมการที่มีลักษณะซับซ้อน มีตัวแปรปรากฏอยู่ 2 ที่ และมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นเศษส่วนคือ $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5}x = 1$ ครูเริ่มอธิบายโดย อธิบายว่า ตัวแปร x มีอยู่ 2 ที่ จะต้องแปลงก่อนจากนั้นจึงรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกัน ซึ่งครูได้อธิบายวิธีการแปลงโดยใช้สมบัติการแจกแจง พร้อมทั้งเขียนลูกศรโค้งจาก $\frac{2}{3}$ ไปยัง $\frac{3}{5}x$ และ $\frac{1}{4}$ ที่อยู่ภายในวงเล็บ เพื่อเป็นการเน้นให้นักเรียนได้เห็นว่าจะต้องนำ $\frac{2}{3}$ ไปคูณทั้ง $\frac{3}{5}x$ และ $\frac{1}{4}$ ดังภาพที่ 15

$$\frac{2}{3} \left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{4} \right) + \frac{2}{5}x = 1$$

ภาพที่ 15 แสดงการเน้นให้นักเรียนเห็นสมบัติการแจกแจง

จากนั้นครูเขียนประโยคสัญลักษณ์แสดงการแจกแจง และทำสมการออกมาในรูปผลสำเร็จได้ ดังนี้ $\left[\left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{3}{5}x \right) - \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{1}{4} \right) \right] + \frac{2}{5}x = 1$ และ $\frac{2}{5}x - \frac{1}{6} + \frac{2}{5}x = 1$ เมื่อได้สมการในรูปผลสำเร็จ ครูได้ชี้ให้นักเรียนเห็น เอกนามที่สามารถรวมกันได้ คือ $\frac{2}{5}x$ และ $\frac{2}{5}x$ พร้อมทั้งอธิบายวิธีการบวก ลบ เศษส่วน ถ้าตัวส่วนเท่ากันแล้ว ให้นำเศษมาบวกกันได้เลย และครูได้ย้ำว่าผลลัพธ์คือ $\frac{4}{5}x$ ไม่ใช่ $\frac{4}{10}x$ และครูเน้นว่าตัวส่วนไม่ต้องบวกกัน และครูเขียนสมการออกมาเป็น $\frac{4}{5}x - \frac{1}{6} = 1$ จากนั้นครูอธิบายวิธีการหาคำตอบของสมการ โดยใช้หลักการกำจัดตัวเลขที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน และหลักการย้ายข้าง ซึ่งเห็นได้จาก ครูถามนักเรียนว่า “กำจัดอะไรก่อน” จากนั้นครูได้อธิบายต่อว่า ย้าย $-\frac{1}{6}$ ไปอีกฝั่งเป็น $+\frac{1}{6}$ นั่นคือครูใช้หลักการย้ายข้าง เมื่อครูอธิบายขั้นตอนนี้เสร็จ ครูได้เขียนสมการเป็น $\frac{4}{5}x = 1 + \frac{1}{6}$ และ $\frac{4}{5}x = \frac{7}{6}$ จากนั้นครูอธิบายต่อ โดยครูใช้คำว่า “ทำให้เหลือ x เดียว โดยการย้าย 4 ไปหาร และย้าย 5 ไปคูณ” นั่นคือ ครูต้องการหาค่าของตัวแปร x ซึ่งจะต้องทำให้ x มีสัมประสิทธิ์เป็น 1 จึงจะเป็นคำตอบของสมการ และครูได้เขียนแสดงการหาคำตอบของสมการในขั้นตอนนี้ และคำตอบของสมการที่ได้ออกมา ดังต่อไปนี้

$$x = \frac{7}{6} \times \frac{5}{4}$$

$$x = \frac{35}{24} = 1 \frac{11}{24}$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 4 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายขั้นตอนวิธีการที่ใช้ในการแก้สมการ รวมทั้งหลักการที่ใช้ในการแก้สมการ เช่น อธิบายลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับสมการ พร้อมทั้งการพิจารณาว่าควรกำจัดตัวใดก่อน อธิบายหลักการกำจัด คือ การย้ายข้าง สมบัติการกระจาย การรวมตัวแปร การบวก การลบ เอกนาม พหุนาม การบวก การลบ การคูณ การหารเศษส่วน ซึ่งครูได้อธิบายอย่างละเอียด ถูกต้องและชัดเจน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั้นคือ ประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่าง รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย ครูใช้ลูกศรโค้งเพื่อแสดงให้เห็นการใช้สมบัติการกระจายที่นำไปเพื่อช่วยแก้สมการด้วย นอกจากนี้ครูยังขีดเส้นใต้พจน์ที่สามารถรวมกันได้ เพื่อเป็นการเน้นให้นักเรียนว่าจะนำพจน์ใ้ได้บ้างมารวมกัน และครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นเส้นตรงเฉียงแสดงให้นักเรียนเห็นว่าเป็นการกำจัดตัวเลขในสมการเพื่อให้สมการข้างใดข้างหนึ่งเหลือตัวแปรเพียงตัวเดียว และมีสัมประสิทธิ์เป็นหนึ่ง

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่ครูนำมาแสดงให้เห็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ มีความหลากหลายโดยเรียงลำดับจากตัวอย่างที่เป็นสมการอย่างง่าย ตัวแปรปรากฏอยู่ที่เดียว จากนั้นจึงเป็นตัวอย่างสมการที่มีความซับซ้อนขึ้นตามลำดับ

(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการหรือแสดงวิธีการหาคำตอบของสมการที่มีลักษณะซับซ้อน มีตัวแปรเดียวแต่ปรากฏอยู่หลายที่ ดังนี้ ครูเริ่มอธิบายจาก ให้พิจารณาสมการ ว่ามีตัวแปรอยู่ที่ ถ้ามีอยู่หลายที่ อันดับแรกต้อง รวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกันก่อน การรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกัน จะต้องพิจารณาต่อไปว่าสามารถรวมกันได้เลยหรือไม่ ถ้ายังรวมไม่ได้ เช่นตัวแปรอยู่ในวงเล็บ จะต้องใช้สมบัติเรื่องการแจกแจงเข้ามาช่วยก่อน จากนั้นจึงรวมตัวแปร โดยใช้ความรู้เดิมเรื่องการบวก การลบ เอกนาม เมื่อได้ตัวแปรอยู่ที่เดียวกันแล้ว จึงใช้หลักการกำจัดตัวเลขที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน จนทำให้ด้านใดด้านหนึ่งของสมการเหลือเพียงตัวแปร x เพียงตัวแปรเดียวซึ่งมีเลขชี้กำลังและมีสัมประสิทธิ์เป็น 1 ซึ่งหลักการกำจัดตัวเลขนั้น ครูใช้หลักการย้ายข้าง ซึ่งครูได้อธิบายมาก่อนหน้านี้แล้วว่า หลักการย้ายข้างมาจากสมบัติการเท่ากัน

3.1.2.5 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจำนวน 5 ข้อ ซึ่งแบบฝึกหัดมีลักษณะที่ซับซ้อน มีตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ ดังนี้

$$(1) \quad -\frac{3}{7}\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}x = 2$$

$$(2) \quad \frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

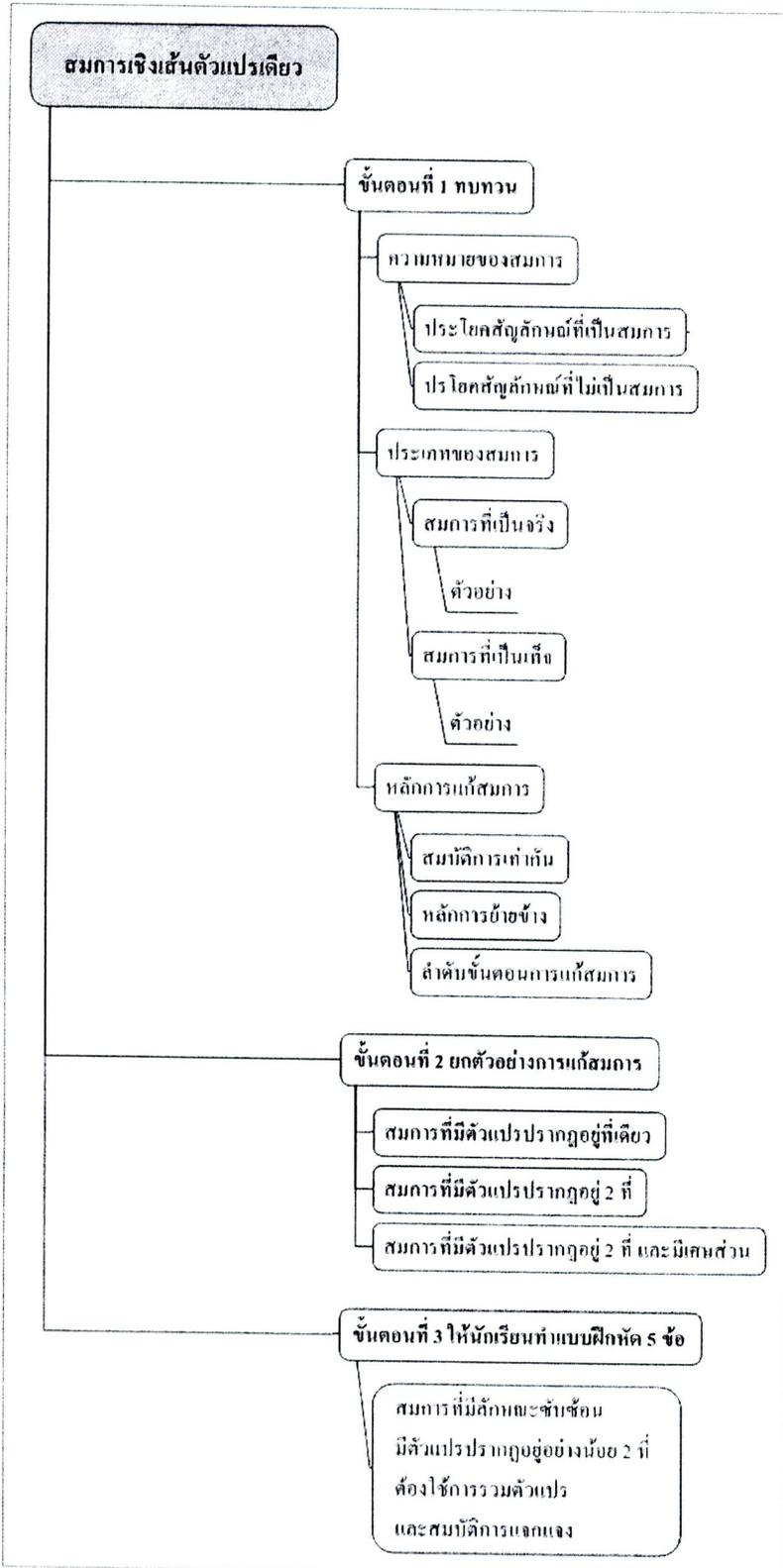
$$(3) \quad 3\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}(3x - 1)$$

$$(4) \quad \frac{3}{4}(1 - x) + \frac{2}{3}(x - 1) = \frac{1}{5}(x + 2)$$

$$(5) \quad \frac{x}{2} - 3 = \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกิจกรรมนี้ ครูจะเริ่มโดยทบทวนสิ่งที่เรียนมาในกิจกรรมที่แล้ว ได้แก่ ความหมายของสมการ ประเภทของสมการ และหลักการแก้สมการ นั่นคือสมบัติที่ใช้ รวมไปถึงหลักการ ลำดับการแก้สมการ หรือวิธีพิจารณาการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับตัวแปร แต่ครูยังไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างละเอียด แต่ครูเน้นไปที่การแก้สมการ ซึ่งครูได้ยกตัวอย่างการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหลายตัวอย่างที่แตกต่างกัน เรียงลำดับจากตัวอย่างที่ง่ายไปตัวอย่างที่ยากขึ้นตามลำดับ สำหรับขั้นตอนวิธีที่ใช้แก้ครูได้อธิบายอย่างละเอียด รวมไปถึงทบทวนเนื้อหาที่เป็นความรู้พื้นฐานที่นำมาใช้ในการแก้สมการในแต่ละข้อ เช่น สมบัติการกระจาย ซึ่งในกิจกรรมนี้ครูใช้คำว่า สมบัติการแจกแจง การบวกลบ เอกนาม พหุนาม การบวก การลบ การคูณ การหารเศษส่วน เป็นต้น และครูได้อธิบายขั้นตอนแต่ละขั้น เช่น การรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกัน การแปลงสมการเพื่อให้รวมตัวแปรได้ โดยใช้สมบัติการกระจาย การกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับตัวแปร โดยใช้การย้ายข้าง ซึ่งในกิจกรรมนี้ ในส่วนของการแก้สมการที่ยกตัวอย่าง ครูจะใช้คำว่า “การย้ายข้าง” ในการอธิบายขั้นตอนวิธีการแก้สมการสำหรับแบบฝึกหัดที่ครูให้นักเรียนทำมีลักษณะคล้ายกับตัวอย่าง มีความซับซ้อน มีตัวแปรเดียวแต่ปรากฏอยู่หลายที่ ทั้งที่อยู่ข้างเดียวกันของสมการและคนละข้าง

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูแสดงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 16 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 2

3.1.3 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ต่อ)

ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในวันนี้เกี่ยวกับเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

3.1.3.1 ขั้นตอนที่ 1 ครูทบทวนความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมบัติที่ใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และขั้นตอนการแก้สมการ ซึ่งเป็นไปตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

(1) ความหมายของสมการเชิงเส้น

ครูเริ่มกิจกรรมโดยทบทวนความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวลงบนกระดาน เพื่อที่จะอธิบายความหมาย โดยครูถามนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของสมการ พร้อมทั้งขีดเส้นใต้คำว่า “สมการ” หลังจากนั้นนักเรียนตอบแล้ว ครูย้ำความหมายของสมการว่า คือ “ประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ” จากนั้นครูกล่าวถึง “สมการเชิงเส้น” พร้อมทั้งขีดเส้นใต้คำว่าสมการเชิงเส้น และได้อธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นว่า “สมการเชิงเส้น เป็นประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ และเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็น 1” และครูย้ำเพื่อให้ นักเรียนจำว่า “เลขชี้กำลังของตัวแปรเท่ากับ 1 จะเรียกว่าสมการเชิงเส้น” และครูอธิบายต่อว่า “ยังไม่เป็นตัวแปรเดียว สมการเชิงเส้นมีหลายแบบ แต่ในที่นี้เรียนเพียงแค่สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งขีดเส้นใต้คำว่า ตัวแปรเดียว” จากนั้นครูอธิบาย “คำว่าตัวแปรเดียว ว่าชัดเจนในความหมายว่ามีเพียงแค่ตัวแปรเดียวเท่านั้น”

ครูอธิบายรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยครูเขียนประโยคสัญลักษณ์ “ $ax + b = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนใดๆ” พร้อมทั้งยกตัวอย่างสมการ $5x - 7 = 4$ และถามนักเรียนว่า “ a คือ เท่าไหร่” ครูตอบว่า “ a คือ 5” และถามต่อไปว่า “ b เป็นเท่าไหร่” เมื่อนักเรียนตอบว่า “-7” แต่ครูได้เฉลยว่า b คือ -11 จากนั้นครูอธิบายต่อว่า “ย้าย 4 มาเพื่อต้องการจัดสมการให้อยู่ในรูป $ax + b = 0$ และเขียนสมการให้อยู่ในรูป $5x - 7 = 4$ ได้เหมือนกัน”

จากนั้นครูยกตัวอย่างสมการที่มีตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ คือ $x - 5x + 3 = 2$ ซึ่งครูอธิบายว่าสมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ มี x เป็นตัวแปร และ a คือ -4 พร้อมทั้งให้เหตุผลว่า $x - 5x$ ได้เท่ากับ $-4x$ เพราะฉะนั้น a คือ -4 เนื่องจาก x และ $-5x$ เป็นเอกนามคล้ายนำมาบวก ลบ กันได้ จากนั้นครูสรุปสมการที่ได้ และสรุปว่า a คือ -4

ครูยกตัวอย่างสมการที่หลากหลายเพื่อประกอบการอธิบายความหมาย และลักษณะของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวมากยิ่งขึ้น พร้อมทั้งถามนักเรียนว่าสมการที่ยกตัวอย่างนั้นเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ ดังนี้

$$(1.1) \frac{1}{x} + 3 = 8 \text{ หลังจากครูถามนักเรียนว่าสมการนี้เป็นสมการ}$$

หรือไม่ ครูอธิบายว่า “สมการนี้ไม่ใช่สมการเชิงเส้น เพราะสมการนี้สามารถเขียนรูปใหม่ได้เป็น $x^{-1} + 3 = 8$ จะเห็นได้ว่าเลขชี้กำลังของตัวแปรติดลบ ไม่ใช่สมการเชิงเส้น” และครูได้เขียนประโยคสัญลักษณ์ $x^{-1} + 3 = 8$ ลงบนกระดาน

(1.2) ครูยกตัวอย่างสมการ $x^3 + 5x = 8$ พร้อมทั้งอธิบายว่าสมการนี้ไม่เป็นสมการเชิงเส้น เพราะเลขชี้กำลังเป็นสาม และครูเน้นว่า เลขชี้กำลังของตัวแปรต้องเป็น 1 เท่านั้น จึงจะเรียกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

(2) วิธีการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ครูทบทวนวิธีการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยใช้สมบัติการเท่ากันซึ่งในกิจกรรมนี้ครูใช้คำว่า หลักการเท่ากัน โดยครูเขียนคำว่า “เท่ากัน” ลงบนกระดาน พร้อมทั้งอธิบายว่า “หลักการเท่ากัน แบ่งได้เป็น 4 กลุ่ม คือ หลักการเท่ากันการบวก หลักการเท่ากันการลบ หลักการเท่ากันการคูณ และหลักการเท่ากันการหาร” ซึ่งหลักการทั้ง 4 นี้ ครูอธิบายว่า “สามารถแบ่งได้เป็น 2 กลุ่มใหญ่ๆ คือ การบวก กับ การคูณ” จากนั้นครูเขียนคำว่า “การบวก” ลงบนกระดาน และอธิบายว่า “ถ้าบวกเข้าด้วยจำนวนเต็มบวกเป็นวิธีการบวก แต่ถ้าบวกเข้าด้วยจำนวนเต็มลบเป็นวิธีลบ เพราะบวกคูณลบกลายเป็นลบ” จากนั้นครูสรุปอีกครั้งว่า “การเท่ากันของการบวก มีการบวก และการลบ” พร้อมทั้งเขียนเครื่องหมายบวก และเครื่องหมายลบลงบนกระดาน ดังภาพที่ 17

เท่ากัน

- บวก ; + , -

ภาพที่ 17 แสดงการอธิบายของครู เรื่องสมบัติการเท่ากัน กลุ่มการบวก

ครูอธิบายการเท่ากันของการคูณ “คูณด้วยจำนวนเต็มจะเป็นเรื่องของการคูณ แต่ถ้าคูณด้วยเศษส่วนจะเป็นเรื่องของการหาร” แสดงให้เห็นว่าครูนำเสนอความหมายของการหารในรูปของเศษส่วน จากนั้นครูยกตัวอย่างเพื่ออธิบายประกอบกับหลักการคูณและหลักการหาร ดังนี้ $\frac{4}{7}x = 8$ ครูใช้การพูดอธิบายว่า “คูณเข้าด้วย $\frac{7}{4}$ ” และครูเขียนสมการลงบนกระดานคือ $\frac{4}{7}x \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{8 \times 7}{4}$ และ $x = 4$ และครูได้อธิบายว่า “ในข้อนี้คูณเข้าด้วยเศษส่วน ซึ่งจะกลายเป็นเรื่องของการหาร” ครูสรุปในตอนท้ายว่า “เป็นการแก้สมการ โดยใช้สมบัติการบวกและการคูณ”

(3) ขั้นตอนการแก้สมการ

ครูทบทวนเรื่อง ขั้นตอนการแก้สมการ โดยครูเน้นหลักการที่ต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรที่สุด จากนั้นครูถามนักเรียนว่า “คำว่าไกลหรือใกล้ วัดจากอะไร” หลังจากนักเรียนในห้องตอบว่า “ความสัมพันธ์” ครูย้ำอีกว่า “คำว่าไกลหรือใกล้ วัดจากความสัมพันธ์ ไม่ใช่ วัดจากระยะทาง” และครูได้อธิบายเปรียบเทียบกับความสัมพันธ์ของคน เพื่ออธิบายความสัมพันธ์ของตัวเลขกับตัวแปร คือ “คนเราใกล้กันแต่ไม่เคยคุยกันเลยก็เหมือนอยู่ไกล แต่ถ้าอีกคนอยู่ไกลแต่คิดถึงกันทุกวันก็เหมือนอยู่ใกล้ เพราะฉะนั้นความสัมพันธ์ชัดเจนที่สุด ระยะทางไม่ได้เป็นตัวบอก” เมื่อครูอธิบายหลักการเสร็จ ครูได้ยกตัวอย่างประโยคสัญลักษณ์ประกอบการอธิบายเรื่องลำดับความใกล้ ไกล ตัวแปร และค้บการกำจัดตัวเลขนั้น เพื่อให้นักเรียนเข้าใจมากยิ่งขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

(3.1) $3x + 5$ ครูอธิบายโดยการเริ่มจากการถามนักเรียนว่า “เลขตัวใดอยู่ไกลตัวแปรที่สุด” เพื่อเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดด้วยตัวเองก่อน จากนั้นครูจึงเฉลยว่า “5 อยู่ไกลตัวแปรที่สุด รองลงมาคือ 3 ดังนั้นจะต้องกำจัด 5 ก่อน แล้วกำจัด 3 ในลำดับต่อมา” ซึ่งครูได้อธิบายพร้อมกับขีดเส้นทับเลข 5 กับ เลข 3 ตามลำดับ เพื่อเป็นการแสดงให้เห็นว่ากำจัด 5 และ 3 ตามลำดับ

(3.2) $4(x - 7)$ ครูอธิบายว่า 4 อยู่ไกลตัวแปรที่สุด รองลงมาคือ 7

(3.3) $-\frac{3}{4}(x-5)+2$ ครูอธิบาย โดยถามนักเรียนว่า “ตัวไหนอยู่ไกลตัวแปรที่สุด” จากนั้นครูอธิบายว่า “2 อยู่ไกลตัวแปรที่สุด รองลงมาคือ $-\frac{3}{4}$ ” พร้อมทั้งเขียนวงกลมล้อมรอบ $-\frac{3}{4}$ เพื่อแสดงให้เห็นว่าเป็น $-\frac{3}{4}$ ทั้งหมดที่อยู่ไกลตัวแปรในลำดับต่อมา จากนั้นถามนักเรียนว่า “จะกำจัด $-\frac{3}{4}$ อย่างไร” และอธิบายว่า “ต้องย้าย $-\frac{3}{4}$ ไปหาร ซึ่งต้องย้ายไปทั้ง $-\frac{3}{4}$ และเมื่อย้ายไปหาร ต้องเปลี่ยนหารเป็นคูณ และกลับเศษเป็นส่วน” และอธิบายต่อว่า “เครื่องหมายลบ (-) ที่อยู่ข้างหน้า $\frac{3}{4}$ ไม่ใช่ตัวดำเนินการ แต่เป็นเครื่องหมายลบที่แสดงให้เห็นว่า $\frac{3}{4}$ เป็นจำนวนลบ” จากนั้นครูถามนักเรียนว่า “ $-\frac{3}{4}$ เป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ” หลังจากนักเรียนตอบว่าเป็น “จำนวนลบ” ครูอธิบายต่อว่า “ $\frac{3}{4}$ เป็นจำนวนลบ เครื่องหมายลบหน้า $\frac{3}{4}$ เป็นเครื่องหมายบอกว่า $\frac{3}{4}$ เป็นจำนวนลบ”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว วิธีการหาคำตอบของสมการ และ ขั้นตอนการแก้สมการ ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาทั้งการพูดและการเขียนในการ อธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยครูเขียนคำว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ลงบนกระดาน เพื่อที่จะใช้การพูดอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวต่อไป ซึ่งใน การอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวครูได้อธิบายอย่างถูกต้องและชัดเจน โดยครู พูดอธิบายความหมายของสมการ สมการเชิงเส้น และสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นอกจากนี้ครูได้ อธิบายตัวอย่างที่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและสมการที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งบอกเหตุผลได้อย่างถูกต้องและชัดเจน สำหรับการใช้อธิบายสมบัติที่ใช้ในการแก้ สมการ คือ สมบัติการเท่ากัน ครูได้อธิบายอย่างชัดเจน พร้อมทั้งได้แยกกลุ่มของสมบัตินอกเป็น 2 กลุ่ม และอธิบายความหมายของการใช้สมบัติทั้งสองกลุ่ม และอธิบายตัวอย่างการใช้อย่างชัดเจน สำหรับการอธิบายขั้นตอนการแก้สมการ โดยการกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรที่สุดออกไปก่อน พร้อมทั้ง อธิบายการย้ายข้างอย่างชัดเจน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ใน การอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูป ทัวไปที่อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ $ax + b = 0$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนใดๆ และเมื่อครู อธิบายสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ คือ สมบัติการเท่ากัน ครูได้เขียน สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ เป็นเครื่องหมายบวก (+) และเครื่องหมาย (-) เครื่องหมายคูณ (\times) และเครื่องหมายหาร (\div) ในการ จัดกลุ่มสมบัติการเท่ากันที่แยกเป็น 2 กลุ่ม คือ การบวก และการคูณ นอกจากนี้แล้วครูใช้สัญลักษณ์ ทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นสมการ ในการยกตัวอย่างประกอบการอธิบายในแต่ละเรื่อง เช่น ความหมาย ของสมการ วิธีการแก้สมการ ขั้นตอนการแก้สมการ เป็นต้น

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างเพื่อประกอบการอธิบายให้ นักเรียนเข้าใจความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ชัดเจนยิ่งขึ้น ซึ่งเป็นตัวอย่างที่ หลากหลาย เพื่อเปรียบเทียบให้นักเรียนเห็นข้อเหมือนหรือข้อแตกต่างของสมการแต่ละรูปแบบ เช่น สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีลักษณะอย่างง่าย สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีตัวแปรปรากฏ อยู่ 2 ที่ สมการที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เช่น สมการที่มีตัวแปรเป็นตัวส่วน นั่นคือ สมการที่เลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นลบ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรมากกว่า 1 เป็นต้น นอกจากนี้ในการอธิบายขั้นตอนการแก้สมการของครู ตัวอย่างที่ครูนำมาแสดงให้เห็นเปรียบเทียบ กับความสัมพันธ์ของตัวเลขกับตัวแปรเป็นเรื่องราวในชีวิตจริง เพื่อให้ นักเรียนเห็นลักษณะ

ความสัมพันธ์ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น นอกจากนี้ยังมีตัวอย่างที่เป็นประโยชน์สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อประกอบการอธิบายขั้นตอนการแก้สมการด้วย

(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยครูได้อธิบายขั้นตอนการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับสมการ ว่าให้กำจัดตัวเลขที่อยู่ไกลตัวแปรมากที่สุดก่อน โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ของตัวเลขนั้นกับตัวแปร

3.1.3.2 ขั้นตอนที่ 2 ครูเฉลยแบบฝึกหัดจำนวน 5 ข้อ ต่อไปนี้

$$(1) \text{ ครูอธิบายการหาคำตอบของสมการ } -\frac{3}{7}\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}x = 2$$

สมการนี้เป็นสมการที่มีลักษณะซับซ้อน มีเศษส่วนเข้ามาเกี่ยวข้อง และตัวแปรปรากฏอยู่ 2 ตำแหน่ง วิธีการแก้สมการจะต้องรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกันก่อน ซึ่งจะต้องใช้สมบัติการแจกแจง เข้ามาช่วย จากนั้นจึงรวมตัวแปร โดยครูเริ่มอธิบายการแก้สมการนี้ ดังนี้

ครูถามนักเรียนว่า “สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นที่ตัวแปร” เมื่อนักเรียนตอบ ครูอธิบายว่า “สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่ตัวแปรอยู่หลายที่ เพราะฉะนั้นจะต้องรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกันก่อน” และครูได้อธิบายวิธีการรวมตัวแปร โดยใช้สมบัติการแจกแจงเข้าช่วย

โดยครูอธิบายว่า “นำ $-\frac{3}{7}$ คูณเข้าไปในวงเล็บ” และเขียนลูกศรโค้งจาก $-\frac{3}{7}$ ไปยัง $\frac{2}{5}x$ และ $\frac{1}{3}$ ที่อยู่ในวงเล็บ

$$-\frac{3}{7}\left(\frac{2}{5}x - \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}x = 2$$

และครูได้อธิบายให้นักเรียนได้เห็นว่า “ถ้ามีตัวแปรอยู่ทีเดียวสามารถหาคำตอบได้เลย แต่ถ้ามีตัวแปรอยู่ 2 ที่ จะต้องรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกันก่อน” จากนั้นครูอธิบายการคูณ $-\frac{3}{7}$ เข้าไปในวงเล็บและเขียนสมการได้ออกมาเป็น $-\frac{6}{5}x + \frac{1}{7} + \frac{3}{4}x = 2$ จากนั้นครูถามนักเรียนว่า “ทำไมถึงไม่

นำ $-\frac{3}{7}$ ไปคูณกับ $\frac{3}{4}x$ ” เมื่อนักเรียนตอบแล้ว ครูได้อธิบายต่อไปว่า $\frac{3}{4}x$ อยู่นอกวงเล็บ ครูเขียนวงกลมล้อมรอบ $-\frac{6}{5}x$ และ $\frac{3}{4}x$ เพื่อเน้นให้เห็นว่าต้องนำ 2 พจน์นี้มารวมกัน ดังภาพที่ 18

$$\left(\frac{4x}{35}\right) + \frac{1}{7} + \left(\frac{3x}{4}\right) = 2$$

ภาพที่ 18 แสดงการเน้นของครู ในการอธิบายพจน์ที่สามารถรวมกันได้

และเนื่องจาก สัมประสิทธิ์ของ x ของทั้งสองพจน์ เป็นเศษส่วน ครูจึงอธิบายว่า “จะต้องทำตัวส่วนให้เท่ากัน” และครูได้เขียนสมการออกมาเป็น

$$\frac{24}{140}x + \frac{105}{140}x = 2 - \frac{1}{7}$$

$$\frac{81}{140}x = \frac{13}{7}$$

$$x = \frac{13}{7} \times \frac{140}{81}$$

$$x = \frac{260}{81}$$

(2) ครูอธิบายการแก้สมการต่อมาที่มีลักษณะที่ตัวแปรปรากฏอยู่

2 ที่ แต่อยู่คนละข้างของสมการคือ สมการ $\frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{4}\right)$ ซึ่งครูได้อธิบายพร้อมแสดงขั้นตอนการแก้สมการ ดังนี้

โดยครูเริ่มอธิบายว่า “จากสมการนี้จะเห็นได้ว่า มีตัวแปร x ปรากฏอยู่ 2 ที่ อยู่ทั้ง 2 ข้างของสมการ จะต้องใช้การรวมตัวแปร ซึ่งจะต้องใช้สมบัติการแจกแจง” จากนั้นครูเขียนลูกศรโค้งโยงจากตัวที่คูณกับวงเล็บ ไปยังทุกพจน์ที่อยู่ในวงเล็บ เพื่อแสดงให้เห็นการแจกแจงดังภาพที่ 19

$$\frac{3}{5}\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

ภาพที่ 19 แสดงการอธิบายการแจกแจงของครูโดยใช้ลูกศรโค้ง

ครูเขียนสมการได้เป็น $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{5}x - \frac{1}{10}$ จากนั้นครูอธิบายว่า “ให้ย้าย x ไปอยู่ด้านเดียวกับ

x และครูย้ายตัวเลขให้อยู่ด้านเดียวกัน” และครูเขียนสมการได้เป็น $\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}x = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ จะ

เห็นได้ว่าแต่ละพจน์ในสมการอยู่ในรูปเศษส่วน ครูจึงอธิบายถึง วิธีการบวก และการลบเศษส่วนที่ต้องทำตัวส่วนให้เท่ากันก่อนนำเศษมาบวก หรือลบกัน ซึ่งครูได้อธิบายวิธีการทำส่วนให้เท่ากัน

โดยการหา ค.ร.น. ของ ตัวส่วนทั้งหมด เมื่อสามารถนำตัวเศษมารวมกันได้แล้ว ครูจึงดำเนินการแก้สมการต่อไป ดังนี้

$$\frac{x}{5} = \frac{2-5-1}{10}$$

$$\frac{x}{5} = -\frac{4}{10}$$

$$x = -\frac{4}{10} \times 5$$

$$x = -2$$

ครูจึงสรุปว่า $x = -2$

(3) แบบฝึกหัดข้อต่อไป ลักษณะสมการจะมีตัวแปร x อยู่ 3 ที่ และอยู่คนละด้านของสมการ ซึ่งจะต้องใช้สมบัติการแจกแจงเพื่อรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกัน คือสมการ

$$3\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}(3x - 1)$$

ครูเริ่มอธิบายโดยกล่าวว่า “สมการข้อนี้เหมือนกับ ข้อที่ผ่านมา นั่นคือ จะต้องใช้การแจกแจงเพื่อที่จะรวมตัวแปรให้อยู่ที่เดียวกันแล้วค่อยหาคำตอบของสมการต่อไป” และครูได้เขียนลูกศร โค้งเช่นเดิม เพื่อแสดงให้เห็นการแจกแจง ที่ตัวที่คูณอยู่กับวงเล็บต้องคูณกับทุกพจน์ที่อยู่ในวงเล็บ

$$3\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4}(3x - 1)$$

จากนั้นครูได้ทำการแจกแจง และคูณออกมาให้เป็นผลสำเร็จ และทำการแก้สมการโดยการย้ายพจน์ที่มีตัวแปรไปไว้ด้านเดียวกัน และพจน์ที่ไม่มีตัวแปรไปไว้ด้านเดียวกัน พร้อมทั้งอธิบายหลักการบวก ลบ เศษส่วน ที่จะต้องทำส่วนให้เท่ากันก่อน โดยการหา ค.ร.น. จากนั้นค่อยนำมาบวกกัน โดยเป็นลำดับดังวิธีทำที่ครูได้แสดงต่อไปนี้

$$\text{การแจกแจง ได้สมการเป็น } 6x - 1 + \frac{1}{2}x = \frac{9x}{4} - \frac{3}{4}$$

ย้ายพจน์ที่มีตัวแปรให้อยู่ด้านเดียวกัน และพจน์ที่ไม่มีตัวแปรให้อยู่ด้านเดียวกัน ได้สมการเป็น $6x + \frac{1}{2}x - \frac{9x}{4} = 1 - \frac{3}{4}$

รวมพจน์ ใช้หลักการบวก ลบ เศษส่วน โดยการทำให้เท่ากัน ใช้การหา ค.ร.น. ของตัวส่วนของทุกพจน์ แล้วทำการหาคำตอบของสมการต่อไป ดังนี้

$$\frac{24x + 2x - 9x}{4} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{17x}{4} = \frac{1}{4}$$

$$x = \frac{1}{4} \times \frac{4}{17}$$

$$x = \frac{1}{17}$$

(4) จากนั้นครูเฉลยแบบฝึกหัดข้อต่อไปซึ่งเป็นสมการที่มีลักษณะซับซ้อน เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่มีปรากฏอยู่หลายที่ และอยู่ทั้งสองข้างของสมการ และตัวแปรทุกตัวอยู่ในวงเล็บ ซึ่งจะต้องแจกแจงก่อน แล้วจึงสามารถรวมตัวแปรได้ คือสมการ $\frac{3}{4}(1-x) + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{5}(x+2)$ ซึ่งครูได้อธิบายพร้อมแสดงวิธีการแก้สมการในข้อนี้ ดังต่อไปนี้

ครูให้นักเรียนพิจารณาสมการ พร้อมอธิบายว่า “สมการนี้มีลักษณะคล้ายเดิมกับที่นักเรียนได้ทำมาแล้ว” และได้เน้นย้ำถึงพื้นฐานที่สำคัญในการแก้สมการในลักษณะนี้ คือ เรื่องเศษส่วน การบวก การลบเศษส่วน การคูณ การแจกแจง จากนั้นครูเริ่มแสดงการแจกแจงเพื่อที่จะรวมตัวแปร และครูได้ทำในลักษณะเช่นเดิมกับที่ได้ทำมาคือ เขียนลูกศรโค้งเพื่อแสดงการใช้สมบัติการแจกแจง

$$\frac{3}{4}(1-x) + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{1}{5}(x+2)$$

หลังจากที่ครูได้แจกแจงและคูณแต่ละพจน์เสร็จแล้ว ครูเขียนสมการได้เป็น $\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}x - \frac{2}{3} = \frac{x}{5} + \frac{2}{5}$ ครูใช้วิธีการย้ายพจน์ที่มีตัวแปร x ไว้ด้านเดียวกัน และพจน์ที่ไม่มีตัวแปรไว้ด้านเดียวกัน ซึ่งครูได้อธิบายนักเรียนเป็นคำพูด พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดานด้วย ดังนี้ $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{x}{5} + \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}x$

ครูรวมพจน์โดยใช้ความรู้เรื่องการบวก การลบ เศษส่วน โดยครูอธิบายนักเรียนโดยใช้การพูดว่า “ทำส่วนให้เท่ากันโดยการหา ค.ร.น.” พร้อมทั้งเขียนประโยคสัญลักษณ์ลงบนกระดาน จากนั้นครูได้แสดงวิธีการหาคำตอบของสมการต่อไป โดยครูใช้หลักการย้ายข้าง แต่ครูไม่ได้อธิบายนักเรียนในรายละเอียดการทำ แต่เป็นการแสดงวิธีทำตามขั้นตอน โดยการเขียนแทน แต่ไม่ได้ใช้คำพูด ดังวิธีทำที่ครูได้แสดงดังนี้

$$\frac{5-40-24}{60} = \frac{12x+4x-40x}{60}$$

$$-\frac{19}{60} = \frac{17}{60}x$$

$$-\frac{19}{60} \times \frac{60}{17} = x$$

$$x = -\frac{19}{17}$$

$$(5) \quad \text{สมการคือ } \frac{x}{2} - 3 = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

ครูอธิบายให้นักเรียนฟังว่า สมการในข้อนี้มีลักษณะเหมือนเดิม นั่นคือ ต้องใช้สมบัติการแจกแจงเช่นเดียวกัน และครูได้เขียนลูกศรโค้งเพื่อแสดงให้เห็นการใช้สมบัติการแจกแจง เช่นเดิม กับการแก้สมการที่ผ่านมา

$$\frac{x}{2} - 3 = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

ครูได้ทำการแจกแจง และสรุปเป็นสมการในรูปแบบใหม่ได้ดังนี้ $\frac{x}{2} - 3 = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{x}{3}$ จากนั้นครูเขียนวงกลมล้อมรอบพจน์ที่มี x เพื่อเน้นให้เห็นว่าต้องนำพจน์เหล่านี้มารวมกัน พร้อมทั้งอธิบายต่อว่า “ย้าย x ให้มาอยู่ด้านเดียวกัน และย้ายตัวที่ไม่มี x ไปไว้อีกด้านหนึ่ง” เมื่อพจน์ที่มี x อยู่ด้านเดียวกัน และพจน์ที่ไม่มี x อยู่ด้านเดียวกันแล้ว ครูได้แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการต่อ โดยใช้หลักการกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน และหลักการย้ายข้าง ซึ่งครูไม่ได้อธิบายรายละเอียดในขั้นตอนของการกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน และหลักการย้ายข้าง ดังแสดงให้เห็นตามขั้นตอนวิธีของครู ดังนี้

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - 3 &= \frac{x}{4} + \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \\ -3 + 8 - 36 &= \frac{3x + 4x - 3x}{12} \\ -\frac{25}{12} &= \frac{x}{12} \\ -25 &= x \end{aligned}$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายขั้นตอนวิธีการที่ใช้ในการแก้สมการ รวมทั้งหลักการที่ใช้ในการแก้สมการ เช่น ครูอธิบายลักษณะสมการที่มีตัวแปรอยู่หลายที่ และจากคำพูดของครูว่า “สมการนี้เป็นสมการเชิงเส้นที่ตัวแปร” จะเห็นได้ว่าครูใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนได้สังเกตว่าสมการที่กำหนดคือตัวแปร และจึงโยงไปสู่ขั้นตอนต่อไปในการแก้สมการ และได้อธิบายเปรียบเทียบให้เห็นว่าถ้าตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ต้องรวมตัวแปรก่อน แต่ถ้าตัวแปรอยู่ที่เดียว สามารถดำเนินการแก้สมการหาคำตอบของการ ได้เลย ครูได้อธิบายขั้นตอนการแก้สมการโดยเน้นไปที่ขั้นตอนของการรวมตัวแปรโดยใช้หลักการแจกแจง (ในกิจกรรมนี้ครูใช้คำ

ว่า หลักการแจกแจง ไม่ได้ใช้คำว่า หลักการกระจาย) ซึ่งครูอธิบายอย่างละเอียดในตัวอย่างทุกข้อ แต่ครูไม่ได้พูดอธิบาย ลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร และวิธีการย้ายข้าง หรือการใช้หลักการเท่ากัน มีเพียงแค่การเขียนสัญลักษณ์ตามขั้นตอนเท่านั้น นอกจากนี้ถ้าขั้นตอนใดต้องใช้ความรู้เดิมที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว ครูได้ใช้การพูดอธิบายทบทวนด้วย เช่น หลักการบวก การลบ การคูณ การหารเศษส่วน หลักการรวมเอกนามที่คล้ายกัน เป็นต้น และการใช้การพูดอธิบายของครู เป็นไปอย่างถูกต้องและชัดเจน

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ ประโยคสัญลักษณ์สมการที่ครูยกตัวอย่าง และสมการที่ผ่านการดำเนินการไปในแต่ละขั้นตอนของการแก้สมการ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย นอกจากนี้ ครูใช้ลูกศรโค้งเพื่อแสดงให้เห็นการใช้สมบัติการแจกแจงที่นำไปเพื่อช่วยแก้สมการด้วยซึ่งครูได้แสดงให้เห็นในทุกข้อของการแก้สมการที่มีลักษณะที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจง และครูใช้วงกลมเขียนล้อมรอบพจน์ที่สามารถรวมกันได้ด้วย เพื่อเป็นการเน้นให้นักเรียนเห็นว่าจะนำพจน์ใดบ้างมารวมกัน

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างหรือแบบฝึกหัดที่ครูนำเสนอเพื่อแสดงให้เห็นขั้นตอนวิธีแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการเป็นสมการที่มีลักษณะซับซ้อน มีพจน์ที่มีตัวแปรหลายพจน์ รวมทั้งสัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นเศษส่วน ต้องใช้ความรู้ในหลายเรื่องเข้ามาช่วยในการแก้สมการ เช่น การบวก การลบเอกนาม พหุนาม สมบัติการแจกแจง การบวก การลบ การคูณ การหารเศษส่วน

(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการหรือแสดงวิธีการหาคำตอบของสมการที่มีลักษณะซับซ้อน มีตัวแปรเดียวแต่ปรากฏอยู่หลายที่ ดังนี้ เริ่มต้นด้วยครูพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีตัวแปรปรากฏอยู่ที่ ถ้าตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ วิธีการของครูคือ รวมตัวแปรไว้ที่เดียวกันก่อน จึงจะดำเนินการตามขั้นตอนการแก้สมการต่อไป แต่ถ้าตัวแปรอยู่ที่เดียว สามารถดำเนินการแก้สมการหาคำตอบของการได้เลย นอกจากนี้ถ้าตัวแปรอยู่ในวงเล็บ สมบัติที่ครูนำมาใช้ คือ สมบัติการแจกแจง โดยการนำตัวที่คูณกับวงเล็บ คูณเข้าทุกพจน์ที่อยู่ในวงเล็บ ซึ่งครูได้อธิบายเป็นคำพูดและใช้การเขียนสัญลักษณ์เป็นลูกศรโค้งจากตัวที่คูณอยู่กับวงเล็บ ไปยังพจน์ที่อยู่ในวงเล็บทุกพจน์ เพื่อแสดงให้เห็นว่าต้องนำไปคูณทุกพจน์ในวงเล็บนั่นเอง เมื่อครูได้สมการที่อยู่ในรูปของตัวแปรที่ไม่อยู่ในวงเล็บ แต่ปรากฏอยู่ 2 ที่แล้ว ครูได้เน้นให้นักเรียนเห็นอย่างชัดเจนว่าต้องนำพจน์ที่เป็นเอกนามคล้ายมารวมกัน โดยการเขียนวงกลมสีแดงล้อมรอบพจน์ที่มี x นั้น และกล่าวเน้นย้ำกับนักเรียนว่า จะต้องนำมารวมกันก่อนเมื่อเหลือตัวแปรอยู่ที่เดียวแล้ว ครูได้อธิบายการแก้สมการ โดยใช้สมบัติการเท่ากันหรือย้ายข้าง แต่ครูไม่ได้อธิบายอย่างละเอียดจะเป็นการแสดงตามขั้นตอนไปเลย เช่น จากสมการในรูป

$-\frac{6}{5}x + \frac{1}{7} + \frac{3}{4}x = 2$ ครูจะเขียนสมการในรูปต่อมาได้เป็น $-\frac{24}{140}x + \frac{105}{140}x = 2 - \frac{1}{7}$ ครูได้ย้ายข้างหรือนำ ไปลบทั้ง 2 ข้างเลย ซึ่งอาจจะเนื่องมาจากครูได้สอนหลักการแก้สมการโดยใช้สมบัติการเท่ากันหรือการย้ายข้างมาแล้ว

3.1.3.3 ขั้นตอนที่ 3 ครูยกตัวอย่างการแก้สมการที่ใช้ความรู้เรื่องเศษส่วนเพิ่มเติม

ครูได้อธิบายการบวก การลบเศษส่วน ดังนี้ $\frac{5-3}{7} = \frac{2}{7}$ หรือเขียนอีกรูปคือ $\frac{5}{7} - \frac{3}{7}$ และยกตัวอย่างการแก้สมการพร้อมทั้งครูอธิบายว่า การแก้สมการต่อไปจะใช้ความรู้เรื่องการบวก การลบ เศษส่วน โดยการรวมเศษก่อนเข้ามาช่วย จากนั้นครูยกตัวอย่างการแก้สมการ

ดังนี้ $\frac{2(3x-1)}{5} + \frac{5(2x+1)}{2} = 1 - \frac{(2x-1)}{3}$

$$\frac{2(3x-1)}{5} + \frac{5(2x+1)}{2} = 1 - \frac{(2x-1)}{3}$$

ครูอธิบายว่า “ต้องแจกแจงเข้าไป” พร้อมทั้งเขียนลูกศรโค้ง เพื่อแสดงการแจกแจงดังนี้

$$\frac{2(3x-1)}{5} + \frac{5(2x+1)}{2} = 1 - \frac{(2x-1)}{3}$$

และได้สมการออกมาเป็น $\frac{6x}{5} - \frac{2}{5} + \frac{10x}{2} + \frac{5}{2} = 1 - \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$

ครูเขียนวงกลมล้อมรอบพจน์ที่มีตัวแปร x พร้อมทั้งอธิบายว่าให้ย้าย x มาไว้ด้านเดียวกันและย้ายพจน์ที่ไม่มีตัวแปร ไปไว้อีกด้านให้หมด และเขียนสมการที่ปรับแล้วได้ดังนี้

$$\frac{6x}{5} + 5x - \frac{2x}{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{5}{2}$$

จากนั้นครูรวมพจน์โดยการหา ค.ร.น. แล้วทำการบวก ลบเศษส่วน และแสดงขั้นตอนการหาคำตอบของสมการต่อไป คือ การกำจัดตัวเลขที่อยู่ไกลตัวแปร จนเหลือเพียงแค่ตัวแปร x เพียงตัวเดียว โดยการย้ายข้าง ดังขั้นตอนที่ครูได้แสดงให้นักเรียนเห็น ต่อไปนี้

$$\frac{18x + 75x + 10x}{15} = \frac{30 + 10 + 75}{30}$$

$$\frac{103x}{15} = \frac{23}{30}$$

$$x = -\frac{23}{30} \times \frac{15}{103}$$

$$x = -\frac{23}{206}$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 3 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายขั้นตอนวิธีการที่ใช้ในการแก้สมการ อธิบายการใช้สมบัติการแจกแจง และอธิบายการบวก การลบ เศษส่วน ที่ต้องนำมาใช้ในการแก้สมการ และอธิบายวิธีการแก้สมการ

(2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์นั้นคือ ประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่าง และสมการที่ผ่านการดำเนินการไปในแต่ละขั้นตอนของการแก้สมการ รวมถึงตัวดำเนินการต่างๆ ของครูด้วย นอกจากนี้ ครูใช้ลูกศรโค้งเพื่อแสดงให้เห็นการใช้สมบัติการแจกแจงที่นำไปเพื่อช่วยแก้สมการด้วย

(3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่ครูนำมาแสดงให้เห็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ ซึ่งเป็นสมการที่ต้องใช้ความรู้เรื่องเศษส่วน เกี่ยวกับการบวกและการลบเศษส่วนเข้ามาช่วยในการแก้สมการ

(4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการหรือแสดงวิธีการหาคำตอบของสมการ จะเหมือนกับการแก้สมการในขั้นตอนที่ 2 เริ่มด้วยการรวมพจน์ที่มีตัวแปร ซึ่งต้องใช้สมบัติการแจกแจงก่อน ถ้าตัวแปรอยู่คนละด้าน ต้องย้ายไปไว้ด้านเดียวกันก่อน และจึงรวม จากนั้นกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร โดยการย้ายข้าง และดำเนินการจนเหลือตัวแปร x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นหนึ่ง และไม่มีตัวเลขตัวใดดำเนินการอยู่กับ x จึงสรุปเป็นคำตอบของสมการ

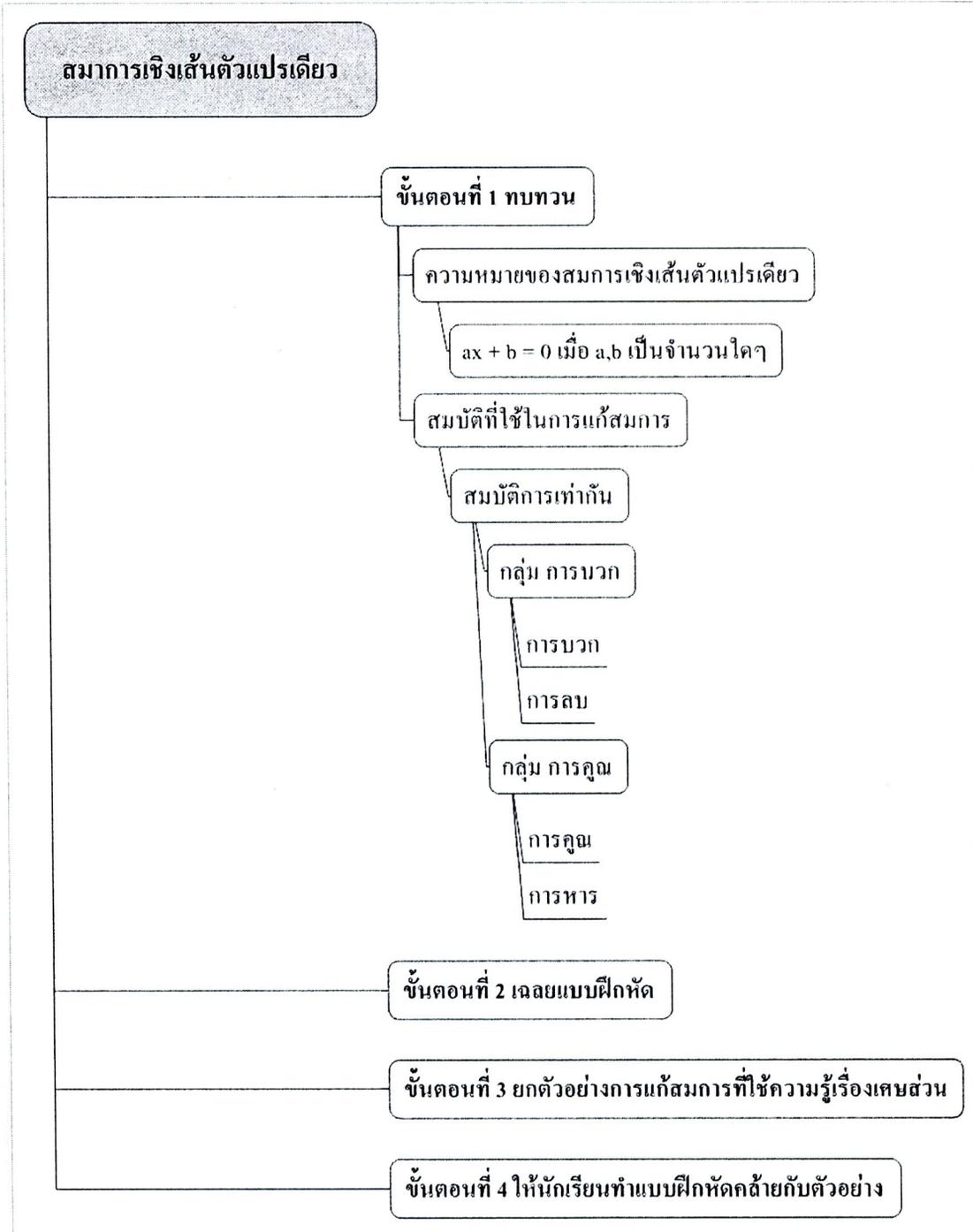
3.1.3.4 ขั้นตอนที่ 4 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจำนวน 3 ข้อ

$$(1) \quad \frac{-3(5x+3)}{7} - \frac{4(3x-5)}{3} = \frac{1}{2} - \frac{5(7x+1)}{5}$$

$$(2) \quad \frac{-5(2x+9)}{4} - \frac{3(2x+1)}{7} = -\frac{3}{4}x - \frac{8(3x+2)}{9}$$

$$(3) \quad \frac{2(5x-4)}{3} - \frac{6(2x+1)}{5} = \frac{3(2x-7)}{5}$$

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูแสดงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 20 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 3

3.1.4 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมนี้เกี่ยวกับเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งครูได้อธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหา แต่ละขั้นตอนอย่างละเอียด พร้อมทั้งยกตัวอย่าง โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างหลากหลาย เพื่อให้นักเรียนเห็นขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

3.1.4.1 ขั้นตอนที่ 1 ครูอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ครูเริ่มอธิบาย โดยให้นักเรียนนำใบความรู้ขึ้นมาดู และครูกล่าวว่า เรื่องที่จะเรียนในวันนี้เป็นเรื่องสุดท้ายของการเรียนเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นั่นคือ เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการ ในกรณีที่สมการเชิงเส้นกำหนดมาให้อยู่ในรูปของประโยคภาษา จากนั้นครูให้นักเรียนดูใบความรู้ เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการ โดยครูแบ่งเป็น 4 ขั้นตอน พร้อมทั้งอธิบายแต่ละขั้นตอนดังนี้

(1) ขั้นที่ 1 อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์

ครูได้อธิบายขั้นตอนแรกของการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้น คือ อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ โดยให้ตั้งคำถามกับตัวเองว่า “โจทย์ถามหาอะไร โจทย์กำหนดอะไร มาให้บ้าง” และย้ำกับนักเรียนว่า “นั่นคือสิ่งที่ต้องรู้ในขั้นตอนที่ 1 ถ้าสามารถตอบคำถาม 2 ข้อนี้ได้ สามารถผ่านขั้นที่ 1 ได้” จากนั้นครูสรุปอีกครั้งว่า “ขั้นตอนที่ 1 คืออ่านโจทย์ แล้ววิเคราะห์โจทย์ ตอบคำถามให้ได้ว่า โจทย์ถามหาอะไร และโจทย์ให้อะไรมาบ้าง”

(2) ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปร

ครูอธิบายขั้นที่ 2 โดยอธิบายว่า “ขั้นที่ 2 คือ การกำหนดตัวแปรแทนในสิ่งที่โจทย์ถามหา หรือ โจทย์ต้องการรู้ โดยการกำหนดให้เป็นตัวแปรหรืออะไรก็ได้”

(3) ขั้นที่ 3 เขียนเป็นสมการ

เมื่อครูอธิบายขั้นที่ 1 และ 2 เสร็จ ครูได้อธิบายต่อในขั้นที่ 3 ว่าเป็นขั้นตอนของการเขียนเป็นสมการ โดยครูอธิบายว่า “ให้พิจารณาจากความสัมพันธ์ที่โจทย์ให้มา โดยวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ว่าตัวแปรที่กำหนดให้สัมพันธ์กับเงื่อนไขอื่น ๆ อย่างไร และเขียนสมการออกมาเป็นสมการได้อย่างไร”

(4) ขั้นที่ 4 แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

ครูอธิบายว่า “ในขั้นนี้ใช้วิธีการที่เรียนมาทั้งหมดในเรื่องการหาคำตอบของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ การย้ายข้าง หรือสมบัติการเท่ากัน”

เมื่อครูอธิบายขั้นตอนทั้ง 4 ขั้นเสร็จแล้ว ครูได้กล่าวว่า “เรื่องการแก้ โจทย์ปัญหาจะยากกว่าเรื่องที่เคยเรียนมา ถ้าเขียนสมการผิด จะทำให้คิดไปเลย” จากนั้นครูเน้นถึง ขั้นตอนที่สำคัญในการแก้โจทย์ปัญหาสมการ คือ “ขั้นที่ 1 ถึง ขั้นที่ 3 คือ การเขียนสมการ ถ้าอ่าน โจทย์แล้ววิเคราะห์โจทย์ถูก จะทำให้ การแก้โจทย์ปัญหานั้นถูกไปแล้วมากกว่าครึ่ง” และใน ตอนท้าย ครูเพิ่มขั้นของการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอีกหนึ่งขั้น คือ ขั้นตรวจ คำตอบ เพื่อตรวจว่าสิ่งที่หาได้ออกมานั้นถูกต้องหรือไม่ โดยนำไปแทน ไปวิเคราะห์จากข้อความ ที่โจทย์ให้มา ว่าถูกต้องตามนั้นหรือไม่ ถ้าไม่ถูกต้องแสดงว่าเขียนสมการไม่ถูกต้อง จะต้องเริ่มต้น ใหม่

จากนั้นครูสรุปขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการว่ามี 4 ขั้นตอน คือ
ขั้นที่ 1 อ่านโจทย์ และวิเคราะห์โจทย์ โดยใช้วิธีการถามตัวเองว่า โจทย์ถามหาอะไรและโจทย์ให้อะไรมา

ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ถามหา หรือสิ่งที่โจทย์ต้องการทราบ

ขั้นที่ 3 เขียนสมการจากความสัมพันธ์ของโจทย์

ขั้นที่ 4 แก้สมการและตรวจคำตอบ

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจเรื่องขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา โดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้ โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งครูได้อธิบายอย่างชัดเจน และถูกต้อง และมีการพูดซ้ำ หลาย รอบ และครูได้พูดเน้นถึงขั้นตอนที่สำคัญในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เช่น “ขั้นที่ 1 ถึง ขั้นที่ 3 คือ การเขียนสมการ ถ้าอ่านโจทย์แล้ววิเคราะห์โจทย์ถูก จะทำให้ การแก้ โจทย์ปัญหานั้นถูกไปแล้วมากกว่าครึ่ง”

3.1.4.2 ขั้นตอนที่ 2 ครูอธิบายยกตัวอย่างโจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปร เดียว ในใบความรู้ และอธิบายวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

(1) ตัวอย่างที่ 1 หญิงคนหนึ่งมีเงิน 4.45 บาท เป็นเหรียญสิบสตางค์ และเหรียญสลึง นับรวมกันได้ทั้งหมด 25 เหรียญ เขามีเหรียญสลึงกี่เหรียญ

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดย ผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูได้แสดงดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์

ครูอ่านโจทย์ของสมการ และเมื่ออ่านโจทย์เสร็จแล้ว ครูเริ่มวิเคราะห์ โจทย์ไปพร้อมๆ กันกับนักเรียน โดยถามนักเรียนว่า “โจทย์ถามหาอะไร” ซึ่งมีนักเรียนบางส่วนในห้องตอบ จากนั้นครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “โจทย์ถามหาเหรียญสลึง” และครูถามนักเรียนต่อว่า “โจทย์ให้อะไรมาบ้าง” เมื่อนักเรียนตอบ ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “โจทย์ให้จำนวนเหรียญ” โดยครูได้อธิบายโดยใช้การพูด พร้อมทั้งเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ลงบนกระดานคือ

โจทย์ให้ จำนวนเหรียญทั้งหมด 25 เหรียญ

เหรียญสิบสตางค์

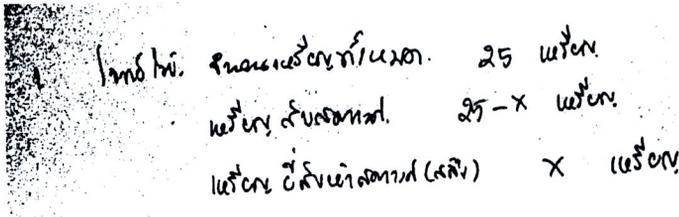
เหรียญยี่สิบบาทสตางค์ (สลึง) พร้อมทั้งพูดอธิบายว่าเหรียญสลึง คือเหรียญยี่สิบบาทสตางค์

จะเห็นว่าในขั้นตอนนี้เป็นขั้นที่ 1 ซึ่งเป็นขั้นของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์เพื่อตอบคำถามให้ได้ว่า “โจทย์ถามหาอะไร” และ “โจทย์ให้อะไรมาบ้าง”

ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปร

เมื่ออ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์เสร็จ ครูอธิบายขั้นต่อไป คือ การกำหนดตัวแปร ซึ่งครูอธิบายโดยการถามนักเรียนว่า “โจทย์อยากรู้อะไร” และครูอธิบายต่อว่า “โจทย์อยากรู้จำนวนเหรียญสลึง” ดังนั้นครูจึงกำหนดตัวแปร x ให้แทนจำนวนเหรียญสลึงโดยการพูดอธิบาย พร้อมทั้งเขียนข้อความลงบนกระดาน คือ “จำนวนเหรียญสลึง มีจำนวน x เหรียญ” และครูถามนักเรียนต่อว่า “เหรียญสิบสตางค์มีกี่เหรียญ” เมื่อครูเห็นนักเรียนยังไม่ตอบ ครูจึงยกตัวอย่างมาอธิบายเพื่อเปรียบเทียบให้เห็น โดยครูใช้ตัวอย่าง เกี่ยวกับจำนวนนักเรียนในห้อง และถามนักเรียนว่า “ในห้องนี้มีนักเรียนกี่คน และครูสมมติว่าเป็นนักเรียนหญิง 4 คน แล้วนักเรียนชายมีกี่คน” เมื่อนักเรียนบางส่วนตอบว่า 33 คน และครูถามต่อว่า “คิดอย่างไร” มีนักเรียนบางส่วนตอบว่า ลบ ครูถามต่อว่า “เอาอะไรตั้งเอาอะไรลบ” เมื่อนักเรียนตอบ ครูได้อธิบายต่อว่า “เอานักเรียนทั้งหมดตั้ง ลบด้วยจำนวนนักเรียนหญิง จะได้เป็นจำนวนนักเรียนชาย” จากนั้นครูเชื่อมโยงไปที่โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการในตัวอย่างนี้ว่ามีลักษณะเช่นเดียวกัน และครูอธิบายต่อพร้อมกับถามนักเรียนว่า “ครูมีเหรียญทั้งหมด 25 เหรียญ มีเหรียญยี่สิบบาทสตางค์อยู่ที่เหรียญ” นักเรียนบางคนตอบไม่รู้ ครูอธิบายว่า “ไม่รู้เราแทนเป็น x เหรียญ” นั่นคือ ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดคำว่า “ไม่รู้” แทนตัวแปร และแทนด้วยสัญลักษณ์คือ x เพื่อเป็นการแสดงถึงความหมายของตัวแปร คือ ตัวที่ไม่ทราบค่า และครูอธิบายต่อว่า “มีเหรียญยี่สิบบาทสตางค์อยู่ x เหรียญ มีเหรียญ 10 สตางค์ อยู่ที่เหรียญ” นักเรียนตอบ ครูพูดซ้ำว่า “ $25 - x$ เหรียญ” จากนั้นครูถามนักเรียนว่า มีใครที่ตามไม่ทันบ้าง มีนักเรียนตอบว่าเข้าใจก็ได้ ครูจึงอธิบายซ้ำอีกว่า “มีเหรียญทั้งหมด 25 เหรียญ เป็นเหรียญยี่สิบบาทสตางค์ x เหรียญ ดังนั้นเป็นเหรียญสิบสตางค์ก็เหรียญ เอาทั้งหมดตั้งลบออกจาก

เหรียญสี่สิบห้าสตางค์ จะกลายเป็นจำนวนเหรียญ 10 สตางค์” ซึ่งครูได้เขียนเงื่อนไขลงบนกระดาน ดังภาพที่ 21



ภาพที่ 21 แสดงการวิเคราะห์โจทย์ของครู โดยการเขียนอธิบาย

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ครูได้กลับไปวิเคราะห์โจทย์อีกครั้ง โดยพิจารณาเงื่อนไขอื่นที่โจทย์กำหนดให้มาอีก “พอนับดูแล้วผู้หญิงคนนี้มีจำนวนเงิน 4.45 บาท” พร้อมทั้งเขียนเงื่อนไขนี้ลงบนกระดาน

ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “จำนวนเงินหาจากอะไร” ครูอธิบายการหาจำนวนเงินโดยยกตัวอย่างประกอบ ดังนี้

สมมติครุมีเงินเหรียญ 10 บาท อยู่ 5 เหรียญ ครุมีเงิน 50 บาท

ครุมีเงินเหรียญบาท อยู่ 7 เหรียญ ครุมีเงิน 7 บาท

ครุมีเงินเหรียญ 2 บาท อยู่ 50 เหรียญ ครุมีเงิน 100 บาท

จากนั้นครูถามนักเรียนว่า “คิดอย่างไร” นักเรียนตอบว่า เขาไปคูณ ครูอธิบายต่อว่า “เอาจำนวนเหรียญไปคูณกับค่าของเหรียญ” จากนั้นครูอธิบายไปยังตัวอย่าง โดยถามนักเรียนว่า “จำนวนเหรียญสี่สิบห้าสตางค์ $25 - x$ เหรียญ คิดเป็นเงินกี่บาท” เมื่อนักเรียนไม่ตอบ ครูอธิบายซ้ำอีกโดยยกตัวอย่าง “เหรียญบาท 3 เหรียญ เป็นเงิน 3 บาท” และครูอธิบายว่า “ดังนั้นจะต้องเอา จำนวนเหรียญคูณกับค่าของเงินจะเป็นเงินทั้งหมดที่มีในส่วนของเหรียญนั้น” ครูอธิบายต่อว่า “ถ้ามีทั้งหมด $25 - x$ เหรียญ ค่า 1 เหรียญ เท่ากับ 0.1 จะกลายเป็น $0.1(25 - x)$ บาท” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ $0.1(25 - x)$ ลงบนกระดาน และครูได้อธิบายว่า กรณีของเหรียญ 25 สตางค์ คิดในทำนองเดียวกัน และครูสรุปว่า คิดเป็นเงินได้เป็น $0.25x$ บาท จากนั้นครู รวมเงิน 2 ค่า เพื่อสรุปออกมาเป็นสมการ คือ $0.1(25 - x) + 0.25x = 4.45$

ขั้นที่ 4 แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

ครูอธิบายขั้นตอนแก้สมการ โดยเริ่มจาก อธิบายว่า “ทั้งหมดเป็นทศนิยม” และครูให้นักเรียนพิจารณาคำแทนทศนิยมว่า ตัวเลขที่มีทศนิยมมากที่สุดมีกี่ตำแหน่ง ในที่นี้คือ 2 ตำแหน่ง ครูอธิบายโดยการพูดและเขียนลงบนกระดานว่า “นำ 100 มาคูณตลอดสมการ

เพราะต้องการให้ทัศนียภาพไป” และครูอธิบายหลักการพิจารณาว่าจะนำอะไรมาคูณ ให้พิจารณาว่าสมการนั้นมีทัศนียภาพตำแหน่งมากที่สุดกี่ตำแหน่ง ถ้า 2 ตำแหน่ง คูณด้วย 100 และ 3 ตำแหน่งคูณด้วย 1000 4 ตำแหน่งคูณด้วย 10000 และไปเรื่อยๆ เมื่อครูคูณสมการด้วย 100 สมการได้ออกมาเป็น $10(20 - x) + 25x = 445$ ครูกล่าวว่า “ตัวเลขเป็นจำนวนเต็มหมดแล้ว ง่ายต่อการแก้สมการ”

จากการเริ่มแก้สมการของครู จะเห็นได้ว่าสมการที่ได้ออกมานั้นอยู่ในรูปอย่างง่าย ไม่มีทัศนียภาพอยู่ในสมการ นั่นคือ ขั้นตอนวิธีการแก้สมการของครู ถ้ามีทัศนียภาพอยู่ในสมการ ครูจะใช้วิธีการที่ทำให้ทัศนียภาพกลายเป็นจำนวนเต็ม โดยหลักการของครู คือ พิจารณาคำแหน่งของทัศนียภาพที่มีจำนวนตำแหน่งมากที่สุด แล้วนำ 10, 100, 1000, ... มาคูณ ถ้าทัศนียภาพตำแหน่งที่มากที่สุดเป็น 1, 2, 3, ... ตามลำดับ และจากนั้นครูทำการแก้สมการต่อไปตามขั้นตอนวิธีที่ครูเคยสอนนักเรียนไปแล้วในกิจกรรมที่ผ่านมา โดยใช้หลักการการย้ายข้าง สมบัติการเท่ากัน ซึ่งลำดับขั้นตอนการแก้สมการคือ กำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน ถ้ามีตัวแปรอยู่ 2 ที่ ให้รวมตัวแปรก่อน ซึ่งครูได้อธิบายโดยการพูดพร้อมกับเขียนประโยชน์สัญลักษณ์ที่แสดงถึงการแก้สมการดังขั้นตอนวิธีการแก้สมการต่อไปนี้

$$10(25 - x) + 25x = 445$$

$$250 - 10x + 25x = 445$$

$$250 + 15x = 445$$

$$x = 1995$$

$$x = \frac{195}{15}$$

$$x = 13$$

ครูให้นักเรียนพิจารณาย้อนกลับไปที่ว่า กำหนดให้ x แทนค่าอะไร นั่นคือ จำนวนเหรียญสี่บาท สดางค์ และครูสรุปว่าจำนวนเหรียญสลึงมีทั้งสิ้น 13 เหรียญ เมื่อนักเรียนสงสัยว่า “ทำไมต้องคูณ 0.1” ซึ่งครูได้อธิบายดังนี้ “เหรียญ 10 สดางค์ มาแปลงให้เป็นบาท คือ $\frac{10}{100} = 0.1$ ดังนั้น $25 - x$ ต้องคูณด้วย 0.1 หรือคือค่าของเหรียญนั่นเอง”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 สำหรับตัวอย่างที่ 1 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดอธิบายและการเขียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน สำหรับการพูดอธิบายนั้น ครูใช้การถามนักเรียน เช่น ในขั้นตอนของการวิเคราะห์โจทย์ ครูได้ใช้คำถามเพื่อให้นักเรียนวิเคราะห์เป็นอันดับแรกคือ “โจทย์ถามหาอะไร” และครูได้เว้นช่วง

ให้นักเรียนตอบ หลังจากนั้นได้อธิบาย สิ่งที่โจทย์ต้องการหา พร้อมทั้งกับอธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ ซึ่งนอกจากการพูดอธิบายของครูแล้ว ครูยังเขียนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา กับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ลงบนกระดานด้วย และครูได้อธิบายไปตามเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดเพื่อให้สามารถนำไปเป็นข้อมูลเพื่อจะสรุปออกมาในรูปของสมการได้ นอกจากนี้ครูยังใช้ คำว่า “ไม่รู้” นำเสนอความหมายของตัวที่ไม่ทราบค่าหรือตัวแปร ซึ่งเห็นได้จากการพูดของครูว่า “ไม่รู้เราแทนเป็น x เหยียด” สำหรับในขั้นตอนของการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ เนื่องจากสมการออกมาในรูปของทศนิยม ครูจึงใช้การพูดอธิบายว่าต้องทำให้สมการนั้นอยู่ในรูปที่มีจำนวนเต็มก่อนโดยการให้พิจารณาตำแหน่งของทศนิยมที่มากที่สุดในการสมการ จากนั้นจึงนำ 10, 100, 1000, ... มาคูณทั้งสมการ ซึ่งครูได้ใช้ทั้งการพูดและการเขียนที่เป็นภาษาอธิบาย คือ “นำ 100 มาคูณตลอดสมการ เพราะต้องการให้ทศนิยมหายไป”

(1.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา นอกจากนี้ครูใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เขียนแทนเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ในแต่ละเงื่อนไข เช่น “ถ้ามีทั้งหมด $25 - x$ เหยียด ค่า 1 เหยียด เท่ากับ 0.1 จะกลายเป็น $0.1(25 - x)$ บาท”

(1.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่เป็นสถานการณ์จริงที่นำมาอธิบายเปรียบเทียบให้นักเรียนเข้าใจ ซึ่งเป็นตัวอย่างสถานการณ์จริงที่นักเรียนคุ้นเคย คือ จำนวนนักเรียนในห้อง คือครูพูดว่า “ในห้องนี้มีนักเรียนกี่คน และครูสมมติว่าเป็นนักเรียนหญิง 4 คน แล้วนักเรียนชายมีกี่คน” และจากนั้นครูได้อธิบายต่อว่า “เอานักเรียนทั้งหมดตั้ง ลบด้วยจำนวนนักเรียนหญิง จะได้เป็นจำนวนนักเรียนชาย” จากนั้นครูเชื่อมโยงไปที่โจทย์ปัญหาในตัวอย่าง นอกจากนี้แล้วครูยกตัวอย่างสถานการณ์จริงเกี่ยวกับค่าของเงินเพื่อให้นักเรียนสามารถเขียนสมการจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เช่น “สมมติครูมีเงินเหยียด 10 บาท อยู่ 5 เหยียด ครูมีเงิน 50 บาท” จากนั้นจึงอธิบายการหาค่าของเงินตามโจทย์

(1.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

(2) ตัวอย่างที่ 2 ปัจจุบันบิดามีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร อีก 15 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุเป็น 2 เท่าของบุตร ปัจจุบันบุตรมีอายุเท่าไร

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูใช้ในแต่ละขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์

ครูอ่านโจทย์และครูเริ่มวิเคราะห์โจทย์ โดยถามนักเรียนว่า “โจทย์ถามหาอะไร” ครูตอบว่า “อายุบุตรตอนปัจจุบัน” และครูได้อธิบายต่อว่า “แต่เงื่อนไขที่โจทย์ให้มาคือ อีก 15 ปีข้างหน้า กับอายุปัจจุบันของบิดา” ครูอธิบายว่า “การหาคำตอบอีกวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการเขียนสมการ คือ ใช้ตาราง” นั่นคือครูใช้ตารางมาช่วยในการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการ ซึ่งครูได้เขียนตาราง โดยพิจารณาจากโจทย์ว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้มีอะไรบ้าง ซึ่งในที่นี้คือ บิดา บุตร และอายุในปัจจุบัน และอายุในอีก 15 ปีข้างหน้า และใช้ตารางออกมาเป็น

	ปัจจุบัน	15 
บุตร		
บิดา		

และครูได้อธิบายเงื่อนไขว่า มีอยู่ 2 ช่วงอายุ และพิจารณาเงื่อนไขทีละเงื่อนไข ดังขั้นต่อไป

ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปร

ในขั้นนี้ ครูกำหนดตัวแปร ซึ่งได้จากการวิเคราะห์โจทย์ที่กำหนดเงื่อนไขมาคือ “ปัจจุบันบิดามีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร” และครูได้อธิบายว่า “ถ้าทราบอายุของบุตร จะทราบอายุของบิดา” ครูจึงกำหนดให้ตัวแปร x แทนอายุของบุตร และได้อธิบายต่อไปว่า “ถ้าปัจจุบันบุตรคือ x ดังนั้นปัจจุบันบิดามีอายุ $3x$ ปี” และครูได้เขียน x , $3x$ ลงในช่องอายุของบุตรและบิดาในปัจจุบัน ตามลำดับ

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ครูเขียนสมการ โดยครูวิเคราะห์จากเงื่อนไขที่ว่า “15 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุเป็น 2 เท่าของบุตร” และเขียนสมการออกมา จะเห็นได้ว่าครูพิจารณาเงื่อนไขทีละเงื่อนไขไปตามลำดับ และเมื่อมีส่วนไหนที่เข้าใจได้ยาก ครูใช้การยกตัวอย่างอื่นมาประกอบเพื่ออธิบายเปรียบเทียบให้เห็นและเข้าใจได้ง่าย ดังเช่น “ตอนนี้อายุ 13 ปี ดังนั้นอีก 15 ปีข้างหน้าจะมีอายุ 28 ปี ดังนั้น ถ้าตอนนี้ บุตรมีอายุ x ปี อีก 15 ปีข้างหน้าบุตรจะมีอายุเป็น $x + 15$ ปี และบิดาอีก 15 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุเป็น $3x + 15$ ” และครูได้เขียน $x + 15$ และ $3x + 15$ ลงในตารางพร้อมทั้งเขียน

วงกลมล้อมรอบ $3x + 15$ ที่อยู่ในตารางเพื่อเป็นการเน้นว่า อายุของบิดาในอีก 15 ปีข้างหน้า จะเท่ากับ 2 เท่าของอายุของบุตรในอีก 15 ปีข้างหน้า ดังภาพที่ 22

	ปัจจุบัน	15 ↑
บุตร	x	$x + 15$
บิดา	$3x$	$3x + 15$

ภาพที่ 22 แสดงตารางที่ครูใช้ช่วยในการวิเคราะห์โจทย์

เมื่อครูพิจารณาเงื่อนไข “15 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุเป็น 2 เท่าของบุตร” แล้ว ครูเขียนสมการเป็น $3x + 15 = 2(x + 15)$ ครูอธิบายย้ำอีกว่า “อายุของบิดาในอีก 15 ปีข้างหน้า คือ $3x + 15$ ” พร้อมทั้งชี้ที่ $3x + 15$ ที่อยู่ในสมการ “จะเท่ากับ” พร้อมทั้งชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ “สองเท่าของอายุบุตร” พร้อมทั้งชี้เลข 2 และ $(x + 15)$ ในสมการตามลำดับ

ขั้นที่ 4 แก่สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

เมื่อครูได้สมการออกมาแล้ว ครูทำการแก้สมการตามหลักการ วิธีการที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว คือ หลักการเท่ากัน หรือครูใช้คำว่าหลักการย้ายข้าง และการกำจัดตัวที่ไกลตัวแปรออกไปก่อน ดังขั้นตอนที่ครูได้เขียนอยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ต่อไปนี้

$$3x + 15 = 2(x + 15)$$

$$3x + 15 = 2x + 30$$

$$x = 15$$

ครูสรุปว่า ปัจจุบันลูกมีอายุ 15 ปี

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 สำหรับตัวอย่างที่ 2 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(2.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน สำหรับขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์ ครูเริ่มด้วยการใช้คำถามกับนักเรียนว่า “โจทย์ถามหาอะไร” เพื่อเป็นการเริ่มต้นในการวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นจึงอธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนด และเงื่อนไข เช่น “แต่เงื่อนไขที่โจทย์ให้มาคือ อีก 15 ปีข้างหน้า กับอายุปัจจุบันของบิดา” เพื่อให้นักเรียนพิจารณาว่ามีอายุ 2 ช่วง คือ อายุในปัจจุบัน และอายุในอีก 15 ปีข้างหน้า จากนั้นจึงใช้การพูดอธิบายวิธีการที่ใช้ตารางมาช่วยวิเคราะห์โจทย์ จะเห็นได้จากที่ครูพูดว่า “การหาคำตอบอีกวิธีหนึ่งที่จะช่วยในการเขียนสมการ คือ ใช้ตาราง” จากนั้นจึงอธิบายเงื่อนไขทีละเงื่อนไขเพื่อเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

และสมการต่อไป เมื่อครูได้สมการออกมา ครูได้อธิบายย้ำกับนักเรียนอีกว่า แต่ละส่วนของสมการคืออะไรซึ่งเห็นได้จากการใช้การนำเสนอภายนอกของครูคือ “อายุของบิดาในอีก 15 ปีข้างหน้า คือ $3x + 15$ ” พร้อมทั้งชี้ที่ $3x + 15$ ที่อยู่ในสมการ “จะเท่ากับ” พร้อมทั้งชี้ที่เครื่องหมายเท่ากับ “สองเท่าของอายุบุตร” พร้อมทั้งชี้เลข 2 และ $(x + 15)$ ในสมการตามลำดับ

(2.2) ครูใช้ตารางเพื่อช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยการวิเคราะห์ว่าโจทย์กำหนดอะไรบ้าง จากนั้นจึงสร้างตารางขึ้นมาประกอบในการวิเคราะห์โจทย์ และการพิจารณาเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไข เพื่อที่จะสร้างสมการต่อไป

(2.3) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา คือ ครูพิจารณาจากเงื่อนไข “ปัจจุบันบิดามีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร” และพิจารณาว่า “ถ้าทราบอายุของบุตร จะทราบอายุของบิดา” จึงกำหนดตัวแปร x แทนอายุของบุตร นอกจากนี้ครูใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เขียนแทนเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ในแต่ละเงื่อนไข เช่น “บุตรมีอายุ x ปี อีก 15 ปีข้างหน้าบุตรจะมีอายุเป็น $x + 15$ ปี และบิดาอีก 15 ปีข้างหน้าบิดาจะมีอายุเป็น $3x + 15$ ” และครูได้เขียน $x + 15$ และ $3x + 15$ ลงในตาราง และเขียนวงกลมล้อมรอบ $3x + 15$ เพื่อเน้นว่า อายุของบิดาในอีก 15 ปีข้างหน้าจะต้องนำไปใช้

(2.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตัวอย่างที่เป็นสถานการณ์จริงที่นำมาอธิบายเปรียบเทียบให้นักเรียนเข้าใจ ซึ่งเป็นตัวอย่างสถานการณ์จริงที่นักเรียนคุ้นเคย เห็นได้จาก “ตอนนี้อายุ 13 ปี ดังนั้นอีก 15 ปีข้างหน้าจะมีอายุ 28 ปี ดังนั้น ถ้าตรงนี้ บุตรมีอายุ x ปี อีก 15 ปีข้างหน้าบุตรจะมีอายุเป็น $x + 15$ ปี และบิดาอีก 15 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุเป็น $3x + 15$ ” เป็นการยกตัวอย่างเพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบกับสิ่งที่โจทย์ต้องการหา

(2.5) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

(3) ตัวอย่างที่ 3 นายวิชิตเล่นปาเป้า ในการปาแต่ละครั้ง ถ้าปาถูกจะได้รับเงิน 8 บาท ถ้าปาผิดจะต้องเสียเงิน 3 บาท หลังจากปาเป้าไป 24 ครั้ง เขาต้องจ่ายเงิน 17 บาท นายวิชิตปาเป้าถูกกี่ครั้ง

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูใช้ในแต่ละขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์

ครูอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ โดยการพูดอธิบายพร้อมกับเขียนลงบนกระดาน ดังต่อไปนี้

วิจิต ปาเป้า มีลักษณะการปาอยู่ 2 แบบ

ปาถูก ได้เงิน 8 บาท ต่อ ครั้ง

ปาผิด เสียเงิน 3 บาท ต่อ ครั้ง

ปาทั้งหมด 24 ครั้ง และเสียเงินทั้งหมด 17 บาท

ครูถามนักเรียนว่า “ปาถูกหรือปาผิดมากกว่ากัน” และครูได้อธิบายว่า “ปาผิดมากกว่าหรือจำนวนเงินที่เสียมากกว่าจำนวนเงินที่ได้ จึงเสียเงินให้เขาไป”

ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปร

ครูถามนักเรียนว่า “โจทย์ต้องการทราบอะไร ปาถูกหรือปาผิด” หลังจากนั้นนักเรียนบางส่วนตอบ ครูย้ำว่า “โจทย์ต้องการทราบ ปาถูก ว่าปาถูกกี่ครั้ง” ดังนั้น ครูจึงกำหนดให้ปาเป้าถูกเป็นจำนวน x ครั้ง พร้อมทั้งเขียนลงบนกระดาน และครูอธิบายต่อว่า “ถ้าปาเป้าถูก x ครั้ง จะได้เงิน $8x$ บาท” พร้อมทั้งเขียนลงบนกระดานดังนี้

ให้ นายวิจิตปาเป้าถูก เป็นจำนวน x ครั้ง ได้เงิน $8x$ บาท

ครูอธิบายต่อว่า “ปาผิด $24 - x$ ครั้ง เสียเงิน $7(24 - x)$ บาท” และอธิบายเพิ่มเติมว่า “ปาผิด 1 ครั้ง เสียเงิน 1 บาท ถ้าปาผิด $24 - x$ ครั้ง เสียเงิน $7(24 - x)$ ” พร้อมทั้งเขียนลงบนกระดาน

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ในขั้นนี้ครูเขียนออกมาเป็นสมการพร้อมกับอธิบาย โดยพิจารณาทีละเงื่อนไข ครูพูดว่า “จำนวนเงินที่เสีย” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $3(24 - x)$ “ลบกับ” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือเครื่องหมายลบ (-) “จำนวนเงินที่ได้” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $8x$ “เท่ากับจำนวนที่ต้องจ่ายไป” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $= 17$ และได้สมการออกมาเป็น $3(24 - x) - 8x = 17$

ขั้นที่ 4 แก้สมการ

ในขั้นตอนนี้ครูได้แก้สมการตามขั้นตอนวิธีที่ครูได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้ไปแล้ว โดยเริ่มจากการแจกแจง แล้วรวมตัวแปร x ให้อยู่ที่เดียวกัน จากนั้นย้ายข้าง เพื่อให้เหลือเพียงแค่ตัวแปร x เพียงตัวเดียว ซึ่งครูได้อธิบาย และแสดงเป็นขั้นตอนดังนี้

$$3(24 - x) - 8x = 17$$

$$72 - 3x - 8x = 17$$

$$55 = 11x$$

$$5 = x$$

เมื่อได้ค่า x คือ 5 แล้ว ครูสรุปว่า นายวิจิตปาเป่าลูกทั้งหมด 5 ครั้ง

ในขั้นนี้ครูตรวจคำตอบได้ว่าเป็นคำตอบที่ถูกต้องหรือไม่ โดย นำการปาเป่าลูก 5 ครั้ง ไปคิด โดยครูอธิบายว่า “ปาลูก 5 ครั้ง ปาผิด 19 ครั้ง” จากนั้นครูนำ 5 ไปคูณ 8 และ 19 คูณกับ 3 ได้เป็น 40 บาท และ 57 บาท จากนั้นนำเงินที่เสียตั้งลบด้วยจำนวนเงินที่ได้ จะได้ 17 ครูอธิบายว่า “จะเห็นได้ว่า เขาต้องให้เงินกับทางร้านอีก 17 บาท เพราะได้มาแล้ว 40 บาท แต่เสียไป 57 บาท ดังนั้นคำตอบที่ได้จึงถูกต้อง”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 สำหรับตัวอย่างที่ 3 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(3.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดอธิบายและการเขียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน ครูได้อธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนดให้พร้อมทั้งเขียนลงบนกระดาน และการใช้คำถามกับนักเรียนว่า “โจทย์ต้องการทราบอะไร ปาลูกหรือปาผิด” เพื่อที่จะกำหนดตัวแปร จากนั้นจึงอธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนด และเงื่อนไข เช่น “ปาผิด $24 - x$ ครั้ง เสียเงิน $7(24 - x)$ บาท” และอธิบายเพิ่มเติมว่า “ปาผิด 1 ครั้ง เสียเงิน 1 บาท ถ้าปาผิด $24 - x$ ครั้ง เสียเงิน $7(24 - x)$ ” พร้อมทั้งเขียนลงบนกระดาน จนได้สมการออกมา นอกจากนี้ครูพูดอธิบายแต่ละส่วนของสมการคืออะไรด้วย เช่น “จำนวนเงินที่เสีย” คือ $3(24 - x)$ เป็นต้น

(3.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา คือ ครูพิจารณาจากเงื่อนไข “โจทย์ต้องการทราบ ปาลูก ว่าปาลูกกี่ครั้ง” จึงกำหนดตัวแปร x แทนจำนวนครั้งที่ปาลูก นอกจากนี้ครูใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เขียนแทนเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ในแต่ละเงื่อนไข เช่น “จำนวนเงินที่เสีย” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $3(24 - x)$ “ลบกับ” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือเครื่องหมายลบ (-) “จำนวนเงินที่ได้” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $8x$ “เท่ากับจำนวนที่ต้องจ่ายไป” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ลงบนกระดานคือ $= 17$ เป็นต้น

(3.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปร

และพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเอียดถี่ถ้วนเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ และในตัวอย่างนี้ครูได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่ได้ด้วยว่าถูกต้องหรือไม่ จากการพิจารณาเงื่อนไขโจทย์อีกครั้ง

(4) ตัวอย่างที่ 4 นายวิจิตรมีที่ดิน 2 แปลง ถ้าสามในห้าของพื้นที่ของที่ดินแปลงเล็ก น้อยกว่าสองในสามของที่ดินแปลงใหญ่อยู่ 120 ตารางวา ถ้าที่ดินแปลงใหญ่มีพื้นที่ 1 ไร่ 50 ตารางวา จงหาพื้นที่ของที่ดินแปลงเล็ก

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูใช้ในแต่ละขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1-2 อ่านโจทย์ วิเคราะห์โจทย์ และกำหนดตัวแปร

ครูอ่านโจทย์และเริ่มวิเคราะห์โจทย์ ไปที่ละเอียดถี่ถ้วน โดยใช้รูปภาพประกอบเพื่อช่วยในการวิเคราะห์ นั่นคือ ครูใช้การนำเสนอที่เป็นรูปภาพ โดยครูวาดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ประกอบ แสดงที่ดิน 2 แปลง และกำหนดให้เป็นที่ดินแปลงใหญ่กับแปลงเล็ก ดังภาพที่ 23



ภาพที่ 23 แสดงการใช้รูปภาพของครูในการวิเคราะห์โจทย์

จากนั้นครู อ่านโจทย์อีกครั้ง โดยที่เน้นไปที่ เงื่อนไข คือ “สามในห้าของที่ดินแปลงเล็ก” และอธิบายว่า “คือ $\frac{3}{5}$ ของแปลงเล็ก” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์คือ $\frac{3}{5}$ นั่นคือ ครูใช้คำว่า “ส่วน” แทน “ใน” เช่น 3 ใน 5 เป็น 3 ส่วน 5 และเขียนสัญลักษณ์เป็น $\frac{3}{5}$ เงื่อนไขที่ครูพิจารณาต่อไปคือ “สองในสามของที่ดินแปลงใหญ่” ครูอธิบายว่า “คือ $\frac{2}{3}$ ของแปลงใหญ่” พร้อมทั้งเขียนสัญลักษณ์ คือ $\frac{2}{3}$

จะเห็นได้ว่าตัวแปรของครูคือ ตัวอักษรภาษาไทย ล กับ ณ แสดงว่าครูไม่ได้เฉพาะเจาะจงว่าตัวแปรจะต้องแทนด้วยตัวอักษร x เสมอ แต่สามารถนำตัวอักษรหรืออะไรก็ได้มาแทนตัวที่ไม่ทราบค่า หรือเรียกว่า ตัวแปรนั่นเอง

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ครูพิจารณาเงื่อนไข คือ “สามในห้าของที่ดินแปลงเล็กน้อยกว่าสองในสามของที่ดินแปลงใหญ่ อยู่ 120 ตารางวา” ครูอธิบายคำว่า “น้อยกว่า แสดงว่า เอาที่ดินแปลงใหญ่ตั้งลบด้วยที่ดินแปลงเล็ก จะเท่ากับ 120 ตารางวา” และครูเขียนสมการได้ออกมาเป็น

$$\frac{2}{3}ญ - \frac{3}{5}ล = 120$$

ครูพิจารณาเงื่อนไข “ที่ดินแปลงใหญ่มีพื้นที่เท่ากับ 1 ไร่ 50 ตารางวา” จากนั้นครูถามนักเรียนว่า “หน่วยออกมาเป็นอะไร” หลังจากที่ดินนักเรียนตอบ ครูอธิบายต่อว่า “หน่วยออกมาเป็นตารางวา ดังนั้นจะต้องแปลงหน่วยของพื้นที่ที่ดินแปลงใหญ่ให้มีหน่วยเป็นตารางวา” โดยครูทบทวนเรื่องการแปลงหน่วยของพื้นที่ ดังนี้ 1 ไร่ มี 400 ตารางวา พร้อมทั้งเน้นให้นักเรียนเขียนบันทึกไว้ ในวิธีทำข้อนี้ และอธิบายต่อ 1 ไร่ มี 4 งาน ดังนั้น 1 งาน มี 100 ตารางวา

ครูกลับไปพิจารณาที่พื้นที่ของที่ดินแปลงใหญ่ คือ 1 ไร่ 50 ตารางวา โดยครูแปลงพื้นที่ให้มีหน่วยเป็นตารางวาได้เป็น 450 ตารางวา จากนั้นแทนค่า 450 ตารางวา ในสมการ $\frac{2}{3}ญ - \frac{3}{5}ล = 120$ ได้เป็น $\frac{2}{3} \times 450 - \frac{3}{5}ล = 120$ ครูอธิบายเพิ่มเติมว่า “ล คือ พื้นที่ของที่ดินแปลงเล็ก”

ขั้นที่ 4 แก้สมการ

ครูดำเนินการแก้สมการพร้อมอธิบายการใช้หลักการย้ายข้างในแต่ละขั้นตอน ดังวิธีทำที่ครูได้แสดงดังต่อไปนี้

$$300 - \frac{3}{5}ล = 120$$

$$300 - 120 = \frac{3}{5}ล$$

$$180 = \frac{3}{5}ล$$

$$180 \times \frac{5}{3} = ล$$

$$300 = ล$$

ครูสรุปว่า ที่แปลงเล็กมีพื้นที่เท่ากับ 300 ตารางวา ที่แปลงใหญ่มีพื้นที่เท่ากับ 450 ตารางวา

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 สำหรับตัวอย่างที่ 4 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(4.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน โดยครูอธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เช่น “สามในห้าของที่ดินแปลงเล็ก” อธิบายว่า “คือ $\frac{3}{5}$ ของแปลงเล็ก” และครูใช้คำว่า “ส่วน” แทน “ใน” เช่น 3 ใน 5 เป็น 3 ส่วน 5 และครูได้ใช้การพูดอธิบายเงื่อนไขต่างๆ ที่ครูนำมาพิจารณาเพื่อเขียนเป็นสมการออกมา เช่น “สามในห้าของที่ดินแปลงเล็กน้อยกว่าสองในสามของที่ดินแปลงใหญ่อยู่ 120 ตารางวา” ครูพูดอธิบายว่า “น้อยกว่า แสดงว่าเอาที่ดินแปลงใหญ่ตั้งลบด้วยที่ดินแปลงเล็ก จะเท่ากับ 120 ตารางวา”

(4.2) ครูใช้รูปภาพเพื่อช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ วาดรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดแตกต่างกันสองรูปเพื่อแทนที่ดินสองแปลงที่มีแปลงใหญ่กับแปลงเล็ก จากนั้นจึงใส่ข้อมูลของแต่ละแปลงให้ตรงกับภาพของที่ดินแต่ละแปลง และเขียนเป็นสมการออกมา

(4.3) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาไทย คือ ล และ ฉ แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า คือพื้นที่ของที่ดินแปลงเล็กกับที่ดินแปลงใหญ่ตามลำดับ นอกจากนี้ครูใช้สัญลักษณ์แทนคำว่า “ใน” เช่น “สามในห้า” ครูใช้คำว่า “ส่วน” แทน “ใน” เช่น 3 ใน 5 เป็น 3 ส่วน 5 และเขียนสัญลักษณ์เป็น $\frac{3}{5}$ และใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เขียนสมการด้วย

(4.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

3.1.4.3 ขั้นตอนที่ 3 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดจำนวน 4 ข้อ คือ

(1) นาย ก นาย ข และนาย ค มีเงินรวมกัน 7,200 บาท ถ้านาย ก มีเงินเป็นสองเท่าของนาย ข และ นาย ค มีเงินเป็นครึ่งหนึ่งของเงินนาย ก และ นาย ข รวมกัน จงหาจำนวนเงินของแต่ละคน

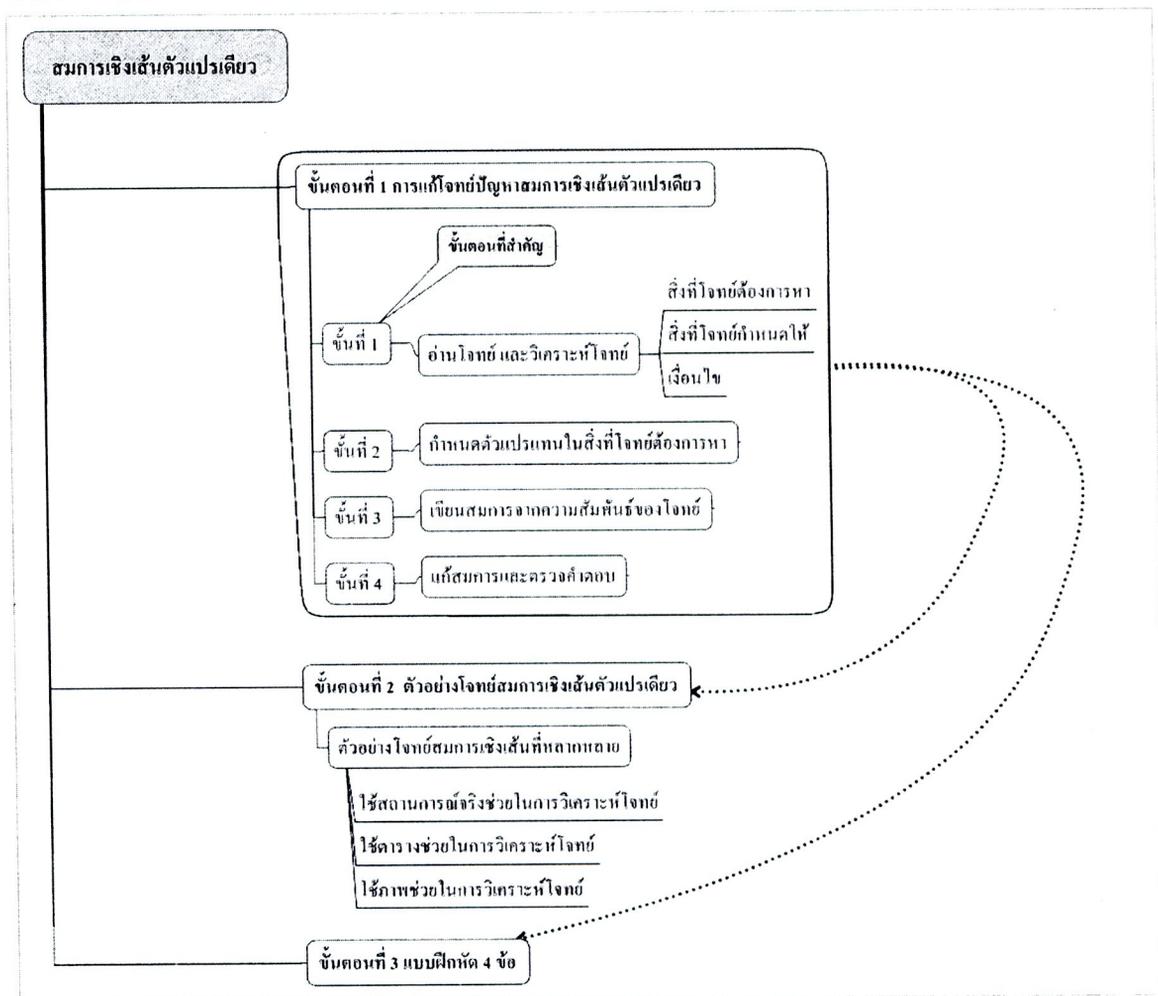
(2) สนามแห่งหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีความยาวเป็น $\frac{3}{2}$ ของความกว้าง ถ้าความยาวรอบรูปของสนามนี้ 480 เมตร จงหาพื้นที่ของสนามแห่งนี้

(3) รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง มีมุมที่มีขนาดโตที่สุดกางมากกว่า มุมที่มีขนาดเล็กที่สุด 75 องศา และมุมที่มีขนาดโตเป็นอันดับสองกางมากกว่ามุมที่มีขนาดเล็กที่สุด 30 องศา จงหาขนาดของมุมทั้งสามมุม

(4) เมื่อ 5 ปีที่แล้ว คุณพ่อมีอายุเป็น $\frac{9}{2}$ เท่าของอายุฉัน และทั้งสองคนมีอายุรวมกัน 55 ปี จงหาอายุของฉัน และอายุของคุณพ่อใน 10 ปีข้างหน้า

สำหรับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู ในกิจกรรมนี้ เพื่อให้ให้นักเรียนเกิดมโนคติเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยครูเริ่มโดยการให้การพูดอธิบายขั้นตอนของการแก้สมการ เริ่มตั้งแต่ การอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ การกำหนดตัวแปร การเขียนสมการ และการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการพร้อมตรวจคำตอบ เมื่อครูอธิบายเสร็จครูได้ยกตัวอย่างที่หลากหลายและมีลักษณะที่แตกต่างกัน เพื่อแสดงให้เห็นถึงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการในแต่ละรูปแบบ ซึ่งในแต่ละขั้นของการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูได้ใช้การนำเสนอภายนอกที่เป็นภาษาทั้งการพูดการเขียน ในสิ่งที่โจทย์ต้องการหา สิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ และเงื่อนไขต่างๆ เพื่อประกอบการวิเคราะห์โจทย์ในการเขียนเป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และเขียนสมการออกมา นอกจากนี้การใช้ภาษาแล้ว ครูใช้การนำเสนอภายนอกที่เป็นตัวอย่างสถานการณ์จริงเพื่อให้ให้นักเรียนเข้าใจง่ายขึ้น การใช้ตาราง การใช้รูปภาพ มาช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ด้วย สำหรับการนำเสนอภายนอกที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้ตัวอักษรที่เป็นภาษาอังกฤษ และภาษาไทย แทนตัวแปร หรือตัวไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา รวมไปถึงการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เขียนเป็นสมการออกมา และการดำเนินการต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ และใช้วงกลมเพื่อเป็นการเน้นว่าจะนำข้อมูลไปใช้ สำหรับการนำเสนอที่เป็นขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูได้แสดงขั้นตอนเป็นไปตามลำดับขั้นตอนทีละขั้นอย่างชัดเจน เริ่มตั้งแต่อ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ กำหนดตัวแปร เขียนสมการ แก้สมการเพื่อหาคำตอบ และตรวจคำตอบ ซึ่งกิจกรรมการเรียนรู้นี้ครูเน้นการวิเคราะห์โจทย์ การกำหนดตัวแปร และการเขียนสมการจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ แต่ครูไม่เน้นขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เนื่องจากเป็นเรื่องที่นักเรียนได้เรียนมาแล้ว และขั้นตอนที่ครูไม่เน้นอีกหนึ่งขั้นตอนคือ การตรวจคำตอบ ซึ่งเห็น ได้จากการที่ครูแสดงวิธีการตรวจคำตอบเพียงตัวอย่างเดียว และในขั้นตอนสุดท้ายครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพื่อเป็นให้นักเรียนฝึกกราบบุคคลในห้องเรียนและครูได้เห็นคุณนักเรียนรอบๆ ห้องพร้อมตอบข้อสงสัยที่นักเรียนถาม

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูแสดงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 24 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 4

3.1.5 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 5 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ต่อ)

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมนี้เกี่ยวกับเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูได้ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในใบความรู้ จากนั้นเฉลยแบบฝึกหัดในบางข้อ ซึ่งเป็นไปตามขั้นตอนต่อไปนี้

3.1.5.1 ขั้นตอนที่ 1 ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในใบความรู้ต่อ

3.1.5.2 ขั้นตอนที่ 2 ครูเฉลยแบบฝึกหัดบางข้อ

(1) ในห้องเรียนหนึ่งในโรงเรียนบ้านศึกษา มีนักเรียนหญิงเป็น $\frac{5}{4}$

เท่าของจำนวนนักเรียนชาย ถ้ามีนักเรียนชายเพิ่มขึ้น 6 คน และนักเรียนหญิงลดลง 5 คน จำนวนนักเรียนชายจะกลับเป็น $\frac{6}{5}$ เท่าของจำนวนนักเรียนหญิงจงหาว่าเดิมมีนักเรียนชาย และนักเรียนหญิงอย่างละกี่คน

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูได้แสดงดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1-2 อ่านโจทย์ วิเคราะห์โจทย์ และกำหนดตัวแปร

ครูอ่านโจทย์และวิเคราะห์สิ่งที่โจทย์กำหนดและเงื่อนไข โดยครูเขียนเป็นตาราง ครูพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนด คือ “นักเรียนหญิงเป็น $\frac{5}{4}$ เท่าของนักเรียนชาย” โดยครูเขียนสัญลักษณ์ y แทน นักเรียนหญิง และ x แทนนักเรียนชาย จากนั้นครูอธิบายโดยการพูดว่า “ถ้านักเรียนชายเป็น x คน จะได้นักเรียนหญิงเป็น $\frac{5}{4}x$ ” ซึ่งครูเขียนสัญลักษณ์ x ไว้ใต้ x และ $\frac{5}{4}x$ ไว้ใต้ y นั่นคือ ครูกำหนดตัวแปรพร้อมกับเขียนข้อมูลจากสิ่งที่โจทย์กำหนด

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ครูพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนด คือ “ถ้ามีนักเรียนชายเพิ่มขึ้น 6 คน” และครูอธิบายว่า “หมายความว่า เดิมมี x คน เพราะฉะนั้นใหม่ นักเรียนชายเป็น $x + 6$ เพราะเพิ่มขึ้น 6 คน “ครูพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนด คือ “นักเรียนหญิงลดลง 5 คน” ครูอธิบายว่า “แสดงว่านักเรียนหญิงใหม่เป็น $\frac{5}{4}x - 5$ ” ครูได้ตารางการวิเคราะห์โจทย์ดังนี้

	ย	ช
เดิม	$\frac{5}{4}x$	x
ใหม่	$\frac{5}{4}x - 5$	$x + 6$

ครูพิจารณาเงื่อนไข “ถ้านักเรียนเพิ่มขึ้น 6 คน และนักเรียนหญิงลดลง 5 คน จะทำให้นักเรียนชายเป็น $\frac{6}{5}x$ เท่าของนักเรียนหญิง” จากนั้นครูเขียนสมการคือ $x+6 = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{4}x-5\right)$ พร้อมทั้งพูดอธิบายสมการนี้ว่า “นักเรียนชายคือ $x+6$ จะเป็น $\frac{6}{5}x$ เท่าของนักเรียนหญิง”

ขั้นที่ 4 แก่สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

ครูดำเนินการแก้สมการพร้อมอธิบายการใช้หลักการแจกแจงหลักการย้ายข้างในแต่ละขั้นตอน ดังวิธีทำที่ครูได้แสดงดังต่อไปนี้

$$x+6 = \frac{6}{5}\left(\frac{5}{4}x-5\right)$$

$$x+6 = \frac{3}{2}x-6$$

$$6+6 = \frac{3}{2}x-x$$

$$12 = \frac{x}{2}$$

$$24 = x$$

จากนั้นครูอธิบายว่า “นำค่า x ที่ได้มาตอบคำถามจะได้ว่า เดิมนักเรียนชายมี 24 คน และนักเรียนหญิงหาได้โดย แทน $x = 24$ ใน $\frac{5}{4}x$ จะได้นักเรียนหญิง 30 คน” และครูได้สรุปอีกครั้งว่า เดิมมีนักเรียนชาย 24 คน และนักเรียนหญิง 30 คน

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 สำหรับแบบฝึกหัดข้อ 1 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน ซึ่งครูได้อธิบายไปที่ละเงื่อนไข เช่น “ถ้านักเรียนชายเป็น x คน จะได้นักเรียนหญิงเป็น $\frac{5}{4}x$ ” และครูได้อธิบายเงื่อนไข เพื่อจะเขียนสมการออกมา คือ “ถ้านักเรียนเพิ่มขึ้น 6 คน และนักเรียนหญิงลดลง 5 คน จะทำให้นักเรียนชายเป็น $\frac{6}{5}x$ เท่าของนักเรียนหญิง” เมื่อได้สมการออกมา ครูได้พูดอธิบายความหมายของแต่ละพจน์ในสมการด้วย



(1.2) ครูใช้ตารางเพื่อช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยการวิเคราะห์ว่าโจทย์กำหนดอะไรบ้าง จากนั้นจึงสร้างตารางขึ้นมาประกอบในการวิเคราะห์โจทย์ และการพิจารณาเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไข เพื่อที่จะสร้างสมการต่อไป

(1.3) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และครูได้เขียนสัญลักษณ์แทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำไปเขียนสมการต่อไป เช่น “ถ้านักเรียนชายเป็น x คน จะได้นักเรียนหญิงเป็น $\frac{5}{4}x$ ”

(1.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่เงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

(2) ทางแห่งหนึ่งถ้าใช้ความเร็วชั่วโมงละ 20 กิโลเมตร กับชั่วโมงละ 30 กิโลเมตร จะใช้เวลาต่างกัน 40 นาที ทางแห่งนี้ไกลเท่าไร

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูได้แสดงดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 - 2 ครูอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ตามสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และเงื่อนไขต่างๆ และกำหนดตัวแปร ดังนี้

ครูทบทวนเรื่อง สูตรการหาอัตราเร็ว คือ $v = \frac{s}{t}$ พร้อมทั้งอธิบายว่า

“ v คือ อัตราเร็ว หรือความเร็ว s คือระยะทาง t คือ เวลา ดังนั้น อัตราเร็ว คือระยะทางส่วนด้วยเวลา พิจารณาได้จากหน่วยของอัตราเร็ว เช่น km/h กิโลเมตรคือหน่วยของระยะทาง ชั่วโมงคือหน่วยของเวลา”

ครูวิเคราะห์โจทย์ จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ “ใช้ความเร็วชั่วโมงละ 20 กิโลเมตร กับ ชั่วโมงละ 30 กิโลเมตร” พร้อมทั้งอธิบายดังนี้ “ในถนนเส้นเดียวกัน เหมือนคนแข่งรถ คนหนึ่งวิ่งด้วยความเร็ว 20 กิโลเมตร ต่อชั่วโมง อีกคนหนึ่งวิ่งด้วยความเร็ว 20 กิโลเมตร ต่อ ชั่วโมง เวลาต่างกัน 40 นาที” จากนั้น ครูแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการ โดยเขียนสิ่งที่โจทย์กำหนดลงบนกระดานดังนี้

กำหนดให้ ขับรถด้วยความเร็ว 30 km/h ใช้เวลา x ชั่วโมง

ขับรถด้วยความเร็ว 20 km/h ใช้เวลา $x + \frac{2}{3}$ ชั่วโมง

ครูถามนักเรียนว่า “ระหว่าง 30 km/h กับ 20 km/h ใครใช้เวลามากกว่ากัน” จากนั้น ครูอธิบายว่า “ 20 km/h ใช้เวลามากกว่า เพราะรถวิ่งช้ากว่าจะใช้เวลามากกว่า ดังนั้นถ้าเวลาต่างกัน 40 นาที 30 km/h ใช้เวลา x ชั่วโมง เพราะฉะนั้น 20 km/h ใช้เวลาไป x บวก 40 นาที แต่หน่วยเป็นชั่วโมงจะต้องทำให้ 40 นาที มีหน่วยเป็นชั่วโมง โดยใช้วิธี $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ” และครูอธิบายเพิ่มเติม เนื่องจากนักเรียนไม่เข้าใจ โดยครูเขียนเปรียบเทียบให้นักเรียนเห็น ดังภาพที่ 25

เวลาต่างกัน 40 นาที	
30 km/h	20 km/h
x	$x + \frac{2}{3}$

ภาพที่ 25 การเขียนเปรียบเทียบในการอธิบายการวิเคราะห์โจทย์

ครูอธิบายว่า “มีรถสองคัน คันที่หนึ่ง 30 km/h คันที่สอง 20 km/h ” จากนั้นครูอธิบายการแปลง 40 นาที ให้หน่วยเป็นชั่วโมงได้เป็น $\frac{2}{3}$ ชั่วโมง เพราะ 1 ชั่วโมง มี 60 นาที และครูเขียนเทียบบัญญัติไตรยางศ์ให้นักเรียนดูดังนี้

60 นาที คิดเป็น 1 ชั่วโมง

40 นาที คิดเป็น $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ ชั่วโมง

จากนั้นครูอธิบายว่า “ 30 km/h กับ 20 km/h ใช้เวลาต่างกัน $\frac{2}{3}$ ชั่วโมง หรือ 40 นาที” ครูอธิบายว่า “คันที่ใช้เวลามากกว่าคือ 20 km/h ใช้เวลามากกว่า 40 นาที” และครูเขียนสรุปออกมาเป็น

30 km/h	20 km/h
เวลา x	$x + \frac{2}{3}$

เมื่อได้เวลาแล้ว ครูโยงมายังโจทย์ปัญหาสมการอันเดิม และอธิบายต่อว่า “ขับรถด้วยอัตราเร็ว 30 km/h ใช้เวลา x ชั่วโมง นั่นคือใช้เวลา x ชั่วโมงถึงที่หมาย” พร้อมแสดงท่าทางประกอบ โดยใช้มือขวาเป็นจุดเริ่มต้น มือซ้ายเป็นปลายทาง และอธิบายต่อว่า “ในขณะที่ขับรถด้วยอัตราเร็ว 20 km/h

ใช้เวลา $x + \frac{2}{3}$ ชั่วโมง ก็ถึงที่หมายเช่นเดียวกัน” ครูสรุปว่าระยะทางของรถทั้งสองคันเท่ากัน ครู

พิจารณาสูตร $v = \frac{s}{t}$ และแปลงเป็น $s = vt$ นั่นคือ ระยะทางเท่ากับอัตราเร็วคูณเวลา

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ในขั้นนี้ครูเขียนสมการโดยการพิจารณาเงื่อนไข คือ จาก รถ 2 คันวิ่งบนถนนเดียวกันใช้ระยะทางเท่ากัน คันแรก จะได้ระยะทาง $30x$ km และคันที่สอง จะได้ระยะทาง $20\left(x + \frac{2}{3}\right)$ km จากระยะทางของทั้งสองคันเท่ากัน ดังนั้นครูจึงสรุปออกมาเป็นสมการคือ

$$30x = 20\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

ขั้นที่ 4 แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

ครูแสดงวิธีการแก้สมการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

$$30x = 20\left(x + \frac{2}{3}\right)$$

$$30x = 20x + \frac{40}{3}$$

$$x = \frac{40}{3} \times \frac{1}{10}$$

$$x = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} \text{ ชั่วโมง}$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 2 สำหรับแบบฝึกหัดข้อ 2 ครูใช้การนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

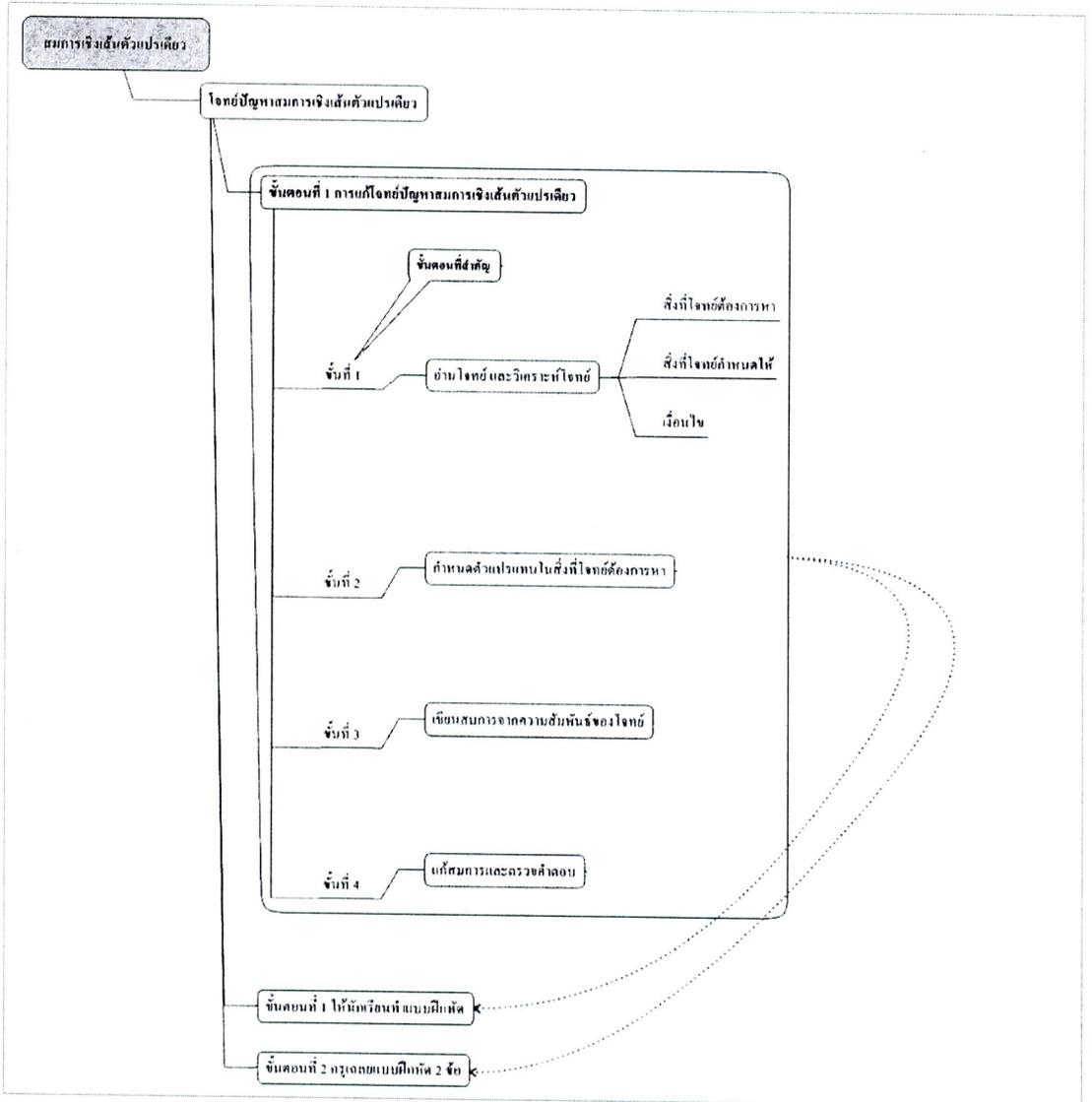
(2.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา ทั้งการพูดและการเขียนอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน ครูใช้คำพูดอธิบายทบทวนความรู้ที่ต้องนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ เช่น ครูพูดอธิบายเรื่องสูตรการหาอัตราเร็ว เมื่อครูอธิบายเงื่อนไข ครูได้พูดอธิบายพร้อมทั้งเขียนอธิบายเงื่อนไขนั้นลงบนกระดาน และพูดอธิบายซ้ำเพื่อให้ นักเรียนเข้าใจ ได้ชัดเจนยิ่งขึ้น เช่น “ 30 km/h กับ 20 km/h ใช้เวลาต่างกัน $\frac{2}{3}$ ชั่วโมง หรือ 40 นาที” และ “คันที่ใช้เวลามากกว่าคือ 20 km/h ใช้เวลามากกว่า 40 นาที”

(2.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และครูได้เขียนสัญลักษณ์แทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ เพื่อนำไปเขียน

สมการต่อไป เช่น คันที่วิ่งด้วยอัตราเร็ว 30 km/h จะได้ระยะทาง $30x$ km และคันที่วิ่งด้วยอัตราเร็ว 20 km/h จะได้ระยะทาง $20\left(x + \frac{2}{3}\right)$ km

(2.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเอียดถี่ถ้วนเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูแสดงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 26 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 5

3.1.6 กิจกรรมการเรียนรู้ที่ 6 เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว (ต่อ)

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในวันนี้ เป็นการเฉลยแบบฝึกหัดที่ครูให้นักเรียนทำเป็นบางข้อ ดังขั้นตอนต่อไปนี้

3.1.6.1 ขั้นตอนที่ 1 ครูอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

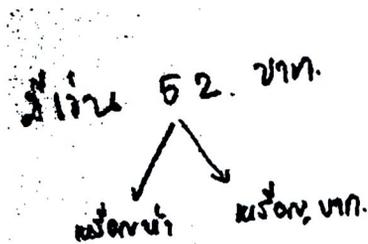
(1) หญิงคนหนึ่งมีเงิน 59 บาท เป็นเหรียญห้าบาทและเหรียญบาท นับรวมกันได้ทั้งหมด 24 เหรียญ เขามีเหรียญบาทกี่เหรียญ

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยผู้วิจัยได้แยกเป็นขั้นตอนที่ครูใช้ในแต่ละขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์

ครูอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ โดยพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และเงื่อนไข ดังต่อไปนี้

ครูพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ คือ “หญิงคนหนึ่งมีเงิน 52 บาท” โดยครูอธิบาย พร้อมทั้งเขียน “มีเงิน 52 บาท” ลงบนกระดาน จากนั้นครูพิจารณาเงื่อนไขต่อไปคือ “มีเงิน 52 บาท แบ่งออกเป็น เหรียญห้าบาท และเหรียญบาท” และเขียนแผนภาพแสดงว่า 52 บาท แบ่งออกเป็น เหรียญสองประเภท ดังภาพที่ 27



ภาพที่ 27 แสดงการใช้แผนผังของครูในการวิเคราะห์โจทย์

และครูพิจารณาเงื่อนไข “นับจำนวนเหรียญรวมกันได้ทั้งหมด 24 เหรียญ” พร้อมทั้งอธิบายว่า “หมายความว่า เหรียญห้าบาท และเหรียญบาทรวมกันได้ 24 เหรียญ”

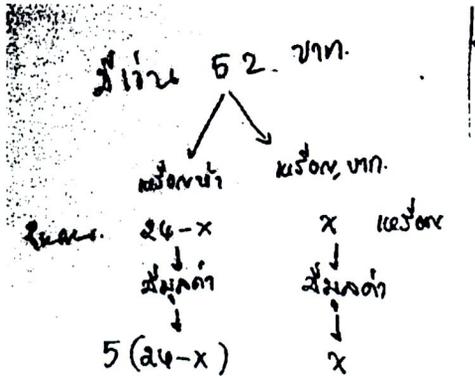
ขั้นที่ 2 กำหนดตัวแปร

ครูกำหนดตัวแปรโดยพิจารณาสิ่งที่โจทย์ต้องการหา นั่นคือ จำนวนเหรียญบาท ครูจึงกำหนดตัวแปร x เป็นจำนวนเหรียญบาท พร้อมเขียน x ลงบนกระดาน ตรงกับคำว่าเหรียญบาท

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ครูเขียนสมการ โดยครูพิจารณาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาคือ “จำนวนเหรียญรวมกันได้ทั้งหมด 24 เหรียญ” ครูอธิบายว่า “จำนวนเหรียญบาทรวมกันได้ 24 เหรียญ ถ้าเป็นเหรียญบาทแล้ว x เหรียญ จะได้จำนวนเหรียญห้าบาท $24 - x$ เหรียญ” ครูถามนักเรียนต่อว่า “เหรียญบาท x เหรียญคิดเป็นเงินเท่าไร” หลังจากนั้นได้อธิบายเพิ่มว่า “ถ้าคิดเป็นตัวแปร เหรียญบาท x เหรียญจะมีมูลค่า x บาท และเหรียญห้าบาท มีมูลค่า $5(24 - x)$ ”

แผนผังการวิเคราะห์โจทย์ของครูแสดงได้ดังภาพที่ 28



ภาพที่ 28 แสดงแผนผังการวิเคราะห์โจทย์ของครู

ครูสรุปสมการ คือ $5(24 - x) + x = 52$

ขั้นที่ 4 แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

ครูแสดงวิธีการแก้สมการพร้อมอธิบายขั้นตอนการแก้สมการ โดยใช้สมบัติการแจกแจงและเน้นว่าการแจกแจงจะต้องนำไปคูณทุกตัวในวงเล็บ และใช้การรวมตัวแปรเพื่อให้ตัวแปรเหลืออยู่ที่เดียว จากนั้นใช้การย้ายข้าง สมบัติการเท่ากัน มาช่วยในการแก้สมการ ดังแสดงให้เห็นตามขั้นตอนต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
 5(24 - x) + x &= 52 \\
 120 - 5x + x &= 52 \\
 120 - 4x &= 52 \\
 120 - 52 &= 4x \\
 68 &= 4x \\
 17 &= x
 \end{aligned}$$

ครูย้อนกลับไปดูว่าตัวแปร x คือ จำนวนเหรียญบาท หลังจากนั้นครูสรุปว่า จำนวนเหรียญบาทมีทั้งสิ้น 17 เหรียญ

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 สำหรับแบบฝึกหัดที่ 1 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(1.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับทีละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน ซึ่งครูได้อธิบายไปที่ละเอียดถี่ถ้วน เช่น “มีเงิน 52 บาท แบ่งออกเป็น เหรียญห้าบาท และเหรียญบาท” และครูได้อธิบายเงื่อนไขที่ละเอียดถี่ถ้วน เพื่อจะเขียนสมการออกมา คือ จำนวนเหรียญรวมกันได้ทั้งหมด 24 เหรียญและจำนวนเงินทั้งหมดคือ 52 บาท และมีเหรียญห้าบาทกับเหรียญบาท

(1.2) ครูใช้แผนภาพเพื่อช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้น โดยพิจารณาจากจำนวนเงินรวมทั้งหมดและแบ่งออกเหรียญห้าบาท และเหรียญบาท จากนั้นครูโยงแผนภาพมาตามเงื่อนไข และสรุปได้เป็นสมการออกมา

(1.3) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา คือ จำนวนเหรียญบาท และกำหนดให้ตัวแปร x แทนจำนวนเหรียญบาท จากนั้นครูจึงวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้คือ มีเหรียญรวมกันทั้งหมด 24 เหรียญ ดังนั้นถ้าเหรียญบาท มี x เหรียญ จำนวนเหรียญบาทมี $24 - x$ เหรียญ แสดงให้เห็นถึงการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ของครูแทนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ สำหรับสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้อื่น ครูใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แทนด้วยเช่นเดียวกัน เช่น มูลค่าของเงินเหรียญห้าบาท ครูแทนด้วยสัญลักษณ์คือ $5(24 - x)$ เป็นต้น

(1.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเอียดถี่ถ้วนเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

(2) ปัจจุบันบิดามีอายุเป็น 5 เท่าของบุตร อีก 10 ปีข้างหน้าบิดาจะมีอายุมากกว่า 3 เท่าของบุตรอยู่ 24 ปี ปัจจุบันบุตรมีอายุเท่าไร

ก่อนที่จะครูจะแสดงวิธีการแก้ปัญหา ครูได้ย้ำถึงขั้นตอนการทำ คือ “ให้พิจารณาอย่างถี่ถ้วน ดูทีละขั้นตอน ตอบคำถามตัวเองให้ได้ว่า โจทย์ถามหาอะไร โจทย์ให้อะไรมา

บ้าง ทุกอย่างที่โจทย์ให้มาเอามาให้หมด จะใช้หรือไม่ใช้ค่อยไปพิจารณาทีหลัง” จากนั้นครูแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวพร้อมทั้งอธิบาย ดังขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 – 2 อ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ และกำหนดตัวแปร

ครูอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปร โดยครูใช้ตารางมาช่วยในการวิเคราะห์และอธิบายไปที่ละเอียดถี่ถ้วน ดังนี้

ครูอธิบายว่า “ถ้าเรารู้อายุนุตรจะรู้อายุของบิดาด้วย ถ้าบุตรเป็น x ปี บิดาเป็น $5x$ ปี”

ครูพิจารณาเงื่อนไขต่อไป “อีก 10 ปีข้างหน้า” “ปัจจุบันบุตร มีอายุ x ปี ดังนั้นอีก 10 ปีข้างหน้าบุตรจะมีอายุ $x + 10$ ปี และอีก 10 ปี ข้างหน้าบิดามีอายุ $5x + 10$ ปี”

ครูเห็นว่า “ $x + 10$ คือ อายุของบุตรในอีก 10 ข้างหน้า $5x + 10$ คือ อายุของบิดาในอีก 10 ข้างหน้า”

ซึ่งครูใช้ตารางช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ ดังตารางต่อไปนี้

	ปัจจุบัน	15 ปีข้างหน้า
บุตร	x	$x + 10$
บิดา	$5x$	$5x + 10$

ขั้นที่ 3 เขียนสมการ

ครูพิจารณาเงื่อนไขต่อไป เพื่อสร้างสมการ คือ “อายุบิดา จะมากกว่า สามเท่าของบุตร อยู่ 24 ปี” ครูอธิบายว่า “ต้องคิดใน 10 ปีข้างหน้า ดังนั้นจะต้องใช้อายุ อีก 10 ปี ข้างหน้าของบิดา นั่นคือ $5x + 10$ ” และครูได้อธิบายเพิ่มเติมว่า “มากกว่า แสดงว่าเป็นการลบ สามเท่าของบุตร คือ $3(x + 10)$ ต้องใช้ในส่วนของ 10 ข้างหน้า เพราะพิจารณา 10 ปีข้างหน้า” ครูได้สมการออกมาเป็น $5x + 10 - 3(x + 10) = 24$

ขั้นที่ 4 แก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ

ครูแก้สมการโดยใช้สมบัติการแจกแจง การรวมตัวแปร การย้ายข้าง เพื่อหาคำตอบของสมการ ดังนั้นขั้นตอนต่อไปนี้

$$5x + 10 - 3(x + 10) = 24$$

$$5x + 10 - 3x - 30 = 24$$

$$2x = 44$$

$$x = 22$$

ดังนั้น ได้อายุปัจจุบันของเด็ก คือ 22 ปี

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 สำหรับแบบฝึกหัดข้อ 2 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(2.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน และครูได้อธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละอย่าง เช่น “ถ้าเรารู้อายุบุตรจะรู้อายุของบิดาด้วย ถ้าบุตรเป็น x ปี บิดาเป็น $5x$ ปี” ครูพิจารณาเงื่อนไขพร้อมอธิบายเพื่อเขียนสมการออกมาคือ อีก 10 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุมากกว่า 3 เท่าของบุตรอยู่ 24 ปี

(2.2) ครูใช้ตารางเพื่อช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยการวิเคราะห์ว่าโจทย์กำหนดอะไรบ้าง จากนั้นจึงสร้างตารางขึ้นมาประกอบในการวิเคราะห์โจทย์ และการพิจารณาเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไข เพื่อที่จะสร้างสมการต่อไป

(2.3) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร หรือตัวที่ไม่ทราบค่า โดยครูกำหนดตัวแปรแทนสิ่งที่โจทย์ต้องการหา และครูได้เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ไปที่ละเงื่อนไข เช่น $x + 10$ คือ อายุของบุตรในอีก 10 ข้างหน้า $5x + 10$ คือ อายุของบิดาในอีก 10 ข้างหน้า

(2.4) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

(3) ถ้าเอา 17 บวกเข้ากับ $\frac{2}{3}$ ของเลขจำนวนหนึ่ง ผลลัพธ์จะมีค่าน้อยกว่าเลขจำนวนนั้นอยู่ 5 จงหาเลขจำนวนนั้น

ครูแสดงขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

ครูอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ดังนี้

จาก “เอา 17 บวกเข้ากับ $\frac{2}{3}$ ของเลขจำนวนหนึ่ง” พร้อมทั้งเขียน

สัญลักษณ์เป็น $17 + \frac{2}{3}x$

“จะได้” ครูเขียนสัญลักษณ์คือเครื่องหมายเท่ากับ (=)

“ผลลัพธ์” ครูหมายถึงอีกด้านหนึ่งของสมการ

เมื่อครูพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์ให้มาคือ “ผลลัพธ์น้อยกว่าจำนวนนั้นอยู่ 5” ครูเขียนสัญลักษณ์เป็น $x - 5$ พร้อมทั้งอธิบายว่า “จำนวนนั้นคือ x น้อยกว่าอยู่ 5 คือนำ 5 มาลบออก” และครูเขียนวงกลมล้อมรอบ $x - 5$ และครูบอกว่า “ $x - 5$ คือผลลัพธ์” ครูได้สมการเป็น $17 + \frac{2}{3}x = x - 5$ เมื่อได้สมการแล้วครูแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการดังนี้

$$17 + \frac{2}{3}x = x - 5$$

$$17 + 5 = x - \frac{2}{3}x$$

ครูถามนักเรียนว่า “ทำไมไม่ย้าย x ไปไว้อีกด้าน” และอธิบายต่อว่า “เวลาที่ครูทำ ครูจะพยายามให้ตัวแปรเป็นบวกเสมอ และให้นักเรียนสังเกตว่า ระหว่าง $\frac{2}{3}x$ กับ x ตัวไหนมีค่ามากกว่ากัน” และครูบอกว่า “ x มีค่ามากกว่า เพราะ x เป็นหนึ่ง ถ้าย้าย x ไป กลายเป็นลบหนึ่ง ถ้าลบหนึ่ง บวกกับ บวกลบกันแล้วจะติดลบ”

ครูสรุปว่า “ให้ย้าย x ที่มีค่าน้อยไปหา ตัวที่มีค่ามาก เพื่อให้ค่า x เป็นบวกและจะได้ง่ายๆ” นั่นคือ ครูหมายความว่าถึงสัมประสิทธิ์ของ x แต่ครูไม่ได้พูดถึงคำว่าสัมประสิทธิ์ ครูใช้เพียงคำว่า x

จากนั้นครูทำให้สำเร็จ ดังนี้

$$22 = \frac{x}{3}$$

$$66 = x$$

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในขั้นตอนที่ 1 สำหรับแบบฝึกหัดที่ 3 ครูใช้ระบบการนำเสนอภายนอกเพื่อให้นักเรียนเข้าใจการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

(3.1) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษาโดยการพูดอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไปตามลำดับที่ละขั้นตอน ได้ถูกต้องและชัดเจน และครูได้อธิบายสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละอย่าง เช่น “ผลลัพธ์น้อยกว่าจำนวนนั้นอยู่ 5” ครูอธิบายว่า “จำนวนนั้นคือ x น้อยกว่าอยู่ 5 คือนำ 5 มาลบออก” และใช้การพูดอธิบายหลักการย้ายข้างตัวแปรเพื่อให้ตัวแปรไม่ติดลบด้วย

(3.2) ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ครูได้ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ คือ x แทนตัวแปร ซึ่งครูใช้แทนคำว่า “จำนวนนั้น” และครูได้เขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แทนสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเงื่อนไข เช่น “ผลลัพธ์น้อยกว่าจำนวนนั้นอยู่ 5” ครูเขียนสัญลักษณ์เป็น $x - 5$ และเมื่อเขียนเป็นสมการ ความหมายของผลลัพธ์ของครู คือ $x - 5$

(3.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

(4) เลขสองจำนวน จำนวน A มากกว่าจำนวน B อยู่ 5 ถ้า 3 เท่าของจำนวน B มากกว่าจำนวน A อยู่ 15 จงหาว่าเลขสองจำนวนนี้มีค่าเท่าไร

ครูได้แสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวดังต่อไปนี้

ครูอ่าน โจทย์ และวิเคราะห์โจทย์ พร้อมทั้งเขียนสมการ

ครูพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ คือ “A มากกว่า B อยู่ 5” เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $A - B = 5$ นั่นคือ ครูแทนคำว่า “มากกว่า” ด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ เครื่องหมายลบ (-) และแทนคำว่า “อยู่” ด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ เครื่องหมายเท่ากับ (=) จากนั้นครูพิจารณาสิ่งที่โจทย์กำหนดมาให้ คือ “ถ้า 3 เท่าของ B มากกว่า A อยู่ 15” เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $3B - A = 15$ นั่นคือ ครูแทนคำว่า “สามเท่าของ B ด้วยสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ 3B จากนั้นครูกำหนดให้เป็น สมการที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

$$A - B = 5 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (1)$$

$$3B - A = 15 \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad (2)$$

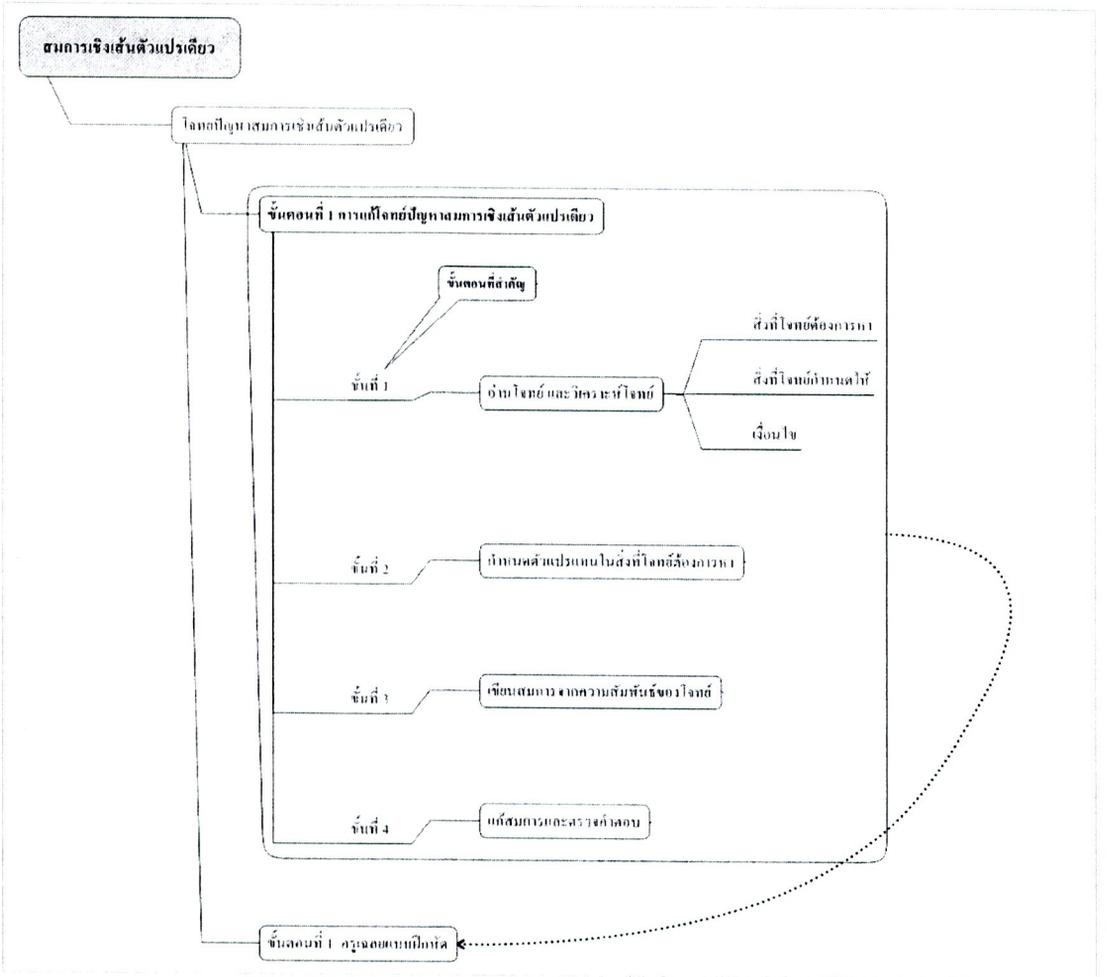
จากนั้นครูอธิบายสิ่งที่โจทย์ต้องการหา ว่า “ต้องการหา เลขสองจำนวนนี้มีค่าเท่าไร”

ครูถามนักเรียนว่า “เราเรียนเรื่องสมการเชิงเส้นกี่ตัวแปร” เมื่อ นักเรียนตอบตัวแปรเดียว ครูจึงเน้นว่า “ตัวแปรต้องมีตัวแปรเดียว แต่ในข้อนี้ เป็นสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ทำเป็นตัวแปรเดียวได้” ดังนี้

คือ “ A มากกว่า B อยู่ 5” เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $A - B = 5$ และ “ถ้า 3 เท่าของ B มากกว่า A อยู่ 15” เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น $3B - A = 15$ นอกจากนี้ครูยังใช้รูปสี่เหลี่ยมเพื่อเน้นว่าค่า A หาได้จาก $A = 5 + B$

(4.3) ครูใช้การนำเสนอที่เป็นขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มตั้งแต่ขั้นตอนของการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปรและพิจารณาเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ไปที่ละเอียดถี่ถ้วนเพื่อที่จะเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และเขียนออกมาให้อยู่ในรูปสมการ เมื่อได้สมการออกมาแล้วขั้นตอนต่อไปคือ การแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการ แต่ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในข้อนี้ครูไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาได้ว่าถูกต้องหรือไม่

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูแสดงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 30 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 6

3.2 สรุปการวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.2.1 สรุปการวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.2.1.1 การใช้ภาษาอธิบาย ประกอบด้วย การพูด และการเขียน

ครูใช้ภาษาอธิบายโดยการพูดอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประเภทของสมการ สมบัติการเท่ากัน หลักการย้ายข้าง สมบัติการแจกแจง ขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ขั้นตอนการแก้โจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การวิเคราะห์โจทย์ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และใช้การเขียนอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประเภทของสมการ การแก้สมการในบางขั้นตอน เช่น การใช้สมบัติการเท่ากัน และเขียนอธิบายการวิเคราะห์โจทย์

3.2.1.2 การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

ครูใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปแบบทั่วไป และใช้สัญลักษณ์คือตัวแปรที่เป็นตัวอักษรแทนตัวไม่ทราบค่า และการเขียนสมการที่อยู่ในรูปการดำเนินการของตัวเลขกับตัวแปรต่างๆ นอกจากนี้ยังมีการใช้ลูกศร โค้งเพื่ออธิบายสมบัติการแจกแจงด้วย

3.2.1.3 การใช้ตัวอย่าง

ครูใช้ตัวอย่างที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนเกิดมโนภาพเกี่ยวกับเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ยกตัวอย่างการแก้สมการ โดยเรียงลำดับจากง่ายไปยาก ยกตัวอย่างสถานการณ์จริงที่มีลักษณะคล้ายโจทย์เพื่อให้นักเรียนมองเห็นภาพในขั้นตอนการวิเคราะห์โจทย์ในเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

3.2.1.4 การใช้วิธีการ หรือขั้นตอนวิธี

วิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยครูใช้สมบัติการเท่ากัน และอธิบายเป็นสมบัติการย้ายข้าง และขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มจากกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร โดยกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อนซึ่งพิจารณาจากความสัมพันธ์ระหว่างตัวเลขกับตัวแปร ถ้าสมการมีตัวแปรเดียวแต่ปรากฏอยู่หลายที่ใช้หลักการรวมตัวแปรก่อน เพื่อให้เหลือตัวแปรเพียงตัวเดียวซึ่งในบางครั้งจะต้องใช้สมบัติการแจกแจงก่อน จากนั้นจึงทำการแก้สมการโดยการใช้สมบัติการเท่ากัน หรือหลักการย้ายข้าง สำหรับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เริ่มจากการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จากนั้นกำหนดตัวแปร และ

เขียนสมการจากความสัมพันธ์ เมื่อได้สมการออกมาแล้วทำการแก้สมการ โดยทำตามขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และตรวจคำตอบ

3.2.1.5 การใช้แผนภาพ

ครูใช้การนำเสนอที่เป็นแผนภาพ ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในขั้นตอนของการวิเคราะห์โจทย์ ซึ่งเป็นโจทย์ในลักษณะที่แยกออกเป็นสองประเภท เช่น การวิเคราะห์โจทย์ที่เป็นเหรียญสองประเภท

3.2.1.6 การใช้ตาราง

ครูใช้การนำเสนอที่เป็นตาราง ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในขั้นตอนของการวิเคราะห์โจทย์ ซึ่งเป็นโจทย์ในลักษณะที่เป็นการหาอายุของคน 2 คน และมี 2 ช่วงอายุ

3.2.1.7 การใช้รูปภาพ

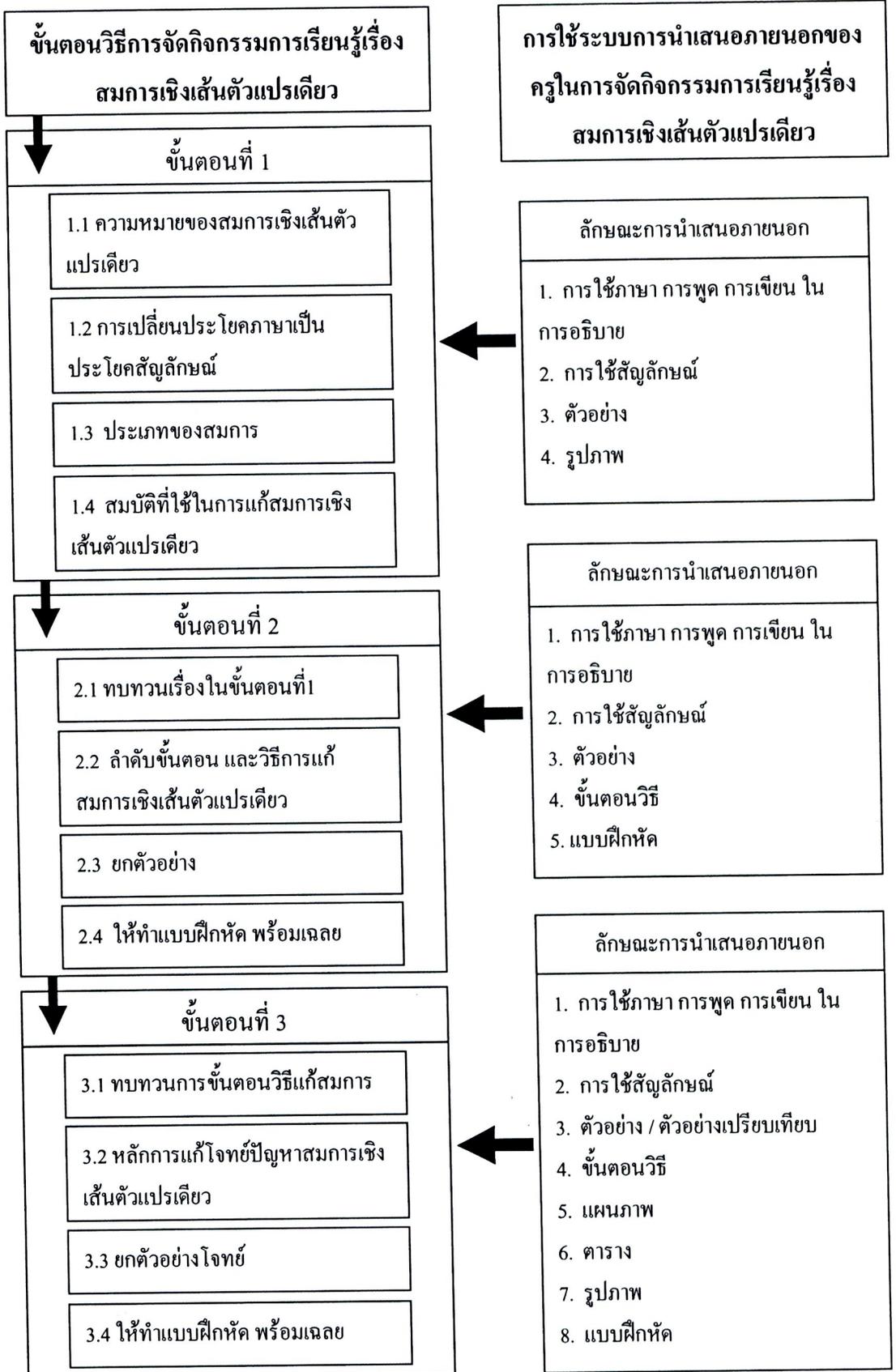
ครูใช้รูปภาพในเรื่องสมบัติการเท่ากัน โดยใช้รูปดาซัง เพื่อให้นักเรียนเกิดมโนภาพ นอกจากนี้ครูใช้รูปภาพช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพื่อจะได้เขียนสมการออกมา เช่น โจทย์ที่เกี่ยวข้องกับพื้นที่

3.2.1.8 การใช้แบบฝึกหัด

การจัดการเรียนรู้ในแต่ละกิจกรรมครูใช้แบบฝึกหัดที่มีลักษณะคล้ายกับตัวอย่างที่ครูยกตัวอย่าง และครูได้เฉลยแบบฝึกหัดที่นักเรียนทำ โดยการอธิบายไปที่ละข้อ เพื่อให้นักเรียนได้ตรวจสอบกับที่ตัวนักเรียนได้ทำ

3.2.2 ขั้นตอนวิธีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แสดงให้เห็นถึงลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังภาพที่ 31



ภาพที่ 31 แผนผังลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4. การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren

4.1 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประเภทของสมการ

4.1.1 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 1(นำ)

4.1.1.1 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐาน

ความเข้าใจระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีอยู่เพื่อนำไปสร้างมโนคติใหม่ ไม่ใช่ความเข้าใจในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ครู ผู้สังเกต หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนมีพื้นฐานเหล่านี้เพื่อสร้างมโนคติใหม่ สำหรับการสร้างมโนคติเกี่ยวกับเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการสร้างมโนคติในเรื่องนี้ คือ ความหมายของสมการ ประเภทของสมการ การเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ และ ความหมายของตัวแปร

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ครูจัดการเรียนรู้โดยเริ่มทบทวนความหมายของสมการ และจากการที่นักเรียนคนที่ 1 ทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้น ข้อ 2 และการสัมภาษณ์ของผู้วิจัย พบว่านักเรียนคนที่ 1 มีความรู้พื้นฐานเรื่องความหมายของสมการ กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า ประโยคสัญลักษณ์ในแต่ละข้อว่าเป็นสมการหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ ดังเช่นภาพที่ 32 และจากการสัมภาษณ์ นักเรียนได้อธิบายความหมายของสมการเพิ่มเติมจากที่เขียนในแบบทดสอบข้อ 4 ว่า สมการคือประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมายเท่ากับ

$$5 \times 15 \neq 45$$

ไม่ใช่ เพราะ ไม่ใช่ $9 \times 5 =$

$$4 + 5 = 9$$

ใช่

$$9 + 8$$

ไม่ใช่ เพราะ ไม่ใช่ $7 \times 5 =$

$$x + 3 < 10$$

ไม่ใช่ ใช่ เพราะ ไม่ใช่ $7 \times 5 =$

ภาพที่ 32 การทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 1 เรื่องความหมายของสมการ

นักเรียนได้แสดงให้เห็นว่า มีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับประเภทของสมการ จากการตอบโต้กับครู ในขณะที่ครูทบทวนประเภทของสมการ ดังนี้

ครู: สาม เท่ากับ สี่ เป็นจริงไหม

น้ำ: ไม่จริง เป็นเท็จ

ครู: x บวก สอง เท่ากับ ห้า เป็นจริงไหม

น้ำ: ไม่จริง

ครู: ไม่รู้ ไม่แน่ เพราะไม่รู้ค่า x คืออะไร

ครู: สี่ บวก สาม เท่ากับแปด เป็นจริงไหม

น้ำ: เป็นเท็จ

ครู: สอง เท่ากับ หนึ่ง บวก หนึ่ง เป็นจริงไหม

น้ำ: เป็นจริง

จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถได้ตอบครูเกี่ยวกับประเภทของสมการ ถึงแม้ว่าสมการที่มีตัวแปรนักเรียนยังไม่สามารถตอบได้ตามที่ครูเฉลย และนักเรียนได้เขียนสรุปประเภทของสมการว่ามี 2 ประเภท คือ สมการที่เป็นจริง และสมการที่เป็นเท็จ ในขณะที่ครูอธิบายสรุปว่าประเภทของสมการมี 2 ประเภท และจากการตอบแบบทดสอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จพร้อมทั้งให้เหตุผล ดังตัวอย่างตามภาพที่ 33

$$(1) 9 \times 7 = 36$$

เป็นสมการที่เป็นเท็จ เพราะ $9 \times 7 = 63$

$$(2) 4 + 3 = 8 - 1$$

เป็นสมการที่เป็นจริง เพราะ $4 + 3 = 7$ และ $8 - 1 = 7$

$$(3) 5x - 3 = 4$$

เป็นสมการที่เป็นเท็จ เพราะ: x อาจจะทำให้อะไรก็ได้ และอาจไม่เท่ากับ 5 จึงทำให้สมการเป็นเท็จ

$$(4) 3 + a = a + 3$$

เป็นสมการที่เป็นจริง เพราะไม่ว่า a จะเป็นค่าอะไรก็ทำให้สองข้างของสมการเท่ากันเสมอ

ภาพที่ 33 การตอบแบบทดสอบเรื่องสมการที่เป็นจริงและเป็นเท็จ ของนักเรียนคนที่ 1

จากภาพจะเห็นได้ว่าในข้อ (3) เป็นสมการที่มีตัวแปรนักเรียนตอบว่าเป็นสมการที่เป็นเท็จ พร้อมให้เหตุผลว่า x คือ อะไรก็ได้ และนักเรียนได้แสดงให้เห็นว่าค่าของตัวแปร x คืออะไรสมการจึงจะเป็นจริง แต่ครูได้อธิบายว่าสมการที่มีตัวแปร จะไม่รู้ว่าจะป็นจริงหรือเท็จ แต่ครูจัดให้เป็นสมการที่เป็นจริงเนื่องจากจะหาคำตอบของสมการ นั่นคือหาค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง จึงจัดให้สมการที่มีตัวแปรเป็นจริง

นอกจากนี้ นักเรียนคนที่ 1 แสดงพฤติกรรมว่ามีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ดังในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู กิจกรรมที่ 1 ครูได้ยกตัวอย่างการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ นักเรียนคนที่ 1 ได้พูดโต้ตอบในขณะที่ครูถามเกี่ยวกับ ตัวอย่าง “สี่เท่าของจำนวนลบกับสิบห้าได้แปด และ สองเท่าของผลบวกจำนวนหนึ่งกับ 7 ดังนี้

ครู : สี่เท่าของจำนวนหนึ่งลบกับสิบห้าได้แปด

ครู : สี่เท่าของจำนวนหนึ่งคือ

น้ำ : สี่ x

ครู : คือสี่ x ลบกับสิบห้า ได้คือเท่ากับ แปด

(น้ำเขียนสมการ $4x - 15 = 8$ ลงในสมุด)

ครู : สองเท่าของผลบวกของจำนวนจำนวนหนึ่งกับเจ็ด สัญลักษณ์คืออะไร

น้ำ : สองวงเล็บ x บวกเจ็ด (เขียนสัญลักษณ์ $2(x + 7)$ ลงในสมุด)

นอกจากกิจกรรมที่อยู่ในห้องเรียนแล้ว จากการทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ข้อ 1 นักเรียนคนที่ 1 สามารถเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ ดังภาพที่ 34

(1) 6 เท่าของผลบวกของ c กับ 7

$$6(a+7)$$

(2) เจ็ดเท่าของสามน้อยกว่าสี่สิบห้า

$$7(3-25) \quad 7(25-3) \quad 21 < 25 \quad 7(3) < 25$$

(3) แปดหักออกสามเหลือห้า

$$8-3=5$$

(4) จำนวนจำนวนหนึ่งหักออก 3 เหลือ 16

$$x-6=16$$

(5) ครึ่งหนึ่งของผลบวกของจำนวนหนึ่งกับ 4 ไม่เท่ากับ 16

$$\frac{1}{2}(x+4) \neq 16$$

ภาพที่ 34 แสดงการตอบแบบทดสอบเรื่องการเขียนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ของนักเรียนคนที่ 1

จากการสัมภาษณ์การทำแบบฝึกหัดในข้อ (2) ในตอนแรกนักเรียนไม่ได้คิดค่าน้อยกว่าแทนด้วยเครื่องหมายน้อยกว่า แต่แทนด้วยการลบ แต่เมื่อสัมภาษณ์โดยถามนักเรียนว่าเขียนแบบอื่นได้ไหม นักเรียนจึงเขียนต่อไปจนกระทั่งได้ ประโยคสัญลักษณ์ออกมาเป็น $7(3) < 5$

และจากโปรโตคอลข้างต้นจะเห็นได้ว่านักเรียนเข้าใจความหมายของตัวแปร ว่าคือจำนวนจำนวนหนึ่ง และแทนด้วยสัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ ซึ่งในที่นี้คือ x และนอกจากนี้จากแบบทดสอบที่ 1 ข้อ 5 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการในแต่ละข้อเป็นสมการที่มีตัวแปรหรือไม่ และตัวแปรคืออะไร ดังเช่นภาพที่ 35

$$15 - 5 = 12$$

ไม่มี

$$12 \div 4 = 3$$

ไม่มี

$$2a + 3 = 5a - 1$$

มี

$$xy = 1$$

มี

$$2(x-3) = \frac{3}{2}(x+1)$$

มี

$$k - 9 = 28$$

มี

ภาพที่ 35 การตอบแบบทดสอบเกี่ยวกับสมการที่มีตัวแปรและไม่มีตัวแปรของนักเรียนคนที่ 1

4.1.1.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ สำหรับมโนคติเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนนำความหมายของสมการและสมการที่มีตัวแปรมาพิจารณาตัวอย่างสมการที่ครูยกตัวอย่างและบอกได้ว่าตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่างเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ได้

กิจกรรมการเรียนรู้ของครูเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในกิจกรรมที่ 1 ครูไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีเพียงแต่ความหมายของสมการและตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการเท่านั้น แต่ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยอยู่บนพื้นฐานของความหมายของสมการ เช่น ตัวอย่างการทำแบบทดสอบของนักเรียนเกี่ยวกับการพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ เพราะเหตุใด

$$x^2 + y^2 = 25$$

ไม่ใช่ สมการวงกลมเดี่ยว

$$6x - 2x = 2$$

ใช่

$$y^2 = 25$$

ไม่ใช่ สมการวงกลมเดี่ยว

$$3x + 2 - 3x = 1$$

ใช่

$$(x+1)(x-1) = 0$$

ไม่ใช่ สมการวงกลมเดี่ยว

$$x^2 - 1$$

ภาพที่ 36 การทำแบบทดสอบเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่แสดงให้เห็นระดับความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ ของนักเรียนคนที่ 1

จากการสัมภาษณ์ประกอบการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนข้อที่เป็น $x^2 + y^2 = 25$ นักเรียนบอกว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพราะมีหลายตัวแปรและเป็นกำลังสอง และสมการ $y^2 = 1$ นักเรียนตอบว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะไม่ใช่สมการเชิงเส้นและมีกำลังสอง สำหรับสมการ $3x + 2 - 3x = 1$ นักเรียนตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในตอนแรก เมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ถึงเหตุผล นักเรียนได้ให้เหตุผลว่ามีตัวแปรเดียว จากนั้นนักเรียนดูอีกครั้งจึงเห็นว่า ลบกันออกมาได้ศูนย์ นักเรียนจึงตอบผู้วิจัยอีกครั้งว่า “อย่างนี้ไม่ใช่ตัวแปรไม่เหลือ ไม่เรียกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว” จะเห็นได้ว่า เมื่อนักเรียนได้ทำแบบทดสอบข้อนี้แล้ว เมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ นักเรียนได้ทบทวนอีกครั้ง และค้นพบข้อผิดพลาดและแก้ไขข้อผิดพลาดนั้นโดยการอธิบายออกมาเป็นคำพูด ซึ่งเป็นพฤติกรรมของนักเรียนในระดับความเข้าใจขั้น การสร้างมโนภาพ ตามลักษณะทฤษฎีของ Pirie และ Kieren การทำให้สมบูรณ์ที่ระดับการสร้างมโนภาพ จะประกอบด้วยทำให้เกิดมโนภาพ และการทบทวนมโนภาพ จะเห็นว่านักเรียนมีการทบทวนและปรับมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวสำหรับสมการ $(x + 1)(x - 1) = 0$ ในตอนแรกนักเรียนตอบว่าใช่ เนื่องจากเห็นเป็นตัวแปรเดียว จึงตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่เมื่อนำทั้งสองวงเล็บคูณกันแล้ว นักเรียนพบว่าไม่ใช่สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพราะเป็นกำลังสอง จึงตอบใหม่ว่าไม่ใช่สมการเชิงเส้น

4.1.1.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คัดย้อนกลับมโนภาพนั้นโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง

ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด ความเข้าใจในระดับนี้นักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับมโนภาพ ดังนี้

จากแบบทดสอบที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ข้อที่เกี่ยวกับความหมายของสมการ นักเรียนคนที่ 1 ได้ตอบความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในแบบทดสอบ และจากการสัมภาษณ์ของผู้วิจัย นักเรียนคนที่ 1 กลับไปมองดูที่แบบทดสอบ ข้อที่ต้องตอบว่าสมการใดที่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอีกครั้ง และได้ตอบว่า “สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่มี 1 ตัวแปร และกำลังหนึ่ง” และพูดต่อว่า “ที่ไม่เหลือตัวแปรไม่เรียกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว” จะเห็นได้ว่านักเรียนเกิดมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว แต่ยังไม่สมบูรณ์จึงย้อนกลับไปมองที่แบบทดสอบอีกครั้ง และคิดเชื่อมโยงกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีอยู่ เป็นไปตามทฤษฎีของ Pirie และ Kieren ที่เรียกว่า “การย้อนกลับ (Folding Back)”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 3 ครูได้ทบทวนเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพิ่มเติม ซึ่งเป็นความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน ซึ่งในตอนแรกครูได้กล่าวถึงสมการในรูปทั่วไปที่เป็นสมการกำลังสองคือ $ax^2 + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนใดๆ และยกตัวอย่างสมการกำลังสองคือ $5x^2 - 7 = 4$ จากนั้นครูเปลี่ยนสมการในรูปทั่วไปเป็น $ax + b = 0$ และตัวอย่างที่เปลี่ยนเป็น $5x - 7 = 4$ เพราะเป็นสมการเชิงเส้น เลขชี้กำลังของตัวแปรเป็น 1 ไม่ใช่ 2 นักเรียนคนที่ 1 ได้พูดว่า “ว่าอยู่ มันกำลังสอง” แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จากสมการในรูปทั่วไปและตัวอย่างของสมการที่ครูแสดง นักเรียนได้กลับไปจัดกระทำกับสิ่งที่ครูอธิบายอีก เพื่อขยายหรือปรับมโนภาพที่มีอยู่ให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

ครู: สมการ $5x - 7 = 4$ a เป็นเท่าไร

น้ำ: 5

ครู: b

น้ำ: -7

ครู: จัดให้อยู่ในรูป $ax + b = 0$ แล้ว b เป็นเท่าไร

น้ำ: -11 เหนอ

ครู: b เป็น -11

(น้ำยิ้มและ เขียนสรุปสมการในรูปทั่วไปลงในสมุด คือ $ax + b = 0$ เมื่อ a, b

เป็นจำนวนใดๆ)

ครู : สมการ $x - 5x + 3 = 8$ แล้ว a คือเท่าไร

น้ำ : a คือ -4

ครู : สมการ $\frac{1}{x} + 3 = 8$ เป็นสมการเชิงเส้นไหม

น้ำ : ไม่เป็น

ครู : เพราะอะไร

น้ำ : กำลังติดลบหรือ

ครู : สมการนี้ไม่เป็นสมการเชิงเส้นเพราะถ้าเขียนใหม่จะได้เป็น $x^{-1} + 3 = 8$ เลขชี้กำลังของตัวแปรติดลบ

ครู : หรือสมการ $x^3 + 5x = 8$ เป็นเชิงเส้นไหม

น้ำ : ไม่เป็น

ครู : ไม่เป็นเพราะอะไร ไม่เป็นเพราะเป็นกำลังสาม

(นักเรียนเขียน กำลังติดลบไม่ถือว่าเป็นสมการเชิงเส้น ลงในสมุด)

จากโปรโตคอลแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว แต่เมื่อครูอธิบายเพิ่มเติมนักเรียนได้ขยายมโนภาพที่มีอยู่จากที่นักเรียนคิดกับตัวอย่างสมการ $\frac{1}{x} + 3 = 8$ ว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ นักเรียนตอบว่าไม่ แสดงให้เห็นว่านักเรียนขยายแนวคิดของเขาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.1.1.4 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ

ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ นักเรียนมีมโนภาพบางมโนภาพอยู่ในจิตใจแล้ว นักเรียนจะมองไปที่มโนภาพเหล่านั้นและเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพเหล่านั้นเพื่อสร้างคุณสมบัติเฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน สำหรับนักเรียนคนที่ 1 นักเรียนเชื่อมโยงมโนภาพที่มีอยู่คือสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือสมการที่มีตัวแปรเดียวและเลขชี้กำลังเป็น 1 กับ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรมากกว่า 1 และสมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรติดลบ เห็นได้จากที่นักเรียนเขียนสรุปในสมุดว่า “กำลังติดลบไม่ถือว่าเป็นสามการเชิงเส้นตัวแปรเดียว” แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับ การสังเกตคุณสมบัติ นอกจากนี้นักเรียนสังเกตเห็นว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเป็นจริงหรือเท็จพร้อมทั้งอธิบายเหตุผลได้ เช่น

$$(3) 5x - 3 = 4$$

..... ไปในสมการที่เป็นเชิงเส้น เพราะ: x อาจจะถูกแก้ได้ หรือ อาจไม่แก้ก็ได้ ใช้: ทำให้อสมการเป็นเชิงเส้น

$$(4) 3 + a = a + 3$$

..... ไปในสมการที่เป็นจริง เพราะ: a จะเป็นอะไรก็ได้ ใช้: ทำให้อสมการเป็นเชิงเส้น

ภาพที่ 37 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสังเกตเห็นคุณสมบัติของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 1

จากภาพที่ 37 นักเรียนสังเกตเห็นว่าสมการที่มีตัวแปรเป็นสมการที่เป็นเท็จถ้า x ไม่ใช่ตัวที่เป็นคำตอบของสมการ แสดงให้เห็นว่านักเรียนเชื่อมโยงไปยังมโนภาพที่มีอยู่เกี่ยวกับคำตอบของสมการ

4.1.1.5 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติสำหรับนักเรียนคนที่ 1 นักเรียนสามารถบอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้อย่างชัดเจน และสามารถเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปได้ ซึ่งเห็นจากการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับรูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ $ax + b = 0$ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า a, b คือจำนวนใดๆ และ x เป็นตัวแปร และเขียนสมการในรูปแบบ $ax + b = 0$ ได้ เช่น เขียนสมการ $5x - 7 = 4$ เขียนเป็น $5x - 11 = 0$ และบอกได้ว่าเมื่อเทียบกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปแบบทั่วไปแล้ว ค่า a และ b คืออะไร แสดงให้เห็นว่านักเรียนคนที่ 1 มีความเข้าใจอยู่ในระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

4.1.2 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 2 (ปิง)

4.1.2.1 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐาน

ความเข้าใจระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีอยู่เพื่อนำไปสร้างมโนคติใหม่ ไม่ใช่ความเข้าใจในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ครู ผู้สังเกต หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนมีพื้นฐานเหล่านี้เพื่อสร้างมโนคติใหม่ สำหรับการสร้างมโนคติเกี่ยวกับเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการสร้างมโนคติในเรื่องนี้ คือ ความหมายของสมการ ประเภทของสมการ การเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ และ ความหมายของตัวแปร

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ครูจัดการเรียนรู้โดยเริ่มทบทวนความหมายของสมการ และจากการที่นักเรียนคนที่ 1 ทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้น ข้อ 2 และการสัมภาษณ์ของผู้วิจัย พบว่านักเรียนคนที่ 1 มีความรู้พื้นฐานเรื่องความหมายของสมการ กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า ประโยคสัญลักษณ์ในแต่ละข้อว่าเป็นสมการหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ เช่น

$$5 \times 15 \neq 45$$

ไม่เป็น

$$4 + 5 = 9$$

เป็น เพราะมีเครื่องหมาย =

$$9 + 8$$

ไม่เป็น

$$x + 3 < 10$$

ไม่เป็น

ภาพที่ 38 การทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 2 เรื่องความหมายของสมการ

และนักเรียนได้อธิบายความหมายของสมการ โดยตอบในแบบทดสอบว่า สมการคือประโยคสัญลักษณ์ที่มีเครื่องหมาย = ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานที่เป็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันด้วย

นักเรียนได้สรุปประเภทของสมการว่ามี 2 ประเภท ในขณะที่ครูทบทวนเรื่องประเภทของสมการ และจัดกลุ่มของสมการว่าอยู่ในกลุ่มสมการที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จ เช่น นักเรียนเขียนสมการ $x + 2 = 5$ และ $2 + 4 = 6$ อยู่ในประเภทของสมการที่เป็นจริง และจากการตอบแบบทดสอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จพร้อมทั้งให้เหตุผล ดังตัวอย่างตามภาพที่ 39

$$(1) 9 \times 7 = 36$$

เป็นเท็จ เพราะ ทั้ง 2 ข้างของสมการมีค่าไม่เท่ากัน

$$(2) 4 + 3 = 8 - 1$$

เป็นจริง เพราะ ทั้ง 2 ข้างของสมการมีค่าเท่ากัน

$$(3) 5x - 3 = 4$$

เป็นจริง เพราะ พหุคูณค่าของตัวแปร แล้ววกแทนลงในข้อ 1 ทั้ง 2 ข้างของสมการมีค่าเท่ากัน

$$(4) 3 + a = a + 3$$

เป็นจริง เพราะ เลข 3 ของทั้ง 2 ข้างในสมการ มีค่าเท่ากันอยู่แล้ว ถ้า a เข้าไปทั้ง 2 ข้างก็ยังมีค่าเท่ากันเหมือน

ภาพที่ 39 การตอบแบบทดสอบเรื่องสมการที่เป็นจริงและเป็นเท็จ ของนักเรียนคนที่ 2

จากภาพจะเห็นได้ว่าในข้อ (3) เป็นสมการที่มีตัวแปรนักเรียนตอบว่าเป็นสมการที่เป็นจริง และให้เหตุผลอ้างไปถึงการหาคำตอบของสมการ ว่าถ้าหาคำตอบของสมการออกมาได้แล้วจะทำให้สมการเป็นจริง จึงจัดให้สมการที่มีตัวแปรเป็นสมการที่เป็นจริง

นอกจากนี้นักเรียนคนที่ 2 แสดงพฤติกรรมว่ามีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ดังในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู กิจกรรมที่ 1 ครูได้ยกตัวอย่างการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ นักเรียนคนที่ 1 ได้พูดตอบได้ในขณะที่ครูถามเกี่ยวกับ ตัวอย่าง “สี่เท่าของจำนวนลบกับสิบห้าได้แปด และ สองเท่าของผลบวกจำนวนหนึ่งกับ 7 ดังนี้

ครู : สี่เท่าของจำนวนหนึ่งลบกับสิบห้าได้แปด

ครู : สี่เท่าของจำนวนหนึ่งคือ

ปิง : สี่ x ลบกับ สิบห้า ได้แปด

ครู : คือสี่ x ลบกับสิบห้า ได้คือเท่ากับ แปด

(ปิงเขียนสมการ $4x - 15 = 8$ ลงในสมุด)

ครู : สองเท่าของผลบวกของจำนวนจำนวนหนึ่งกับเจ็ด สัญลักษณ์คืออะไร

ครู : มีสอง มีวงเล็บ

ปิง : x บวกเจ็ด (เขียนสัญลักษณ์ $2(x + 7)$ ลงในสมุด)

นอกจากกิจกรรมที่อยู่ในห้องเรียนแล้ว จากการทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ข้อ 1 นักเรียนคนที่ 1 สามารถเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ ดังภาพที่ 40

(1) 6 เท่าของผลบวกของ c กับ 7

$$6(c+7)$$

(2) เจ็ดเท่าของสามน้อยกว่าสี่สิบห้า

$$7 \times 3 < 29$$

(3) แปดหักออกสามเหลือห้า

$$8 - 3 = 5$$

(4) จำนวนจำนวนหนึ่งหักออก 3 เหลือ 16

$$x - 3 = 16$$

(5) ครึ่งหนึ่งของผลบวกของจำนวนหนึ่งกับ 4 ไม่เท่ากับ 6

$$\frac{1}{2}(x+4) \neq 6$$

ภาพที่ 40 แสดงการตอบแบบทดสอบเรื่องการเขียนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์
ของนักเรียนคนที่ 2

และจากโปรโตคอลข้างต้นจะเห็นได้ว่านักเรียนเข้าใจความหมายของตัวแปร ว่าเป็นจำนวนจำนวน
หนึ่ง และแทนด้วยสัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ ซึ่งในที่นี้คือ x และนอกจากนี้จาก
แบบทดสอบที่ 1 ข้อ 5 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการในแต่ละข้อเป็นสมการที่มี
ตัวแปรหรือไม่ และตัวแปรคืออะไร ดังเช่น

$$15 - 5 = 12$$

ไม่มีตัวแปร

$$12 \div 4 = 3$$

ไม่มีตัวแปร

$$2a + 3 = 5a - 1$$

มีตัวแปร คือ a

$$xy = 1$$

มีตัวแปร คือ x, y

$$2(x-3) = \frac{3}{2}(x+1)$$

มีตัวแปร คือ x

$$k - 9 = 28$$

มีตัวแปร คือ k

ภาพที่ 41 การตอบแบบทดสอบเกี่ยวกับสมการที่มีตัวแปรและไม่มีตัวแปรของนักเรียนคนที่ 2

4.1.2.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือ
กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับ
มโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่ง
จุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา

ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ สำหรับมโนคติเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนนำความหมายของสมการและสมการที่มีตัวแปรมาพิจารณาตัวอย่างสมการที่ครูยกตัวอย่างและบอกได้ว่าตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่างเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ได้

กิจกรรมการเรียนรู้ของครูเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในกิจกรรมที่ 1 ครูไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีเพียงแค่ว่าความหมายของสมการและตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการเท่านั้น แต่ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยมีอยู่บนพื้นฐานของความหมายของสมการ เช่นตัวอย่างการทำแบบทดสอบของนักเรียนเกี่ยวกับการพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ เพราะเหตุใด

$$x^2 + y^2 = 25$$

ไม่เป็น เพราะ มี 2 ตัวแปร

$$6x - 2x = 2$$

เป็น เพราะ มี 1 ตัวแปรเดียว

$$y^2 = 25$$

เป็น เพราะ มี 1 ตัวแปรเดียว

$$3x + 2 - 3x = 1$$

เป็น เพราะ มี 1 ตัวแปรเดียว

$$(x + 1)(x - 1) = 0$$

เป็น เพราะ มี 1 ตัวแปรเดียว

ภาพที่ 42 การทำแบบทดสอบเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่แสดงให้เห็นระดับความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ ของนักเรียนคนที่ 2

จากการสัมภาษณ์ประกอบการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนข้อที่เป็น $x^2 + y^2 = 25$ นักเรียนบอกว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพราะมี 2 ตัวแปร และสมการ $y^2 = 1$ นักเรียนให้เหตุผลว่ามีตัวแปรเดียว ถึงแม้ว่าจะเป็นกำลังสองก็อยู่ในรูป y ตัวเดียว แต่มีหลายที่หลายๆ แต่ก็เป็นตัวแปรเดียว สำหรับสมการ $3x + 2 - 3x = 1$ นักเรียนตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และให้เหตุผลว่ามีแค่ x ตัวเดียวแต่มี 2 ที่ จากนั้นผู้วิจัยถามว่าสามารถนำ $3x$ ทั้ง 2



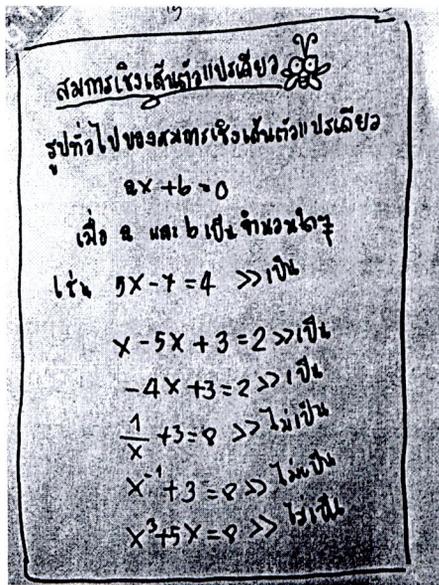
ตัวมารวมกันได้ใหม่ นักเรียน ตอบว่า “ได้ และเป็นศูนย์ นั่นก็ไม่มีตัวแปร” ไม่เรียกว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สำหรับสมการ $(x + 1)(x - 1) = 0$ นักเรียนตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะมีตัวแปรเพียงตัวเดียว จากแบบทดสอบที่นักเรียนได้ทำมา จะเห็นได้ว่า นักเรียนมีมโนภาพของคำว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่มีตัวแปรตัวเดียว ซึ่งเห็นได้จากการตอบแบบทดสอบ ข้อที่เป็นความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่นักเรียนยังไม่มิมโนภาพของคำว่า เชิงเส้น แต่ในขณะที่สัมภาษณ์นักเรียนได้ทบทวนแบบทดสอบอีกครั้งและค้นพบข้อผิดพลาดและแก้ไขข้อผิดพลาดนั้น และอธิบายออกมาเป็นคำพูด และสรุปความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ สมการที่มีตัวแปรเดียว และต้องเหลือตัวแปร เลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นหนึ่ง ซึ่งเป็นพฤติกรรมของนักเรียนในระดับความเข้าใจชั้น การสร้างมโนภาพ ตามลักษณะทฤษฎีของ Pirie และ Kieren การทำให้สมบูรณ์ที่ระดับการสร้างมโนภาพ จะประกอบด้วยทำให้เกิดมโนภาพ และการทบทวนมโนภาพ จะเห็นว่านักเรียนมีการทบทวนและปรับมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.1.2.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อนคิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด ความเข้าใจในระดับนี้นักเรียนคนที่ 2 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับมโนภาพดังนี้

จากแบบทดสอบที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ข้อที่เกี่ยวกับความหมายของสมการ นักเรียนคนที่ 2 ตอบแบบทดสอบว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว หมายถึงสมการที่มีตัวแปรเดียว แต่จากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 2 และการกลับไปดูสมการในแบบทดสอบ นักเรียนคนที่ 2 ได้อธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพิ่มจากที่ตอบในแบบทดสอบ ว่าเป็น “สมการที่มีตัวแปรเดียว และต้องเหลือตัวแปร และเลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นหนึ่ง” จะเห็นได้ว่านักเรียนเกิดมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว แต่ยังไม่สมบูรณ์จึงย้อนกลับไปพิจารณาที่แบบทดสอบอีกครั้ง และคิดเชื่อมโยงกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีอยู่เพื่อปรับมโนภาพให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีของ Pirie และ Kieren ที่เรียกว่า “การย้อนกลับ (Folding Back)”

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 3 ครูได้ทบทวนเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพิ่มเติม ซึ่งเป็นความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน ครูได้กล่าวถึงสมการในรูปทั่วไป $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนใดๆ และยกตัวอย่างสมการกำลังสองคือ $5x - 7 = 4$ นักเรียนคนที่ 2 ฟังที่ครูอธิบายและเขียนสมการในรูปทั่วไป และสมการตามที่ครูยกตัวอย่างลงในสมุด แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจ และได้กลับไปถามเพื่อน จึงเขียนสรุปว่าสมการที่ครูยกตัวอย่างนั้นเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่เป็นดังภาพที่ 43



ภาพที่ 43 แสดงการเขียนที่แสดงถึงการสร้างมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 2

จากการสัมภาษณ์เกี่ยวกับสมการที่นักเรียนเขียนลงไป นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าสมการแต่ละสมการเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่เป็น เพราะเหตุใด เช่น $\frac{1}{x} + 3 = 8$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และได้ให้เหตุผลว่า เพราะเอาขึ้นไปกำลังติดลบหนึ่ง และสมการ $x^3 + 5x = 8$ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพราะเป็นกำลังสาม และนักเรียนอธิบายว่า x^3 รวมกับ $5x$ ไม่ได้เพราะกำลังต่างกัน แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการปรับมโนภาพเพิ่มเติม คือ สมการมีตัวแปรแล้วเลขชี้กำลังของตัวแปรติดลบและเลขชี้กำลังของตัวแปรมากกว่า 1 ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ นักเรียนได้กลับไปจัดกระทำกับสิ่งที่ครูอธิบายเพื่อขยายหรือปรับมโนภาพที่มีอยู่เดิมเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวให้ชัดเจนและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น และจากการสัมภาษณ์เกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไป คือ

$ax + b = 0$ นักเรียนได้อธิบายว่า a คือ a และ b คือ b เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ $5x + 7 = 4$ ซึ่งนักเรียนได้ตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่นักเรียนไม่สามารถทำให้อยู่ในรูปทั่วไปได้

4.1.2.4 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ

ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ นักเรียนมีโมโนภาพบางมโนภาพอยู่ภายในจิตใจแล้ว และนักเรียนจะมองไปที่มโนภาพเหล่านั้นและเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพเหล่านั้นเพื่อสร้างคุณสมบัติเฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน สำหรับนักเรียนคนที่ 2 นักเรียนเชื่อมโยงมโนภาพที่มีอยู่คือสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือสมการที่มีตัวแปรเดียวและเลขชี้กำลังเป็น 1 กับ สมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรมากกว่า 1 และสมการที่มีเลขชี้กำลังของตัวแปรติดลบเห็นได้จากการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับความหมายสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว คือ ประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการ และมีตัวแปรเดียว เลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นหนึ่ง ถ้าเลขชี้กำลังของตัวแปรมากกว่าหนึ่ง หรือติดลบ จะไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวด้วย แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับ การสังเกตคุณสมบัติ นอกจากนี้ นักเรียนสังเกตเห็นว่าสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเป็นจริงหรือเท็จพร้อมทั้งอธิบายเหตุผลได้ เช่น

(3) $5x - 3 = 4$

..... เป็นจริง เพราะ พยายามหาคำตอบของตัวแปร แล้วมาแทนลงในสมการเพื่อ ห้อ 2 ข้างของสมการแล้วเท่ากับ 4

(4) $3 + a = a + 3$

..... เป็นจริง เพราะ เลข 3 ของข้อ 2 ข้างในสมการ มีค่าเท่ากันอยู่แล้ว ถ้า + a เข้าไปข้อ 2 ข้างก็ยังมีค่าเท่ากันนั่นเอง

ภาพที่ 44 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสังเกตเห็นคุณสมบัติของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 2

จากภาพที่ 44 นักเรียนสังเกตเห็นว่าสมการที่มีตัวแปรเป็นสมการที่เป็นจริง ถ้าหาคำตอบของสมการออกมา นั่นคือ ค่าของ x แล้วไปแทนในสมการจะทำให้สมการเป็นจริง แสดงให้เห็นว่านักเรียนเชื่อมโยงไปยังมโนภาพที่มีอยู่เกี่ยวกับคำตอบของสมการและจากที่นักเรียนไม่สามารถเขียนสมการ $5x + 7 = 4$ อยู่ในรูป $ax + b = 0$ ได้ เห็นได้จากที่นักเรียนอธิบายว่า 5 เป็น a x เป็น x b เป็น 7 และนักเรียนสงสัยว่า 0 คืออะไร จากนั้นนักเรียนนึกขึ้นได้ว่า จะเขียน $5x + 7 = 4$ ให้อีกด้านเป็น 0 และสามารถอธิบายได้ว่าต้องนำ 4 ไปลบทั้งสองข้างของสมการ แต่นักเรียนไม่ได้มองเห็นว่าเป็นการทำสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวให้อยู่ในรูปทั่วไป นั่นคือ นักเรียนเพียงแค่สังเกตเห็นการเขียนสมการให้ด้านหนึ่งของสมการเป็น 0 เท่านั้นแต่ไม่ได้เชื่อมโยงว่าคือรูปทั่วไปของสมการ ดังนั้นนักเรียนคนที่ 2 มีความเข้าใจในเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวถึงระดับการสังเกตคุณสมบัติ แต่ยังไม่ถึงความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

4.1.3 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 3 (ปาย)

4.1.3.1 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐาน

ความเข้าใจระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีอยู่เพื่อนำไปสร้างมโนคติใหม่ ไม่ใช่ความเข้าใจในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ครู ผู้สังเกต หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนพื้นฐานเหล่านี้เพื่อสร้างมโนคติใหม่ สำหรับการสร้างมโนคติเกี่ยวกับเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ความรู้พื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการสร้างมโนคติในเรื่องนี้ คือ ความหมายของสมการ ประเภทของสมการ การเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ และความหมายของตัวแปร

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ครูจัดการเรียนรู้โดยเริ่มทบทวนความหมายของสมการ และจากการที่นักเรียนคนที่ 3 ทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้น ข้อ 2 และการสัมภาษณ์ของผู้วิจัย พบว่านักเรียนคนที่ 3 มีความรู้พื้นฐานเรื่องความหมายของสมการ กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกได้ว่า ประโยคสัญลักษณ์ในแต่ละข้อว่าเป็นสมการหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผลได้ เช่น

$$(1) 5 \times 15 \neq 45$$

.....
ไม่ใช่สมการ

$$(2) 4 + 5 = 9$$

.....
เป็นสมการ

$$| 9 + 8$$

.....
ไม่ใช่

$$| x + 3 < 10$$

.....
ไม่ใช่

ภาพที่ 45 การทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 3 เรื่องความหมายของสมการ

จากการสัมภาษณ์ นักเรียนได้อธิบายความหมายของสมการเพิ่มเติมจากที่เขียนในแบบทดสอบถึงเหตุผลที่ตอบว่าเป็นหรือไม่เป็นสมการ คือ ไม่มีเครื่องหมายเท่ากับ และนักเรียนเขียนตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการและไม่เป็นสมการลงในสมุด พร้อมสรุปความหมายของสมการลงในสมุด และจากการการสัมภาษณ์เพิ่มนักเรียนสามารถอธิบายได้ว่าเป็นความหมายของสมการ พร้อมทั้งเขียนวงกลมเน้นด้วยว่าสมการจะต้องมีเครื่องหมายเท่ากับ “=” ดังภาพที่ 46

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว. = วิชาคณิตศาสตร์ ม.๑ (๕).

ข้อ 3 = 4x, ๖ กับ ๘. → x + 2 = 5 → ๖ + 2 = 8 แก้โจทย์ข้อนี้ (๕)

ภาพที่ 46 แสดงการเขียนสรุปความหมายของสมการและตัวอย่างสมการของนักเรียนคนที่ 3

นักเรียนได้แสดงให้เห็นว่า มีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับประเภทของสมการ จากการตอบโต้กับครู ในขณะที่ครูทบทวนประเภทของสมการ ดังนี้

ครู : สาม เท่ากับ สี่ เป็นจริงไหม

ปาย : (ส่ายหน้า)

ครู : x บวก สอง เท่ากับ ห้า เป็นจริงไหม

ครู : ไม่รู้ ไม่แน่ เพราะไม่รู้ว่าจะ x คืออะไร

ปาย : (เขียนเครื่องหมายคำถามไว้ที่สมุด และเขียน x เท่ากับ 3 สมการเป็นจริง)

ครู : สี่ บวก สาม เท่ากับแปด เป็นจริงไหม

ปาย : (เขียนเครื่องหมายกากบาทไว้เหนือสมการ $4 + 3 = 8$)

จะเห็นได้ว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับประเภทของสมการ สำหรับสมการที่มีตัวแปรนักเรียนสามารถหาได้ว่าสมการจะเป็นจริงถ้าตัวแปรนั้นมีค่าเท่ากับเท่าไร และนักเรียนได้เขียนสรุป ประเภทของสมการว่ามี 2 ประเภท คือ สมการที่เป็นจริง และสมการที่เป็นเท็จ ในขณะที่ครูอธิบายสรุปว่าประเภทของสมการมี 2 ประเภท และจากการตอบแบบทดสอบของนักเรียน พบว่า นักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการที่กำหนดให้เป็นจริงหรือเท็จพร้อมทั้งให้เหตุผล ดังตัวอย่างตามภาพที่ 47 ถึงแม้ว่าในข้อ (3) ซึ่งเป็นสมการที่มีตัวแปรนักเรียนตอบว่าเป็นสมการที่เป็นเท็จ พร้อมให้เหตุผลว่า หาค่า x ไม่ได้ แต่ถ้าหาได้ไม่เป็นเพราะผลลัพธ์ไม่ถูกต้อง จากการตอบแบบทดสอบในข้อนี้ นักเรียนได้พยายามหาค่าของ x เพื่อที่จะทำให้ได้ค่า x ออกมาแต่ นักเรียนหาค่า x ออกมาไม่สำเร็จ จึงทำให้ตอบในลักษณะเช่นนี้ สำหรับสมการ $3 + a = a + 3$ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติการสลับที่ด้วย

(1) $9 \times 7 = 36$

เป็นเท็จ เพราะผลคูณของ 9 และ 7 ไม่ลงตัว ผลคูณคือ 63 ไม่ใช่ 36

(2) $4 + 3 = 8 - 1$

เป็นจริง เพราะผลบวกของ 4 และ 3 เท่ากับ 7 เท่ากับ 8 - 1

(3) $5x - 3 = 4$

เป็นเท็จ เพราะเมื่อหาค่า x ได้แล้ว แทนค่ากลับไปฝั่งขวาก็ไม่ลงตัวเพราะผลบวกไม่ลงตัว

(4) $3 + a = a + 3$

เป็นจริง เพราะเท่าไรก็ได้ ใช้คุณสมบัติการเปลี่ยน

ภาพที่ 47 การตอบแบบทดสอบเรื่องสมการที่เป็นจริงและเป็นเท็จ ของนักเรียนคนที่ 3

นอกจากนี้ นักเรียนคนที่ 3 แสดงพฤติกรรมว่ามีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ดังในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู กิจกรรมที่ 1 ครูได้ยกตัวอย่างการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ นักเรียนคนที่ 2 เขียนประโยคสัญลักษณ์จากประโยคภาษา โดยเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ให้ตรงกับคำนั้นๆ ถึงแม้จะมีบางข้อที่นักเรียนยังสงสัยโดยการทำเครื่องหมายดอกจันไว้เพื่อกลับไปทบทวนอีกครั้ง แสดงให้เห็นดังภาพที่ 48

- จำนวนข้อสอบได้ครบ	→ คะแนนครบทุกข้อ.
$1 + 2 = 3$	
- จำนวนข้อสอบได้ครบ	
$5 - 3 = 2$	
- ผู้บริหารตัวสีได้เท่ากับนี้	
$20 \div 4 = 5$	
- จำนวนเงินของเงินได้	นี้
$x + 5 = 90$	
- จำนวนเงินที่เหลือกับเงินได้	
$4x - 15 = 8$	
8 - ข้อที่จบลงด้วยจำนวนเต็ม	
$2(x + 7)$	
8 - ข้อที่จบลงด้วยจำนวนเต็ม	
$(x - 25)$	

ภาพที่ 48 แสดงถึงนักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับการเปลี่ยนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ของนักเรียนคนที่ 3

นอกจากกิจกรรมที่อยู่ในห้องเรียนแล้ว จากการทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ข้อ 1 นักเรียนคนที่ 3 สามารถเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ได้ ดังภาพที่ 49

(1) 6 เท่าของผลบวกของ c กับ 7

$$6 \times (c + 7)$$

(2) เจ็ดเท่าของสามน้อยกว่าสี่สิบห้า

$$7 \times 3 < 35$$

(3) แปดหักออกสามเหลือห้า

$$8 - 3 = 5$$

(4) จำนวนจำนวนหนึ่งหักออก 3 เหลือ 16

$$x - 3 = 16$$

(5) ครึ่งหนึ่งของผลบวกของจำนวนหนึ่งกับ 4 ไม่เท่ากับ 16

$$\frac{1}{2} \times (x + 4) \neq 16$$

ภาพที่ 49 แสดงการตอบแบบทดสอบเรื่องการเขียนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ของนักเรียนคนที่ 3

จากชิ้นงานของนักเรียนจะเห็นได้ว่านักเรียนเข้าใจความหมายของตัวแปร ว่าคือจำนวนจำนวนหนึ่ง และแทนด้วยสัญลักษณ์ที่เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษ ซึ่งในที่นี้คือ x และนอกจากนี้จากแบบทดสอบที่ 1 ข้อ 5 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการในแต่ละข้อเป็นสมการที่มีตัวแปรหรือไม่ และตัวแปรคืออะไร ดังเช่น

$$1) 15 - 5 = 12$$

จริง

$$12 \div 4 = 3$$

ไม่ใช่

$$2) 2a + 3 = 5a - 1$$

ใช่

$$xy = 1$$

ใช่

$$x = 1, y = 1$$

$$3) 2(x - 3) = \frac{3}{2}(x + 1)$$

ใช่

$$n - 9 = 28$$

ใช่

$$n = 37$$

ภาพที่ 50 การตอบแบบทดสอบเกี่ยวกับสมการที่มีตัวแปรและไม่มีตัวแปรของนักเรียนคนที่ 3

4.1.3.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับโมเดลใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับโมเดลเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ สำหรับมโนคติเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนนำความหมายของสมการและสมการที่มีตัวแปรมาพิจารณาตัวอย่างสมการที่ครูยกตัวอย่างและบอกได้ว่าตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่ครูยกตัวอย่างเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ได้

กิจกรรมการเรียนรู้ของครูเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในกิจกรรมที่ 1 ครูไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีเพียงแค่ว่าความหมายของสมการและตัวอย่างของประโยคสัญลักษณ์ที่เป็นสมการเท่านั้น แต่ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนทำแบบทดสอบฉบับที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยมีอยู่บนพื้นฐานของความหมายของสมการ เช่น ตัวอย่างการทำแบบทดสอบของนักเรียนเกี่ยวกับการพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ เพราะเหตุใด ดังภาพที่ 51

$$x^2 + y^2 = 25$$

ไม่ใช่

$$6x - 2x = 2$$

ใช่

$$y^2 = 25$$

ใช่

$$3x + 2 - 3x = 1$$

ใช่

$$(10)(x+1)(x-1) = 0$$

ใช่

x x -x

ภาพที่ 51 การทำแบบทดสอบเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่แสดงให้เห็นระดับความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพของนักเรียนคนที่ 3

จากการสัมภาษณ์ประกอบการทำแบบฝึกหัดของนักเรียนข้อที่เป็น $x^2 + y^2 = 25$ นักเรียนบอกว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพราะมีสองตัวแปร สำหรับสมการ $y^2 = 1$ เพราะมีตัวแปรเดียว แต่เมื่อคูที่สมการ $t = 1$ เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนได้พิจารณาสมการสองสมการนี้โดยใช้เวลาระยะหนึ่ง จึงตอบผู้วิจัยว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมการ $3x + 2 - 3x = 1$ นักเรียนบอกว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะมี x กับ x เป็นตัวเดียวกันเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่เมื่อผู้วิจัยถามนักเรียนว่าสามารถรวมพจน์ $3x$ กับ $-3x$ ได้หรือไม่ นักเรียนตอบว่าได้ ได้เท่ากับศูนย์ ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจะเห็นได้ว่า เมื่อนักเรียนได้ทำแบบทดสอบข้อนี้แล้ว เมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ นักเรียนได้ทบทวนอีกครั้ง และค้นพบข้อผิดพลาดและแก้ไขข้อผิดพลาดนั้น โดยการอธิบายออกมาเป็นคำพูด ซึ่งเป็นพฤติกรรมของนักเรียนในระดับความเข้าใจขั้น การสร้างมโนภาพ ตามลักษณะทฤษฎีของ Pirie และ Kieren การทำให้สมบูรณ์ที่ระดับการสร้างมโนภาพ จะประกอบด้วยทำให้เกิดมโนภาพ และการทบทวนมโนภาพ จะเห็นว่านักเรียนมีการทบทวนและปรับมโนภาพของนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สำหรับสมการ $(x + 1)(x - 1) = 0$ นักเรียนตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและให้เหตุผลว่า เป็น x กับ x แสดงว่านักเรียนไม่สามารถคูณวงเล็บทั้งสองได้ จึงไม่เห็นว่าสมการนี้อยู่ในรูป $x^2 = 1$ จึงตอบว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.1.3.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด ความเข้าใจในระดับนี้นักเรียนคนที่ 3 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับมโนภาพ ดังนี้

จากแบบทดสอบที่ 1 เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ข้อที่เกี่ยวกับความหมายของสมการ นักเรียนคนที่ 3 ได้ตอบความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวว่าเป็น สมการที่มีตัวแปรเดียวในแบบทดสอบ และจากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 3 ของผู้วิจัยเกี่ยวกับแบบทดสอบนักเรียนได้ตอบเพิ่มอีกว่า “เป็นสมการที่ไม่มีเลขยกกำลังสองขึ้น” จะเห็นได้ว่านักเรียนเกิดมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว แต่ยังไม่สมบูรณ์จึงย้อนกลับไปมองที่แบบทดสอบอีกครั้ง และคิดเชื่อมโยงกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่มีอยู่ เป็นไปตามทฤษฎีของ Pirie และ Kieren ที่เรียกว่า “การย้อนกลับ (Folding Back)

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูในกิจกรรมที่ 3 ครูได้ทบทวนเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเพิ่มเติม ซึ่งเป็นความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน พร้อมทั้งเขียนสมการในรูปทั่วไปคือ $ax + b = 0$ และตัวอย่างคือ $5x - 7 = 4$ ซึ่งเป็นตัวอย่างที่ครูใช้อธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการเขียนให้อยู่รูปทั่วไป หลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในกิจกรรมนี้ ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งนักเรียนได้ตอบว่า สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวคือสมการที่มีตัวแปรเดียว และเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

จากการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวคือ $ax + b = 0$ นักเรียนมีความเข้าใจว่า a , b และ x คือ ตัวแปร ถึงแม้ว่านักเรียนจะตอบได้ว่าสมการ $5x - 7 = 4$ เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่นักเรียนไม่สามารถเขียนสมการนี้ให้อยู่ในรูป $ax + b = 0$ ได้ ซึ่งนักเรียนเขียนเป็น $5x - 7 = 0$ หรือเขียนเป็นสมการ $4x - 6 = 0$ แสดงให้เห็นว่าในขณะที่เรียนนักเรียนไม่ได้กลับไปสร้างมโนภาพ หรือปรับมโนภาพเดิมที่มีอยู่เพื่อจะเชื่อมโยงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่นักเรียนมีอยู่กับรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ครูได้อธิบายไป กล่าวคือ นักเรียนไม่มีมโนภาพเกี่ยวกับรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และจากการสัมภาษณ์นักเรียนของผู้วิจัย เกี่ยวกับสมการที่ตัวแปรเป็นตัวส่วน คือ สมการ $\frac{3}{x} + 3 = 8$ นักเรียนบอกว่าไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลว่า ไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะ $\frac{3}{x} + 3 = 8$ เขียนได้เป็น $x^{-3} + 3 = 8$ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนภาพว่า x ถ้าเป็นตัวส่วนจะมีเลขชี้กำลังติดลบและไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวถึงแม้ว่านักเรียนจะมีมโนภาพไม่ถูกต้องเกี่ยวกับเรื่องเลขยกกำลัง

สำหรับนักเรียนคนที่ 3 นักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ว่าเป็นสมการที่มีตัวแปรเดียว และเลขชี้กำลังเป็นหนึ่ง และบอกได้ว่าสมการที่มีเลขชี้กำลังติดลบจะไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่นักเรียนไม่ได้สรุปเชื่อมโยงกันระหว่างมโนภาพที่มีอยู่เกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และไม่สามารถเชื่อมโยงไปยังรูปทั่วไปของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นั่นคือ นักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับการมีมโนภาพ แต่ยังไม่ได้มีความเข้าใจถึงระดับการสังเกตคุณสมบัติและการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

4.2 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.2.1 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนคนที่ 1 (น้ำ)

4.2.1.1 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐาน

ความเข้าใจระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีอยู่เพื่อนำไปสร้างมโนคติใหม่ ไม่ใช่ความเข้าใจในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ครู ผู้สังเกต หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนพื้นฐานเหล่านี้เพื่อสร้างมโนคติใหม่

ความรู้พื้นฐานสำหรับการสร้างมโนคติเกี่ยวกับเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประกอบด้วย ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เรื่องคำตอบของสมการ เรื่องสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ ซึ่งจากการวิเคราะห์เรื่อง คำตอบของสมการนักเรียนคนที่ 1 แสดงให้เห็นว่ามีความรู้พื้นฐานเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สำหรับเรื่องคำตอบของสมการและ สมบัติที่ใช้ในการแก้สมการนักเรียนคนที่ 1 แสดงให้เห็นว่ามีความรู้พื้นฐานเรื่องนี้อย่างนี้

จากการทำแบบทดสอบที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงให้เห็นว่ามีความรู้พื้นฐานเรื่องคำตอบของสมการ ดังภาพที่ 52 นั่นคือ นักเรียนสามารถบอกตัวแปรที่ปรากฏในสมการ ค่าของตัวแปรที่แทนในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริงหรือเท็จ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของสมการ และสามารถตรวจสอบได้ว่าตัวเลขที่กำหนดให้เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ และนักเรียนสามารถบอกความหมายของคำตอบของสมการ ซึ่งในตอนแรกนักเรียนคนที่ 1 ได้ตอบเพียงว่าเป็นคำตอบของสมการ แต่จากการสัมภาษณ์ นักเรียนตอบว่า ค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง

พิจารณาสมการ $3b = 39$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

717

(1) จงบอกตัวแปรของสมการ

b

(2) ถ้าแทน b ด้วย 12 จะได้สมการเป็นจริงหรือเท็จ

เท็จ

(3) ถ้าแทน b ด้วย 13 จะได้สมการเป็นจริงหรือเท็จ

จริง

(4) ค่าตอบของสมการคือจำนวนใด

$b = 13$

พิจารณาว่าจำนวนที่อยู่ในวงเล็บ [] เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $b - 3 = 7$ [10]

ใช่

(2) $7 + k = 2$ [0]

ไม่ เพราะ: $7 + 0 = 7$ ~~ไม่ใช่~~

(3) $\frac{b}{-6} = 30$ [180]

ไม่ใช่ เพราะ: $\frac{180}{-6} = -30$

(4) $0.5x + 1 = 2$ [2]

ใช่

ภาพที่ 52 แสดงความรู้พื้นฐานเรื่องคำตอบของสมการของนักเรียนคนที่ 1

ความรู้พื้นฐานเรื่องสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ เรื่องสมบัติการเท่ากัน

จากการทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติการเท่ากัน ดังภาพที่ 53

- 1) ถ้า $x = 5$ แล้ว $x + 6 = \dots 11 \dots$ ใช้สมบัติ...การบวก...
- 2) ถ้า $2x = 32$ แล้ว $2x - 4 = \dots 28 \dots$ ใช้สมบัติ...การลบ...
- 3) ถ้า $x = y$ แล้ว $x + 6 = y + 6$ ใช้สมบัติ...การบวก...
- 4) ถ้า $a = 5$ แล้ว $a \times 7 = 5 \times 7$ ใช้สมบัติ...การคูณ...
- 5) ถ้า $7 + \frac{1}{4} = \frac{1}{y}$ แล้ว $55 = \frac{1}{y} \times 5$ ใช้สมบัติ...การคูณ...

ภาพที่ 53 แสดงการทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 1 เรื่องสมบัติการเท่ากัน

- 1) ถ้า $2x + 1 = 8$ แล้ว $2x = 8 - 1$ ใช้คุณสมบัติการลบ
จริง แทนค่าแล้วค่ามันเท่ากัน ~~ไม่ใช่~~
- 2) ถ้า $3m - 4 = 5$ แล้ว $m = 3$ ใช้คุณสมบัติการบวกเท่านั้น
เท็จ เพราะ: ใช้คุณสมบัติการลบ
- 3) ถ้า $4a = 12$ แล้ว $a = 3$ ใช้คุณสมบัติการหาร
จริง เพราะ: แทนค่าแล้วค่าเท่ากัน

ภาพที่ 54 แสดงการทำแบบทดสอบเรื่องสมบัติการเท่ากัน

เนื่องจากครูได้จัดการเรียนรู้เรื่องสมบัติการเท่ากัน และเชื่อมโยงกับการย้ายข้าง นักเรียนคนที่ 1 สามารถเชื่อมโยงสมบัติการเท่ากันกับการย้ายข้างได้

4.2.1.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการมาสร้างความหมายกับตัวอย่างที่ครูแสดง ซึ่งนักเรียนคนที่ 1 สามารถอธิบายขั้นตอนวิธีและสมบัติที่ใช้ในแต่ละขั้นตอน ในตัวอย่างการแก้สมการที่ครูได้อธิบายไปได้ นั่นคือ นักเรียนคนที่ 1 ได้สร้างมโนภาพ และทบทวนมโนภาพ สามารถอธิบายได้ถึงมโนภาพนั้น

4.2.1.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้นโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด

ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพในเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวนักเรียนสามารถแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ เลือกใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการ และสามารถอธิบายได้ดังตัวอย่างการแก้สมการที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

การแก้สมการอย่างง่าย นักเรียนคนที่ 1 สามารถแก้สมการอย่างง่ายได้ และจากการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถอธิบายขั้นตอนการแก้สมการและสมบัติที่ใช้ได้ เช่น ใช้สมบัติการลบ และบอกว่าเป็นการย้ายข้างจากบวกไปลบ และที่ต้อง กำจัด 0.4 เพราะจะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน ตามที่ครูได้สอนมา ดังภาพที่ 55 และการอธิบายการทำแบบทดสอบในข้อนี้ นักเรียนได้แสดงถึงการนำสมบัติการเท่ากันมาใช้ เช่น “นำ 0.8 มาหารทั้งสองข้างของสมการให้ยุติธรรม ข้างเดียวจะไม่เท่ากัน จะไม่ยุติธรรม” จะเห็นได้ว่านักเรียนมีมโนภาพเรื่องสมบัติการเท่ากัน และการนำมาใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

$$0.8(x+0.5) = 0.25$$

$$0.8x + 0.4 = 0.25$$

$$0.8x = 0.25 - 0.4$$

$$0.8x = -0.15$$

$$x = \frac{-0.15}{0.8}$$

$$x = \frac{15}{80}$$

$$x = -\frac{3}{16}$$

ภาพที่ 55 แสดงการแก้สมการอย่างง่ายของนักเรียนคนที่ 1

ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์ถึงวิธีการอื่นในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
ในข้อนี้ และนักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงวิธีการอีกวิธีอื่นอีกหนึ่งวิธี ดังภาพที่ 56

$$\frac{4}{5}(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{5}x + \frac{2}{5} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{5}x = -\frac{2}{30}$$

$$x = \frac{-2}{20} \times \frac{5}{4}$$

$$x = -\frac{3}{16}$$

ภาพที่ 56 แสดงการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 1 อีกหนึ่งวิธี

สำหรับการแก้สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจงนักเรียนคนที่ 1
สามารถนำสมบัติการแจกแจงมาใช้ในการแก้ปัญหสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ดังภาพที่ 57

$$\frac{3}{7}(2a-3)+4=19$$

$$\frac{3}{7}(2a-3) = 19-4$$

$$\frac{3}{7}(2a-3) = 15$$

$$\frac{6a}{7} - \frac{9}{7} = 15$$

$$\frac{6a}{7} = 15 + \frac{9}{7}$$

$$\frac{6a}{7} = \frac{114}{7}$$

$$a = \frac{114}{7} \times \frac{7}{6}$$

$$a = 19$$

ได้สมบัติการย้ายข้าง

- สมบัติการลบ

- สมบัติการคูณ

คำตอบ

$$a=19$$

$$\frac{3}{7}(2 \cdot 19 - 3) + 4 = 19$$

$$\frac{3}{7}(38 - 3) + 4 = 19$$

$$\frac{3}{7}(35) + 4 = 19$$

$$15 + 4 = 19$$

$$19 = 19$$

#

ทศเลข

$$\frac{15}{3}$$

$$105$$

$$114$$

$$19$$

$$\cdot 6$$

ภาพที่ 57 การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจงของนักเรียนคนที่ 1

นักเรียนสามารถอธิบายการแก้สมการข้อนี้ได้และอธิบายเหตุผลที่ทำในแต่ละบรรทัดได้ รวมไปถึงนักเรียนอธิบายเชื่อมโยงความหมายระหว่างการใช้สมบัติการเท่ากันและการย้ายข้างตามที่นักเรียนใช้ได้ เช่น จากบรรทัด $\frac{3}{7}(2a-3)+4=19$ เป็น $\frac{3}{7}(2a-3)=19-4$ นักเรียนบอกว่าใช้สมบัติการย้ายข้าง จากนั้นผู้วิจัยสัมภาษณ์ต่อว่าถ้าเป็นสมบัติการเท่ากัน

นักเรียนใช้สมบัติอะไร นักเรียนบอกว่าใช้สมบัติการลบโดยการนำไปลบทั้งสองข้างของสมการ นอกจากนี้ นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้สมการในข้อนี้ได้อีกหนึ่งวิธี และได้แสดงวิธีการและขั้นตอนได้ครบถ้วน นั่นคือนักเรียนสามารถแสดงวิธีการตรวจคำตอบได้ด้วย นอกจากนี้ นักเรียนสามารถแสดงวิธีการอื่นในการแก้สมการในข้อนี้ โดยไม่ใช้สมบัติการแจกแจง ใช้เพียงแค่สมบัติการเท่ากันเท่านั้น

สำหรับการแก้สมการที่มีตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ และต้องการรวมตัวแปร นักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงการแก้สมการดังภาพที่ 58

$$-\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 5(x + 3)$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - 1 = 5x + 15$$

$$-\frac{2}{3}x - 5x = 15 - \frac{1}{3} + 1$$

$$-\frac{17}{3}x = \frac{47}{3}$$

$$x = -\frac{47}{17} \times \frac{6}{6}$$

$$x = -\frac{47}{17}$$

- ใช้สมบัติการย้ายไป
- ใช้สมบัติการลบ
- ใช้สมบัติการคูณ

คำตอบ
= $-\frac{47}{17}$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{47}{17} - \frac{1}{2}\right) - 1 = 5\left(\frac{47}{17} + 3\right)$$

$$\frac{37}{17} - 1 = \frac{20}{17}$$

$$\frac{20}{17} = \frac{20}{17} \#$$

หาคำตอบ

$$-\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 5(x + 3)$$

$$-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - 1 = 5x + 15$$

$$-\frac{2}{3}x - 5x = 15 - \frac{1}{3} + 1$$

$$-\frac{17}{3}x = \frac{47}{3}$$

$$x = -\frac{47}{17} \times \frac{6}{6}$$

$$x = -\frac{47}{17}$$

คำตอบ
= $-\frac{47}{17}$

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{47}{17} - \frac{1}{2}\right) - 1 = 5\left(\frac{47}{17} + 3\right)$$

$$\frac{37}{17} - 1 = \frac{20}{17}$$

$$\frac{20}{17} = \frac{20}{17} \#$$

ภาพที่ 58 การแก้สมการที่ต้องการใช้การรวมตัวแปรของนักเรียนคนที่ 1

เมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียน เกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ นักเรียนตอบว่าใช้การย้ายข้าง และอธิบายเชื่อมโยงไปยังสมบัติการเท่ากัน และบอกเหตุผลว่าทำไมถึงเลือกใช้สมบัตินั้นๆ ได้ เช่น ใช้สมบัติการบวก โดยนำ -4 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ เพื่อที่จะกำจัด 4 ถ้าจะใช้สมบัติการลบ ต้องนำ 4 มาลบทั้งสองข้างของสมการ หรือย้ายข้างจาก 4 ไปเป็น -4 เป็นต้น และนักเรียนสามารถอธิบายเหตุผลของการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับตัวแปรว่าจะกำจัดตัวใดก่อนหลัง โดยกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน ซึ่งพิจารณาจากความสัมพันธ์ของตัวเลขกับตัวแปร นอกจากนี้ นักเรียนได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบด้วย

จากการแสดงวิธีการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 1 ที่ประกอบด้วยสมการอย่างง่าย สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจง การรวมตัวแปร นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้สมการได้อย่างถูกต้อง และสามารถใช่วิธีการอื่นในการแก้สมการ พร้อมทั้งเลือกใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการ ได้อย่างถูกต้อง และแสดงลำดับขั้นตอน ได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนคนที่ 1 มีความเข้าใจอยู่ในระดับการมีมโนภาพ

4.2.1.4 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ

ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ นักเรียนมีมโนภาพบางมโนภาพอยู่ภายในจิตใจแล้ว และนักเรียนจะมองไปที่มโนภาพเหล่านั้นและเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพเหล่านั้นเพื่อสร้างคุณสมบัติเฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน

จากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 1 ได้อธิบายวิธีการและขั้นตอนการแก้สมการ และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ถึงสมบัติที่นำมาใช้ในการแก้สมการ นักเรียนคนที่ 1 ได้อธิบายการใช้สมบัติและเหตุผลที่ใช้อย่างชัดเจน และนอกจากนี้ นักเรียนให้เหตุผลในการเลือกแสดงวิธีการแก้สมการวิธีแรก คือ ทำได้ง่ายกว่า ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับขั้นการสังเกตคุณสมบัติ นั่นคือนักเรียนมีมโนภาพหรือแนวคิดเกี่ยวกับการแก้สมการ ทั้งในเรื่องสมบัติที่นำมาใช้ในการแก้สมการ ทั้งสมบัติการเท่ากัน หรือนักเรียนจะใช้คำว่าสมบัติการย้ายข้างตามที่ครูนำเสนอสมบัติการแจกแจง รวมไปถึงขั้นตอนวิธีการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับสมการว่าจะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน เมื่อมีมโนภาพแล้วนักเรียนได้เชื่อมโยงระหว่างมโนภาพและแสดงการแก้สมการออกมาพร้อมทั้งให้เหตุผลการเลือกใช้สมบัติและวิธีการต่างๆ

4.2.1.5 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปในรูปทั่วไปของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ ซึ่งนักเรียนคนที่ 1 แสดงพฤติกรรมที่มีความเข้าใจอยู่ในระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

ความรู้พื้นฐานสำหรับการสร้างโมเดลเกี่ยวกับเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประกอบด้วย ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับเรื่องคำตอบของสมการ ความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ ซึ่งจากการวิเคราะห์เรื่อง คำตอบของสมการนักเรียนคนที่ 2 แสดงให้เห็นว่ามีความรู้พื้นฐานเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สำหรับเรื่องคำตอบของสมการและ สมบัติที่ใช้ในการแก้สมการนักเรียนคนที่ 2 แสดงให้เห็นว่ามีความรู้พื้นฐานเรื่องนี้ดังนี้

จากการทำแบบทดสอบที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 2 ได้แสดงให้เห็นว่ามีความรู้พื้นฐานเรื่องคำตอบของสมการ ดังภาพที่ 60 นั่นคือ นักเรียนสามารถบอกตัวแปรที่ปรากฏในสมการ ค่าของตัวแปรที่แทนในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริงหรือเท็จ และสรุปออกมาเป็นคำตอบของสมการ และสามารถตรวจสอบได้ว่าตัวเลขที่กำหนดให้เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ และนักเรียนสามารถบอกความหมายของคำตอบของสมการ ซึ่งในตอนแรกนักเรียนคนที่ 2 ได้ตอบเพียงว่าเป็นคำตอบของสมการ แต่จากการสัมภาษณ์เพิ่ม นักเรียนตอบว่า ค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง

พิจารณาสมการ $3b - 39$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้ ^{12, 36}

(1) จงบอกตัวแปรของสมการ

b

(2) ถ้าแทน b ด้วย 12 จะได้สมการเป็นจริงหรือเท็จ
เป็นเท็จ

(3) ถ้าแทน b ด้วย 13 จะได้สมการเป็นจริงหรือเท็จ
เป็นจริง

(4) คำตอบของสมการคือจำนวนใด

13

พิจารณาว่าจำนวนที่อยู่ในวงเล็บ [] เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $b - 3 = 7$ [10]

เป็น เพราะแทนค่าแล้วได้สมการที่เป็นจริง

(2) $7 + k = 2$ [0]

ไม่เป็น เพราะแทนค่าแล้วได้สมการที่ไม่เป็นจริง

(3) $\frac{b}{-6} = 30$ [180]

ใช่ เป็น เพราะแทนค่าแล้วได้สมการที่เป็นจริง

(4) $0.5x + 1 = 2$ [2]

เป็น เพราะ แทนค่า แล้วได้สมการที่เป็นจริง

ภาพที่ 60 แสดงความรู้พื้นฐานเรื่องคำตอบของสมการของนักเรียนคนที่ 2

ความรู้พื้นฐานเรื่องสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ เรื่องสมบัติการเท่ากัน จากการทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 2 ได้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติการเท่ากัน ดังภาพที่ 61

- | | | | | |
|--------|-------------|------|---|-----------------------------------|
| 1) ถ้า | $x = 5$ | แล้ว | $x + 6 = \dots 11 \dots$ | ใช้สมบัติ... <u>ทฤษฎีบท</u> |
| 2) ถ้า | $2x = 32$ | แล้ว | $2x - 4 = \dots 28 \dots$ | ใช้สมบัติ... <u>ทฤษฎีบท</u> |
| 3) ถ้า | $x = y$ | แล้ว | $\dots x + 6 \dots = y + 6$ | ใช้สมบัติ... <u>ทฤษฎีบท</u> |
| 4) ถ้า | $a = 5$ | แล้ว | $\dots a \times 7 \dots = 5 \times 7$ | ใช้สมบัติ... <u>ทฤษฎีบท</u> |
| 5) ถ้า | $7 + 4 = y$ | แล้ว | $\dots (7+4) \times 5 \dots = y \times 5$ | ใช้สมบัติ... <u>ทฤษฎีบท</u> |

ภาพที่ 61 แสดงการทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 2 เรื่องสมบัติการเท่ากัน

- ถ้า $2x + 1 = 8$ แล้ว $2x = 8 - 1$ ใช้คุณสมบัติการลบ
.....เป็นจริง เพราะเป็นทฤษฎีบท 1 ไปลบทั้ง 2 ข้าง.....
- ถ้า $3m - 4 = 5$ แล้ว $m = 3$ ใช้คุณสมบัติการบวกเท่านั้น
.....เช่นทั้ง 2 เทอมข้างซ้ายทั้งสมการบวก 4 แล้วลบได้ก็ตรง.....
- ถ้า $4a = 12$ แล้ว $a = 3$ ใช้คุณสมบัติการหาร
.....เป็นจริง เพราะ มีนัยหารทั้ง 4 ไปหารทั้ง 2 ข้าง.....

ภาพที่ 62 แสดงการทำแบบทดสอบเรื่องสมบัติการเท่ากันของนักเรียนคนที่ 2

เนื่องจากครูได้จัดการเรียนรู้เรื่องสมบัติการเท่ากัน และเชื่อมโยงกับการย้ายข้าง นักเรียนคนที่ 2 สามารถเชื่อมโยงกับการย้ายข้างได้

4.2.2.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการมาสร้างความหมายกับตัวอย่างที่ครูแสดง ในชั้นเรียนนักเรียนคนที่ 2 ไม่ได้พูดโต้ตอบกับครู แต่เขียนลงในสมุด จากการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับเรื่องที่เรียนไป นักเรียนคนที่ 2 สามารถอธิบายขั้นตอนวิธีและสมบัติที่ใช้ในแต่ละขั้นตอน ในตัวอย่างการแก้สมการที่ครูอธิบายไป นั่นคือ นักเรียนคนที่ 2 ได้สร้างมโนภาพ และทบทวนมโนภาพ สามารถอธิบายได้ถึงมโนภาพนั้น

4.2.2.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด

ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพในเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนสามารถแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ เลือกใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการ และสามารถอธิบายได้ดังตัวอย่างการแก้สมการที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

การแก้สมการอย่างง่าย นักเรียนคนที่ 2 สามารถแก้สมการอย่างง่ายได้ นักเรียนเขียนสมบัติที่ใช้ลงในแบบทดสอบในแต่ละบรรทัด และจากการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถอธิบายขั้นตอนการแก้สมการและสมบัติที่ใช้ได้ ดังภาพที่ 63 และการอธิบายการทำแบบทดสอบในข้อนี้ นักเรียนได้แสดงถึงการนำสมบัติการเท่ากันมาใช้ จะเห็นได้ว่านักเรียนมีมโนภาพเรื่องสมบัติการเท่ากัน และการนำมาใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

2. $0.8(x+0.5) = 0.25$

ใช้ที่ 1 จากโจทย์ $0.8(x+0.5) = 0.25$

เปลี่ยนทศนิยมเป็นเศษส่วนได้ $\frac{8}{10}(x+\frac{5}{10}) = \frac{25}{100}$

$\frac{4}{5}(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$

$\frac{4}{5}(\frac{5}{5})(x+\frac{1}{2}) = \frac{2}{4}(\frac{1}{4}) \rightarrow$ ดวยสมการคูณ

$x+\frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

$x+\frac{1}{2}+(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{10}+(-\frac{1}{2})$

$x = \frac{1-5}{10}$

$x = -\frac{4}{10} = -0.4$

ตรวจสอบคำตอบ แทน $x = -0.4$ ในสมการ $0.8(x+0.5) = 0.25$

จะได้ $0.8(-0.4+0.5) = 0.25$

$0.8(0.1) = 0.25$

$0.25 = 0.25$ เป็นจริง

\therefore คำตอบของสมการคือ -0.4

ทศเลข

-3

15

80

16

75×10

$100 \div 8 = 3.125$

ภาพที่ 63 แสดงการแก้สมการอย่างง่ายของนักเรียนคนที่ 2

ผู้วิจัยได้สัมภาษณ์ถึงวิธีการอื่นที่แก้สมการนี้ นักเรียนคนที่ 2 ได้แสดงวิธีการอื่นอีกวิธีหนึ่งวิธี ดังภาพที่ 64

$0.8(x+0.5) = 0.25$	$10 \times 10 = 100$
$x+0.5 = \frac{0.25}{0.8}$	$- 25$
$x+0.5 = \frac{25}{8}$	$- 0.15$
$x+0.5 = \frac{25}{8} \times \frac{10}{10}$	0.25
$x+0.5 = \frac{3.125}{10}$	0.40
	25
<hr/>	
$0.8(x+0.5) = 0.25$	7.40
$0.8x + 0.4 = 0.25$	0.40
$0.8x = 0.25 - 0.4$	
$0.8x = -0.15$	
$x = \frac{-0.15}{0.8}$	$7 \times .4$
$x = \frac{-2}{16}$	5
	6.40

ภาพที่ 64 แสดงการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 2 อีกหนึ่งวิธี

สำหรับการแก้สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจงนักเรียนคนที่ 2 สามารถนำสมบัติการแจกแจงมาใช้ในการแก้ปัญหสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ดังภาพที่ 65 จะเห็นได้ว่านักเรียนสามารถแก้สมการได้ พร้อมทั้งอธิบายสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ เช่นสมบัติการแจกแจง สมบัติการบวก สมบัติการคูณ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลในการเลือกใช้ได้ และอธิบายขั้นตอนการแก้สมการ ลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับตัวแปรได้ แต่สำหรับการแก้สมการที่อยู่ในรูปเศษส่วน ต้องใช้ความรู้เรื่องเศษส่วน และการใช้สมบัติการแจกแจง นักเรียนแสดงวิธีการแก้สมการได้แต่คำตอบไม่ถูกต้อง เป็นผลมาจากนักเรียนคูณไม่ถูกต้องเมื่อแก้สมการและตรวจคำตอบ ทำให้สมการไม่เป็นจริง แต่ไม่ได้จุดที่ผิดไม่ได้อยู่ที่นักเรียนใช้สมบัติการเท่ากันหรือการย้ายข้างผิด ดังภาพที่ 65

และขั้นตอนการแก้สมการที่ต้องใช้การรวมตัวแปรได้ ซึ่งในตอนแรกนักเรียนทำผิดเนื่องจาก
 คุณผิดในขั้นการใช้สมบัติการแจกแจง แต่การใช้สมบัติการเท่ากันหรือการย้ายข้าง ลำดับการกำจัด
 ตัวเลข ทำให้ถูกต้อง ซึ่งเห็นได้จากการวิธีการแก้สมการที่นักเรียนแสดง เมื่อได้ค่าของตัวแปรออก
 มาแล้ว นักเรียนได้ตรวจคำตอบแล้วไม่ถูกต้อง จึงไปทำใหม่และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์โดยถามว่า
 สามารถทำแบบอื่นได้หรือไม่ นักเรียนได้แสดงวิธีการแก้สมการวิธีอื่น ซึ่งเห็นได้ในภาพที่ 67

$$-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=5(x+3)$$

$$\left(-\frac{2}{3}x+\frac{3}{6}\right)-1=5x+15$$

$$-\frac{2}{3}x+\frac{3}{6}=5x+16$$

$$-5x-\frac{2}{3}x=16-\frac{3}{6}$$

$$-\frac{17}{3}x=\frac{96-3}{6}$$

$$-\frac{17}{3}x=\frac{93}{6}$$

$$x=\frac{93}{6}\times\frac{3}{17}$$

$$x=\frac{93}{34}$$

$$\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{6}\right)-1=5x+15$$

$$-\frac{2}{3}x+\frac{2}{6}=5x+16$$

$$-\frac{2}{3}x-5x=16-\frac{2}{6}$$

$$-\frac{17}{3}x=\frac{94}{3}$$

$$-\frac{17}{3}x=\frac{94}{3}$$

$$x=\frac{94}{3}\times\frac{3}{17}$$

$$x=\frac{94}{17}$$

$$-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)-1=5(x+3)$$

$$\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{6}\right)-1=5x+15$$

$$\left(-\frac{2}{3}x+\frac{2}{6}\right)=5x+16$$

$$\frac{2}{6}-16=5x+\frac{2}{6}x$$

$$\frac{2-96}{6}=\frac{10x+2x}{6}$$

$$-\frac{94}{6}=\frac{12x}{6}$$

$$-\frac{47}{3}=\frac{12x}{6}$$

$$-\frac{47}{3}\times\frac{3}{12}=17x$$

$$-\frac{47}{4} = 17x$$

$$-\frac{47}{17} = x$$

$$-\frac{47}{17} = x$$

ภาพที่ 67 การแก้สมการที่ต้องใช้การรวมตัวแปรของนักเรียนคนที่ 2

ทศเลข

① $\frac{6}{6}x$
 $\frac{6}{9.6}$

$\frac{4}{34}$ $\frac{17}{17}x$

② $\frac{17}{17}x$
 $\frac{3}{34}$

④ $\frac{4}{6}$ $\frac{17}{17}x$ $\frac{3}{8}$
 $\frac{6}{10}$ $\frac{8}{2}$

⑤ $\frac{16}{6}$
 $\frac{9}{6}$

✓

✓

$\frac{16}{6}$
 $\frac{16}{6}x$
 $\frac{9}{6}$

จากการแสดงวิธีการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 2 ที่ประกอบด้วย สมการอย่างง่าย สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจง การรวมตัวแปร นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้สมการได้อย่างถูกต้อง และสามารถใช้วิธีการอื่นในการแก้สมการ พร้อมทั้งเลือกใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการได้อย่างถูกต้อง และแสดงลำดับขั้นตอนการแก้สมการได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนคนที่ 2 มีความเข้าใจอยู่ในระดับการมีมโนภาพ

4.2.2.4 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ

ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ นักเรียนมีมโนภาพบางมโนภาพอยู่ในจิตใจแล้ว และนักเรียนจะมองไปที่มโนภาพเหล่านั้นและเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพเหล่านั้นเพื่อสร้างคุณสมบัติเฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน

จากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 2 ได้อธิบายวิธีการและขั้นตอนการแก้สมการ และเมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์ถึงสมบัติที่นำมาใช้ในการแก้สมการ นักเรียนคนที่ 2 ได้อธิบายการใช้สมบัติและเหตุผลที่ใช้อย่างชัดเจน และนอกจากนี้ นักเรียนให้เหตุผลในการเลือกแสดงวิธีการแก้สมการวิธีแรก คือ ทำได้ง่ายกว่า ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับขั้นการสังเกตคุณสมบัติ นั่นคือนักเรียนมีมโนภาพหรือแนวคิดเกี่ยวกับการแก้สมการ ทั้งในเรื่องสมบัติที่นำมาใช้ในการแก้สมการ ทั้งสมบัติการเท่ากัน หรือนักเรียนจะใช้คำว่าสมบัติการย้ายข้างตามที่ครูนำเสนอ สมบัติการแจกแจง รวมไปถึงขั้นตอนวิธีการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับสมการว่าจะต้องกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน เมื่อมีมโนภาพแล้วนักเรียนได้เชื่อมโยงระหว่างมโนภาพและแสดงการแก้สมการออกมาพร้อมทั้งให้เหตุผลการเลือกใช้สมบัติและวิธีการต่างๆ

4.2.2.5 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปในรูปแบบทั่วไปของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ ซึ่งนักเรียนคนที่ 1 แสดงพฤติกรรมที่มีความเข้าใจอยู่ในระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม ซึ่งเห็นได้จากแผนผังมโนคติที่นักเรียนทำเกี่ยวกับเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการสัมภาษณ์ของผู้วิจัยโดยให้นักเรียนอธิบายแผนผังมโนคติที่นักเรียนเขียน นักเรียนสามารถอธิบายได้อย่างชัดเจน และจากแบบทดสอบที่นักเรียนทำที่สามารถทำได้ทุกข้อ และได้หลากหลายวิธี

คำตอบของสมการ และสามารถตรวจสอบได้ว่าตัวเลขที่กำหนดให้เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ และนักเรียนสามารถบอกความหมายของคำตอบของสมการ ซึ่งในตอนแรกนักเรียนคนที่ 3 ได้ตอบเพียงว่าเป็นคำตอบของสมการ แต่จากการสัมภาษณ์ นักเรียนตอบว่า ค่าของตัวแปรที่ทำให้สมการเป็นจริง

พิจารณาสมการ $3b = 39$ แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

(1) จงบอกตัวแปรของสมการ

..... b

(2) ถ้าแทน b ด้วย 12 จะได้สมการเป็นจริงหรือเท็จ

..... เท็จ

(3) ถ้าแทน b ด้วย 13 จะได้สมการเป็นจริงหรือเท็จ

..... จริง

(4) คำตอบของสมการคือจำนวนใด

..... 13

พิจารณาว่าจำนวนที่อยู่ในวงเล็บ [] เป็นคำตอบของสมการหรือไม่ เพราะเหตุใด

(1) $b - 3 = 7$ [10]

..... ไม่

(2) $7 + k = 2$ [0]

..... ไม่

(3) $\frac{b}{-6} = 30$ [180]

..... ไม่

(4) $0.5x + 1 = 2$ [2]

..... ไม่

ภาพที่ 69 แสดงความรู้พื้นฐานเรื่องคำตอบของสมการของนักเรียนคนที่ 3

ความรู้พื้นฐานเรื่องสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ เรื่องสมบัติการเท่ากัน

จากการทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 3 ได้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความรู้พื้นฐานเกี่ยวกับสมบัติการเท่ากัน ดังภาพที่ 70

1) ถ้า $x = 5$ แล้ว $x + 6 = \dots\dots\dots 11 \dots\dots\dots$ ใช้สมบัติ การบวก

2) ถ้า $2x = 32$ แล้ว $2x - 4 = \dots\dots\dots 28 \dots\dots\dots$ ใช้สมบัติ การลบ

3) ถ้า $x = y$ แล้ว $\dots\dots\dots x + 6 \dots\dots\dots = y + 6 \dots\dots\dots$ ใช้สมบัติ การบวก

4) ถ้า $a = 5$ แล้ว $\dots\dots\dots 3.5 \dots\dots\dots = 5 \times 7 \dots\dots\dots$ ใช้สมบัติ การคูณ

5) ถ้า $7 + 4 = y$ แล้ว $\dots\dots\dots 55 \dots\dots\dots = y \times 5 \dots\dots\dots$ ใช้สมบัติ การคูณ

ภาพที่ 70 แสดงการทำแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 3 เรื่องสมบัติการเท่ากัน

- 1) ถ้า $2x + 1 = 8$ แล้ว $2x = 8 - 1$ ใช้คุณสมบัติการลบ

 2) ถ้า $3m - 4 = 5$ แล้ว $m = 3$ ใช้คุณสมบัติการบวกเท่านั้น

 3) ถ้า $4a = 12$ แล้ว $a = 3$ ใช้คุณสมบัติการหาร

ภาพที่ 71 แสดงการทำแบบทดสอบเรื่องสมบัติการเท่ากันของนักเรียนคนที่ 3

จากภาพที่ 71 แสดงให้เห็นว่า การตอบแบบทดสอบของนักเรียนคนที่ 1 ยังไม่ชัดเจนในเรื่องของเหตุผล แต่จากการสัมภาษณ์โดยถามถึงรูปตาซึ่งตาที่ครูได้อธิบายเรื่องสมบัติการเท่ากัน นักเรียนสามารถอธิบายเรื่องสมบัติการเท่ากันได้ เช่น ถ้าบวกเพิ่มด้านหนึ่ง อีกด้านหนึ่งต้องบวกเพิ่มด้วย นั่นคือ นักเรียนมีความรู้พื้นฐานในเรื่องสมบัติการเท่ากัน เนื่องจากครูได้จัดการเรียนรู้เรื่องสมบัติการเท่ากัน และเชื่อมโยงกับการย้ายข้าง นักเรียนคนที่ 3 ไม่สามารถเชื่อมโยงสมบัติการเท่ากันกับการย้ายข้างได้

4.2.3.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการมาสร้างความหมายกับตัวอย่างที่ครูแสดง ซึ่งนักเรียนคนที่ 3 สามารถอธิบายขั้นตอนวิธีและสมบัติที่ใช้ในแต่ละขั้นตอน ในตัวอย่างการแก้สมการที่ครูได้อธิบายไปได้ ในชั้นเรียนนั้นนักเรียนคนที่ 1 จุดสิ่งที่ครูอธิบาย ที่ครูเขียน แต่ที่ครูพูดนักเรียนไม่จดตาม และนักเรียนคนที่ 3 เข้าใจสิ่งที่จดไปเพียงบางส่วนเท่านั้น และจะใช้วิธีการทบทวนสิ่งที่จดไป และทำความเข้าใจในภายหลัง จากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 3 สามารถอธิบายวิธีการและขั้นตอนการแก้สมการได้ตามที่ครูอธิบายได้ นั่นคือ นักเรียนคนที่ 3 ได้สร้างมโนภาพ และทบทวนมโนภาพ สามารถอธิบายได้ถึงมโนภาพนั้น

4.2.3.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด

ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพในเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนสามารถแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ เลือกใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการ และสามารถอธิบายได้ดังตัวอย่างการแก้สมการที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

การแก้สมการอย่างง่าย นักเรียนคนที่ 3 สามารถแก้สมการอย่างง่ายได้ และจากการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถอธิบายขั้นตอนการแก้สมการและสมบัติที่ใช้ได้ จะเห็นได้ว่านักเรียนมีมโนภาพเรื่องสมบัติการเท่ากัน และการนำมาใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ถึงแม้ว่าในตอนแรกนักเรียนจะแก้สมการได้สำเร็จ แต่ต่อมานักเรียนสามารถแก้สมการได้สำเร็จ การใช้สมบัติ จะเน้นไปที่การย้ายข้าง ดังภาพที่ 72

$$0.8(x+0.5) = 0.25$$

$$(0.8x) + (0.8 \times 0.5) = 0.25$$

$$0.8x + 0.40 = 0.25$$

$$x + 0.5 = 0.25 - 0.4$$

$$x = 0.25 - 0.40$$

$$0.8x + 0.40 = 0.25$$

$$0.8x = 0.25 - 0.40$$

$$0.8x = -0.15$$

$$0.8 \sqrt{0.19}$$

ภาพที่ 72 แสดงการแก้สมการอย่างง่ายของนักเรียนคนที่ 3

สำหรับการแก้สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจงและต้องใช้การรวมตัวแปรอย่างง่าย นักเรียนคนที่ 3 สามารถนำสมบัติการแจกแจงมาใช้ และสามารถรวมตัวแปรเพื่อการแก้ปัญหสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ดังภาพที่ 73 ในตอนแรกนักเรียนยังไม่สามารถใช้สมบัติการแจกแจงได้ถูก แต่เมื่อทำต่อไปไม่ได้นักเรียนใช้วิธีใหม่ และอธิบายสมบัติการแจกแจงได้ เมื่อได้แล้วนักเรียนใช้วิธีการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปรและเป็นไปตามลำดับขั้นตอน คือ กำจัดตัวที่ไกลตัวแปรก่อน และนักเรียนได้อธิบายวิธีการกำจัดคือ ใช้การย้ายข้าง แต่นักเรียนไม่ได้แสดงวิธีตรวจคำตอบ

$$3. 5y + 2(y + 1) = -10$$

$$(5y \times y) + (2y \times 1) = -10 - 2$$

$$5y + 2y \quad 5y + 2$$

$$5y + 2y + 2 \times 1 = -10$$

$$5y + 2y + 2 = -10$$

$$7y + 2 = -10$$

$$7y = -10 - 2$$

$$7y = -12$$

$$y = \frac{-12}{7}$$

ภาพที่ 73 แสดงการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 3 อีกหนึ่งวิธี

สำหรับการแก้สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจงนักเรียนคนที่ 3 สามารถนำสมบัติการแจกแจงมาใช้ในการแก้ปัญหสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ดังภาพที่ 74



2.1 $\frac{3}{7}(2a-3)+4=19$

$$\begin{aligned} \frac{3(2a-3)}{7} + 4 &= 19 \\ 3a - 9 &= 19 - 4 \\ 3a - 9 &= 15 \\ 3a &= 105 - 9 \\ 3a &= 96 \\ a &= \frac{96}{3} \\ a &= 32 \end{aligned}$$

ขอคำตอบ

$$\begin{aligned} \frac{3}{7}(2a-3)+4 &= 19 \\ 3 \times 25 + 4 &= 19 \\ 3 \times 32 &= 19 \end{aligned}$$

ทดเลข

$$\begin{aligned} 3(2a-3) &= 15 \\ 6a - 9 &= 15 \\ 6a &= 15 + 9 \\ 6a &= 24 \\ a &= \frac{24}{6} \\ a &= 4 \end{aligned}$$

ภาพที่ 74 การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจงของนักเรียนคนที่ 3

นักเรียนใช้สมบัติการแจกแจง และอธิบายได้ว่าสมบัตินั้นมีว่าอย่างไร และนักเรียนได้แสดงให้เห็นการย้ายข้างและอธิบายการใช้สมบัติการย้ายข้าง เช่น ย้ายจาก +4 ไปเป็น -4 เปลี่ยนบวกเป็นลบ เพื่อให้เหลือแค่ตัวแปร a ตัวเดียวอยู่ด้านใดด้านหนึ่ง นักเรียนดำเนินการแก้สมการต่อไป จนได้ค่าของตัวแปรออกมา เมื่อนักเรียนตรวจคำตอบแต่คำตอบที่ได้ ออกมาไม่ถูกต้อง จึงทำให้ค่าของตัวแปรที่ได้ไม่ใช่คำตอบของสมการ เมื่อผู้วิจัยสัมภาษณ์นักเรียน คนที่ 3 มองเห็นว่าผิดที่การย้ายข้าง $-\frac{9}{7}$ ย้ายไปอีกด้านจะต้องเป็น $+\frac{9}{7}$

สำหรับการแก้สมการที่มีตัวแปรปรากฏอยู่หลายที่ และต้องใช้การรวมตัวแปร นักเรียนคนที่ 3 ได้แสดงการแก้สมการดังภาพที่ 75 ซึ่งนักเรียนอธิบายสมบัติการแจกแจงในบรรทัดแรกที่ทำได้ แต่ในบรรทัดต่อไปนักเรียนไม่สามารถอธิบายได้ว่าทำอะไร และไม่สามารถแก้สมการที่อยู่ในรูปซับซ้อนได้

$$2.2 \quad -\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) - 1 = 5(x + 3)$$

126

$$\left[-\frac{2x}{3} - \frac{1}{3}\right] - 1 = 5(x + 3)$$

$$-\frac{2x}{3} - \frac{1}{3} = 5(x + 3)$$

$$x = 6(x + 3)$$

$$x = 6 \times 3 = 18$$

$$x = 18$$

$$5(x + 3)$$

$$5x + 15$$

$$5 \times 18 + 15$$

$$2.0 \times 19$$

$$160$$

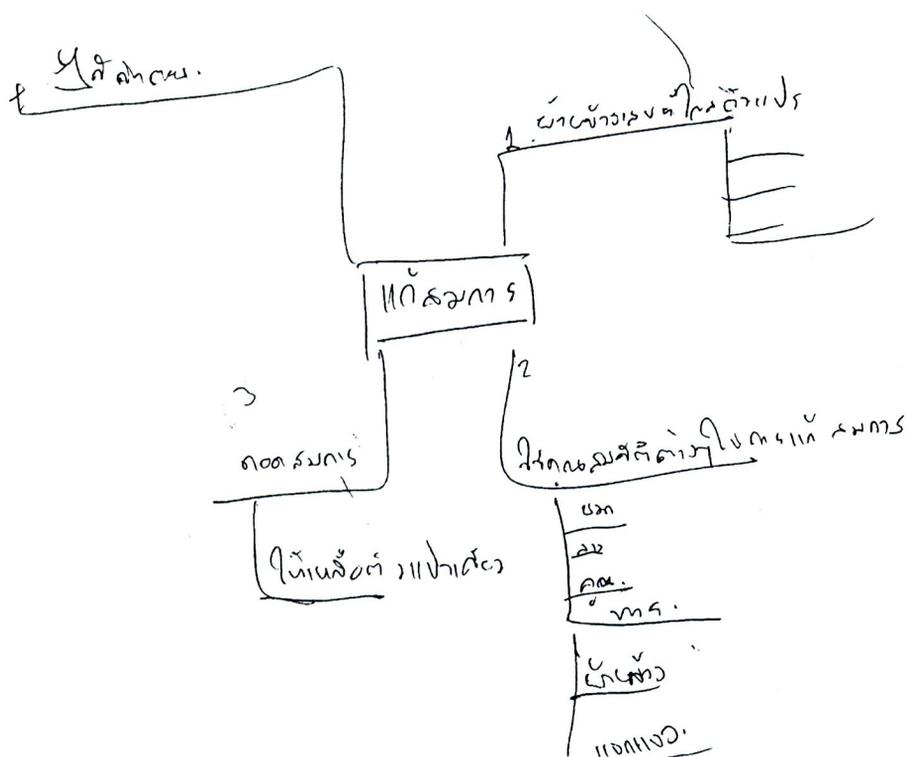
$$200$$

$$360$$

ภาพที่ 75 การแก้สมการที่ต้องใช้การรวมตัวแปรของนักเรียนคนที่ 3

จากการแสดงวิธีการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 3 ที่ประกอบด้วย สมการอย่างง่าย สมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจง การรวมตัวแปร นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้สมการได้อย่างถูกต้องในการแก้สมการอย่างง่าย พร้อมทั้งอธิบายการใช้คุณสมบัติแต่เป็นการใช้ การย้ายข้าง และไม่สามารถเชื่อมโยงไปที่สมบัติการเท่ากันได้ และการแสดงลำดับขั้นตอนใน สมการอย่างง่ายนักเรียนสามารถกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปรได้อย่างถูกต้อง แต่เมื่อสมการ ซับซ้อนขึ้นนักเรียนไม่สามารถลำดับขั้นตอนการกำจัดและใช้คุณสมบัติการเท่ากัน หรือการย้ายข้าง หรือการแจกแจงได้อย่างถูกต้อง แสดงให้เห็นว่านักเรียนคนที่ 3 มีความเข้าใจอยู่ในระดับการมี มโนภาพแต่ไม่สมบูรณ์ ไม่สามารถนำมโนภาพที่มีอยู่มาใช้ในการแก้สมการที่ซับซ้อนได้อย่าง ถูกต้อง

นักเรียนสามารถเขียนแผนผังมโนคติเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังภาพที่ 76 และสามารถอธิบายลำดับขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ แต่ นักเรียนไม่สามารถแก้สมการในรูปผลสำเร็จ และไม่สามารถอธิบายสมบัติที่นำมาใช้ในการแก้สมการในแต่ละขั้นตอนได้อย่างถูกต้องและครบถ้วน แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ แต่มโนภาพนั้นยังไม่สมบูรณ์ การเชื่อมโยงมโนภาพที่มีอยู่เกี่ยวกับเรื่องที่ต้องนำมาใช้ในการแก้สมการยังไม่สมบูรณ์ เช่น การใช้สมบัติการแจกแจง การรวมพจน์ที่มีตัวแปร วิธีการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร ซึ่งนักเรียนใช้คำว่าสมบัติการย้ายข้างตามการนำเสนอของครู พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลที่ต้องกำจัด นั่นคือ นักเรียนคนที่ 3 มีความเข้าใจเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอยู่ในระดับการมีมโนภาพ ไม่ได้พัฒนาระดับความเข้าใจถึงระดับการสังเกตคุณสมบัติและระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม



ภาพที่ 76 แผนผังมโนคติเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 3

4.3 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนมติเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.3.1 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนมติเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนคนที่ 1 (น้ำ)

4.3.1.1 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐาน

ความเข้าใจระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีอยู่เพื่อนำไปสร้างมโนมติใหม่ ไม่ใช่ความเข้าใจในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ครู ผู้สังเกต หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนพื้นฐานเหล่านี้เพื่อสร้างมโนมติใหม่ ความรู้พื้นฐานที่นักเรียนนำมาใช้ในการสร้างมโนมติใหม่เกี่ยวกับเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งประกอบด้วยเรื่องการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และความหมายของตัวแปร

จากการวิเคราะห์มโนมติเรื่อง การเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และความหมายของตัวแปร แสดงให้เห็นว่านักเรียนคนที่ 1 มีมโนภาพเกี่ยวกับเรื่องดังกล่าว แสดงว่านักเรียนคนที่ 1 มีความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐานแล้ว

4.3.1.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนมติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนมติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนำความรู้พื้นฐานมาสร้างความหมายกับตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และขั้นตอนการสร้างสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากเงื่อนไขที่โจทย์ปัญหาคำหนดมา นักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ คือ นักเรียนสามารถอธิบายถึงตัวอย่างที่ครูนำมาใช้ประกอบการจัดการเรียนรู้เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้อย่างชัดเจนในแต่ละขั้นตอน นอกจากนี้นักเรียนได้พูดได้ตอบครูในขณะที่ครูอธิบายการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนคนที่ 1 มีความเข้าใจเกี่ยวกับเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในระดับการสร้างมโนภาพ ดังตัวอย่างโปรโตคอลต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1 หญิงคนหนึ่งมีเงิน 4.45 บาท เป็นเหรียญสิบสตางค์และเหรียญสลึง นับรวมกันได้ทั้งหมด 25 เหรียญ เขามีเหรียญสลึงกี่เหรียญ

ครู : โจทย์อยากรู้อะไร

น้ำ : จำนวนเหรียญ เหรียญสลึง

ครู : โจทย์ให้อะไรมาบ้าง

น้ำ : ให้จำนวนเหรียญ

ครู : ทั้งหมดไหม

น้ำ : ทั้งหมด

ครู : จำนวนเหรียญทั้งหมดกี่เหรียญ

น้ำ : 25

ครู : เหรียญสิบสตางค์มีกี่เหรียญ

น้ำ : $25 - x$

ครู : มีเงินอยู่ 4 บาท 45 สตางค์ จำนวนเงินหาจากอะไร

น้ำ : เอามาบวกกัน

ครู : มีเหรียญ 5 บาท 10 เหรียญ มีเงินกี่บาท

น้ำ : 50 บาท

ครู : เหรียญบาท 7 เหรียญ มีเงินกี่บาท

น้ำ : 7 บาท

ครู : เหรียญบาท 400 เหรียญ มีเงินกี่บาท

น้ำ : 400 บาท

ครู : คิดยังไงครับ

น้ำ : อูม

ครู : เอาอะไรคูณ

น้ำ : เอาเหรียญ

ครู : จำนวนเหรียญไปคูณกับจำนวนเหรียญใช่หรือไม่

น้ำ : (พยักหน้า)

จาก โปรโตคอลจะเห็นว่านักเรียนวิเคราะห์โจทย์ตามที่ครูอธิบายได้ และเห็นความสัมพันธ์ของเงื่อนไขเพื่อที่จะเขียนสมการออกมาได้ และจากการสัมภาษณ์นักเรียนในโจทย์ข้อนี้ นักเรียนสามารถอธิบายถึงขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวข้อนี้ได้ และอธิบายแต่ละขั้นตอนอย่างชัดเจน เช่น การวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนชี้ให้เห็นเงื่อนไขในโจทย์ที่

สามารถนำมาทำให้เป็นสมการได้ นอกจากนี้นักเรียนได้อธิบายว่าถ้าอยากรู้ว่าคำตอบที่หาได้นั้นจริงหรือไม่ ต้องตรวจคำตอบ โดยนำไปแทนค่าในสมการ และจากตัวอย่างโจทย์ข้อที่ 2 (ปัจจุบัน บิดามีอายุเป็น 3 เท่าของบุตร อีก 15 ปีข้างหน้า บิดาจะมีอายุเป็น 2 เท่าของบุตร ปัจจุบันบุตรมีอายุเท่าไร) นักเรียนคนที่ 1 ได้พูดโต้ตอบกับครู ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนสร้างมโนภาพเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังตัวอย่างโปรโตคอลต่อไปนี้

ครู : โจทย์ถามหาอะไร

น้ำ : อายุบุตร

ครู : อายุบุตรตอนไหน

น้ำ : ตอนนี้

ครู : แต่สิ่งที่โจทย์ให้มาตอนไหน

น้ำ : อีก 15 ปีข้างหน้า

ครู : กับอายุ

น้ำ : อายุปัจจุบัน

ครู : ของบุตรไหม

น้ำ : ไม่

ครู : ของใคร

น้ำ : ของบิดา

และจากการสัมภาษณ์โจทย์ข้อนี้ นักเรียนสามารถอธิบาย ตารางการวิเคราะห์โจทย์ได้ว่าที่มาของแต่ละสัญลักษณ์ที่เขียนมาจากเงื่อนไขอะไร โดยอธิบายอ้างอิงกับเงื่อนไขในโจทย์ และชี้ให้เห็นอย่างชัดเจน พร้อมทั้งอธิบายสมการที่ได้ออกมาอย่างชัดเจน เช่นเดียวกันว่ามาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้เงื่อนไขใด นั่นคือ นักเรียนได้สร้างมโนภาพเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.3.1.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด

ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตาม

ขั้นตอนได้และสามารถอธิบายแต่ละขั้นตอนได้ ซึ่งผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องการแก้ โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และนักเรียนคนที่ 1 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงให้เห็นว่า นักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับการมีมโนภาพ ในแต่ละขั้นตอนการแก้โจทย์ ปัญหาดังนี้

โจทย์ข้อที่ 1

ในฟาร์มแห่งนี้เลี้ยงไก่กับหมูนับรวมกันได้ 50 ตัว ถ้านับจำนวน ขาจะได้ขาไก่ มากกว่าขาหมูอยู่ 40 ขา อยากทราบว่า ในฟาร์มแห่งนี้เลี้ยงไก่กับหมูไว้อย่างละกี่ตัว

ในขั้นที่ 1 คือการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์ โจทย์ นักเรียนคนที่ 1 แสดง ให้เห็นว่าได้อ่าน โจทย์และวิเคราะห์ โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนด อะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และ โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 77

สิ่งที่โจทย์ถาม

ในฟาร์มแห่งนี้เลี้ยงไก่กับหมูไว้อย่างละกี่ตัว

สิ่งที่โจทย์กำหนด

ไก่กับหมูรวมกันได้ 50 ตัว และ ไก่มากกว่าหมูจำนวนอยู่ 40 ตัว

ทศเลข

80
40

ภาพที่ 77 แสดงขั้นการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์ โจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 1

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 1 ได้กำหนดตัวแปร และวิเคราะห์ ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มาเพื่อเขียนสมการออกมา ซึ่งจะเห็นได้ว่านักเรียนมีการวิเคราะห์ โจทย์โดยใช้ตาราง จากนั้นสร้างสมการออกมาจากความสัมพันธ์ของเงื่อนไข และได้ แสดงการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังภาพที่ 78

เขียนสมการเพื่อหาคำตอบของสิ่งที่โจทย์ต้องการพร้อมทั้งระบุความหมายของตัวแปร

<p>ตั้งเปรี้ยว x ลิตร</p> <p>น้ำ กล้วย x ลิตร</p> <p>นม 50 - x ลิตร</p> <p>กล้วย $2x$ ลิตร</p> <p>นม $4(50-x)$ ลิตร</p>	<p>อ้วน 4 ลิตร</p> <p>$2x - 4(50-x) = 40$</p>	<p>ทศเลข</p> <p>กล้วย x</p> <p>นม $50-x$</p> <p>กล้วย $2x$</p> <p>นม $4(50-x)$</p> <p><u>$2x - 4(50-x) = 40$</u></p> <p>$2x - 200 + 4x = 40$</p> <p>$6x = 240$</p> <p>$x = 40$</p> <p>กล้วย 40 ลิตร</p> <p>นม $50 - 40 = 10$ ลิตร</p>
--	--	--

ภาพที่ 78 แสดงการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการออกมาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดในโจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 1

ในขั้นตอนสุดท้าย นักเรียนคนที่ 1 ตรวจสอบคำตอบที่หาออกมาได้โดยการกลับไปดูที่โจทย์อีกครั้ง และตรวจสอบคำตอบตามเงื่อนไขของโจทย์ ดังภาพที่ 79

ตรวจสอบคำตอบ

กล้วย 40 ลิตร นม 10 ลิตร

นม 10 ลิตร กล้วย 40 ลิตร $\rightarrow 80 - 40 = 40$

\therefore โจทย์ตรงตามที่โจทย์

40 ลิตร

ภาพที่ 79 แสดงการตรวจสอบคำตอบโจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 1

โจทย์ข้อที่ 2

นิคหน้อยอ่านหนังสือสอบได้ทั้งหมด 259 หน้า โดยใช้เวลา 7 วัน โดยที่ในแต่ละวันนิคหน้อยอ่านหนังสือได้มากกว่าวันที่ผ่านมาวันละ 5 หน้า อยากทราบว่านิคหน้อยอ่านหนังสือในวันที่ 5 ได้กี่หน้า

ในขั้นที่ 1 คือการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 1 แสดงให้เห็นว่าได้อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนด

อะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่าโจทย์ถามหาอะไร และโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง
 ดังภาพที่ 80

$7x + 105 = 259$

$7x + 105 = 259$

$7x + 126 = 259$

สิ่งที่โจทย์ถาม
 ให้นักน้อยอ่านหนังสือในอีก 5 วันถัดไป

สิ่งที่โจทย์กำหนด
 ให้นักน้อยอ่านหนังสือได้ทั้งหมด 257 หน้า โดยใช้เวลา 7 วัน
 โดยที่แต่ละวันนักเรียนน้อยอ่านหนังสือ ได้มากกว่าวันก่อนหน้าคือ 5 หน้า

ทศเลข

259
126

7 | 133

259
105

154

ภาพที่ 80 แสดงการวิเคราะห์โจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 1

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 1 ได้กำหนดตัวแปร และวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มาเพื่อเขียนสมการออกมา จากนั้นสร้างสมการออกมาจากความสัมพันธ์ของเงื่อนไข และได้แสดงการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังภาพที่ 81

เขียนสมการเพื่อหาคำตอบของสิ่งที่โจทย์ต้องการ พร้อมทั้งระบุความหมายของตัวแปร

ให้ x แทนจำนวนหน้า

$\therefore 7$ อย่างไม่ได้อ่าน $x + 4(x+5) + (x+10) + (x+15) + (x+20) + (x+25) + (x+30) = 259$

สมการคือ $7x + 105 = 259$

แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

สมการคือ $7x + 105 = 259$

$7x = 259 - 105$

$7x = 154$

$x = 22$

\therefore ให้นักน้อยอ่าน 22 หน้า

ดังนั้น อีก 5 วันถัดไป $x + 20 = 22 + 20 = 42$ หน้า

ทศเลข

$7x + 105 = 259$

259
105

7 | 154

ภาพที่ 81 แสดงการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการออกมาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด และแก้สมการในโจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 1

ในขั้นตอนสุดท้าย นักเรียนคนที่ 1 ตรวจสอบคำตอบที่หาออกมาได้โดยการกลับไปดูที่โจทย์อีกครั้ง และตรวจคำตอบตามเงื่อนไขของโจทย์ ดังภาพที่ 82

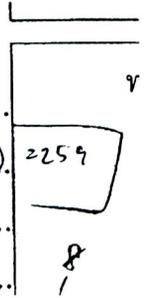
ตรวจคำตอบ

ให้ $x = 22$

$$22 + (22+5) + (22+10) + (22+15) + (22+20) + (22+25) + (22+30) = 259$$

$$2x + 27 + 32 + 37 + 42 + 47 + 52 = 259$$

$$259 = 259$$



ภาพที่ 82 แสดงขั้นตอนการตรวจคำตอบโจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 1

โจทย์ข้อที่ 3

แม่แก่กว่าลูก 26 ปี และอีก 8 ปีข้างหน้า แม่จะมีอายุเป็น 3 เท่าของลูก จงหาว่าอีกกี่ปีลูกจะมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของแม่

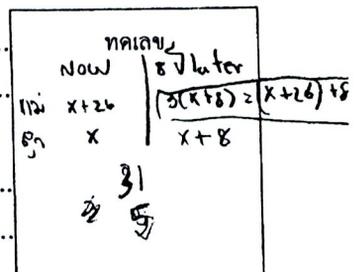
ในขั้นที่ 1 คือการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 1 แสดงให้เห็นว่าได้อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 83

สิ่งที่โจทย์ถาม

อีกกี่ปีลูกจะมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของแม่

สิ่งที่โจทย์กำหนด

แม่แก่กว่าลูก 26 ปี และ อีก 8 ปีข้างหน้า แม่จะมีอายุ เป็น 3 เท่าของลูก



ภาพที่ 83 แสดงขั้นตอนการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ข้อที่ 3 ของนักเรียนคนที่ 1

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 1 ได้กำหนดตัวแปร และวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มาเพื่อเขียนสมการออกมา ซึ่งจะเห็นได้ว่านักเรียนมีการวิเคราะห์โจทย์โดยใช้ตาราง จากนั้นสร้างสมการออกมาจากความสัมพันธ์ของเงื่อนไข และได้แสดงการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และโจทย์ข้อนี้ ต้องสร้างสมการข้อ 2 สมการ นักเรียนคนที่ 1 ได้สร้างสมการขึ้นมา 2 สมการ และหาคำตอบของสมการแรกก่อน จากนั้นจึงนำมาสร้างสมการที่ 2 ตามเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ และนักเรียนแสดงการแก้สมการทั้งสองสมการ ดังภาพที่ 84

เขียนสมการเพื่อหาคำตอบของสิ่งที่โจทย์ต้องการพร้อมทั้งระบุความหมายของตัวแปร

ในชั้นปี 31 ปี x ตอนตอนของนักเรียนก่อนสมการคือ $3(x+8) = (x+26) + 8$

อายุพี่คือ 31 ปี แล้วคิดหาว่าอีกกี่ปี จะครบ 30 $x+5 = \frac{1}{2}(x+31)$

อายุพี่คือ 5 ปี

แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

สมการคือ $x+5 = \frac{1}{2}(x+31)$

$x+5 = \frac{1}{2}x + \frac{31}{2}$

$\frac{1}{2}x = \frac{21}{2}$

$x = 21$

ตั้งพี่ อีก 21 ปี อายุพี่จะเป็นครึ่งหนึ่งของพี่

ทดสอบ

$3x+24 = x+26+8$

$2x = 10$

$x = 5$

31 39

5 13

52

$5+x = \frac{1}{2}(x+31)$

$x+x = \frac{1}{2}x + \frac{31}{2} + 5$

$\frac{1}{2}x = \frac{11}{2}$

$x = 11$

ภาพที่ 84 แสดงการวิเคราะห์โจทย์ การสร้างสมการทั้ง 2 สมการและการแก้สมการของนักเรียนคนที่ 1

ในขั้นตอนสุดท้าย นักเรียนคนที่ 1 ตรวจสอบคำตอบที่หาออกมาได้โดยการกลับไปดูที่โจทย์อีกครั้ง และตรวจสอบคำตอบตามเงื่อนไขของโจทย์ ดังภาพที่ 85

ตรวจสอบคำตอบ

อายุพี่ 31 ปี	} ที่จบล่วงหน้า 26 ปี	ทดสอบ
อายุพี่ 21 ปี		
และตั้งพี่อีก 21 ปี พี่จะเป็นครึ่งหนึ่งของพี่		
อายุพี่ 39 ปี		
อายุพี่ 13 ปี		
และตั้ง 21 ปี พี่จะเป็นครึ่งหนึ่งของพี่		
อายุพี่ 52 ปี		
อายุพี่ 26 ปี		

ภาพที่ 85 แสดงการตรวจสอบคำตอบโจทย์ข้อที่ 3 ของนักเรียนคนที่ 1

จากการทำแบบทดสอบเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนทำตามแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาตามที่ครูได้นำเสนอไป แสดงว่านักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในทุกขั้นตอน นั่นคือ

นักเรียนคนที่ 1 มีความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพในเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

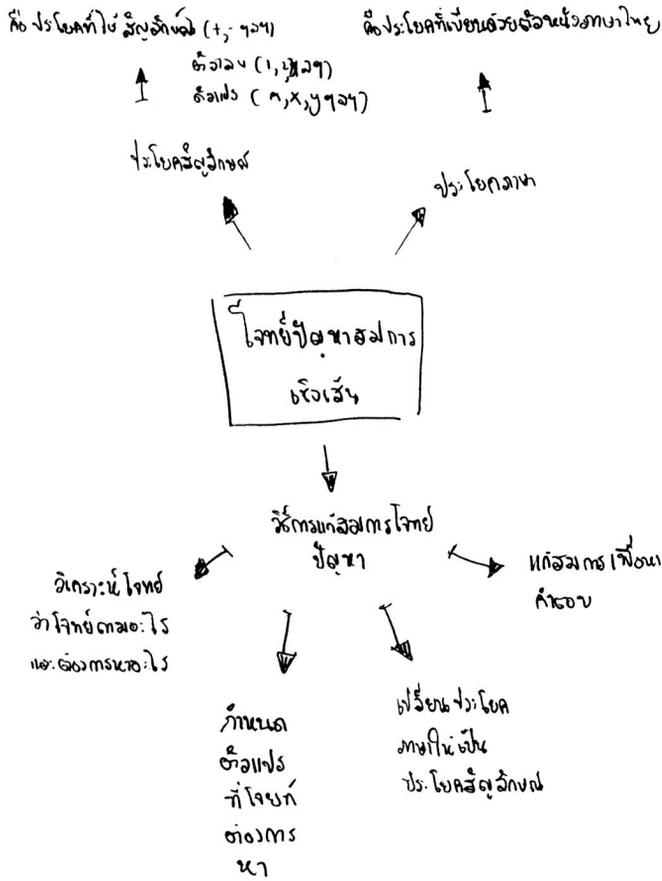
4.3.1.4 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ

ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ นักเรียนมีมโนภาพบางมโนภาพอยู่ในจิตใจแล้ว และนักเรียนจะมองไปที่มโนภาพเหล่านั้นและเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพเหล่านั้นเพื่อสร้างคุณสมบัติเฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน

ความเข้าใจระดับนี้ นักเรียนสามารถสังเกตคุณสมบัติในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวว่าในแต่ละขั้นตอนต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง นั่นคือ มีการเชื่อมโยงระหว่างมโนภาพที่มีอยู่เพื่อนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งจากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 1 พบว่า นักเรียนสามารถบอกได้ว่าในแต่ละขั้นตอนใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง เช่น การเขียนออกมาเป็นสมการ นักเรียนอธิบายว่าต้องเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ โดยวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และต้องเขียนออกมาเป็นสมการเพื่อที่จะหาคำตอบของสมการ

4.3.1.5 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปในรูปทั่วไปของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ ความเข้าใจระดับนี้ นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปเชิงนามธรรมได้เกี่ยวกับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและสมบัติที่นำมาใช้ได้ และนักเรียนคนที่ 1 ได้เขียนแผนผังมโนมติเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และสามารถอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ดังภาพที่ 86



ภาพที่ 86 แสดงแผนผังมโนคติเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 1

4.3.2 การวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในมโนคติเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ของนักเรียนคนที่ 2 (ปิง)

4.3.2.1 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐาน

ความเข้าใจระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐานที่นักเรียนมีอยู่เพื่อนำไปสร้างมโนคติใหม่ ไม่ใช่ความเข้าใจในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ครู ผู้สังเกต หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนพื้นฐานเหล่านี้เพื่อสร้างมโนคติใหม่ ความรู้พื้นฐานที่นักเรียนนำมาใช้ในการสร้างมโนคติใหม่เกี่ยวกับเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งประกอบด้วยเรื่องการเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และความหมายของตัวแปร

จากการวิเคราะห์มโนคติเรื่อง การเขียนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และความหมายของตัวแปร แสดงให้เห็นว่านักเรียน

คนที่ 2 มีมโนภาพเกี่ยวกับเรื่องดังกล่าว แสดงว่านักเรียนคนที่ 2 มีความเข้าใจระดับความรู้พื้นฐานแล้ว

4.3.2.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนำความรู้พื้นฐานมาสร้างความหมายกับตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และขั้นตอนการสร้างสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งนักเรียนคนที่ 2 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ คือ นักเรียนสามารถอธิบายถึงตัวอย่างที่ครูยกได้อย่างชัดเจน และเนื่องจากนักเรียนคนที่ 2 ไม่ค่อยพูดได้ตอบกับครู แต่เน้นไปที่การจดบันทึกลงในสมุดมากกว่า ซึ่งจากการอธิบายตัวอย่าง (ในห้องเรียนหนึ่งในโรงเรียนบ้านศึกษา มีนักเรียนหญิงเป็น $\frac{5}{4}$ เท่าของจำนวนนักเรียนชาย ถ้ามีนักเรียนชายเพิ่มขึ้น 6 คน และนักเรียนหญิงลดลง 5 คน จำนวนนักเรียนชายจะกลับเป็น $\frac{6}{5}$ เท่าของจำนวนนักเรียนหญิงจงหาว่าเดิมมีนักเรียนชาย และนักเรียนหญิงอย่างละกี่คน) นักเรียนได้จดลงในสมุดตามที่ครูได้แสดง ดังภาพที่ 87 และจากการสัมภาษณ์นักเรียนเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ในตัวอย่างนี้นักเรียนสามารถอธิบายได้ เช่น โจทย์ต้องการหาว่ามีนักเรียนชายกับนักเรียนหญิงกี่คน ตัวแปร x แทน นักเรียนชาย และนักเรียนสามารถอธิบายถึงตารางว่า “เดิมมีชาย x คน มีหญิง $\frac{5}{4}$ ของผู้ชาย ครั้งใหม่ต่อมา ผู้ชายเพิ่มมา 6 คน ผู้หญิงลด 5 คน การเพิ่มการลดนี้ นี้ทำให้ผู้ชายมีจำนวน $\frac{6}{5}$ ของผู้หญิง จึงได้สมการ $x+6=\frac{6}{5}\left(\frac{5}{4}x-5\right)$ ” และนักเรียนสามารถอธิบายที่มาของแต่ละพจน์ในสมการได้ และชี้ให้เห็นอย่างชัดเจน และอธิบายสมการที่ได้ออกมาอย่างชัดเจนเช่นเดียวกันว่ามาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้เงื่อนไขใด นั่นคือนักเรียนได้สร้างมโนภาพเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอยู่ในระดับการสร้างมโนภาพ

ชื่อที่	ณ	๙
เดิม	$\frac{5}{2}x$	x
ใหม่	$\frac{9}{2}x-5$	$x+6$

$$\text{สมการ } x+6 = \frac{6}{5} \left(\frac{5}{2}x-5 \right)$$

$$x+6 = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2}x - \frac{6}{5} \cdot 5$$

$$x+6 = \frac{3x}{2} - 6$$

$$6+6 = \frac{3x}{2} - x$$

$$12 = \frac{3x}{2} - x$$

$$24 = x - 2x$$

รวม	เดิมที่นักเรียน	24 คน
	ณ	30 คน

ภาพที่ 87 แสดงสิ่งที่นักเรียนจัดการแก้โจทย์ปัญหาตามครูลงในสมุดของนักเรียนคนที่ 2

4.3.1.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้นโดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด

ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามขั้นตอนได้ และสามารถอธิบายแต่ละขั้นตอนได้ ซึ่งผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และนักเรียนคนที่ 2 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับการมีมโนภาพ ในแต่ละขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาดังนี้

โจทย์ข้อที่ 1

ในฟาร์มแห่งหนึ่งเลี้ยงไก่กับหมูนับรวมกันได้ 50 ตัว ถ้านับจำนวนขาจะได้ขาไก่ มากกว่าขาหมูอยู่ 40 ขา อยากทราบว่า ในฟาร์มแห่งนี้เลี้ยงไก่กับหมูไว้อย่างละกี่ตัว

ในขั้นที่ 1 คือการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 2 แสดงให้เห็นว่าได้อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนด

อะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และ โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง
 ดังภาพที่ 88

สิ่งที่โจทย์ถาม
 ในฟาร์มแห่งนี้มีสิ่งใดบ้างที่ปลูกไว้ข้างละก็แล้ว

สิ่งที่โจทย์กำหนด
 ปลูกทั้งหมดรวมกันได้ 100 ต้น จำนวนที่ปลูกมากกว่าขานมูฟฟี่
 40 ต้น

ทศเลข
$x + y = 100$
$x > y$
$x - y = 40$

ภาพที่ 88 แสดงขั้นตอนการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 2

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 2 ได้กำหนดตัวแปร และวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มาเพื่อเขียนสมการออกมา จากนั้นสร้างสมการออกมาจากความสัมพันธ์ของเงื่อนไข และได้แสดงการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังภาพที่ 89

เขียนสมการเพื่อหาคำตอบของสิ่งที่โจทย์ต้องการพร้อมทั้งระบุความหมายของตัวแปร

ให้ x เป็นจำนวนหมู่มูฟฟี่ y จำนวน 4 ขน ข
 ปลูกได้ 50- x ตัว ปลูกได้ 2(50- x) ข

สมการ = $2(50-x) - 4x = 40$

แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

วิธีทำ $2(50-x) - 4x = 40$
 $(100 - 2x) - 4x = 40$
 $100 - 6x = 40$
 $100 - 40 = 6x$
 $60 = 6x$
 $10 = x$
 $x = 10$

ดังนั้น สุนัข 10 ตัว
 สุนัข 40 ตัว

ภาพที่ 89 แสดงการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการออกมาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดใน
 โจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 2

ในขั้นตอนสุดท้าย นักเรียนคนที่ 2 ตรวจสอบคำตอบที่หาออกมาได้โดยการกลับไปดูที่โจทย์อีกครั้ง และตรวจสอบคำตอบตามเงื่อนไขของโจทย์ ดังภาพที่ 90

ตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ } 2(50-x) - 4x &= 40 \\ \text{แทนค่า } x &= 10 \quad 2(50-10) - 4(10) = 40 \\ &= 2(40) - 40 = 40 \\ &= 80 - 40 = 40 \\ &= 40 = 40 \end{aligned}$$

✓

ภาพที่ 90 แสดงการตรวจคำตอบโจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 2

โจทย์ข้อที่ 2

นิคหน้อยอ่านหนังสือสอบได้ทั้งหมด 259 หน้า โดยใช้เวลา 7 วัน โดยที่ในแต่ละวันนิคหน้อยอ่านหนังสือได้มากกว่าวันที่ผ่านมาวันละ 5 หน้า อยากทราบว่านิคหน้อยอ่านหนังสือในวันที่ 5 ได้กี่หน้า

ในขั้นที่ 1 คือการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 2 แสดงให้เห็นว่าได้อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 91

สิ่งที่โจทย์ถาม

..... นิคหน้อยอ่านหนังสือวันที่ 5 ได้กี่หน้า

สิ่งที่โจทย์กำหนด

..... นิคหน้อยอ่านหนังสือได้ทั้งหมด 259 หน้า ใช้เวลา 7 วัน และ

..... อ่าน

ภาพที่ 91 แสดงการวิเคราะห์โจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 2

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 2 ได้กำหนดตัวแปร ซึ่งในตอนแรกนักเรียนให้ ตัวแปร x แทน จำนวนหน้าที่อ่านได้ในวันที่ 5 แต่ต่อมานักเรียนเปลี่ยนให้ x แทน จำนวนหน้าที่อ่านได้ในวันที่ 1 และวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มาเพื่อเขียนสมการออกมา จากนั้นสร้างสมการออกมาจากความสัมพันธ์ของเงื่อนไข และได้แสดงการแก้

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังภาพที่ 92 แต่การแก้สมการของนักเรียนทำไม่เสร็จ ยังไม่ได้ค่า x ออกมา แต่จากการสัมภาษณ์ นักเรียนสามารถทำต่อได้ถูกต้อง และหาจำนวนหน้าที่ย่านได้ในวันที่ 5 ได้อย่างถูกต้อง

เขียนสมการเพื่อหาคำตอบของสิ่งที่โจทย์ต้องการพร้อมทั้งระบุความหมายของตัวแปร

$$x + (x+5) + (x+10) + (x+15) + (x+20) + (x+25) + (x+30) = 259$$

แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

$$\text{จึงทำ } 7x + 105 = 259$$

$$7x = 259 - 105$$

$$7x = 154$$

เลข	
1	$x = 20$
2	$x = 15$
3	$x = 10$
4	$x = 5$
5	$x =$
6	$x = 5$
7	$x = 10$

$$3x - 35 = 259$$

$$\begin{array}{r} 259 \\ - 35 \\ \hline 224 \\ \div 7 \\ \hline 32 \end{array}$$

ภาพที่ 92 แสดงการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการออกมาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนด และแก้สมการในโจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 2

ในขั้นตอนสุดท้าย นักเรียนคนที่ 2 ไม่ได้แสดงวิธีการตรวจคำตอบที่หาออกมาได้ในแบบทดสอบ แต่จากการสัมภาษณ์นักเรียนสามารถแสดงวิธีการตรวจคำตอบได้

โจทย์ข้อที่ 3

แม่แก่กว่าลูก 26 ปี และอีก 8 ปีข้างหน้า แม่จะมีอายุเป็น 3 เท่าของลูก จงหาว่าอีกกี่ปีลูกจะมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของแม่

ในขั้นที่ 1 คือการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 2 แสดงให้เห็นว่าได้อ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และ โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 93

จากการทำแบบทดสอบเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนทำตามแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาตามที่ครูได้นำเสนอไป แสดงว่านักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในทุกขั้นตอน ถึงแม้ว่านักเรียนคนที่ 2 จะไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาในแบบทดสอบได้สำเร็จทุกข้อ นั่นคือ นักเรียนคนที่ 2 มีความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพในเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.3.1.4 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ

ความเข้าใจระดับการสังเกตคุณสมบัติ นักเรียนมีมโนภาพบางมโนภาพอยู่ในจิตใจแล้ว และนักเรียนจะมองไปที่มโนภาพเหล่านั้นและเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพเหล่านั้นเพื่อสร้างคุณสมบัติเฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถสังเกตคุณสมบัติในแต่ละขั้นตอนของการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวว่าในแต่ละขั้นตอนต้องใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง นั่นคือ มีการเชื่อมโยงระหว่างมโนภาพที่มีอยู่ เพื่อนำมาใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งจากการสัมภาษณ์นักเรียนคนที่ 2 พบว่า นักเรียนสามารถบอกได้ว่าในแต่ละขั้นตอนใช้ความรู้เรื่องใดบ้าง เช่น การเขียนออกมาเป็นสมการ นักเรียนอธิบายว่าต้องเปลี่ยนประโยคภาษาเป็นประโยคสัญลักษณ์ โดยวิเคราะห์จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ และต้องเขียนออกมาเป็นสมการเพื่อที่จะหาคำตอบของสมการ

4.3.1.5 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม

ความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปในรูปทั่วไปของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ ความเข้าใจระดับนี้ นักเรียนสามารถสรุปเป็นข้อสรุปเชิงนามธรรมได้เกี่ยวกับขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและสมบัติที่นำมาใช้ได้ และนักเรียนคนที่ 2 ได้เขียนแผนผังมโนมติเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และสามารถอธิบายขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ดังภาพที่ 95

4.3.3.2 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่ผู้เรียนจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ซึ่งอาจจะทำภายในใจหรือทำทางกายภาพ เพื่อสร้างแนวคิดเกี่ยวกับมโนคติใหม่ สร้างสิ่งที่แตกต่างโดยผ่านการจัดกระทำทางคณิตศาสตร์โดยขึ้นอยู่กับมโนคติเดิม ซึ่งจุดมุ่งหมายของการจัดกระทำในระดับนี้เพื่อทำให้เกิดการสร้างมโนภาพทางคณิตศาสตร์ใหม่ขึ้นมา ซึ่งอาจจะเกิดในรูปแบบของภายในจิตใจ การพูด การเขียน หรือทางกายภาพ

ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนำความรู้พื้นฐานมาสร้างความหมายกับตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และขั้นตอนการสร้างสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งนักเรียนคนที่ 3 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ คือ นักเรียนสามารถอธิบายถึงตัวอย่างที่ครูยกได้ และเนื่องจากนักเรียนคนที่ 3 ไม่พูดโต้ตอบกับครู แต่เน้นไปที่การจดบันทึกลงในสมุดมากกว่า และจากการสัมภาษณ์ นักเรียนคนที่ 3 ว่า การจดคือจดตามครู บางครั้งเข้าใจในสิ่งที่จด แต่บางครั้งไม่ได้เข้าใจสิ่งที่จด แต่ไปทำความเข้าใจตามหลัง โดยการทบทวนเอง แสดงให้เห็นว่านักเรียนได้สร้างมโนภาพบางส่วนในห้องเรียน แต่ไม่ได้สมบูรณ์และสร้างมโนภาพต่อจากการทบทวนเอง นั่นคือนักเรียนมีการทบทวนมโนภาพ ซึ่งนักเรียนสามารถอธิบายตัวอย่างที่ครูอธิบายได้ เช่น ตัวอย่าง ปัจจุบันบิดามีอายุเป็น 5 เท่าของบุตรอีก 10 ปีข้างหน้าบิดาจะมีอายุมากกว่า 3 เท่าของบุตรอยู่ 24 ปี ปัจจุบันบุตรมีอายุเท่าไร นักเรียนเขียนตามที่ครูอธิบายหน้าห้อง ดังภาพที่ 96 เมื่อสัมภาษณ์นักเรียนสามารถอธิบายได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร กำหนดอะไรมาให้บ้าง และตัวแปร x แทน อายุปัจจุบันของบุตร อธิบายว่าจะเขียนออกมาเป็นสมการได้อย่างไร และการวิเคราะห์เงื่อนไขเพื่อเขียนสมการออกมา นั่นคือ นักเรียนได้สร้างมโนภาพเกี่ยวกับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แสดงว่านักเรียนมีความเข้าใจเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอยู่ในระดับการสร้างมโนภาพ

	ปัจจุบัน	10 ปี
บิดา	x	$x + 10$
บุตร	$5x$	$5x + 10$

อายุของบิดา 3 เท่าของบุตรอยู่ 24 ปี

$$5x + 10 - 3(x + 10) = 24$$

$$5x + 10 - 3x - 30 = 24 = 5x - 3x + 10 - 30 = 24$$

$$2x = 44 \quad 5x - 3x = 24 - 10 + 30$$

$$x = 22 \quad 2x = 44$$

ภาพที่ 96 แสดงการจดบันทึกของนักเรียนของนักเรียนคนที่ 3 เกี่ยวกับตัวอย่างการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.3.3.3 การวิเคราะห์ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ

ความเข้าใจในระดับนี้ มโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากระดับการสร้างมโนภาพ สามารถสร้างภาพความคิดในใจ สามารถอธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องจัดกระทำอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้เห็นนักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด

ความเข้าใจระดับการมีมโนภาพ สำหรับการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวตามขั้นตอนได้และสามารถอธิบายแต่ละขั้นตอนได้ ซึ่งผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบเรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และนักเรียนคนที่ 3 ได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อยู่ในระดับการมีมโนภาพ ในแต่ละขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาแต่ยังไม่สมบูรณ์ เนื่องจากนักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจนได้ผลสำเร็จ ดังนี้

โจทย์ข้อที่ 1

ในฟาร์มแห่งหนึ่งเลี้ยงไก่กับหมูนับรวมกันได้ 50 ตัว ถ้านับจำนวนขา จะได้ขาไก่ มากกว่าขาหมูอยู่ 40 ขา อยากทราบว่า ในฟาร์มแห่งนี้เลี้ยงไก่กับหมูไว้อย่างละกี่ตัว

ในขั้นที่ 1 คือการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 3 แสดงให้เห็นว่าได้อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 97

สิ่งที่โจทย์ถาม

.....
 ไรของตงควำ ฟาร์มแห่งนี้ เลี้ยงไก่กับหมู ๕๐ ตัวรวมกัน

สิ่งที่โจทย์กำหนด

.....
 ไก่กับหมู นับรวมกันได้ ๕๐ ตัว แต่ถ้านับขาของไก่ มากกว่าขาหมู ๔๐

 40 ขา.....

ภาพที่ 97 แสดงขั้นการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 3

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 3 ได้กำหนดตัวแปร และวิเคราะห์ความสัมพันธ์ของเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้มาเพื่อเขียนสมการออกมาซึ่งนักเรียนไม่สามารถวิเคราะห์โจทย์ เพื่อจะเขียนความสัมพันธ์ออกมาเป็นสมการได้ ซึ่งสมการที่นักเรียนเขียนมานั้นไม่ถูกต้อง จึงทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ออกมานั้นไม่ถูกต้อง แต่นักเรียนได้แสดงการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังภาพที่ 98

เขียนสมการเพื่อหาค่าตอบของสิ่งที่โจทย์ต้องการพร้อมทั้งระบุความหมายของตัวแปร

$$x + 40 = 200 - 50$$

แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาค่าตอบ

$x + 40 = 50 + 200$	$x + 40 = 250$
$x + 40 = 250$	$x + 40 = 200$
$x + 40$	$x = 200 - 40$
$x = 250 - 40$	$x = 210$
$x = 210$	$x = 210$

\therefore นม = 15 ลิตร ไข่ = 35 ลิตร

๑๐๐% ทดเลข

 $x + 40 = 200$
 $x = 200 - 40$
 $x = 160$

$$\begin{array}{r} 15 \\ 4 \overline{) 160} \\ \underline{40} \\ 20 \end{array}$$

ภาพที่ 98 แสดงการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการออกมาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดในโจทย์ข้อที่ 1 ของนักเรียนคนที่ 3

โจทย์ข้อที่ 2

นิคหน้อยอ่านหนังสือสอบได้ทั้งหมด 259 หน้า โดยใช้เวลา 7 วัน โดยที่ในแต่ละวันนิคหน้อยอ่านหนังสือได้มากกว่าวันที่ผ่านมาวันละ 5 หน้า อยากทราบว่านิคหน้อยอ่านหนังสือในวันที่ 5 ได้กี่หน้า

ในขั้นที่ 1 คือการอ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 3 แสดงให้เห็นว่าได้อ่าน โจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่า โจทย์ถามหาอะไร และ โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 99



สิ่งที่โจทย์ถาม

โจทย์บอกพบว่า นักเรียนคนหนึ่งอ่านหนังสือวันละ ๕ ใต้ ต้นๆ

สิ่งที่โจทย์กำหนด

อ่านหนังสืออาทิตย์ละ ๒๕๕ หน้า ให้อ่าน ๗ วัน แก่ ส่วนอื่น อ่านไว้หมด
ก็อ่านหนังสือวันละ ๕ หน้า

ภาพที่ 99 แสดงการวิเคราะห์โจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 3

ในขั้นต่อไป นักเรียนคนที่ 3 นักเรียนวิเคราะห์โจทย์พร้อมเขียนเงื่อนไข เพื่อที่จะหาความสัมพันธ์เขียนออกมาในรูปสมการ แต่นักเรียนเข้าใจโจทย์ว่า การอ่านหนังสือจำนวนหน้าเฉลี่ยในแต่ละวัน นักเรียนให้เหตุผลว่า เพราะเจ็ดวัน จึงหาเฉลี่ยออกมา โดยไม่สนใจว่าจะเพิ่มวันละห้าหน้า แต่เมื่อมีเงื่อนไขว่าอ่านเพิ่มขึ้นวันละห้าหน้า นักเรียนไม่สามารถทำต่อไปได้ ดังภาพที่ 100

แสดงวิธีการแก้สมการเพื่อหาคำตอบ

.....
25๕ ใ้ ๗ วัน
.....
1๕๗๕ ใ้ ๗๕ ๗ วัน
.....
1๕๗๕ ใ้ ๗๕ ๗ วัน
.....
๕๗๕ ใ้ ๗๕ ๗ วัน

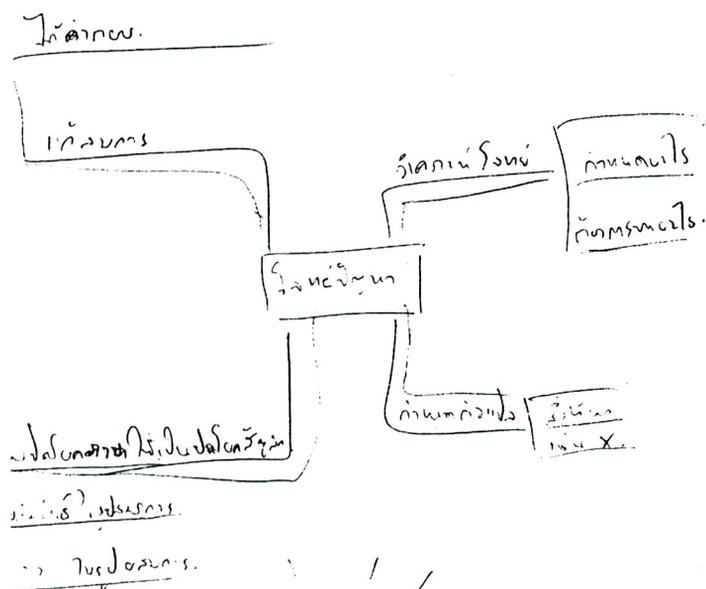
ภาพที่ 100 แสดงการวิเคราะห์โจทย์และเขียนสมการออกมาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดในโจทย์ข้อที่ 2 ของนักเรียนคนที่ 3

โจทย์ข้อที่ 3

แม่แก่กว่าลูก 26 ปี และอีก 8 ปีข้างหน้า แม่จะมีอายุเป็น 3 เท่าของลูก จงหาว่าอีกกี่ปีลูกจะมีอายุเป็นครึ่งหนึ่งของแม่

ในขั้นที่ 1 คือการอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ นักเรียนคนที่ 3 แสดงให้เห็นว่าได้อ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์และตอบคำถามได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร และกำหนดอะไรมาให้บ้าง โดยการตอบในแบบทดสอบว่าโจทย์ถามหาอะไร และ โจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้าง ดังภาพที่ 101

เป็นผลสำเร็จ เช่นเรื่องการวิเคราะห์โจทย์และเขียนเป็นสัญลักษณ์ออกมา ถึงแม้ว่า นักเรียนสามารถสรุปขั้นตอนการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ ซึ่งนักเรียนได้เขียนแผนผังมโนมติดังภาพที่ 103 พร้อมทั้งสามารถอธิบายขั้นตอนต่างๆ ได้ แต่นักเรียนไม่สามารถแก้โจทย์ปัญหาออกมาได้สำเร็จ นั่นคือนักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับการมีมโนภาพ ไม่ได้พัฒนาไปจนถึงระดับการสังเกตคุณสมบัติ และการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม



ภาพที่ 103 แสดงแผนผังมโนมติดีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนคนที่ 3

4.4 สรุปการวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren

ตารางที่ 7 ตารางสรุปการวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

มโนคติ	ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน		
	นักเรียนคนที่ 1	นักเรียนคนที่ 2	นักเรียนคนที่ 3
1. ความหมายของสมการ	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม	ระดับการสังเกตคุณสมบัติ	ระดับการมีมโนภาพ
2. การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม	ระดับการมีมโนภาพ
3. การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม	ระดับการมีมโนภาพ

5. สรุปรูปการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ตารางที่ 8 ตารางสรุปรูปการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การใช้ระบบการนำเสนอ ภายนอกของครู	ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน		
	นักเรียนคนที่ 1	นักเรียนคนที่ 2	นักเรียนคนที่ 3
1. ใช้ภาษาในการพูดและเขียนอธิบาย	ระดับการสร้าง ข้อสรุปเชิง	ระดับการสังเกต คุณสมบัติ นั่นคือ	ระดับการมีมโนภาพ นั่นคือ นักเรียน
2. ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยใช้ตัวอักษรแทนตัวไม่ทราบค่า	นามธรรม นั่นคือ นักเรียนสามารถ บอกความหมายของ สมการเชิงเส้นตัว	นักเรียนสามารถ บอกได้ว่าสมการที่ กำหนดเป็นสมการ เชิงเส้นตัวแปรเดียว	สามารถบอกได้ว่า สมการที่กำหนดเป็น สมการเชิงเส้นตัว แปรเดียวหรือไม่
3. การเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไป	แปรเดียว ยกตัวอย่าง และเขียนสมการเชิง เส้นตัวตัวแปรเดียว	หรือไม่เพราะเหตุใด และสังเกตเห็น คุณสมบัติบาง	เพราะเหตุใด
4. ใช้ตัวอย่างประกอบที่หลากหลาย	ได้	ประการบอกได้ว่า สมการเป็นจริงหรือ เท็จกรณีใด	

ตารางที่ 9 ตารางสรุปการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การใช้ระบบการนำเสนอ ภายนอกของครู	ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน		
	นักเรียนคนที่ 1	นักเรียนคนที่ 2	นักเรียนคนที่ 3
1. ใช้ภาษาโดยการพูดและอธิบายขั้นตอนวิธีการแก้สมการ สมบัติที่ใช้ เช่น สมบัติการแจกแจง การรวมตัวแปร	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นั่นคือ นักเรียนสามารถเลือกใช้สมบัติพร้อมบอกเหตุผลของการใช้และแสดงขั้นตอน	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นั่นคือ นักเรียนสามารถเลือกใช้สมบัติพร้อมบอกเหตุผลของการใช้และแสดงขั้นตอน	ระดับการมีมโนภาพ นั่นคือ นักเรียนสามารถเลือกใช้สมบัติเพื่อแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการได้ และแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการอย่างง่ายได้
2. ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการดำเนินการ	วิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวทั้งสมการอย่างง่ายและซับซ้อนได้ในหลากหลายแนวทางพร้อมทั้งสรุปขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้	วิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวทั้งสมการอย่างง่ายและซับซ้อนได้ในหลากหลายแนวทางพร้อมทั้งสรุปขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้	
3. ใช้สัญลักษณ์ที่เป็นลูกศร โคงแสดงสมบัติการแจกแจง			
4. ใช้ตัวเลขกำกับลำดับการจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับตัวแปร			
5. ใช้ขั้นตอน วิธีการแก้สมการ กำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร			
6. ใช้ตัวอย่างที่หลากหลาย			

ตารางที่ 10 ตารางสรุปการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู	ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน		
	นักเรียนคนที่ 1	นักเรียนคนที่ 2	นักเรียนคนที่ 3
1. ใช้ภาษาโดยการพูดและเขียนอธิบายการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นั่นคือนักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้	ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นั่นคือนักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้	ระดับการมีมโนภาพ นั่นคือนักเรียนสามารถแสดงวิธีการและอธิบายขั้นตอน
2. ใช้ขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการ	โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและอธิบายขั้นตอน	โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและอธิบายขั้นตอน	การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่ายได้
3. ใช้รูปภาพ ตาราง แผนภาพ ช่วยในการวิเคราะห์โจทย์	การแก้สมการ พร้อมทั้งสรุปขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้	การแก้สมการ พร้อมทั้งสรุปขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้	
4. ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสรุปสมการ			
5. ใช้ตัวอย่างสถานการณ์จริงอธิบายเปรียบเทียบ			

6. อภิปรายผล

6.1 อภิปรายผลการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การใช้การนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เน้นการใช้ภาษาโดยการพูดอธิบาย ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สมบัติการเท่ากัน สมบัติการแจกแจง ลำดับขั้นตอนและวิธีการ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ลำดับขั้นตอนและวิธีการ การแก้โจทย์สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว มีความถูกต้อง แต่ในบางครั้งไม่ชัดเจนในการใช้ภาษา เช่น “สามในห้า” ครูใช้คำว่า “ส่วน” แทน “ใน” เช่น 3 ใน 5 เป็น 3 ส่วน 5 และเขียนสัญลักษณ์เป็น $\frac{3}{5}$ และมีการใช้การอธิบายเชิงเปรียบเทียบในเรื่องของการใช้สมบัติการเท่ากัน

โดยครูใช้ภาษาที่เป็นการเปรียบเทียบการใช้สมบัติการเท่ากันกับตาค้าง เช่น “ฝั่งขวาคุณด้วยอะไร ฝั่งซ้ายต้องคุณด้วยตัวเลขนั้นด้วย เพราะเดิมสองข้างของสมการเท่ากันอยู่แล้ว เพิ่มน้ำหนักลงไปฝั่งขวาเท่าไร ฝั่งซ้ายต้องเพิ่มลงไปเท่านั้น”

ครูใช้ตัวเลขเขียนกำกับเพื่ออธิบายลำดับขั้นตอนของการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร โดยยึดหลักการว่า กำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน สำหรับวิธีการครูเน้นไปที่หลักการย้ายข้างและการอธิบายการใช้สมบัติการแจกแจง ครูใช้ลูกศร โค้งเพื่อแสดงให้เห็นว่าต้องคูณทุกตัวในวงเล็บ ในการอธิบายการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ครูใช้รูปภาพ ได้แก่ ใช้รูปตาค้างประกอบ การอธิบายการใช้สมบัติการเท่ากัน และใช้รูปภาพในการวิเคราะห์เพื่อแยกเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ นอกจากนี้ ครูใช้ตารางและแผนภาพในการวิเคราะห์แยกเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดมาให้ เพื่อทำให้เด็กเกิดความเข้าใจในการแก้โจทย์ปัญหา

ครูใช้ตัวอย่างที่ใช้ประกอบการอธิบายที่หลากหลายเพื่อเปรียบเทียบให้นักเรียนเห็นความเหมือนและความแตกต่าง ในเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นอกจากนี้ ตัวอย่างที่ครูใช้ในการอธิบายการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูใช้ตัวอย่างที่หลากหลายโดยเรียงลำดับจากสมการอย่างง่ายไปสมการที่มีความซับซ้อนและมีความยากมากยิ่งขึ้น

ลำดับขั้นตอนการอธิบาย ครูเริ่มอธิบายโดยการทบทวนความรู้พื้นฐานที่ใช้ในเรื่องที่ครูกำลังจะจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และอธิบายขั้นตอนและหลักการที่นำมาใช้ เช่น ในเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูได้อธิบายขั้นตอนและหลักการที่ใช้ และยกตัวอย่างประกอบเพื่ออธิบาย โดยใช้ตัวอย่างที่หลากหลายและเรียงลำดับจากง่ายไปยาก

6.2 อภิปรายผลระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren ในมโนคติเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนคนที่ 1 พัฒนาระดับความเข้าใจถึงระดับ การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมในมโนคติเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และสามารถเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไปได้ และเลือกใช้สมบัติต่างๆ พร้อมทั้งอธิบายเหตุผลการใช้สมบัติเหล่านั้น แสดงขั้นตอนการแก้สมการพร้อมทั้งอธิบาย รวมไปถึงสามารถแสดงวิธีการอื่น และสามารถสรุปขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สรุปขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาพร้อมแสดงขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง นักเรียนคนที่ 2 พัฒนาระดับความเข้าใจ

ถึงระดับการสังเกตคุณสมบัติ ในมโนคติเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ยกตัวอย่างสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว แต่นักเรียนไม่สามารถเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวให้อยู่ในรูปทั่วไปได้ นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจในมโนคติเรื่อง การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ถึงระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นักเรียนคนที่ 3 พัฒนาระดับความเข้าใจถึงระดับ การมีมโนภาพในมโนคติเรื่อง ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว กล่าวคือ นักเรียนไม่สามารถเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไปได้ ถึงแม้ว่านักเรียนสามารถเขียนแผนผังมโนคติการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และสามารถระบุสมบัติที่ใช้ อธิบายขั้นตอนวิธีได้ และสามารถแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่เป็นสมการในลักษณะที่ง่ายไม่ซับซ้อนได้ แต่ไม่สามารถแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้สำเร็จ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ และขั้นตอนวิธี แต่นักเรียนไม่สามารถเชื่อมโยง หรือหาข้อแตกต่างของมโนภาพเหล่านี้เพื่อนำไปใช้แก้สมการต่อไป ซึ่งอาจจะเป็นผลมาจาก มโนภาพที่นักเรียนมีอยู่ไม่สมบูรณ์จึงนำไปใช้ในการแก้สมการจนได้ผลสำเร็จออกมาเป็นคำตอบของสมการไม่ได้

พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนในห้องเรียนในระดับความเข้าใจการสร้างมโนภาพนั้น นักเรียนอาจจะจัดกระทำภายในจิตใจ แต่จากการสัมภาษณ์ นักเรียนกลับไปทบทวนสิ่งที่เขาเขียนลงในสมุดสามารถอธิบายสิ่งที่ได้เรียนรู้ในห้องเรียนได้ ซึ่งหมายความว่า นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่แสดงถึงความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ ตามแนวคิณฑฤษฎีของ Pirie และ Kieren ที่เป็นการทบทวนมโนภาพ

6.3 อภิปรายผลการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูเน้นการใช้ภาษาในการพูดอธิบาย ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และสัญลักษณ์ที่เป็นตัวแปร โดยใช้ตัวอักษรแทนตัวไม่ทราบค่า ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการเขียนความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไป นอกจากนี้ครูใช้ตัวอย่างประกอบการอธิบายที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบให้เห็นข้อเหมือนและข้อแตกต่างในแต่ละสมการ ซึ่งช่วยให้นักเรียนสามารถสังเกตคุณสมบัติ ของสมการและเชื่อมโยงคุณสมบัติได้ และเกิดเป็นข้อสรุปเชิงนามธรรมเกี่ยวกับความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ถึงแม้ว่าในตอนแรกครูจะยังไม่อธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน จึงทำให้นักเรียนไม่สามารถบอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจนได้ แต่เมื่อครูอธิบาย

ความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน นักเรียนสามารถกลับไปปรับมโนภาพที่มีอยู่ให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้นและช่วยให้นักเรียนพัฒนาระดับความเข้าใจไปสู่ระดับที่สูงขึ้นได้

ครูอธิบายสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการ ครูได้ใช้ภาษาโดยการพูดอธิบาย และใช้รูปภาพที่เป็นรูปตาซึ่งอธิบายสมบัติการเท่ากัน และได้มีการสรุปกลุ่มของสมบัติการเท่ากัน จากนั้นครูอธิบายเชื่อมโยงสมบัติการเท่ากันกับหลักการย้ายข้าง ซึ่งนักเรียนสามารถอธิบายเชื่อมโยงหลักการย้ายข้างและสมบัติการเท่ากันได้เป็นบางคน และมีนักเรียน 1 คน ที่ไม่สามารถอธิบายเชื่อมโยงกันได้ และใช้เพียงหลักการย้ายข้างในการแก้สมการ ซึ่งอาจจะเป็นผลมาจากการใช้การอธิบายการแก้สมการของครู นั่นคือ ครูใช้หลักการย้ายข้างในการอธิบายขั้นตอนการแก้สมการ

การอธิบายลำดับขั้นตอนการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของครู ซึ่งครูใช้ภาษาที่เป็น การพูดอธิบาย และใช้การเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์แสดงขั้นตอนการแก้สมการ ขั้นตอนการแก้สมการของครูเริ่มด้วยการพิจารณาสมการ พิจารณาตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร จากนั้นจึงกำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรก่อน โดยพิจารณาจากความสัมพันธ์ ซึ่งครูได้ใช้การยกตัวอย่างการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวประกอบอธิบาย และเขียนตัวเลขกำกับลำดับของการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร ซึ่งเรียงลำดับจากสมการที่มีรูปแบบอย่างง่าย สมการที่สามารถแก้สมการได้หลายวิธี สมการที่มีความซับซ้อนขึ้น ซึ่งการจัดการเรียนรู้ของครูเน้นไปที่ลำดับของการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร และเมื่อสมการซับซ้อนขึ้นต้องใช้การรวมตัวแปร ครูได้เน้นการรวมตัวแปร โดยใช้สมบัติการแจกแจงก่อนจึงจะสามารถรวมตัวแปรได้ ซึ่งครูได้อธิบายสมบัติการแจกแจงโดยใช้ลูกศร โค้งแทน จากการใช้การนำเสนอภายนอกที่กล่าวมาในการจัดการเรียนรู้ เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนสามารถอธิบายลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ข้างเดียวกับสมการได้ และแสดงวิธีการและลำดับขั้นตอนการแก้สมการได้ถูกต้องและเป็นผลสำเร็จสำหรับสมการที่ต้องใช้การรวมตัวแปรและสมบัติการแจกแจงนักเรียนจะเขียนสัญลักษณ์ที่เป็นลูกศร โค้งเพื่อแสดงการแจกแจง ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจอยู่ในระดับการมีมโนภาพ และยังสามารถพัฒนาไปจนถึงระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมได้ ถึงแม้ว่ามีนักเรียน 1 คนไม่สามารถพัฒนาไปถึงระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมได้ ซึ่งอาจจะเกิดจากการมีมโนภาพที่ไม่สมบูรณ์

การแก้โจทย์ปัญหาสมการ ครูเน้นขั้นตอนการวิเคราะห์โจทย์ เพื่อสร้างสมการโดยใช้การนำเสนอภายนอกที่หลากหลายในการวิเคราะห์ เช่น แผนภาพ รูปภาพ ตาราง สถานการณ์จริง ซึ่งช่วยให้นักเรียนสามารถวิเคราะห์โจทย์ได้ง่ายขึ้น เมื่อวิเคราะห์แล้วจึงสร้างความสัมพันธ์ของเงื่อนไขแต่ละเงื่อนไข

การนำเสนอภายนอกของครูที่เป็นลำดับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของครู โดยครูเริ่มจากความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ประเภทของสมการ การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว การแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยแต่ละขั้นครูใช้ภาษาในการพูดอธิบาย และมีการเน้นย้ำในมโนคติที่สำคัญ ซึ่งเห็นได้จากครูทบทวนก่อนที่จะสอนเรื่องต่อไปในแต่ละกิจกรรม และใช้ตัวอย่างประกอบเพื่อให้นักเรียน ได้สร้างมโนภาพที่ชัดเจนยิ่งขึ้น

6.4 อภิปรายผลความสัมพันธ์ระหว่างการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

จากผลการวิจัยพบว่าการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนมีความสัมพันธ์กับการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูในการจัดการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ดังนี้

เรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูมีการใช้ระบบการนำเสนอในการจัดการเรียนรู้ คือ ครูใช้ภาษาในการอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว พร้อมยกตัวอย่างประกอบที่หลากหลาย เพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบให้เห็นข้อเหมือน ข้อแตกต่าง นอกจากนี้แล้ว ครูมีการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์โดยการเขียนลงบนกระดาน ทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ถึงระดับการมีมโนภาพ ซึ่งในตอนแรกครูไม่ได้กล่าวถึงความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน จึงทำให้นักเรียนมีระดับความเข้าใจถึงระดับการมีมโนภาพ นั่นคือ นักเรียนสามารถบอกได้ว่าสมการที่กำหนดให้นั้นเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่ เพราะเหตุใด แต่มีบางสมการที่นักเรียนตอบไม่ได้ เช่น สมการที่เลขชี้กำลังของตัวแปรเป็นสอง และการให้เหตุผลของนักเรียนยังไม่สมบูรณ์ เช่น นักเรียนตอบเพียงแต่ว่าเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เพราะมีตัวแปรเพียงตัวเดียว แต่เมื่อครูอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างชัดเจน ทั้งให้ความหมายของคำว่า “ตัวแปรเดียว” และ “สมการเชิงเส้น” พร้อมทั้งเขียนความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวออกมาในรูปสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในรูปทั่วไป และยกตัวอย่างที่หลากหลายเพื่อให้นักเรียนเปรียบเทียบให้เห็นข้อแตกต่างระหว่างสมการที่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและไม่เป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว จึงทำให้นักเรียนย้อนกลับไปปรับมโนภาพเดิมที่มีอยู่ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น รวมไปถึงลำดับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของครู ครูได้มีการทบทวนและเน้นย้ำความรู้พื้นฐานที่นักเรียนควรมีในแต่ละกิจกรรม จึงทำให้นักเรียนสามารถไปปรับมโนภาพที่มีอยู่ให้ชัดเจนและสมบูรณ์ยิ่งขึ้น เป็นผลทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจไปสู่ระดับที่สูงขึ้น นั่นคือ ความเข้าใจในระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม กล่าวคือ นักเรียนสามารถ บอกได้ว่าสมการที่กำหนดมาเป็นสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหรือไม่

ยกตัวอย่างสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว บอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไปได้

เรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ลำดับขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เริ่มต้นด้วย วิธีการแก้สมการ โดยใช้สมบัติการเท่ากัน การย้ายข้าง ลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร และใช้ตัวอย่างเพื่อแสดงให้นักเรียนเห็นขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว สำหรับการอธิบายสมบัติการเท่ากัน ครูได้ใช้การนำเสนอที่เป็นคำพูดเชิงเปรียบเทียบกับตาชั่ง นอกจากนี้ครูใช้รูปภาพ คือ รูปตาชั่งในการอธิบายการใช้สมบัติการเท่ากันเพื่อแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และครูยังใช้ตัวอย่างการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวที่ใช้สมบัติแต่ละสมบัติพร้อมทั้งอธิบายแต่ละขั้นตอนทั้งพูดและเขียน เพื่อให้นักเรียนสร้างมโนภาพเกี่ยวกับการใช้สมบัติการเท่ากัน และครูมีการเชื่อมโยงสมบัติการเท่ากันกับหลักการย้ายข้าง ซึ่งครูได้เน้นย้ำการใช้หลักการย้ายข้าง โดยการพูดอธิบายอย่างชัดเจน และมีการพูดซ้ำในการอธิบายหลักการย้ายข้างในทุกตัวอย่างที่ครูแสดงวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ซึ่งทำให้นักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยใช้สมบัติการเท่ากัน และหลักการย้ายข้าง สำหรับลำดับขั้นตอนการแก้สมการ ครูได้อธิบายโดยเน้นไปที่ลำดับของการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปร เพื่อให้สัมประสิทธิ์ของตัวแปรเป็นหนึ่ง โดยใช้คำพูดอธิบายเน้นไปที่การพิจารณาความสัมพันธ์ของตัวเลขนั้นกับตัวแปร คือ กำจัดตัวที่อยู่ไกลตัวแปรที่สุดก่อน และได้ใช้ตัวเลขเขียนกำกับลำดับของการกำจัด ซึ่งทำให้นักเรียนเกิดมโนภาพเกี่ยวกับลำดับการกำจัดตัวเลขที่อยู่ด้านเดียวกับตัวแปรอย่างชัดเจน นอกจากนี้สำหรับสมการที่ต้องใช้สมบัติการแจกแจง ครูได้ใช้คำพูดอธิบายการใช้สมบัติการแจกแจง ประกอบกับการใช้ลูกศร โค้งเพื่อแสดงให้เห็นการใช้สมบัติการแจกแจงในแต่ละตัวอย่างที่ครูนำมาอธิบาย ซึ่งเป็นการเน้นย้ำของครู ทำให้นักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับการใช้สมบัติการแจกแจง และนักเรียนใช้ลูกศร โค้งเพื่อแสดงให้เห็นว่าใช้การแจกแจงด้วย เมื่อเป็นสมการที่มีตัวแปรปรากฏอยู่หลายตำแหน่ง ครูได้อธิบายการรวมตัวแปร โดยใช้หลักการบวกและการลบพหุนามและมีการเน้นย้ำ โดยการขีดเส้นใต้หรือเขียนวงกลมล้อมรอบพจน์ที่สามารถนำมารวมกันได้ ทำให้นักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับการรวมตัวแปร และครูได้อธิบายลำดับการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยเริ่มจากการพิจารณาว่ามีตัวแปรปรากฏอยู่ที่ตำแหน่ง ถ้ามีหลายตำแหน่ง ให้รวมตัวแปร และใช้สมบัติการแจกแจงถ้าตัวแปรอยู่ในวงเล็บ ซึ่งครูมีการใช้ตัวอย่างในการอธิบายที่หลากหลายและเรียงลำดับจากง่าย ไปยาก จากที่ครูใช้การนำเสนอในรูปแบบต่างๆ เพื่ออธิบายขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ทำให้นักเรียนมีการเชื่อมโยงมโนภาพที่มีอยู่ ทั้งในเรื่องของ สมบัติการเท่ากัน การย้ายข้าง ลำดับการกำจัด สมบัติการแจกแจง การรวมพหุนาม ทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจในเรื่องการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวถึงระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม กล่าวคือ

นักเรียนสามารถเลือกใช้สมบัติเพื่อใช้ในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และแสดงวิธีการได้หลากหลายแนวทาง ทั้งสมการอย่างง่ายและมีความซับซ้อน พร้อมทั้งสามารถสรุปลำดับขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ครูมีการใช้การนำเสนอ คือ ลำดับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้ของครู เริ่มต้นด้วยการอธิบายขั้นตอนในการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เริ่มจากการอ่านโจทย์ การวิเคราะห์โจทย์ กำหนดตัวแปร เขียนสมการ แก้สมการ และตรวจคำตอบ ซึ่งครูได้ใช้ตัวอย่างที่หลากหลายมาอธิบายประกอบเพื่อให้เห็นลำดับการแก้โจทย์ปัญหา พร้อมทั้งได้อธิบายขั้นตอนแต่ละขั้นตอนโดยละเอียดและชัดเจน เช่น ในขั้นอ่านโจทย์และวิเคราะห์โจทย์ จะต้องตอบคำถามให้ได้ว่า โจทย์ต้องการหาอะไร กำหนดอะไรมาให้บ้าง ซึ่งทำให้นักเรียนมีมโนภาพในขั้นของการวิเคราะห์โจทย์ นอกจากนี้ครูใช้ตาราง รูปภาพ และแผนภาพช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ ซึ่งนักเรียนได้ใช้ตาราง รูปภาพ และแผนภาพช่วยในการวิเคราะห์โจทย์ เช่นเดียวกัน นอกจากนี้ครูใช้สถานการณ์จริงช่วยในการอธิบายให้นักเรียนเข้าใจการวิเคราะห์โจทย์ปัญหามากยิ่งขึ้น ทำให้นักเรียนมีมโนภาพเกี่ยวกับการวิเคราะห์โจทย์ปัญหา และการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และนักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจถึงระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม กล่าวคือ นักเรียนสามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และสรุปขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

