บทที่ 2
วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาวิจัยในครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551
2. แนวคิดเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
3. แนวคิดเกี่ยวกับระบบการนำเสนอ และความเข้าใจทางคณิตศาสตร์
4. แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie และ Kieren
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
6. กรอบแนวคิดในการดำเนินการวิจัย

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551

1.1 สาระสำคัญของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคนให้ มีความรู้ที่เป็นสากล สามารถสื่อสารการคิด การแก้ปัญหา การใช้เทคโนโลยี เพื่อการใช้ชีวิตอย่างมีความสุข และมีศักยภาพในการศึกษาต่อและการประกอบอาชีพ รวมไปถึงมีคุณธรรม จริยธรรม และค่านิยมที่พึงประสงค์ ยึดมั่นในระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข และมีสุขภาพกายและสุขภาพจิตที่ดี โดยมุ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญบนพื้นฐานที่ว่าทุกคนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้อย่างเต็มศักยภาพ

1.2 ความสำคัญของสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

1.3 คุณภาพของผู้เรียนในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

1.3.1 คุณภาพผู้เรียนเมื่อจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน

เมื่อผู้เรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีแล้ว ผู้เรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์ และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์พัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่างๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับที่สูงขึ้นไป

การที่ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีคุณภาพนั้นจะต้องมีความสมดุลระหว่างสาระทางด้านความรู้ ทักษะกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรมจริยธรรม และค่านิยม ดังนี้

1.3.1.1 มีความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น พร้อมทั้งสามารถนำความรู้นั้นไปประยุกต์ได้

1.3.1.2 มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นได้แก่ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ

1.3.1.3 มีความสามารถในการทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

1.3.2 คุณภาพผู้เรียนเมื่อจบช่วงชั้นที่ 3 (ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3)

เมื่อผู้เรียนจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ผู้เรียนควรจะมีความสามารถดังนี้

1.3.2.1 มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง ใช้การประมาณค่าในการดำเนินการและแก้ปัญหา และนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้

1.3.2.2 มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่าง ๆ

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

เกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

1.3.2.3 สามารถสร้างและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติโดยใช้วงเวียนและสันตรง อธิบายลักษณะและสมบัติของรูปเรขาคณิตสามมิติซึ่งได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้

1.3.2.4 มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ และสามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้

1.3.2.5 สามารถนึกภาพและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

1.3.2.6 สามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และกราฟในการแก้ปัญหาได้

1.3.2.7 สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถามเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ กำหนดวิธีการศึกษา เก็บรวบรวมข้อมูลและนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิรูปวงกลมหรือรูปแบบอื่นที่เหมาะสมได้

1.3.2.8 เข้าใจค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

1.3.2.9 ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหาใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
ห้องสมุดงานวิจัย
วันที่ 26 ส.ค. 2555
เลขทะเบียน 203363
เลขเรียกหนังสือ

1.4 สาระและตัวชี้วัดในช่วงชั้นที่ 3 ที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ตารางที่ 1 สาระที่ 4 พีชคณิต

มาตรฐาน	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
มาตรฐาน ค 4.1 เข้าใจและวิเคราะห์แบบรูป (pattern) ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน	1. วิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูปที่กำหนดให้	ความสัมพันธ์ของแบบรูป
มาตรฐาน ค 4.2 ใช้นิพจน์ สมการ อสมการ กราฟ และตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical model) อื่นๆ แทนสถานการณ์ต่างๆ ตลอดจนแปลความหมายและนำไปใช้แก้ปัญหา	1. แก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย	สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว
	2. เขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากสถานการณ์ หรือปัญหาอย่างง่าย	การเขียนสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวจากสถานการณ์หรือปัญหา
	3. แก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวอย่างง่าย พร้อมทั้งตระหนักถึงความสมเหตุสมผลของคำตอบได้	โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ตารางที่ 2 สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

มาตรฐาน	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	1. ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา	-
	2. ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม	-
	3. ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม	-

ตารางที่ 2 สาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ (ต่อ)

มาตรฐาน	ตัวชี้วัด	สาระการเรียนรู้แกนกลาง
	4. ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน	-
	5. เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ	-
	6. มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์	-

2. แนวคิดเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

เนื่องจากสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ได้รับมอบหมายจากกระทรวงศึกษาธิการ ในการพัฒนาหลักสูตร หนังสือเรียน คู่มือครู และสื่ออื่นๆ ที่ใช้ประกอบการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อส่งเสริมให้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นไปตามหลักการและจุดมุ่งหมายของหลักสูตร(สสวท., 2547) ดังนั้นสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้ระบุเนื้อหาเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวไว้ดังนี้

2.1 แบบรูปและความสัมพันธ์

แบบรูป หมายถึง รูปร่าง ลักษณะของสิ่งต่างๆ ที่มีความสัมพันธ์กัน และนำมาประกอบกันตามความสัมพันธ์ระหว่างสิ่งเหล่านั้น แบบรูปในทางคณิตศาสตร์ประกอบด้วยสัญลักษณ์ที่เป็นค่าคงตัว (constant) กับตัวแปร (variable)

ค่าคงตัว (constant) คือ สัญลักษณ์ที่แทนจำนวนใดจำนวนหนึ่งที่มีค่าแน่นอน ได้แก่ ตัวเลขต่างๆ

ตัวแปร (variable) คือ สัญลักษณ์ที่แทนใช้แทนจำนวนที่ไม่ทราบค่า อาจจะใช้ตัวอักษรแทน เช่น a, b, c, …x, y, z เป็นต้น

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างลำดับที่กับจำนวนซึ่งกำหนดให้ดังแบบรูปต่อไปนี้

ลำดับที่	1	2	3	4	5	...	n
จำนวน	2	4	6	8	10	...	2n

จากตารางจะเห็นว่า

จำนวนที่อยู่ในแถวของ ลำดับที่ เป็นจำนวนนับ 1, 2, 3, ... และจำนวนที่อยู่ในแถวของจำนวน เป็นสองเท่าของจำนวนที่อยู่ในแถวของ ลำดับที่ ในหลักเดียวกัน เช่น ลำดับที่ 2 จะสัมพันธ์กับ 4 ซึ่งเท่ากับ 2 x 2 และลำดับที่ 5 จะสัมพันธ์กับ 10 เท่ากับ 2 x 10 ซึ่งถ้ามีลำดับที่ที่ยังไม่ทราบค่าที่แน่นอน จะใช้อักษรแทน เช่น n แทนลำดับที่ และจำนวนที่สัมพันธ์กับลำดับที่ n ซึ่งเป็น 2 เท่าของ n ได้เป็น 2n เรียก n ว่า ตัวแปร

เมื่อค่าของลำดับที่ n แล้ว เราสามารถหาจำนวน 2n ที่สัมพันธ์กับลำดับที่ n นั้น ไม่ว่า n จะเป็นลำดับที่เท่าไหร่ก็ตาม เช่น ต้องการหาจำนวนที่สัมพันธ์กับลำดับที่ 90 ได้จาก 2 x 90 เท่ากับ 180

ในทางกลับกัน ถ้าต้องการหาว่าจำนวน 210 อยู่ในลำดับที่เท่าไหร่ หาได้จาก 210 หารด้วย 2 หรือหาจำนวนมาแทน n ใน 2n เพื่อให้ได้ค่าเท่ากับ 210 ซึ่งจะได้ว่า 210 เป็นจำนวนในลำดับที่ 105

2.2 ความหมายของสมการ

สมการ เป็นประโยคที่แสดงการเท่ากันของจำนวน โดยมีสัญลักษณ์ = บอกการเท่ากัน

สมการอาจมีตัวแปรหรือไม่มีตัวแปรก็ได้ เช่น $3x + 2 = 20$ เป็นสมการที่มี x เป็นตัวแปร และ $18 + 4 = 22$ เป็นสมการที่ไม่มีตัวแปร

สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวหมายถึง สมการที่มี x เป็นตัวแปร และอยู่ในรูป $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว ที่ $a \neq 0$ เช่น $x + 3 = 7$, $3x - 2 = 7$

2.3 คำตอบของสมการ

คำตอบของสมการ คือ จำนวนที่แทนตัวแปรในสมการแล้วทำให้สมการเป็นจริง เช่น

สมการ $y + 3 = 8$ เป็นจริงหรือไม่เป็นจริง ขึ้นอยู่กับค่าของ y ถ้าแทน y ด้วย 5 แล้ว $y + 3 = 8$ เป็นจริง ถ้าแทน y ด้วยจำนวนอื่นๆ ที่ไม่ใช่ 5 แล้ว $y + 3 = 8$ ไม่เป็นจริง เช่น แทน y ด้วย 2 จะได้ $2 + 3 = 8$ ซึ่งไม่เป็นจริง เรียกจำนวนที่แทน y แล้วทำให้ $y + 3 = 8$ เป็นจริงว่า คำตอบของสมการ $y + 3 = 8$ ดังนั้น 5 เป็นคำตอบของสมการ $y + 3 = 8$

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

จากลักษณะของคำตอบ สามารถแบ่งสมการได้เป็น 3 แบบ คือ

2.3.1 สมการที่มีจำนวนบางจำนวนเป็นคำตอบ เช่น

จงหาคำตอบของสมการ $x - 4 = -5$ โดยวิธีลองแทนค่าตัวแปร

วิธีทำ เนื่องจาก $-1 - 4 = -5$ เมื่อ แทน x ด้วย -1 ใน $x - 4 = -5$ แล้วจะได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของสมการ $x - 4 = -5$ คือ -1

2.3.2 สมการที่มีจำนวนทุกจำนวนเป็นคำตอบ เช่น

จงหาคำตอบของสมการ $b + 5 = 5 + b$ โดยวิธีลองแทนค่าตัวแปร

วิธีทำ เนื่องจาก เมื่อแทน b ด้วยจำนวนใดๆ ใน $b + 5 = 5 + b$ แล้วจะได้สมการเป็นจริงเสมอ

ดังนั้น คำตอบของสมการ $b + 5 = 5 + b$ คือ จำนวนทุกจำนวน

2.3.3 สมการที่ไม่มีจำนวนใดเป็นคำตอบ เช่น

จงหาคำตอบของสมการ $y + 1 = y$ โดยวิธีลองแทนค่าตัวแปร

วิธีทำ เนื่องจากไม่มีจำนวนใดแทน y ใน $y + 1 = y$ แล้วได้สมการเป็นจริง

ดังนั้น ไม่มีจำนวนใดเป็นคำตอบของสมการ $y + 1 = y$

2.4 การแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

การแก้สมการ คือ การหาคำตอบของสมการ

การหาคำตอบของสมการนอกจากจะใช้วิธีการลองแทนค่าตัวแปรในสมการเพื่อให้สมการเป็นจริงแล้ว สามารถใช้สมบัติของการเท่ากัน ในการหาคำตอบของสมการ ได้แก่ สมบัติสมมาตร สมบัติถ่ายทอด สมบัติการบวก และสมบัติการคูณ ได้อีกวิธีหนึ่ง

2.4.1 สมบัติของการเท่ากัน

(1) สมบัติสมมาตร

ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ เมื่อ a และ b แทนจำนวนจริงใดๆ

เช่น $x = 8$ แล้ว $8 = x$

$a + b = c$ แล้ว $c = a + b$

(2) สมบัติถ่ายทอด

ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริงใดๆ

เช่น ถ้า $x = y$ และ $y = 3$ แล้วสรุปได้ว่า $x = 3$

ถ้า $a + b = x$ และ $x = 7$ แล้วสรุปได้ว่า $a + b = 7$

(3) สมบัติการบวก

ถ้า a = b แล้ว a + c = b + c เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริงใดๆ

ถ้ามีจำนวนสองจำนวนเท่ากัน เมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งมาบวกแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น แล้วผลลัพธ์จะเท่ากัน เช่น

ถ้า 2 x 3 = 6 แล้ว (2 x 3) + (-2) = 6 + (-2)

ถ้า a = 3 แล้ว a + 5 = 3 + 5

จำนวนที่นำมาบวกกันแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น อาจจะเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบก็ได้ ในกรณีที่เป็นจำนวนลบ มีความหมายเหมือนกับนำจำนวนบวกมาลบออกจากจำนวนทั้งสองข้างของสมการ คือ

ถ้า a = b แล้ว a + (-c) = b + (-c) หรือ a – c = b – c เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใดๆ นั่นคือ

ถ้า a = b แล้ว a – c = b – c เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใดๆ

(4) สมบัติการคูณ

ถ้า a = b แล้ว ac = bc เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนจริง

ถ้ามีจำนวนสองจำนวนเท่ากัน เมื่อนำจำนวนอีกจำนวนหนึ่งคูณกับแต่ละจำนวนที่เท่ากันนั้น แล้วผลลัพธ์จะเท่ากัน เช่น

ถ้า m = n แล้ว 3m = 3n

ถ้า x = y แล้ว ax = ay

จำนวนที่นำมาคูณกับจำนวนสองจำนวนที่เท่ากันนั้น อาจจะเป็นจำนวนเต็มหรือเศษส่วนก็ได้ เช่น

ถ้า $x = y$ แล้ว $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}y$ หรือ $\frac{x}{2} = \frac{y}{2}$

และถ้า $a = b, c \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{c} \times a = \frac{1}{c} \times b$ หรือ $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

นั่นคือ ถ้า $a = b$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ เมื่อ a, b และ c แทนจำนวนใดๆ ที่ $c \neq 0$

ตัวอย่างการใช้ สมบัติการเท่ากันในการหาคำตอบของสมการ

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $\frac{2x}{3} + 1 = 9$

วิธีทำ $\frac{2x}{3} + 1 = 9$

นำ 1 มาลบทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{2x}{3} + 1 - 1 = 9 - 1$ (สมบัติการลบ)

$$\frac{2x}{3}=8$$

นำ 3 มาคูณทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{2x}{3}\times 3=8\times 3$ (สมบัติการคูณ)

หรือ $2x=24$

นำ 2 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{2x}{2}=\frac{24}{2}$ (สมบัติการหาร)

หรือ $x=12$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 12 ในสมการ $\frac{2x}{3}+1=9$

จะได้ $\frac{2(12)}{3}+1=9$

$9=9$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 12 เป็นคำตอบของสมการ $\frac{2x}{3}+1=9$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $5x-15=2x+3$

วิธีทำ $5x-15=2x+3$

นำ $-2x$ มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $(-2x)+5x-15=(-2x)+2x+3$ (สมบัติการบวก)

$(-2+5)x-15=(-2+2)x+3$

$3x-15=3$

นำ 15 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $3x-15+15=3+15$ (สมบัติการบวก)

หรือ $3x=18$

นำ 3 มาหารทั้งสองข้างของสมการ (สมบัติการหาร)

จะได้ $\frac{3x}{3}=\frac{18}{3}$

หรือ $x=6$

ตรวจสอบ แทน x ด้วย 6 ในสมการ $5x-15=2x+3$

จะได้ $(5)(6)-15=(2)(6)+3$

$15=15$ เป็นสมการที่เป็นจริง

ดังนั้น 6 เป็นคำตอบของสมการ $5x-15=2x+3$

2.5 โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ในการแก้ปัญหาที่ต้องใช้คณิตศาสตร์ พบว่ามีปัญหามากมายที่ในบางครั้งถ้าเขียนความสัมพันธ์ของสิ่งที่ต้องการหาในรูปสมการ จะทำให้การแก้ปัญหาง่ายขึ้น และหาคำตอบของสมการนั้นได้ดังตัวอย่าง

ส้มมีเงิน 700 บาท สองเท่าของจำนวนเงินส่วนที่มะไฟมีมากกว่าส้ม เท่ากับ 250 บาท จงหาว่า มะไฟมีเงินกี่บาท

วิธีทำ ให้มะไฟมีเงิน x บาท

จำนวนเงินส่วนที่มะไฟมีมากกว่าส้มเท่ากับ $x - 700$ บาท

สองเท่าของจำนวนเงินส่วนที่มะไฟมีมากกว่าส้ม เท่ากับ 250 เขียนสมการได้เป็น

$$2(x-700) = 250$$

นำ 2 มาหารทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $\frac{2(x-700)}{2} = \frac{250}{2}$

$$x - 700 = 125$$

นำ 700 มาบวกทั้งสองข้างของสมการ

จะได้ $x - 700 + 700 = 125 + 700$

หรือ $x = 825$

ตรวจสอบ สองเท่าของจำนวนที่มะไฟมีมากกว่าส้มเท่ากับ

$2(825-700) = 2(125) = 250$ ซึ่งเป็นไปตามเงื่อนไขในโจทย์

ดังนั้น มะไฟมีเงิน 825 บาท

3. แนวคิดเกี่ยวกับระบบการนำเสนอและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

3.1 ความหมายของระบบการนำเสนอ

ระบบการนำเสนอ(Representational System) หรือ วิธีการนำเสนอ (Representation Modes) ซึ่งประกอบด้วยระบบของสัญลักษณ์ การใช้ภาษาพูด สัญลักษณ์การเขียน รูปแบบเชิงรูปภาพคงที่ หรือรูปภาพ รูปแบบการจัดการ และสถานการณ์จริง อภิปรายโดย Lesh (1981, อ้างถึงใน Goldin, 1998) และ Lesh , Landou and Hamilton (1983, อ้างถึงใน Goldin, 1998) ในการวิเคราะห์แก้ปัญหาประยุกต์ การใช้ของพวกเขาดูเหมือนจะพิจารณาสิ่งเหล่านี้เป็นตัวอย่างของสิ่งที่

เรียกว่า ระบบภายนอกของการนำเสนอ (External Representation of Representation) (Goldin, 1998)

Goldin (1998) ใช้คำว่า ระบบการนำเสนอในความหมายที่คล้ายคลึงกับสิ่งที่ Kaput (1987, p.162, อ้างถึงใน Goldin, 1998) เรียกว่า "แบบแผนเชิงสัญลักษณ์ (Symbol Scheme)" ความแตกต่างที่สำคัญปรากฏให้เห็นว่าแบบแผนเชิงสัญลักษณ์ ถูกใช้อยู่ใน หลักการของการทำงานของเครื่องจักร แต่ Goldin เน้นไปที่ความกำกวมที่มีอยู่ในระบบการนำเสนอ สิ่งที่ Kaput คล้อยตาม Palmer (1977, อ้างถึงใน Goldin, 1998) เรียก การนำเสนอ หรือ ระบบการนำเสนอสอดคล้องกับการใช้คำ ที่มีความสัมพันธ์กับระบบสัญลักษณ์ ระหว่างระบบ 2 ระบบการนำเสนอ

Goldin and Shteingold (2001) กล่าวว่า การนำเสนอทางคณิตศาสตร์ไม่สามารถถูกทำความเข้าใจในการแยกออกไป สูตรหรือสมการที่เฉพาะ การจัดเตรียมอุปกรณ์ที่เป็นรูปธรรมเกี่ยวกับ บล็อกฐานสิบ หรือกราฟเฉพาะในระนาบคาร์ทีเซียน สร้างความหมายเพียงแค่ส่วนหนึ่งของระบบที่กว้างขึ้นในที่ซึ่ง ความหมายและข้อตกลงได้ถูกสร้างขึ้นเท่านั้น แต่ระบบการนำเสนอมีความสำคัญต่อคณิตศาสตร์และการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีโครงสร้าง การนำเสนอที่แตกต่างกันจะมีความเกี่ยวข้องกันในระบบซึ่งถูกทำให้มีความสัมพันธ์กับระบบอื่นเป็นอย่างมาก

นอกจากนี้ยังมีความสำคัญในการจำแนกความแตกต่างของระบบภายนอกของการนำเสนอออกจาก ระบบภายในของการนำเสนอหรือระบบการนำเสนอเชิงจิตวิทยาของแต่ละคน ซึ่งทั้งสองอย่างจำเป็นต้องให้ความสำคัญ ระบบการนำเสนอภายนอกมีตั้งแต่ระบบสัญลักษณ์ของคณิตศาสตร์ที่ตกลงกันไว้ (เช่น เลขฐานสิบ สัญลักษณ์ทั่วไปทางพีชคณิต เส้นจำนวนจริง หรือ การนำเสนอแทนผลคูณคาร์ทีเซียน) ไปจนถึง สิ่งแวดล้อมการเรียนรู้ที่ถูกสร้างขึ้น (เช่น เกี่ยวข้องกับการจัดกระทำกับวัสดุที่เป็นรูปธรรม หรือ คอมพิวเตอร์ Microworld)ในทางตรงกันข้ามระบบภายใน ประกอบด้วย โครงสร้างการสร้างสัญลักษณ์ส่วนบุคคลของนักเรียนแต่ละคน และการให้ความหมายสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ของแต่ละคน เช่นเดียวกับ ภาษาธรรมชาติ การสร้างมโนภาพ และ การนำเสนอเชิงปริภูมิของแต่ละคน ยุทธวิธีหรือสิ่งช่วยในการแก้ปัญหา และ ที่สำคัญอย่างยิ่งมีผลต่อความสัมพันธ์ในคณิตศาสตร์

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายในและการนำเสนอภายนอก เป็นพื้นฐานในการสอนและการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ ความหมายและการแปลความหมายอะไรก็ตาม ที่ครูอาจจะนำไปใช้ในการนำเสนอภายนอก คือธรรมชาติของ การพัฒนาการนำเสนอภายในของนักเรียนที่จะรวบรวมขึ้นและก่อให้เกิดองค์ความรู้

การเชื่อมโยงที่สำคัญบางอย่าง ที่อาจจะเกิดขึ้นระหว่างการนำเสนอที่แตกต่างหรือระบบของการนำเสนอ สิ่งเหล่านี้รวมถึงการใช้ ความคล้ายคลึงกัน (Analogy) การจินตนาการ

(Imagery) และการอุปมา (Metaphor) (English, 1997 อ้างถึงใน Goldin & Shteingold, 2001) เช่นเดียวกับ ความคล้ายคลึงและความแตกต่างเชิงโครงสร้าง ระหว่าง ระบบการนำเสนอ ถึงแม้ว่าคณิตศาสตร์เป็นสาขาวิชาที่เป็นจริงอย่างชัดเจน แต่บางครั้งถูกนำเสนออย่างคลุมเครือทั้งในการนำเสนอภายนอกและการนำเสนอภายใน และความคลุมเครือนี้อาจจะเป็นแหล่งของอุปสรรคของการเรียนรู้ บ่อยครั้งที่อุปสรรคเป็นข้อมูลที่ขึ้นกับบริบทเมื่อเกิดความคลุมเครือ ผู้เรียนหรือตัวบุคคลจะแก้ปัญหาของความคลุมเครือนั้น หรือบางครั้งอาจจะมองผ่านความคลุมเครือซึ่งขึ้นอยู่กับผู้เรียนแต่ละคน

Godin and Janvier (1998) ได้กล่าวถึงความหลากหลายของการให้ความหมายของการนำเสนอ และระบบการนำเสนอ ในมุมมองที่เชื่อมโยงกับการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ การสอนคณิตศาสตร์ และการพัฒนา ดังต่อไปนี้

3.1.1 ในแง่มุมภายนอก เป็นโครงสร้างของสถานการณ์ หรือของโครงสร้างของกลุ่มสถานการณ์ ในสิ่งแวดล้อมทางกายภาพ ที่สามารถถูกอธิบายในเชิงคณิตศาสตร์ หรือ มองเห็นเป็นการรวบรวมแนวคิดทางคณิตศาสตร์

3.1.2 ในแง่มุมของการก่อร่างทางภาษา เป็นระบบของภาษาที่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ถูกนำเสนอขึ้นมา หรือถูกอภิปราย ด้วยการเน้นย้ำบนระบบลักษณะที่เป็นโครงสร้างที่เกี่ยวกับการศึกษาตามหลักไวยากรณ์ (Syntactic) และโครงสร้างที่เกี่ยวกับความหมาย (Semantic)

3.1.3 โครงสร้างคณิตศาสตร์ที่เป็นทางการ หรือระบบของโครงสร้าง ที่สามารถถูกนำเสนอสถานการณ์ผ่านสัญลักษณ์ หรือผ่านระบบของสัญลักษณ์ ซึ่งมักจะอยู่ในรูปของสัจพจน์นิยาม ที่มีความชัดเจน หรือโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่อาจจะนำเสนอจากโครงสร้างในแง่มุมอื่น

3.1.4 ในแง่มุมภายใน เป็นโครงสร้างเชิงการรู้ของแต่ละบุคคล หรือระบบที่ซับซ้อนของโครงสร้างเชิงการรู้ เป็นการสรุปจากพฤติกรรมหรือทบทวนพฤติกรรม แนวคิดของตนเองในกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

3.2 ระบบการนำเสนอ

Goldin and Shteingold(2001) ได้กล่าวถึงระบบการนำเสนอแบ่งออกเป็น 2 ระบบ ดังนี้

3.2.1 ระบบภายนอกของการนำเสนอ (External Systems of Representation)

การนำเสนอเป็นรูปแบบที่เป็นเครื่องหมายหรือ โครงร่างของเครื่องหมาย ลักษณะสำคัญ หรือ วัตถุ สิ่งที่สำคัญคือ สามารถแทน (การทำให้เป็นสัญลักษณ์ การพรรณนา การให้รหัส หรือการแสดงแทน) สิ่งของบางอย่างมากกว่าตัวเอง ยกตัวอย่างเช่น เลข 5 สามารถแสดงแทนได้ด้วย กลุ่มของการนับห้า วัตถุถูกให้ความหมายโดยการนับ หรือมากไปกว่านี้สามารถแทน

นามธรรม นั่นคือ กลุ่มที่เท่ากันของกลุ่มต่างๆ มันสามารถนำเสนอตำแหน่งหรือผลลัพธ์ของการวัด ด้วย กราฟในระนาบคาร์ทีเซียน เป็นการนำเสนอเช่นเดียวกัน ซึ่งสามารถพรรณนากลุ่มของข้อมูล ตัวอย่างเช่น การใช้กราฟแสดงฟังก์ชัน หรือแนวทางการหาเซตคำตอบของสมการพีชคณิต เช่นการใช้เส้นจำนวนแสดงคำตอบของสมการและอสมการเชิงเส้น จะเห็นได้ว่า สิ่งของถูกนำเสนอโดยเปลี่ยนแปลงไปตามบริบทหรือการใช้การนำเสนอ จำนวน และกราฟในระนาบคาร์ทีเซียน นั่นหมายความว่าตัวนำเสนอหนึ่งๆ สามารถแสดงถึงสิ่งอื่นๆ ได้อีกโดยไม่จำเพาะเพียงแค่สิ่งใดสิ่งหนึ่งเท่านั้น ซึ่งเรียกว่า การนำเสนอภายนอก (External Representations) ในคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่นักเรียนสามารถสร้างขึ้นเองได้

การนำเสนอดังกล่าวไม่ได้อยู่อย่างโดดเดี่ยว เช่น เลข 5 อยู่ในระบบสัญลักษณ์ที่ตกลงกันไว้ในเลขคณิต ซึ่งอยู่ในกลุ่มเลขโดด 0, 1, 2, 3, ..., 9 และรวมไปถึงตัวเลขในระบบเลขฐานสิบหลายหลัก นอกจากนี้การนำเสนอยังรวมไปถึง สัญลักษณ์สำหรับการดำเนินการและการเท่ากันทางเลขคณิต ข้อตกลงสำหรับการนำเสนอเศษส่วน และอื่นๆ เส้นจำนวนจริงที่ตั้งฉากกันและการระบุจุดในระนาบด้วยคู่อันดับของจำนวนจริงที่ทำให้เกิดการสร้างกราฟในแบบคาร์ทีเซียน คือมีประโยชน์และยืดหยุ่นอย่างมาก โดยแท้จริงแล้ว ตัวเลขแต่ละตัว หรือ กราฟที่เฉพาะเจาะจงเกือบจะไร้ความหมายถ้าแยกออกจากระบบที่มันอยู่ ระบบของการนำเสนอภายนอก ถูกสร้างโดยข้อตกลงที่อยู่ภายใต้ระบบนี้ เมื่อระบบหนึ่งถูกสร้างขึ้น แบบรูปในระบบไม่ได้ถูกสร้างขึ้นมาโดยพลการ หรือจากการค้นพบ ความยืดหยุ่นของการนำเสนอหรือการแสดงแทนมีมากมายเกินกว่าจะตระหนักได้อย่างทั่วถึง

ลักษณะที่สำคัญอย่างหนึ่งของการนำเสนอคือ มีลักษณะธรรมชาติสองนัยในตัวเอง ทำให้เกิดความสัมพันธ์ของการนำเสนอ นั่นคือ การพรรณนา การให้รหัส (Encoding) หรือการทำให้เป็นสัญลักษณ์ (Symbolization) ซึ่งบ่อยครั้งสามารถเป็นไปได้ทั้งสองทิศทาง ดังนั้นขึ้นอยู่กับบริบท เช่น กราฟของวงกลมรัศมีหนึ่งหน่วย ที่จุดกำเนิดอยู่ในระนาบพิกัดฉาก อาจจัดได้ว่าเป็นการนำเสนอในเชิงเรขาคณิต ของสมการสองตัวแปร $x^2+y^2=1$ กล่าวได้ว่าเป็นการอธิบายด้วยภาษาและการให้รหัสในแบบตัวแปร ในอีกแง่หนึ่ง สมการที่เป็นความสัมพันธ์ ของ x และ y สามารถจัดว่าเป็น การทำให้เป็นสัญลักษณ์ทางพีชคณิต ของ กราฟในระบบคาร์ทีเซียนได้

ประวัติศาสตร์ของคณิตศาสตร์จำนวนมากเกี่ยวกับการสร้างสรรค์และการทำให้ละเอียดขึ้นเกี่ยวกับระบบการนำเสนอ และการสอนคณิตศาสตร์จำนวนมากเกี่ยวข้องกับการเรียนรู้ของนักเรียนที่ทำงานเกี่ยวกับระบบการนำเสนอและการแก้ปัญหาด้วยระบบการนำเสนอ (Lesh, Landau,& Hamilton 1983 อ้างถึงใน Goldin & Shteingold, 2001) ระบบการนำเสนอภายนอกบางอย่าง โดยส่วนใหญ่เป็นสัญลักษณ์และรูปแบบที่เป็นทางการ ซึ่งประกอบด้วยระบบของตัวเลข

แนวทางการเขียนและการจัดกระทำเกี่ยวกับนิพจน์พีชคณิตและสมการพีชคณิต ข้อตกลงสำหรับการแสดงฟังก์ชัน อนุพันธ์ และการอินทิเกรตในแคลคูลัส และ ภาษาคอมพิวเตอร์ เช่น Logo ระบบภายนอกอื่นๆ ถูกออกแบบเพื่อแสดงความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับภาพ หรือปริภูมิ เช่น เส้นจำนวน กราฟที่อยู่บนระบบพิกัดฉาก ระบบพิกัดเชิงขั้ว หรือระบบพิกัดอื่นๆ แผนผังกล่องข้อมูล แผนภาพเชิงเรขาคณิต และ คอมพิวเตอร์ที่สร้างภาพของเศษส่วน คำและประโยค การเขียน หรือการพูด เป็นการนำเสนอภายนอกด้วย สิ่งเหล่านี้สามารถแสดงหรือบรรยายวัตถุ สมบัติทางกายภาพ การกระทำ และความสัมพันธ์ หรือสิ่งต่างๆ ที่ห่างจากความเป็นนามธรรม นั่นคือ ระบบการนำเสนอภายนอกบางอย่างอาจจะเป็นรูปธรรมแต่บางอย่างมีความเป็นนามธรรมอย่างมาก

ระบบการนำเสนอแบบเดิมของคณิตศาสตร์ ที่ถูกกล่าวถึงส่วนมากเป็นแบบคงที่ (Static) ในความหมายที่ ระบบการนำเสนอจะมีกฎ หรือกรอบการคิดของการสร้างสูตร สมการ กราฟ หรือ ไดอะแกรม ที่กำหนดไว้แล้วอย่างไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่เทคโนโลยีใหม่ๆ ตั้งแต่เครื่องคิดเลขกราฟฟิค ไปจนถึง คอมพิวเตอร์ Microworld ซึ่งลักษณะของการนำเสนอจะเป็นแบบพลวัต (Dynamic) นั่นคือ ระบบภายนอกที่เกิดการนำเสนอ สามารถถูกเปลี่ยนอย่างรวดเร็วด้วยการคลิกเมาส์ หรือการเลื่อนเคอร์เซอร์ และสามารถเชื่อมโยงอัตโนมัติไปอีกอันหนึ่งและเป็นไปอย่างต่อเนื่อง (Kaput, 1989 อ้างถึงใน Goldin & Shteingold, 2001) ดังนั้น นักเรียนสามารถดูกราฟ ที่เปลี่ยนแปลงตามค่าพารามิเตอร์ ในการอธิบายเกี่ยวกับสัญลักษณ์ ที่นำเสนอโดยกราฟ ที่ถูกปรับเปลี่ยน ประสิทธิภาพของเทคโนโลยีนี้สำหรับการสอนเป็นเพียงแค่การเริ่มต้นที่ถูกคัดเลือกมาใช้เท่านั้น

นอกจากนี้ Zhang (1997) ได้ให้ความหมายการนำเสนอภายนอกว่าเป็นความรู้และโครงสร้างในสิ่งแวดล้อม สัญลักษณ์ทางกายภาพ วัตถุ มิติ (การเขียนสัญลักษณ์ ลูกคิด มิติของกราฟ) และกฎภายนอกและความสัมพันธ์ภายนอกที่อยู่ในโครงร่างทางกายภาพ (เช่น ความสัมพันธ์เชิงปริภูมิของเลขโดด โครงงานของแผนภาพ ข้อจำกัดทางกายภาพในลูกคิด) ข้อมูลในการนำเสนอภายนอก สามารถถูกคัดเลือก ถูกวิเคราะห์ และทำเป็นกระบวนการโดยผ่านระบบการหยั่งรู้เพียงอย่างเดียว ถึงแม้ว่าการมีส่วนร่วมจากบนลงล่างของความรู้เชิงมโนมติจากการนำเสนอภายใน บางครั้งสามารถสนับสนุนหรือขัดขวางกระบวนการหยั่งรู้ ในทางตรงกันข้ามการนำเสนอภายใน เป็นความรู้และโครงสร้างในความจำ การเสนอ การสร้าง โครงสร้างทางปัญญา ระบบเครือข่ายในประสาทหรือรูปแบบอื่นๆ ข้อมูลการนำเสนอภายใน ถูกดึงมาจากความจำโดยใช้กระบวนการหยั่งรู้ถึงแม้ว่ามีการกระตุ้นจากการนำเสนอภายนอก ในบางครั้งสามารถกระตุ้นกระบวนการดึงข้อมูลมาจากหน่วยความจำ เช่น พิจารณา การคูณ 735 ด้วย 278 โดยใช้กระดาษและดินสอ สำหรับการนำเสนอภายใน เป็นการแปลความหมายของสัญลักษณ์ของแต่ละ

บุคคล (เช่น ค่าตัวเลขทางสัญลักษณ์ 7 คือ เจ็ด) ตารางการบวกและการคูณ วิธีการทางเลขคณิตและอื่นๆ ซึ่งได้ถูกดึงมาจากหน่วยความจำ ส่วนการนำเสนอภายนอกเป็นรูปร่างและตำแหน่งของสัญลักษณ์ ปริภูมิความสัมพันธ์ของตัวเลขแต่ละตัว เพื่อที่จะทำให้การคูณประสบผลสำเร็จ บุคคลจะต้องรับรู้ข้อมูลจากการนำเสนอภายนอกแล้วหลังจากนั้นสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายนอกกับการนำเสนอภายใน

การนำเสนอภายนอก สามารถส่งผ่านเข้าไปใน การนำเสนอภายใน โดยถูกเก็บไว้ในหน่วยความจำโดยกระบวนการ Internalization และเช่นเดียวกัน การนำเสนอภายใน สามารถส่งผ่านไปยัง การนำเสนอภายนอก ได้ด้วยการใช้กระบวนการ Externalization

3.2.2 การนำเสนอภายใน การนำเสนอทางจิตวิทยา โดยนักเรียน (Internal, Psychological Representation by Students)

ระบบการนำเสนอภายนอก มีประโยชน์ หรือถูกจำกัดในการใช้ประโยชน์ ที่เป็นไปตาม วิธีการการทำความเข้าใจการนำเสนอภายนอกของแต่ละคน เช่น นักเรียนบางคนจัดกระทำกับนิพจน์ทางคณิตศาสตร์ได้ดี ทำการคำนวณทางเลขคณิตและพีชคณิตได้อย่างแคล่วคล่อง ถึงแม้ว่าความสามารถระดับสูงในการทำสิ่งเหล่านี้ไม่จำเป็นในการบอกถึงความเข้าใจความหมายของคณิตศาสตร์ แต่การระลึกของโครงสร้าง หรือความสามารถในการแปลความหมายผลที่ได้ กฎในคณิตศาสตร์สามารถถูกเรียนรู้และเป็นไปตามกลไก และนิยามสามารถท่องจำได้ โดยปราศจากการพัฒนาการทางมโนมติที่มาก ที่กำลังเกิดขึ้น (Goldin & Shteingold, 2001)

ดังนั้นวิธีการที่จะทำให้เข้าใจเกี่ยวกับมโนมติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้รับการพิจารณา ยกตัวอย่างเช่น โครงร่าง -3 ถูกเข้าใจและแปลความหมายในแนวทางที่หลากหลายตามที่ต้องการหรือไม่ บางครั้งดูเหมือนว่าเป็นเพียงแค่รอยขีด หรือเครื่องหมายลบที่ตามด้วยเลข 3 เท่านั้น นักเรียนคนหนึ่งอาจจะได้สร้างรูปแบบสิ่งที่มีความหมายบางอย่าง มโนมติที่มีความสัมพันธ์กัน แต่ล้มเหลวในการเชื่อมโยงมโนมติเหล่านี้กับสัญลักษณ์ได้ นักเรียนอีกคนอาจจะมีสัญลักษณ์ของจำนวนเต็มลบน้อยหรือไม่มีเลย หรือมองว่าจำนวนที่น้อยกว่า ศูนย์เป็นไปไม่ได้ ดังนั้นเพื่อที่จะแสดงลักษณะการรู้ที่ซับซ้อน ที่สามารถเกิดขึ้น จะต้องใช้แบบจำลองหรือกรอบงาน วิธีการใดวิธีการหนึ่งเพื่อพิจารณาและพยายามที่จะบรรยาย การนำเสนอภายใน หรือ ในบางครั้งเรียกว่า “การนำเสนอเชิงความรู้สึกนึกคิดจิตใจ (Mental Representation)” ของนักเรียน (Kosslyn 1980; Palmer 1977 อ้างถึงใน Goldin & Shteingold, 2001)

Goldin (1998) ได้แบ่งระบบของการนำเสนอเชิงการรู้ภายในออกเป็น 5 ระบบที่แตกต่างกัน ดังนี้

ระบบที่ 1 ระบบการนำเสนอด้านการใช้ภาษา (Verbal/Syntactic Representational Systems) เป็นความสามารถทางด้านภาษาที่เป็นธรรมชาติของแต่ละคน ทั้งคำศัพท์ที่เป็นคณิตศาสตร์และไม่เป็นคณิตศาสตร์ และการใช้ไวยากรณ์และโครงสร้างการใช้ภาษา

ระบบที่ 2 ระบบการนำเสนอด้านจินตนาการ (Imagistic Systems) ประกอบด้วย โครงร่างเชิงการรู้ที่เป็นภาพและปริภูมิ หรือ "มโนภาพ(Mental Images)" สิ่งเหล่านี้ทำให้เกิดความเข้าใจและความเข้าใจอย่างถ่องแท้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้อย่างดี ระบบการจินตนาการประกอบด้วยการให้รหัสเกี่ยวกับการเคลื่อนไหวด้วย ซึ่งสัมพันธ์กับ การใช้มือ และการเคลื่อนไหวร่างกายจริงๆ หรือในจินตนาการ ซึ่งมักจะเป็นความสำคัญต่อการจับ "ความรู้สึก (feel)" ของคณิตศาสตร์ นอกจากนั้น โครงสร้างภายในเกี่ยวกับการฟังและจังหวะเป็นสิ่งสำคัญ เมื่อนักเรียนรู้ตัวอักษรและนับตามลำดับ ปรบมือตามจังหวะ และอื่นๆ

ระบบที่ 3 ระบบสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ (Formal Notation Systems) ซึ่งเป็นระบบที่เกิดขึ้นภายในด้วย ในขณะที่นักเรียนจัดกระทำเชิงจำนวน ทำการดำเนินการเชิงเลขคณิตภายใน หรือมองเห็นภาพขั้นตอนการใช้สัญลักษณ์ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับสมการทางพีชคณิต กระบวนการเชิงยุทธวิธีและที่ช่วยแก้ปัญหา สำหรับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ถูกนำเสนอในขณะที่เด็กๆ พัฒนาและจัดการวิธีการภายในความคิด เช่น "การลองผิด ลองถูก (Trial and Error)" "การสร้างเป้าหมายย่อยๆ (Establishing Subgoals)" หรือ "การทำงานย้อนกลับ (Working Backward)" การนำเสนอเหล่านี้ ถึงแม้ว่า เป็นโครงสร้างอย่างสูงแต่บางครั้งไม่ค่อยตระหนักว่า นักเรียนใช้ยุทธวิธีที่มีประสิทธิภาพ ซึ่งอาจจะพบความยุ่งยากในการอธิบายวิธีการที่พวกเขาเข้าถึงปัญหา

ระบบที่ 4 ระบบการวางแผนและการควบคุม (A System of Planning, Monitoring, and Executive Control) ระบบการนำเสนอเชิงการรู้ที่รวมไปถึงการวางแผนเชิงยุทธวิธีการจัดการ และการตัดสินใจ (การควบคุมที่เกี่ยวกับการบริหาร) สามารถถูกพิจารณาได้โดยตรงหรือ แนะแนวทางในกระบวนการแก้ปัญหา ระบบการนำเสนอนี้ประกอบด้วย (1) การติดตามสภาพของเหตุการณ์ในระบบอื่นๆ หรือในระบบของตัวเอง (2) การตัดสินใจขั้นตอนที่จะใช้ หรือเคลื่อนย้ายไปเพื่อจะสร้าง ในระบบการนำเสนอภายในทั้งหมด หรืออยู่ในระบบของตัวเอง (3) การปรับเปลี่ยนระบบอื่นๆ การตัดสินใจที่จะปรับปรุงข้อตกลงเชิงสัญลักษณ์ที่เป็นทางการ หรือสร้างสรรค์ถ้อยคำใหม่ๆ หรือการนำไปใช้ปรับเปลี่ยนผลที่ตามมา และอื่นๆ ดังนั้นมีความหมายที่สำคัญหลายความหมายที่ระบบการนำเสนอระบบนี้ อยู่ในความสัมพันธ์ที่เป็น Metacognitive กับสิ่งอื่นๆ

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

ระบบที่ 5 ระบบการนำเสนอที่เกี่ยวข้องกับอารมณ์ (A System of Affective Representation) เป็นระบบการนำเสนอทางด้านอารมณ์ของแต่ละบุคคล ซึ่งประกอบด้วย การเปลี่ยนแปลงทางอารมณ์ เจตคติ ความเชื่อ ค่านิยม ของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์หรือเกี่ยวกับตัวพวกเขาในความสัมพันธ์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ อารมณ์มีความสำคัญต่อการปรับปรุงหรือขัดขวางความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ (DeBellis 1996; Goldin 2000; McLeod and Adams 1989 อ้างถึงใน Goldin & Shteingold, 2001)

ระบบการนำเสนอภายในของแต่ละคนไม่สามารถสังเกตได้โดยตรง แต่ใช้การอ้างถึง เกี่ยวกับการนำเสนอภายในของนักเรียนบนพื้นฐานการปฏิสัมพันธ์กับการนำเสนอภายนอก หรือการสนทนาเกี่ยวกับการนำเสนอภายนอก หรือ ผลผลิตของการนำเสนอภายนอก ครูที่มีทักษะที่ดีสามารถทำได้อย่างเป็นอัตโนมัติโดยให้ความสนใจกับ คำพูด งานเขียน การใช้การจัดกระทำกับสื่อวัตถุ หรือการใช้เครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ของนักเรียน ในขณะที่นักเรียนพยายามทำความเข้าใจมโนมติที่ถูกต้องและมโนมติที่ไม่เข้าใจ ด้วยตัวของเขาเอง ในบางครั้งเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการมองการนำเสนอภายนอกว่าเป็นการนำเสนอภายใน ในขณะที่นักเรียนวาดแผนภาพหรือเขียนสูตรในการอธิบายสิ่งที่พวกเขากำลังคิด ในเวลาเดียวกันสามารถมองการนำเสนอภายในเป็นการนำเสนอภายนอก ในขณะที่นักเรียนสร้าง “ภาพในใจ (Mental Picture)” ของการดำเนินการที่มีอยู่ใน สูตรทางเลขคณิต มุมมองที่เปลี่ยนแปลงไปนี้ เป็นลักษณะพิเศษของ ธรรมชาติที่เป็นได้ทั้งสองทางของการนำเสนอ

การนำเสนอภายในไม่ได้ทำการให้รหัสหรือนำเสนอออกมาให้เห็นภายนอกได้อย่างง่าย การใช้การนำเสนอภายในเพื่อแสดงลักษณะพิเศษของความเข้าใจเชิงมโนมติของแต่ละคน โดยที่การนำเสนอภายในสามารถอ้างถึงแต่ละอย่างในแนวทางที่ซับซ้อน ซึ่งเป็นแง่มุมทางจิตวิทยาที่สำคัญที่สุดอย่างหนึ่งของพวกเขา ดังนั้นการนำเสนอภายในของแต่ละคน เกี่ยวกับ -3 อาจจะประกอบด้วยวลีที่เป็นภาษา เช่น “เป็นจำนวนตรงข้ามของ 3” หรือ “เป็นจำนวนลบของสาม” ภาพที่ทำให้ซับซ้อน หรือ ภาพเชิงปริภูมิ เช่น ตำแหน่งที่ถัดจากศูนย์ไปทางซ้ายสามตำแหน่งบนเส้นจำนวน ภาพที่ถูกให้รหัสหรือลำดับของการกระทำที่เป็นการเคลื่อนไหว เช่นเดียวกับการจังหวะที่ก้าวถอยหลังสามจังหวะหรือหมุนรอบและใช้สามจังหวะ ความหลากหลายที่สัมพันธ์กับกระบวนการเชิงสัญลักษณ์ที่เป็นทางการ เช่น การรวมกันของ -3 กับ +3 ได้ผลลัพธ์เป็น 0 และความเป็นไปได้อีกหลายอย่าง โครงร่างดังกล่าวสามารถนำเสนอแต่ละอย่างได้ในหลากหลายเวลาด้วย คำ นำเสนอภาพที่มองเห็น ใช้ภาพเพื่อนำเสนอขั้นตอนที่เป็นทางการ และอื่นๆ

มโนมติทางคณิตศาสตร์ถูกเรียนรู้และสามารถประยุกต์ไปสู่ขอบเขตของการนำเสนอภายในที่หลากหลายในและเหมาะสมซึ่งได้ถูกพัฒนาต่อไปด้วยความสัมพันธ์เชิงหน้าที่

ระหว่างการนำเสนอภายในแต่ละอย่าง ธรรมชาติของการพัฒนาการนำเสนอและความเพียงพอของการนำเสนอ เป็นส่วนหนึ่งจากการปฏิสัมพันธ์ของแต่ละคนกับระบบการนำเสนอภายนอกที่ถูกพัฒนาตามที่ตกลงกันไว้ในคณิตศาสตร์ และส่วนหนึ่งจากการปฏิสัมพันธ์ของแต่ละคนกับสถานการณ์ที่ไม่เป็นคณิตศาสตร์

นอกจากนี้การนำเสนอที่มีผลต่อความเข้าใจและวิธีการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่เกิดขึ้นในห้องเรียน แบ่งออกเป็น 2 ประเภท คือ (1) การนำเสนอเพื่อการเรียนการสอน ที่ถูกใช้โดยครูเพื่อสื่อสารความรู้กับนักเรียน เช่น บทนิยาม ตัวอย่าง และ แบบจำลอง ซึ่งการนำเสนอในรูปแบบนี้เป็นการนำเสนอภายนอกเข้าสู่ตัวนักเรียน เป็นการใช้วิธีการสื่อสารร่วมกันระหว่างผู้สอนกับผู้เรียน (2) การนำเสนอเชิงการรู้ที่ถูกสร้างโดยตัวของนักเรียนเอง ในขณะที่พวกเขาพยายามสร้างความหมายของมโนมติทางคณิตศาสตร์ หรือพยายามหาวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งการนำเสนอในรูปแบบนี้เป็นการนำเสนอที่อยู่ภายในตัวนักเรียน และอาจจะไม่ใช้ร่วมกับคนอื่นๆ การนำเสนอทั้ง 2 ประเภทนี้ ได้รับอิทธิพลมาจากปัจจัยทางด้านวัฒนธรรม ที่ประกอบด้วยลักษณะเฉพาะของภาษาที่ถูกใช้ในขอบเขตของคณิตศาสตร์ ภาษาบางภาษาช่วยส่งเสริมการนำเสนอในการจัดการเรียนการสอน และสร้างมโนมติในการเข้าใจ ได้ดีกว่าภาษาอื่น การเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอในการสอนในบางครั้งไม่ชัดเจน ซึ่งมีสาเหตุมาจาก ลักษณะบางอย่างของภาษาพูด(Miura, 2001) ซึ่งกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ถูกวางไว้ในบริบทเกี่ยวกับเครื่องมือเพื่อการคิดและการเรียนรู้ ซึ่งเป็นเครื่องมือที่สำคัญที่อยู่ในภาษาของคณิตศาสตร์ (Kaput 1991; Rogoff 1990: Steffe, Cobb, and von Glaserfeld 1988, อ้างถึงใน Miura, 2001)

3.4 ความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายนอกและการนำเสนอภายใน

Hiebert and Carpenter (1992) กล่าวว่าความเข้าใจทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในของแต่ละบุคคล ซึ่งแนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่เป็นนามธรรม เกิดขึ้นภายในเป็นสิ่งที่ไม่สามารถสังเกตได้ จึงจำเป็นต้องสื่อสารและสื่อความหมายโดยผ่านการนำเสนอภายนอกในบางแนวทาง เช่น การใช้ภาษาพูด การเขียนสัญลักษณ์ การใช้ภาพ หรือการใช้วัตถุทางกายภาพในการนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์นั้น โดยที่นักเรียนสามารถสังเกตและจัดกระทำกับการนำเสนอนั้นได้ กระบวนการสร้างความเข้าใจ นักเรียนจะต้องใช้ความความรู้หรือประสบการณ์เดิมของนักเรียนมาสร้างความสัมพันธ์กับการนำเสนอภายนอกเพื่อให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดเดิมกับแนวคิดใหม่ เมื่อเครือข่ายของการนำเสนอภายในของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้นในขณะที่สารสนเทศใหม่ถูกเชื่อมโยงกับเครือข่ายความรู้ที่มีอยู่ หรือ ในขณะที่ความสัมพันธ์ถูกสร้างขึ้นระหว่างสารสนเทศที่ไม่ได้เชื่อมโยงกันมาก่อน ความเข้าใจพัฒนาขึ้นในขณะที่เครือข่าย

ของความรู้ใหญ่ขึ้นและมีการจัดการที่มากขึ้น ความเข้าใจจะถูกจำกัดถ้ามีเพียงบางรูปแบบของการนำเสนอภายในที่มีศักยภาพพอที่จะมีความสัมพันธ์กับแนวคิดที่ถูกเชื่อมโยงหรือ ถ้าการเชื่อมโยงนั้นอ่อน ซึ่งการเชื่อมโยงที่อ่อนและไม่คงทนอาจจะไม่มีประโยชน์ในการเผชิญกับสถานการณ์ที่ขัดแย้งหรือไม่สนับสนุน แต่ความเข้าใจจะเพิ่มขึ้นเมื่อเครือข่ายความรู้พัฒนาขึ้น และความสัมพันธ์แข็งแรงขึ้นด้วยการเสริมแรงด้วยประสบการณ์และโครงสร้างเครือข่ายความรู้ที่ยึดแน่น ในทางตรงกันข้ามการสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้คนอื่นได้รู้ จะใช้การนำเสนอภายนอกช่วยในการสื่อสารแนวคิดนั้น ซึ่งแนวคิดทางคณิตศาสตร์แนวคิดหนึ่งสามารถนำเสนอโดยใช้การนำเสนอภายนอกได้ในหลายรูปแบบ ซึ่งจะเกิดการเชื่อมโยงระหว่างการนำเสนอภายนอกด้วย

การเชื่อมโยงระหว่างการนำเสนอภายนอกที่แตกต่างกันของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เหมือนกัน หรือระหว่างแนวคิดที่เกี่ยวข้องกันภายในการนำเสนอเดียวกัน การเชื่อมโยงระหว่างการนำเสนอที่แตกต่างกันจะพิจารณาบน ความสัมพันธ์ของความเหมือน นั่นคือ ในแนวทางที่เหมือนกัน และความสัมพันธ์ของความแตกต่าง นั่นคือ ในแนวทางที่แตกต่างกัน นอกจากนี้การเชื่อมโยงภายใน ที่เมื่อความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายในของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้น ซึ่งทำให้เกิดเครือข่ายความรู้ขึ้น (Hiebert & Carpenter, 1992)

3.5 บทบาทของการนำเสนอในการเรียนการสอน

Luitel (n.d.) ได้กล่าวถึงบทบาทของการนำเสนอในการจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนว่ามีบทบาทที่สำคัญ ดังต่อไปนี้

3.5.1 การนำเสนอในฐานะแหล่งของการสื่อสาร กล่าวคือ เมื่อพิจารณาการนำเสนอเป็นส่วนหนึ่งของการสื่อสาร ดังนั้น การนำเสนอมีบทบาทที่สำคัญในการสนับสนุนให้เกิดการสื่อสารที่มีประสิทธิภาพภายในระบบคณิตศาสตร์ หรือข้ามระบบ นั่นคือการสื่อสารที่มีประสิทธิภาพต้องการระบบการนำเสนอที่มีประสิทธิภาพ

ในทางคณิตศาสตร์ การสื่อสารเป็นสิ่งสำคัญของการเรียนรู้ที่ประสบความสำเร็จ เมื่อคณิตศาสตร์เป็นภาษา การนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นวิธีการหนึ่งในการสื่อสารในคณิตศาสตร์ที่เป็นคำในภาษา เช่น แซลลี่ นำเสนอ 2 + 3 = ? โดยใช้เรื่องราว ดังนี้ ทอม มีเงินอยู่ $2 และ เดฟ มีเงินอยู่ $3 ถ้านำเงินของทั้ง 2 คนมารวมกันจะเป็นเงินเท่าไหร่ จะเห็นว่าเรื่องราว(การนำเสนอ) เป็น การบอก(การสื่อสาร) ให้คนอื่นรู้เกี่ยวกับแนวคิดของแซลลี่

3.5.2 การนำเสนอในฐานะที่เป็นตัวชี้วัดของเจตคติของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ กล่าวคือ ระบบการนำเสนอที่เกี่ยวกับทางด้านอารมณ์และความรู้สึก เป็นสิ่งที่สามารถระบุได้ถึงเจตคติของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ระบบการนำเสนอภายในช่วยให้นักเรียน

ปรับเปลี่ยนเจตคติที่มีต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญมากสำหรับครูที่จะรู้เกี่ยวกับเจตคติของนักเรียนและการเปลี่ยนความเชื่อของนักเรียนที่มีต่อมโนมติทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำข้อมูลไปใช้ในการออกแบบกิจกรรมการเรียนรู้ต่อไป

3.5.3 การนำเสนอในฐานะหลักฐานในการตรวจสอบความเข้าใจในการเรียนรู้ของนักเรียน กล่าวคือ เป้าหมายของการเรียนรู้คณิตศาสตร์คือเพื่อพัฒนาความเข้าใจในการเรียนรู้ สำหรับครูคณิตศาสตร์การนำเสนอมีประโยชน์เพื่อการแก้ปัญหาเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน จากความเชื่อที่ว่า ความเข้าใจในการเรียนรู้เกิดขึ้นได้เมื่อ การนำเสนอเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งของโครงสร้างทางปัญญา หรือเครือข่ายของความรู้ (Hiebert & Carpenter, 1992) และการใช้การนำเสนอที่หลากหลาย เช่น การใช้ไดอะแกรม ภาษา หรือวัตถุที่เป็นรูปธรรมจะเป็นแนวทางหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ

3.5.4 การนำเสนอในฐานะที่เป็นตัวเชื่อมระหว่างสิ่งที่มีตัวตนอยู่จริงกับมโนมติ กล่าวคือ การนำเสนอไม่ใช่สิ่งเดียวที่มีตัวตนอยู่จริงของบางสิ่งบางอย่าง แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่หลายมุมมอง ของการอธิบายความสัมพันธ์ มโนมติ และหลักการทางคณิตศาสตร์ นอกจากนี้ยังช่วยสร้างและทำให้มองเห็นภาพของความสัมพันธ์ระหว่างมโนมติด้วย

3.5.5 การนำเสนอในฐานะที่เป็นกระบวนการการพัฒนาที่มีอยู่ในการดำเนินการทางความคิดอย่างต่อเนื่อง

3.5.6 ระบบการนำเสนอในฐานะที่เป็นวิธีการในการก้าวข้ามอุปสรรคเชิงการรู้ที่เป็นนามธรรม นั่นคือ อุปสรรคเชิงการรู้ เป็นส่วนหนึ่งขององค์ความรู้ของนักเรียนที่มีโดยทั่วไปในความพึงพอใจในการใช้เวลาเพื่อแก้ปัญหาบางปัญหา และกลายเป็นสิ่งที่อยู่ภายในจิตใจ แต่ผลที่ตามมาเมื่อเผชิญหน้ากับปัญหาที่การพิสูจน์ไม่เพียงพอหรือเป็นการยากที่จะนำไปปรับใช้ (Tall, 1994 อ้างถึงใน Luitel, n.d.) นอกจากนี้สามารถก้าวข้ามผ่านอุปสรรคโดยการเพิ่มประสิทธิภาพของระบบการนำเสนอ (Goldin & Shteingold, 2001) เมื่อระบบการนำเสนอเชื่อมโยงกับระบบอื่นๆ แล้วสามารถก้าวผ่านอุปสรรคไปได้ นอกจากนี้ถ้าการนำเสนอถูกพัฒนาผ่านแง่มุมที่กว้างขึ้น จะทำให้เป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้ในอนาคตอย่างมาก

3.5.7 การนำเสนอไม่ใช่วิธีการแต่เป็นส่วนหนึ่งของกระบวนการ หรือ เป็นแนวทางของการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ กล่าวคือ การนำเสนอไม่ได้เป็นทั้งวิธีการสอนหรือทฤษฎีการเรียนรู้ แต่เป็นแนวทางของการสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ซึ่งจะมีประโยชน์ในการพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ให้เห็นชัดเจนผ่านระบบการนำเสนอที่แตกต่างกัน โดยที่นักเรียนรวมแนวคิดของพวกเขาเป็นหนึ่ง ในแนวทางที่เป็นระบบ นอกจากนี้ระบบการนำเสนอช่วยพัฒนาการจัดประเภท และประเภทย่อยของแนวคิดของสิ่งที่พวกเขานำเสนอ

Zhang (1997) ได้กล่าวถึง บทบาทสำคัญของการนำเสนอภายนอก สำหรับการนำเสนอภายนอกไม่ใช่สิ่งที่นำเข้าหรือกระตุ้นเข้าไปภายในสมองของแต่ละบุคคลได้อย่างง่าย การนำเสนอภายนอก มีคุณสมบัติที่สำคัญหลายอย่าง ที่เห็นได้อย่างชัดเจน คือ การนำเสนอภายนอกสามารถสนับสนุนในฐานะสิ่งช่วย ในการทำ นั่นคือ ขยายขอบเขตการทำงานของหน่วยความจำ เอกสารสำคัญ ซึ่งมีความสำคัญที่ความคงทนโดยอนุญาตให้หน่วยความจำถูกใช้ร่วมกัน เป็นต้น แต่อย่างไรก็ตามคุณสมบัติที่สร้าง การนำเสนอภายนอกอย่างแท้จริง ที่สำคัญมันไม่ใช่ตัวช่วยการจำ (Memory Aids)

โดยปกติแผนภาพ กราฟ และรูปภาพ เป็นการนำเสนอประเภทที่สำคัญของการนำเสนอภายนอก ซึ่งสิ่งเหล่านี้ถูกใช้ในงานทางด้านเชิงการรู้หลายงาน เช่น การแก้ปัญหา(Problem Solving) การใช้เหตุผล (Reasoning) และการตัดสินใจ (Decision Making) การศึกษาความสัมพันธ์ระหว่าง มโนภาพ (Mental Images) และภาพภายนอก (External Picture) (Chambers&Reisberg, 1985; Reisberg, 1987 อ้างถึงใน Zhang, 1997) แสดงให้เห็นว่าภาพภายนอกสามารถทำให้คนเข้าถึงความรู้ และทักษะที่ไม่สามารถทำได้จากการนำเสนอภายใน นอกจากนี้ในการศึกษาการแก้ปัญหาเกี่ยวกับแผนภาพ Larkin and Simon(1987; Larkin, 1989 อ้างถึงใน Zhang, 1997) พบว่าการนำเสนอในรูปแบบของแผนภาพช่วยส่งเสริมการปฏิบัติการ ที่ช่วยให้การจำลักษณะโครงสร้างปัญหาได้ง่ายขึ้น และทำให้สามารถช่วยให้เกิดการอ้างอิงโดยตรง การนำเสนอโดยกราฟช่วยให้ข้อมูลบางอย่างมีความชัดเจน สามารถแปลความหมายได้ง่าย การแสดงภาพของกราฟที่แตกต่างกันทำให้เกิดประสิทธิภาพของการแก้ปัญหาที่ต่างกัน และเป็นตัวทำให้เกิดพฤติกรรมเชิงการรู้ที่แตกต่างกัน Kleinmuntz and Schkade (1993, อ้างถึงใน Zhzng, 1997) แสดงให้เห็นว่า การนำเสนอที่แตกต่างกันของข้อมูลเดียวกัน เช่น กราฟ ตาราง และรายการ เป็นต้น สามารถเปลี่ยนการตัดสินใจในการใช้ยุทธวิธี ได้อย่างทันทีทันใด

การศึกษาเกี่ยวกับการรู้หนังสือ แสดงให้เห็นถึงบทบาทที่สำคัญของการนำเสนอภายนอกด้วย Bloomfield (1993, อ้างถึงใน Zhang, 1997) และ Saussure (1959, อ้างถึงใน Zhang, 1997) กล่าวว่าการเขียนไม่ใช่เพียงแค่หมายถึงการแปลงหรือการแสดงอีกครั้งของคำกล่าวที่อยู่ในรูปของเสียง ไปยังการนำเสนอภายนอกในรูปแบบที่เกี่ยวกับการมองเห็นเท่านั้น และไม่ใช่การถอดความที่ง่าย เพราะการเขียนเป็นการสนับสนุนการคิดเชิงสะท้อน (Reflective Thought) (Norman,1993b, อ้างถึงใน Zhang, 1997) และ Olson (1996, อ้างถึงใน Zhang, 1997) กล่าวว่า การเขียนไม่เพียงแค่ถอดความเท่านั้น แต่ทำให้เกิดคุณสมบัติเชิงโครงสร้างของภาษา นั่นคือ การพัฒนาการเขียนเป็นการค้นพบโครงสร้างที่สามารถนำเสนอภาษาจากมุมมองที่ค่อยๆพัฒนา

3.6 บทบาทของการนำเสนอในการเรียนการสอนพีชคณิต

ครูและนักวิจัยจำนวนมากรู้ว่าการนำเสนอในทางพีชคณิตเกือบทั้งหมดในขณะที่สอนเกี่ยวกับประโยคและสมการสามารถสร้างสิ่งขัดขวางอย่างรุนแรงในกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพและมีความหมาย(Kieran 1992, อ้างถึงใน Friedlander & Tabach, 2001) ดังนั้นนักคณิตศาสตรศึกษาเสนอแนะว่านักเรียนควรใช้การนำเสนอที่หลากหลายตั้งแต่การเรียนรู้พีชคณิตในระดับต้นๆ (NCTM, 2000)

Friedlander and Tabach (2001) กล่าวถึง การใช้การนำเสนอที่เกี่ยวกับภาษา ตัวเลข กราฟ และที่เป็นพีชคณิตสามารถสร้างกระบวนการเรียนรู้พีชคณิตที่มีความหมายและมีประสิทธิภาพ ซึ่งการสร้างที่สำคัญถูกทำให้เป็นจริงในทางปฏิบัติ ดังข้อดีและข้อเสียของการนำเสนอแต่ละรูปแบบ ต่อไปนี้

การนำเสนอที่เกี่ยวกับภาษา (Verbal Representation) ถูกใช้ในการสร้างปัญหาเสมอและมีความสำคัญในการแปลความหมายในขั้นสุดท้ายของผลที่ได้รับ กระบวนการแก้ปัญหาการนำเสนอทางภาษาของปัญหาสร้างสรรค์สิ่งแวดล้อมที่เป็นธรรมชาติเพื่อความเข้าใจบริบทของปัญหาและเพื่อสื่อสารขั้นตอนการแก้ปัญหา การให้เหตุผลทางภาษาเป็นเครื่องมือสำหรับการแก้ปัญหาด้วย และส่งเสริมการนำเสนอและการประยุกต์ใช้ในรูปแบบทั่วไป ซึ่งเน้นความเชื่อมโยงระหว่างคณิตศาสตร์และขอบเขตอื่นๆ ทางวิชาการและชีวิตประจำวัน แต่การใช้ภาษาพูดมีความคลุมเครือ และดึงความสัมพันธ์ที่ไม่เกี่ยวข้องกันหรือไม่มีผลต่อกัน มีความเป็นสากลน้อยและขึ้นอยู่กับรูปแบบของแต่ละคนซึ่งเป็นอุปสรรคในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

การนำเสนอเชิงตัวเลข (Numerical Representation) จะเป็นสิ่งที่อยู่ใกล้ชิดกับนักเรียนตั้งแต่การเริ่มต้นเรียนพีชคณิต และมักจะมาก่อนการนำเสนอรูปแบบอื่น การใช้จำนวนมีความสำคัญในการทำความเข้าใจเริ่มแรกของปัญหาและในการสื่อสารกรณีเฉพาะ อย่างไรก็ตามยังขาดความเป็นทั่วไปซึ่งเป็นข้อเสีย วิธีการทางตัวเลข อาจจะไม่มีประสิทธิภาพอย่างมาก ในการจัดให้ที่เป็นรูปภาพทั่วๆไป ดังนั้น ประเด็นที่สำคัญบางอย่าง หรือวิธีการแก้ปัญหาบางวิธีอาจจะผิดพลาดได้ ดังนั้นความสามารถในฐานะที่เป็นเครื่องมือสำหรับการแก้ปัญหาบางครั้งอาจจะถูกจำกัด

การนำเสนอแบบกราฟ (Graphical Representation) มีประสิทธิภาพในการจัดภาพที่ชัดเจนของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง กราฟเป็นการดึงดูดความสนใจของนักเรียนที่ชอบวิธีการที่มองเห็นได้ ในครั้งแรกที่เป็น แต่การนำเสนอแบบกราฟอาจจะขาดความแม่นยำ ซึ่งมีผลมาจากปัจจัยภายนอก (เช่น การให้สเกล) และมักจะนำเสนอเพียงแค่ส่วนหน้าของโดเมนหรือเรนจ์ ของปัญหาเท่านั้น ประโยชน์ในฐานะที่เป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์เปลี่ยนแปลงไปตามงานที่ทำด้วย

การเสนอเชิงพีชคณิต (Algebraic Representation) เป็นการนำเสนอที่สั้นกะทัดรัด จำนวนรูปทั่วไปและมีประสิทธิภาพในการนำเสนอรูปแบบหรือโมเดลทางคณิตศาสตร์ การจัดกระทำกับสิ่งที่เป็นทางพีชคณิต ในบางครั้งเป็นเพียงวิธีการของการแสดงให้เห็นว่าถูกต้องหรือการพิสูจน์ข้อความทั่วไป อย่างไรก็ตามการใช้เฉพาะเพียงแค่สัญลักษณ์ทางพีชคณิต (ในตำแหน่งการเรียนรู้ใดๆ) อาจจะไม่ชัดเจนหรือ ขัดขวาง ความหมายทางคณิตศาสตร์หรือ ธรรมชาติของวัตถุที่ถูกนำเสนอ และเป็นสาเหตุของความยุ่งยากในการแปลความหมายผลที่ได้จากการนำเสนอที่เป็นพีชคณิตของนักเรียนบางคน

ความสำคัญของการทำงานเกี่ยวกับการนำเสนอที่หลากหลาย รวมถึงข้อดีและข้อเสียของการนำเสนอแต่ละรูปแบบเหล่านี้ แสดงให้เห็นความแตกต่างของรูปแบบการคิดของนักเรียนแต่ละคน ดังนั้นทั้งนักพัฒนาหลักสูตร และครู ควรจะตระหนักถึงความจำเป็นในการทำงานในสิ่งแวดล้อมของการนำเสนอที่หลากหลาย นั่นคือ สิ่งแวดล้อมที่อนุญาตให้ใช้การนำเสนอ ปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาในแนวทางที่หลากหลาย(ส่วนใหญ่จะเป็นการนำเสนอบางอย่าง หรือทั้ง 4 รูปแบบการนำเสนอที่กล่าวมาข้างต้น) ถึงแม้ว่าการนำเสนอแต่ละอย่างมีข้อเสียในตัวของมันเอง แต่การใช้ที่การนำเสนอร่วมกัน ไม่สามารถตัดข้อเสียออกหรือพิสูจน์ว่าเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพ (Kaput, 1992, อ้างถึงใน Friedlander & Tabach, 2001) เช่นเดียวกันกับ มาตรฐานการนำเสนอสำหรับนักเรียน เกรด 6-8 ใน หลักการและมาตรฐานหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ที่สัมพันธ์กับวิธีการเกี่ยวกับปัญหาทางพีชคณิต ในสถานการณ์ทั่วไปที่เกี่ยวกับฟังก์ชันเชิงเส้น (NCTM, 2000) ดังนี้

นักเรียนจะสามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับพีชคณิตได้ดีขึ้น ถ้าพวกเขาสามารถเคลื่อนย้ายจาก การนำเสนอรูปแบบหนึ่งไปยังการนำเสนออีกรูปแบบหนึ่งได้อย่างง่าย นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นมักจะเริ่มต้นด้วยตารางของข้อมูลเชิงตัวเลขเพื่อทดสอบแบบแผนภายใต้เงื่อนไขของฟังก์ชันเชิงเส้น แต่พวกเขาควรจะเรียนรู้เพื่อที่จะนำเสนอข้อมูลเหล่านั้นในรูปแบบของกราฟ หรือ สมการ ด้วย เมื่อพวกเขาต้องการที่จะระบุลักษณะทั่วไปของความสัมพันธ์เชิงเส้น นักเรียนควรจะมีความยืดหยุ่นในการตระหนักถึง รูปแบบที่เท่ากันของ สมการเชิงเส้น หรือประโยคเชิงเส้น ความยืดหยุ่นสามารถเกิดขึ้นในขณะที่นักเรียนได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับแนวทางที่หลากหลายของการนำเสนอปัญหาที่ขึ้นกับบริบท

ในรูปแบบเฉพาะเจาะจงมากขึ้น Ainsworth, Bibby, and Wood (1998, อ้างถึงใน Friedlander & Tabach, 2001) กล่าวถึงแนวทาง 3 แนวทางที่ การนำเสนอที่หลากหลายอาจจะสนับสนุนการเรียนรู้ (a) มีความเป็นไปได้อย่างสูงที่การนำเสนอที่แตกต่างกันสามารถอธิบายแง่มุมที่แตกต่างกันได้อย่างชัดเจน และ ที่แนะนำ ข้อมูลที่ได้รับจากการรวมกันของการนำเสนอที่หลากหลาย จะดีกว่าข้อมูลที่ได้รับจากการนำเสนอเพียงการนำเสนอเดียว (b) การนำเสนอที่

หลากหลายจำกัดขอบเขตแต่ละรูปแบบ เพื่อกำหนดขอบเขตของการดำเนินการให้เล็กลง (c) เมื่อต้องการเชื่อมโยงการนำเสนอที่หลากหลายกับการนำเสนอแต่ละรูปแบบ ผู้เรียนต้องเข้าร่วมในกิจกรรมที่ส่งเสริมความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

3.7 บทบาทของครูเกี่ยวกับการใช้การนำเสนอ

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000) ได้อธิบายถึงบทบาทของครูในการพัฒนาการใช้การนำเสนอของนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น สามารถช่วยนักเรียนให้นักเรียนรู้การใช้การนำเสนอที่หลากหลายและเหมาะสมโดยการส่งเสริมนักเรียนให้คิดหาการนำเสนอและใช้การนำเสนอเพื่อสนับสนุนการคิดและการสื่อสารแนวคิดของพวกเขา ครูช่วยนักเรียนในการพัฒนาความสามารถเกี่ยวกับการนำเสนอโดยการรับฟังความคิดเห็น ถามคำถามและการสร้างความจริงใจในการพยายามทำความเข้าใจสิ่งที่นักเรียนพยายามสื่อสารด้วยการวาดภาพ หรือ การเขียน โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อพวกเขาใช้การนำเสนอที่มีลักษณะพิเศษ หรือการนำเสนอที่ไม่เป็นแบบแผน ครูจะต้องรู้เวลาในการตัดสินและวิธีการในการช่วยนักเรียนให้ใช้การนำเสนอที่มีแบบแผน ถึงแม้ว่าการใช้การนำเสนอที่มีแบบแผนมีประโยชน์มาก แต่การแนะนำของครูเกี่ยวกับการนำเสนอก่อนที่นักเรียนจะสามารถใช้การนำเสนออย่างมีความหมายสามารถทำให้ไม่มีประสิทธิภาพ

ครูเป็นผู้มีบทบาทสำคัญในการช่วยให้นักเรียนพัฒนาความหมายสำหรับรูปแบบที่มีความสำคัญของการนำเสนอ ยกตัวอย่างเช่น นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นเรียนรู้ ทำความเข้าใจในความซับซ้อนของตัวแปร ครูสามารถช่วยนักเรียนให้เคลื่อนย้ายจากข้อจำกัดของความเข้าใจในเรื่องของตัวแปรโดยการเตรียมประสบการณ์การใช้การนำเสนอเพื่ออธิบายข้อมูลเชิงตัวเลข (Demana & Leitzel, 1988 อ้างถึงใน NCTM, 2000) ครูจะต้องจัดประสบการณ์เพื่อให้นักเรียนใช้การนำเสนอที่หลากหลายและแนะนำพวกเขาไปสู่รูปแบบอื่นของการนำเสนอ ที่เป็นประโยชน์ในการแก้ปัญหาบางปัญหา

ดังนั้นครูมีบทบาทสำคัญที่ช่วยให้นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นพัฒนาความเชื่อมั่นและความสามารถทั้งในการสร้างสรรค์การนำเสนอของพวกเขาเองเมื่อพวกเขาจำเป็นต้องแก้ปัญหาที่ท้าทาย และในการเลือกการนำเสนออย่างยืดหยุ่นและเหมาะสมจากรายการทั้งหมดของการนำเสนอที่มีอยู่ เมื่อต้องการช่วยนักเรียนให้ใช้การนำเสนอที่พวกเขาสร้างสรรค์ขึ้นมาหรือเลือกใช้การนำเสนอที่มีอยู่ ครูจะต้องช่วยนักเรียนให้ใช้การนำเสนอได้อย่างมีความหมาย โดยการกระตุ้นนักเรียนให้อภิปราย กราฟ รูปภาพ หรือสัญลักษณ์ ที่นักเรียนใช้ในขณะที่พวกเขาทำงาน ครูสามารถควบคุมการพัฒนาความสามารถในการใช้การนำเสนอของนักเรียน เมื่อนักเรียนมองเห็นวิธีการอื่นในการแปลความหมายสิ่งที่พวกเขาเขียนและวิธีการอื่นที่นำเสนอแนวคิดเดียวกัน แล้ว

พวกเขาสามารถประเมินการนำเสนอและตระหนักถึงลักษณะพิเศษที่สร้างการนำเสนอได้อย่างหลากหลาย เหมาะสม และมีประโยชน์ การสอนในด้านทักษะกระบวนการนักเรียนส่วนใหญ่จะมีความเข้าใจว่าสามารถช่วยแก้ปัญหาได้ง่ายขึ้น และประสิทธิภาพของรูปแบบของการนำเสนอที่มีอยู่ รวมไปถึงบทบาทของการนำเสนอในการสื่อสารกับเรื่องอื่นๆ ได้ด้วย

เมื่อเป้าหมายของการจัดการเรียนรู้คือเพื่อให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ รูปแบบการจัดการเรียนรู้ควรจะถูกออกแบบเพื่อให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยงแนวคิดที่มีความสัมพันธ์กัน และวิธีการจัดการเรียนรู้ควรจะช่วยสนับสนุนให้เกิดการเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดที่สัมพันธ์กัน หรือเชื่อมโยงความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายในกับการนำเสนอภายนอก หรือเชื่อมโยงภายในระบบการนำเสนอระบบเดียวกัน และการใช้การนำเสนอภายนอกของครู เช่น การใช้วัตถุที่เป็นรูปธรรม การใช้ภาษาของครูในขณะที่มีการอภิปรายในชั้นเรียน การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งสามารถพัฒนาผ่านการเชื่อมโยงระหว่างสัญลักษณ์และการนำเสนอในรูปแบบอื่น เช่น วัตถุจริง หรือเชื่อมโยงระหว่างระบบสัญลักษณ์ ซึ่งจะช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจได้ดีขึ้น Luitel (n.d.) กล่าวว่า การนำเสนอที่หลากหลาย เช่น การนำเสนอโดยใช้แผนภาพ การนำเสนอโดยใช้ภาษาพูด และการนำเสนอโดยใช้วัตถุที่เป็นรูปธรรม เป็นวิธีการหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ

3.8 ประโยชน์และความสำคัญของระบบการนำเสนอ

เนื่องจากการเรียนรู้ด้วยเข้าใจเป็นเป้าหมายสำคัญของการจัดการเรียนรู้ ดังนั้นครูจะต้องรู้ว่านักเรียนเข้าใจหรือไม่เข้าใจบางสิ่งบางอย่างโดยพิจารณาตามการนำเสนอของพวกเขา ถ้านักเรียนสามารถสร้างองค์ความรู้ได้ด้วยตัวของนักเรียนเอง แล้วนักเรียนควรจะมีบางสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการนำเสนอและการอธิบาย นั่นคือพวกเขาจะแสดงในสิ่งที่ไม่เหมือนที่เกิดขึ้นในการเรียนการสอนโดยตรง ในการเรียนการสอน ผู้ใหญ่เลือกการนำเสนอบางอย่างเพราะพวกเขาเห็นแล้วว่าการนำเสนอรูปแบบใดที่พวกเขาเข้าใจแล้ว นั่นคือการนำเสนอเป็นสื่อกลางสำหรับสิ่งที่ครูรู้แล้ว ซึ่งเป็นเรื่องง่ายสำหรับครูในการส่งเสริมให้เกิดประสิทธิภาพของการนำเสนอ การคิด กิจกรรม การจัดกระทำ รูปภาพ หรือถ้อยคำมีความหมายสำหรับครูแล้วจะชักจูงให้นักเรียนนำแง่มุมแบบผู้ใหญ่ของครูไปใช้ ซึ่งแนวความคิดนี้มีครูที่ดีต่างคิดว่าเป็นวิธีการที่ไม่ได้ผล นักเรียนจะบรรจุแนวคิดใหม่ใส่เข้าไปในความรู้ที่มีอยู่ของพวกเขา เมื่อนักเรียนกลับไปทำแบบทดสอบที่ใช้วิธีการเดียวกันกับที่ครูสอนในห้องเรียนโดยตรง มันไม่ชัดเจนที่ว่าพวกเขาเข้าใจวัสดุอุปกรณ์และเป็นโอกาสที่ดีหรือไม่ที่พวกเขาได้เรียนรู้วิธีการเหล่านั้น เมื่อนักเรียนเข้าใจบางสิ่งจริงๆ ที่ความหมายของการนำเสนอ หรือการให้คำปรึกษาอีกครั้งเกี่ยวกับสารสนเทศอื่น หรือประสบการณ์อื่นๆ นักเรียนจะสามารถ

นำเสนอวัสดุอุปกรณ์ได้อย่างดีในแนวทางเพียงแนวทางเดียวที่แสดงให้เห็นว่าพวกเขามีความเข้าใจมโนมติและกระบวนการนั้น(Lemon, 2001)

Goldin (1998) กล่าวว่า ระบบภายในและระบบภายนอกของการนำเสนอ เป็นความสามารถของการรวมตัวของการสร้างที่สำคัญที่สุด จากความหลากหลายอย่างมากของแง่มุมเชิงทฤษฎี ซึ่งสามารถนำไปใช้ในทางปฏิบัติได้ โดยพื้นฐานส่วนใหญ่ในคณิตศาสตรศึกษาไม่ควรจะถูกจำกัดแค่เป็นการส่งผ่าน (การถ่ายทอด) เนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เฉพาะเจาะจงไปยังนักเรียนหรือแม้แต่การสอนนักเรียนเกี่ยวกับกระบวนการแก้ปัญหาที่เฉพาะเจาะจง มากไปกว่านั้นเป้าหมายสำคัญควรเป็นไปเพื่อสนับสนุนนักเรียนเกี่ยวกับการสร้างที่มีประสิทธิภาพ และการสร้างระบบภายในของการนำเสนอ

คณิตศาสตร์ในโรงเรียนจำนวนมากยังคงเป็นการให้ความใส่ใจอย่างชัดเจน เกี่ยวกับการจัดกระทำระบบสัญลักษณ์ที่เป็นทางการ อย่างไรก็ตาม ความพยายามที่สามารถพิจารณาได้ในการเปลี่ยนแปลงบทเรียนในห้องเรียน โดยเน้นไปที่ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา การแสดงภาพ การระลึกรูปแบบและเทคนิคการดำเนินการตามแผนเชิงมโนมติที่มากขึ้น ข้อเสนอแนะนี้ประยุกต์ไปยังทุกขอบเขตของหัวข้อ เกี่ยวกับการยกเว้นที่เป็นไปได้ของเรขาคณิตในระดับมัธยมศึกษา ที่เน้นเกี่ยวกับการพิสูจน์แทนที่การจัดกระทำเชิงสัญลักษณ์

ในระดับแรกๆ นักเรียนเรียนรู้ที่จะเขียนและจัดกระทำเชิงจำนวนและเครื่องหมายการดำเนินการ จากนั้นพวกเขาทำต่อเกี่ยวกับ ขั้นตอนมาตรฐานสำหรับการบวก และการลบ การคูณและการหาร จำนวนเต็ม เศษส่วน และทศนิยม ในลักษณะที่เป็นทางการใหม่เช่น $ และ % ถูกเสนอแนะสำหรับวัตถุประสงค์ที่พิเศษ ในระดับมัธยม นักเรียนถูกแนะนำให้เขียนและจัดกระทำการเขียนสูตรเกี่ยวกับพีชคณิต กราฟของสมการ การใช้ระนาบคาร์ทีเซียน (Cartesian Coordinates) การให้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ เป็นต้น และในระดับมหาวิทยาลัยพวกเขาเรียนเกี่ยวกับ การจัดกระทำโดยการเขียนรูปที่เป็นทางการของฟังก์ชัน อนุพันธ์ การอินทิเกรตจำกัดและไม่จำกัด อนุพันธ์ย่อยและอื่นๆ แม้ว่าการสอนการประมาณค่า มักจะถูกจำกัดกระบวนการขึ้นตอนการกระทำ ที่เป็นไปตาม การดำเนินการเชิงเลขคณิตเกี่ยวกับปริมาณที่อยู่รอบๆ การแก้ปัญหาในบางครั้งถูกจำกัดไปยังปัญหาที่เป็นเรื่องราวที่สร้างขึ้นมา ซึ่งเป้าหมายเป็นเพียงแค่การแปลความหมายจากคำและประโยคของปัญหาที่ทำก่อนสัญลักษณ์รูปทั่วไปที่ได้เรียนรู้(และต่อจากนั้น แก้ปัญหาเกี่ยวกับสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และใช้ขั้นตอนที่เป็นมาตรฐาน)

ในทางตรงกันข้าม เมื่อเป้าหมายเป็นไปเพื่อพัฒนา ระบบการนำเสนอภายในหลายๆ ประเภท ซึ่งต้องค้นหาแนวทางในการจัดระดับที่เท่ากันของความใส่ใจ การนำเสนอเชิงจินตนาการการนำเสนอที่เป็นการวางแผน และบริหาร ควบคุม และการนำเสนอทางด้านอารมณ์ โดยปราศจาก

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ

การสละเวลาไปเพื่อเรียนรู้เทคนิคทางคณิตศาสตร์ การพัฒนาประสิทธิภาพในระบบการนำเสนอเหล่านี้ต้องกลายเป็นวัตถุประสงค์ที่ชัดเจนของพวกเขา และวิธีการของการประเมินต้องถูกพัฒนาที่สามารถประเมินความสำเร็จในการพัฒนาระบบการนำเสนอภายในได้

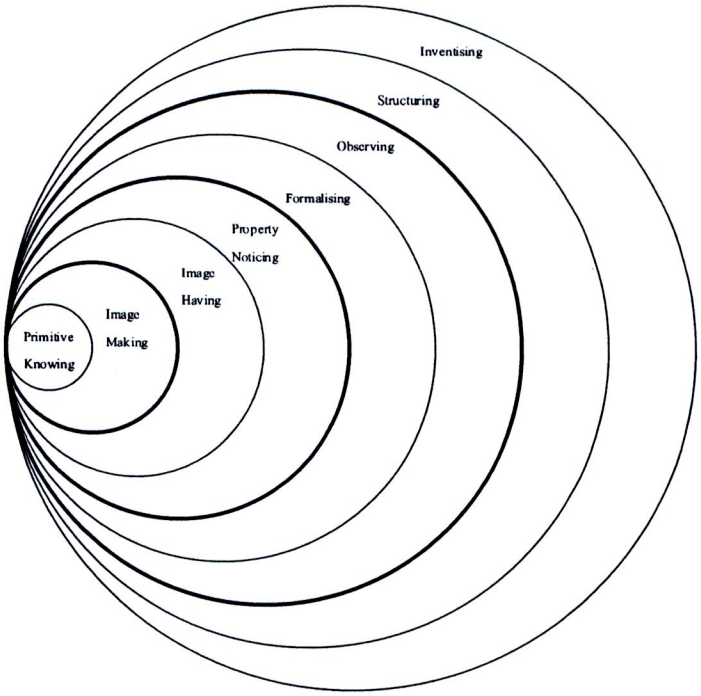
นอกจากนี้ เมื่อพิจารณาอย่างจริงจังในเรื่องการสร้างระบบการนำเสนอ จะต้องสนับสนุนอย่างจริงจังเกี่ยวกับกระบวนการเหล่านี้ในนักเรียน การกระทำเชิงสัญลักษณ์ที่สร้างสรรค์ (Inventive - Semiotic) ที่นักเรียนสร้างเครื่องหมายและให้ความหมายของเครื่องหมายเหล่านี้ ต้องทำด้วยตัวของพวกเขาเอง ตามเป้าหมายของการสอนและนักเรียนควรจะค้นหา ผลที่ตามมาเชิงเหตุผลทางคณิตศาสตร์ของการสร้างสรรค์ของพวกเขา และเกิดการเรียนรู้เพื่อสร้างการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ (ทั้งภายนอกและภายใน) ของพวกเขาเอง ในมุมมองของ Goldin การกำเนิดของเทคโนโลยีใหม่ๆ นำมาซึ่งเป้าหมายดังกล่าวที่เกี่ยวกับการบรรลุของนักเรียนจำนวนมาก

Donald (1991 อ้างถึงใน Zhang, 1997) กล่าวว่า การเปลี่ยนแปลงในโครงสร้างเชิงการรู้ที่ถูกสื่อโดยการนำเสนอภายนอก มีความสำคัญไม่น้อยไปกว่า โครงสร้างที่ถูกสื่อโดยการเปลี่ยนแปลงเชิงชีววิทยาในสมอง นั่นคือ ระบบสัญลักษณ์ภายนอก โดยเฉพาะอย่างยิ่งการเขียน ซึ่งเป็นระบบการนำเสนอที่สำคัญที่สุดและมีอิทธิพลต่อการสร้างภาพลักษณ์ที่เกิดขึ้นในระบบเชิงการรู้ของบุคคล Zang&Norman (1994, อ้างถึงใน Zhang,1997) ได้สรุปถึงความสำคัญของการนำเสนอภายนอกดังนี้ (1) การนำเสนอภายนอกให้ข้อมูลที่สามารถเข้าใจ และใช้ได้โดยตรงโดยปราศจากการแปลและสร้างรูปแบบอย่างชัดเจน (2) การนำเสนอภายนอก สามารถทำให้มองเห็นพฤติกรรมเชิงการรู้ นั่นคือ โครงสร้างเชิงกายภาพในการนำเสนอภายนอกจำกัดลำดับของการกระทำเชิงการรู้ที่เป็นไปได้ในความหมายว่าการกระทำบางอย่างได้รับอนุญาตและสิ่งอื่นถูกขัดขวาง (3) การนำเสนอภายนอกเปลี่ยนธรรมชาติของงาน นั่นคือ งานเกี่ยวกับการนำเสนอภายนอกและไม่เกี่ยวกับการนำเสนอภายนอก เป็นงานที่แตกต่างอย่างสิ้นเชิงโดยพิจารณาจากงานของผู้ดำเนินการ

แนวคิดทางคณิตศาสตร์จะถูกเข้าใจถ้าการนำเสนอภายในของความเข้าใจเป็นส่วนหนึ่งของเครือข่ายของการนำเสนอ ซึ่งนักเรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นักเรียนจะต้องสร้างปฏิสัมพันธ์ภายในระบบการนำเสนอเดียวกัน และปฏิสัมพันธ์ระหว่างระบบการนำเสนอภายในกับระบบการนำเสนอภายนอก ระดับของความเข้าใจบ่งบอกได้โดยจำนวนหรือความแข็งแรงของการเชื่อมโยง (Hiebert & Carpenter, 1992)

4. แนวคิดเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามกรอบของ Pirie และ Kieren

Pirie & Kieren (1994) ได้เสนอกรอบทฤษฎีการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่ง เป็นกรอบทฤษฎีที่ใช้สำหรับวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยพิจารณาความเข้าใจในรูปแบบองค์รวมและกระบวนการเป็นไปในลักษณะที่ไม่หยุดนิ่ง เป็นไปตามระดับ แต่กระบวนการของความเข้าใจไม่ได้เป็นในลักษณะเส้นตรง และทฤษฎีนี้เป็นการแสดงให้เห็นถึงความเข้าใจที่เป็นการจัดการโครงสร้างของความรู้ของบุคคลที่ต่อเนื่องและสอดคล้องกัน นั่นคือ เป็นกระบวนการที่ไม่หยุดนิ่ง และไม่เป็นการพัฒนาของกลุ่มของการรู้ และเป็นทฤษฎีที่ช่วยให้สามารถอธิบายระดับความเข้าใจของนักเรียนที่สร้างความหมายของกิจกรรมและการคิดทางคณิตศาสตร์ของพวกเขา



ภาพที่ 1 ทฤษฎีการพัฒนาระดับความเข้าใจของ Pirie และ Kieren

4.1 ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ตามทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน 8 ระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1: ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) ความเข้าใจในระดับนี้เป็นความรู้พื้นฐาน หรือประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ เพื่อนำไปจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรม หรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ในการสร้างความหมายเพื่อพัฒนาระดับความเข้าใจต่อไป สำหรับในระดับความรู้พื้นฐานนี้ไม่ได้หมายความว่าเป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ระดับต่ำ แต่ความเข้าใจในระดับนี้เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่เฉพาะ ซึ่งเป็นสิ่งที่ผู้สังเกต ครู หรือผู้วิจัย

คาดเดาว่านักเรียนจะมีความรู้พื้นฐานนี้เพื่อไปสร้างมโนมติใหม่ เช่น ความรู้เรื่องความหมายของสมการ การเขียนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์

ระดับที่ 2: การสร้างมโนภาพ (Image Making) เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่ผู้เรียนนำความรู้พื้นฐานหรือประสบการณ์เดิมที่นักเรียนมีอยู่และที่เกี่ยวข้องกับมโนมติใหม่ มาสร้างสิ่งที่แตกต่างจากความรู้พื้นฐานเพื่อใช้ในแนวทางใหม่ หรือมาสร้างความหมาย จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม หรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการมาสร้างความหมายกับตัวอย่างที่ครูแสดงการแก้สมการ

ระดับที่ 3: การมีมโนภาพ (Image Having) ความเข้าใจระดับนี้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์หรือมโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ จนสามารถสร้างภาพความคิดในใจโดยสามารถ อธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องแสดงการจัดกระทำเหมือนการสร้างมโนภาพอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้นักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด เช่น นักเรียนสามารถเลือกใช้สมบัติในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการได้และแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการ พร้อมทั้งอธิบายวิธีการแก้สมการได้

ระดับที่ 4: การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) ความเข้าใจระดับนี้เกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนจัดการ หรือรวมแง่มุมของมโนภาพที่มีอยู่เพื่อสร้างคุณสมบัติที่เฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน รวมไปถึงการที่ผู้เรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงและหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพที่มีอยู่นั้น เช่น นักเรียนอธิบายการใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการพร้อมทั้งบอกเหตุผลการเลือกใช้สมบัตินั้นได้ และแสดงวิธีการอื่นในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

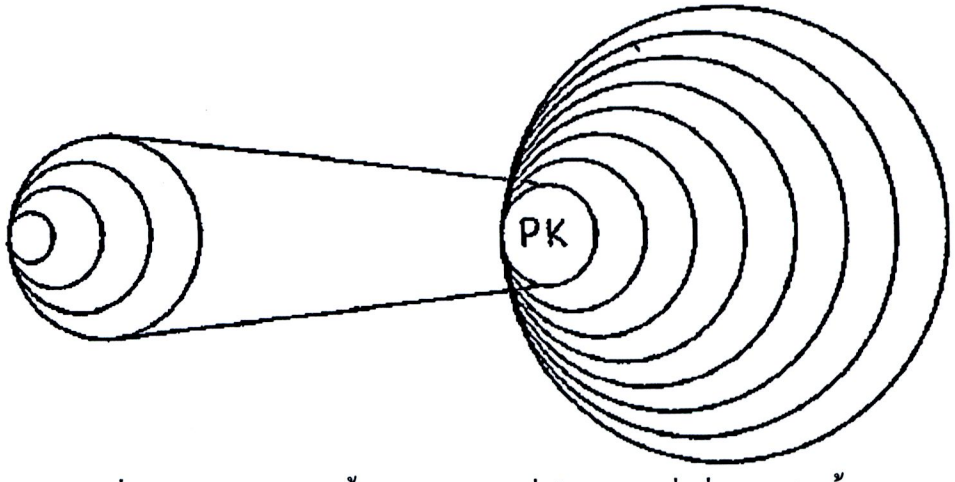
ระดับที่ 5: การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปเชิงนามธรรม นิยาม สูตร หรือข้อสรุปทั่วไป ของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ เช่น นักเรียนสามารถบอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ และเขียนสมการการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไปที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนใดๆ และ x เป็นตัวแปร หรือนักเรียนสามารถสรุปขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้และสามารถแสดงขั้นตอน วิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

ระดับที่ 6: การสังเกต (Observing) ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถสะท้อนเชื่อมโยง รวมข้อสรุปเชิงนามธรรมเพื่อสร้างเป็นทฤษฎีบทได้

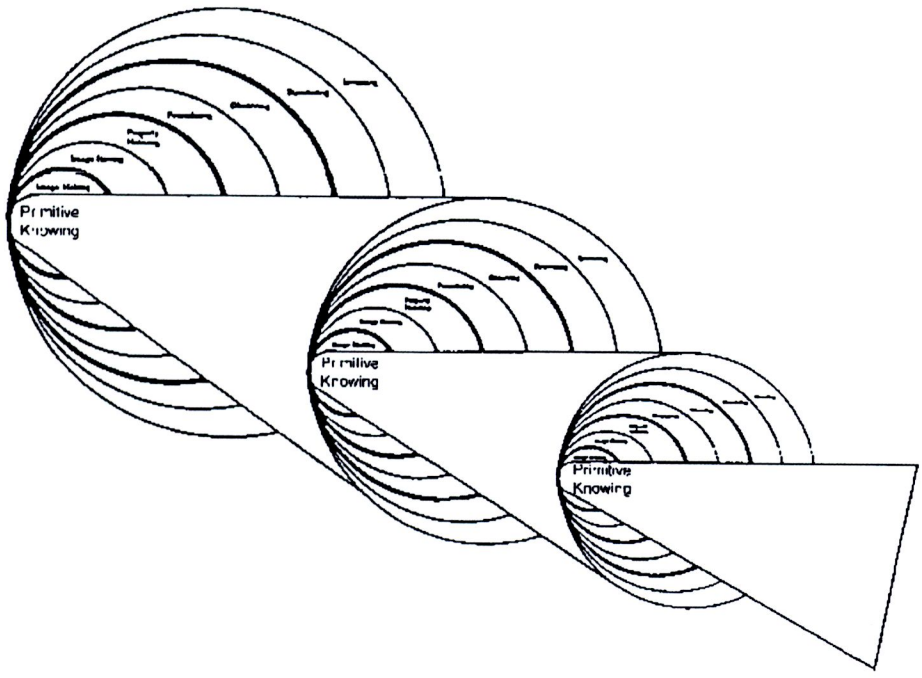
ระดับที่ 7: การสร้างโครงสร้าง (Structuring) ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนึกถึงข้อสรุปเชิงนามธรรมที่เป็นทฤษฎีบท นักเรียนตระหนักถึงการเชื่อมโยงภายในกลุ่มของทฤษฎีบท และสามารถนำมาใช้ในการให้เหตุผลและพิสูจน์โดยไม่ต้องจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือขั้นตอนที่กำหนด

ระดับที่ 8: การสร้างมโนมติใหม่ (Inventizing) เป็นความเข้าใจในระดับสูงสุด โดยนักเรียนมีโครงสร้างของความเข้าใจที่สมบูรณ์ และสามารถนำไปเป็นความรู้พื้นฐานในการสร้างมโนมติใหม่อยู่ในระดับที่สูงขึ้นได้

ทฤษฎีการพัฒนาความเข้าใจนี้ ไม่ได้หมายความว่าเป็นกระบวนการที่เป็นไปทางตรงทางเดียว จะเป็นในลักษณะวงกลมที่คล้ายก้นหอย คลี่ออก ดังนั้นการเน้นแต่ละชั้นจะประกอบด้วยชั้นก่อนหน้าและอยู่ในระดับต่อมาทั้งหมด ดังภาพที่ 1 และมองการพัฒนาความเข้าใจโดยการย้อนกลับ และไปข้างหน้าระหว่างระดับความเข้าใจ ดังนั้นจึงเป็นกระบวนการที่ไม่หยุดนิ่งและกระบวนการการจัดการ ซึ่งใช้คำศัพท์ “ระดับ (Levels)” และ “ชั้น (Layers)” ของความเข้าใจ และความหมายของความรู้พื้นฐาน ไม่ได้หมายถึงความรู้ระดับต่ำของคณิตศาสตร์ ดังนั้นไม่ได้มุ่งหมายที่จะเชื่อมโยงระดับความเข้าใจที่อยู่ชั้นนอกกว่าอย่างจำเป็นกับ คณิตศาสตร์ที่ดีกว่า หรือระดับสูงกว่า แต่ความรู้พื้นฐานเป็นความเข้าใจพื้นฐานที่จำเป็นในการสร้างความเข้าใจในมโนมติบางมโนมติ ดังนั้นเป็นไปได้ว่าความเข้าใจที่สมบูรณ์หรือเพียงบางส่วนของมโนมติหนึ่ง สามารถเป็นความรู้พื้นฐานในการสร้างมโนมติทางคณิตศาสตร์ใหม่ได้ นั่นคือ รูปแบบที่เป็นเพียงบางส่วนที่เฉพาะเจาะจงเป็นความรู้พื้นฐานที่อยู่ชั้นข้างในของความรู้ ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 แสดงถึงความรู้พื้นฐานบางส่วนที่เป็นส่วนหนึ่งที่อยู่ภายในชั้นของความรู้



ภาพที่ 3 ไดอะแกรมของ ทฤษฎีการพัฒนาระดับความเข้าใจของ Pirie และ Kieren ที่แสดงให้เห็นถึง ความรู้พื้นฐาน ที่เป็นแหล่งที่มาของความรู้ทางคณิตศาสตร์อื่นๆ

4.2 ลักษณะของทฤษฎี

4.2.1 ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขต (Don't Need Boundaries)

ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขตแสดงให้เห็นในแบบจำลองของทฤษฎีของ Pirie และ Kieren ดังภาพที่ 1 ที่เป็นรูปวงแหวนที่เป็นเส้นทึบ นั่นคือ เหนือจากเขตเส้นทึบนี้ นักเรียนสามารถทำงานกับความคิดที่ไม่ยาวนานนักที่จะทำเพื่อให้เกิดความเข้าใจก่อนหน้า แต่รูปแบบของความเข้าใจก่อนหน้านี้ฝังอยู่ในระดับความเข้าใจระดับใหม่และพร้อมที่จะทำมาใช้งานเสมอเมื่อจำเป็น ซึ่งเรียกวงแหวนเหล่านี้ว่าเป็น **"ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขต (Don't Need boundaries)"** เพื่อที่จะแสดงให้เห็นว่า เหนือจากขอบเขตนี้ นักเรียนไม่จำเป็นต้องไปทำความเข้าใจที่อยู่ระดับก่อนหน้าอย่างเฉพาะเจาะจงเพื่อให้เกิดความเข้าใจในระดับต่อมาอีก นั่นคือเมื่อเกิดความเข้าใจระดับเหนือจากเส้นที่ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขตแล้ว สามารถทำงานในระดับนั้นหรือทำในเชิงนามธรรมได้โดยไม่จำเป็นต้องอ้างถึงมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงในเชิงกายภาพหรือจิตใจอีก ซึ่งไม่ได้หมายความว่านักเรียนจะไม่สามารถย้อนกลับไปยังความเข้าใจพื้นฐานที่เฉพาะเจาะจงถ้าความเข้าใจนั้นจำเป็นสำหรับการสร้างความเข้าใจในระดับถัดไป และแต่ละคนไม่จำเป็นต้องตระหนักถึงความเข้าใจในระดับก่อนหน้าอย่างต่อเนื่อง

การไม่จำเป็นต้องมีขอบเขตเส้นแรกเกิดขึ้นระหว่างความเข้าใจระดับ การสร้างมโนภาพ และ การมีมโนภาพ นั่นคือ เมื่อเกิดมโนภาพของแนวคิดทางคณิตศาสตร์แล้ว ไม่จำเป็นต้องไปจัดกระทำกับวัตถุที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เฉพาะเจาะจงในระดับการสร้างมโนภาพอีก แต่ในทางตรงข้าม การสังเกตคุณสมบัติถูกนิยามว่าเป็นผลของการทำงานด้วยมโนภาพที่มีอยู่ในการสังเกตคุณสมบัติทั่วไป ดังนั้นระหว่างระดับการมีมโนภาพและระดับการสังเกตคุณสมบัติขอบเขตจึงจำเป็นต้องมี

การไม่จำเป็นต้องมีขอบเขตระดับต่อไปคือ ระหว่างความเข้าใจในระดับ การสังเกตคุณสมบัติและ ระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม นั่นคือเมื่อนักเรียนมีแนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นนามธรรมแล้ว หรือมีสูตร นิยาม ข้อสรุปทั่วไปแล้ว นักเรียนไม่จำเป็นต้องสังเกตคุณสมบัติจากมโนภาพที่มีอยู่อีก แต่ความสัมพันธ์ระหว่าง การมีมโนภาพและการสังเกตคุณสมบัติระดับการสังเกตเข้ามาเกี่ยวข้องด้วย แต่โดยนิยามแล้วเน้นเพียงแค่ ข้อสรุปเชิงนามธรรม หรือข้อสรุปทั่วไปเท่านั้น ไม่ถึงขั้นสะท้อนเชื่อมโยงและสร้างทฤษฎีบทตามความเข้าใจระดับการสังเกต

การไม่จำเป็นต้องมีขอบเขตที่สามเกิดขึ้นระหว่างระดับความเข้าใจระดับการสังเกต และระดับการสร้างโครงสร้าง นั่นคือ เมื่อนักเรียนมีโครงสร้างทางคณิตศาสตร์แล้วไม่จำเป็นต้องมีความหมายที่นำไปสู่โครงสร้างจากระดับข้างในอีก นั่นคือถ้าสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทได้แล้วไม่จำเป็นต้องไปเชื่อมโยง หรือรวมความเข้าใจ หรือเชื่อมโยงข้อสรุปทั่วไป ไม่ต้องไปจัดกระทำกับสื่อ หรือขั้นตอนที่กำหนดอีก

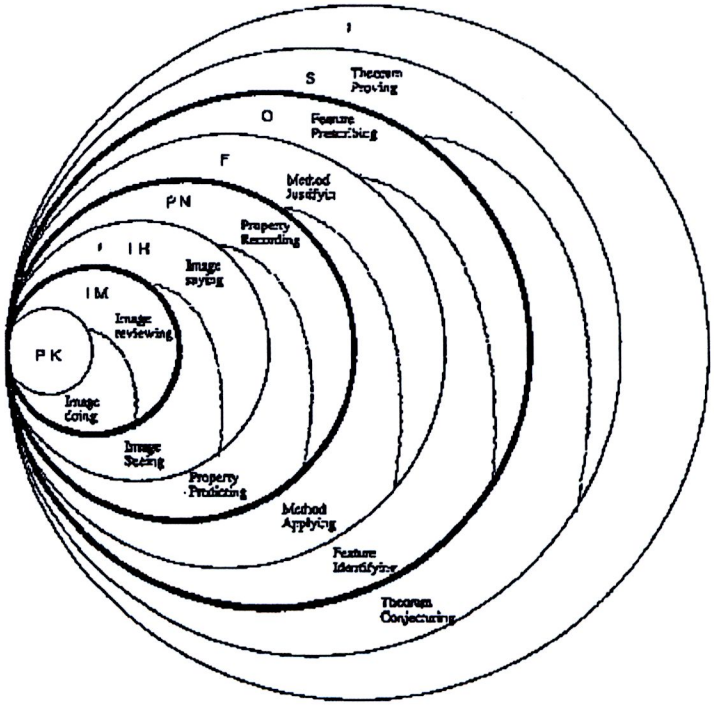
4.2.2 การย้อนกลับ (Folding Back)

การย้อนกลับเป็นลักษณะที่สำคัญ เป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญเชิงโครงสร้างของทฤษฎีการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแสดงให้เห็นถึงธรรมชาติที่ไม่ได้เป็นทางตรงของการได้มาซึ่งความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ เมื่อเจอปัญหาหรือคำถามในแต่ละระดับซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาได้ทันที บุคคลจะย้อนกลับไปยังระดับความเข้าใจก่อนหน้าเพื่อที่จะขยายความเข้าใจที่มีอยู่อย่างไม่เพียงพอให้มีความเข้าใจเพิ่มมากขึ้น แต่อย่างไรก็ตามการย้อนกลับไปยังระดับความเข้าใจก่อนหน้านี้ไม่ได้เหมือนกับการกระทำในระดับความเข้าใจก่อนหน้าแบบดั้งเดิม นั่นคือในขณะที่ย้อนกลับไปนั้นจะสร้างโดยระดับความเข้าใจหรือความสนใจในระดับที่สูงกว่า การกระทำในระดับความเข้าใจที่ต่ำกว่าจะเป็นส่วนของการวนกลับไปสร้างความรู้อีกครั้ง ซึ่งมีความจำเป็นต่อการสร้างความเข้าใจในระดับที่สูงขึ้น นักเรียนแต่ละคนจะมีวิธีการที่เคลื่อนย้ายความเข้าใจ และความเร็วในการผ่านแต่ละระดับที่แตกต่างกัน อาจจะต้องมีการย้อนกลับหลายๆ ครั้งซ้ำไปซ้ำมา เพื่อที่จะสร้างความเข้าใจที่กว้างขึ้น หรือมีความชำนาญมากขึ้น หรือสร้างความเข้าใจที่ลึกซึ้งมากยิ่งขึ้น และการย้อนกลับ ไม่ได้หมายความเพียงแค่การย้อนกลับไปรวบรวมประสบการณ์

ทางคณิตศาสตร์หรือ ส่วนของข้อมูลเท่านั้น แต่รวมไปถึงการให้วิธีการโดยนักเรียนหรือกลุ่มของนักเรียนสามารถกลับไปสร้าง หรือบูรณาการ หรือประเมินความรู้ทางคณิตศาสตร์อีกครั้ง เพื่อพวกเข้าจะสามารถเกิดความเข้าใจในระดับสูงขึ้นได้

4.2.3 การทำให้สมบูรณ์ของการกระทำและการอธิบาย (The Complementarities of Acting and Expressing)

ลักษณะสุดท้ายของทฤษฎีนี้คือ ในระดับความเข้าใจแต่ละระดับนอกจากระดับความรู้พื้นฐานประกอบด้วย การทำให้สมบูรณ์ของการกระทำ (Acting) และ การอธิบาย (Expressing) และแต่ละลักษณะของการพัฒนาความเข้าใจมีความจำเป็นก่อนที่จะย้ายจากแต่ละระดับความเข้าใจ นอกจากนี้การพัฒนาความเข้าใจอย่างน้อยที่สุดเกิดขึ้นผ่านการกระทำก่อนจากนั้นการอธิบายตามมา แต่มากกว่านั้นเป็นการเคลื่อนย้ายระหว่างส่วนที่ทำให้สมบูรณ์ในแต่ละแง่มุม ในแต่ละระดับการกระทำรวมเข้าไว้ทั้งหมดของความเข้าใจในระดับก่อนหน้า เป็นความต่อเนื่องกับระดับก่อนหน้า และการอธิบายให้เนื้อหาสาระที่แตกต่างในระดับที่เฉพาะเจาะจง โดยใช้คำว่า การทำ (Doing) และการทบทวน (Reviewing) การมองเห็น (Seeing) และการพูด (Saying) การทำนาย (Predicting) และการบันทึก (Recording) สำหรับการแบ่งเป็นส่วนที่ทำให้สมบูรณ์โดยการกระทำ และการอธิบายที่อยู่ในความเข้าใจระดับ การสร้างมโนภาพ การมีมโนภาพ และการสังเกตคุณสมบัติ ตามลำดับ นอกจากนี้ยังใช้คำว่า การประยุกต์ใช้วิธีการ(Method Applying) และการให้เหตุผลวิธีการ(Method Justifying) ที่แสดงถึงการกระทำและการอธิบายในระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม ใช้คำว่า การระบุลักษณะ(Feature Identifying) และการกำหนดลักษณะ (Feature Predicting) ที่แสดงถึงการกระทำและการอธิบายในระดับการสังเกต และใช้คำว่า การคาดเดาทฤษฎีบท (Theorem Conjecturing) และการพิสูจน์ทฤษฎีบท (Theorem Proving) ที่แสดงให้เห็นถึงการกระทำและการอธิบายในระดับการสร้างโครงสร้าง ดังแสดงให้เห็นในภาพที่ 4



PK - Primitive Knowing
IM - Image Making
IH - Image Having
PN - Property Noticing
F - Formalising
O - Observing
S - Structuring
I - Inventising

ภาพที่ 4 แสดงการทำให้สมบูรณ์ของการกระทำและการอธิบายในแต่ละระดับความเข้าใจ

การกระทำสามารถรวมไปถึงกิจกรรมที่อยู่ภายในจิตใจและกิจกรรมเชิงกายภาพ สำหรับการอธิบายคือเพื่อที่จะทำเกี่ยวกับการสร้างให้ชัดเจนยิ่งขึ้น หรือเพื่อสร้างธรรมชาติของกิจกรรมเหล่านั้นให้ชัดเจนยิ่งขึ้น ถึงแม้ว่าการอธิบายเป็นภาษาไม่ได้มีความจำเป็นอย่างเคร่งครัดนัก แต่การอธิบายนี้เป็นเพียงแค่การแสดงออกภายนอกที่ผู้สังเกตสามารถอ้างไปยังความเข้าใจที่นักเรียนกำลังสร้างเท่านั้น อย่างไรก็ตามการอธิบายไม่ได้มีจุดมุ่งหมายเหมือนกับคำว่าการสะท้อน (Reflecting) การสะท้อนเป็นส่วนประกอบของการกระทำกิจกรรม ตั้งแต่การสะท้อนรวมอยู่ในกระบวนการของการมองกลับไปที่ความเข้าใจในระดับก่อนหน้าที่ถูกสร้างขึ้นแล้ว ในทางตรงกันข้ามการอธิบายนำมาซึ่งการมองไปที่หรือเป็นการสื่อสารไปที่สิ่งที่เกี่ยวข้องกับการกระทำ เช่น สำหรับระดับความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ ตามทฤษฎีนี้ได้ใช้คำว่า การทำให้เกิดมโนภาพแสดงการกระทำ และ การทบทวนมโนภาพเป็นการอธิบาย ซึ่งการที่จะบอกว่านักเรียนมีความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ จะต้องมีหลักฐานแสดงว่า นักเรียนแสดงพฤติกรรมให้เห็นทั้งการทำให้

เกิดมโนภาพ และการทบทวนมโนภาพด้วย มีเพียงแค่การทำให้เกิดมโนภาพนี้ไม่เพียงพอในการบอกว่านักเรียนมีความเข้าใจระดับการสร้างมโนภาพ

นักเรียนทบทวนงานที่ทำก่อนหน้าเพื่อที่จะนำไปใช้ในงานใหม่โดยเป็นแนวคิดชั่วคราวที่เหมาะสมที่พวกเขามีเกี่ยวกับงานที่ทำ ถ้าแต่ละบุคคลกำลังทำให้เกิดมโนภาพอย่างง่ายก็จะมองว่างานที่กำลังทำก่อนหน้านี้สมบูรณ์และไม่ย้อนกลับไปทบทวนอีกครั้ง พฤติกรรมที่เป็นการทบทวนมโนภาพจะพิจารณาการเปลี่ยนแปลงแก้ไขที่ได้สร้างขึ้นของพฤติกรรมก่อนหน้านี้โดยไม่ต้องดูรูปแบบ อาจจะเป็นการบอกว่า “ยังไม่ถูกต้อง” หรือ “ไม่ใช่อย่างนั้น” หรือเลือกวิธีการใหม่ ความเข้าใจในระดับต่อไปคือ การมีมโนภาพ ซึ่งจะแบ่งเป็นการมองเห็นมโนภาพ คือการกระทำและการพูดถึงมโนภาพ ซึ่งไม่ได้ไปจัดกระทำอีก บอกเหตุผลได้ว่าทำไม่เป็นลักษณะเช่นนั้น ซึ่งคำว่ามโนภาพ ไม่ใช่เพียงแค่การนำเสนอที่อยู่ในลักษณะที่เป็นรูปภาพเท่านั้น และในแต่ละหัวข้ออาจจะประกอบด้วยรูปแบบของมโนภาพที่หลากหลาย ซึ่งการเชื่อมโยงระหว่างมโนภาพเหล่านั้นจะนำไปสู่ความเข้าใจในระดับการสังเกตคุณสมบัติ สำหรับในระดับการมีมโนภาพไม่ได้หมายความว่าจำเป็นที่จะต้องมีมโนภาพที่สมบูรณ์หรือถูกต้องเท่านั้น

การที่แต่ละคนแสดงถึงการทำให้เกิดมโนภาพ และการทบทวนมโนภาพแสดงให้เห็นประเภทของความเข้าใจบางประเภทในการกระทำของพวกเขา และกล่าวได้อีกว่าคนที่มีความเข้าใจอยู่ในระดับการมีมโนภาพจะเข้าร่วมอยู่ในกิจกรรมของความเข้าใจประเภทที่แตกต่างไปในเชิงคุณภาพ ไม่ใช่เป็นผลสำเร็จของการจัดกระทำกิจกรรม แต่เป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการระบุลักษณะที่ได้ เช่น ไม่ใช่ได้จากผลสำเร็จของการเขียนกราฟสมการกำลังสอง แต่เป็นสิ่งที่เกิดจากลักษณะของกราฟที่นักเรียนสามารถระบุได้

เมื่อนักเรียนกำลังจำแนกความแตกต่างและเชื่อมโยงลักษณะของลักษณะหลายๆ อย่างของมโนภาพของเขา เพื่อสร้างกลุ่มของมโนภาพ นั่นคือกิจกรรมความเข้าใจประเภทใหม่และเมื่อครูเข้าไปแทรกแซงเพื่อให้ขยายจากกิจกรรมขั้นการกระทำไปยังกิจกรรมขั้นการอธิบาย จะเรียกว่า การบันทึกคุณสมบัติ การบันทึกนี้ไม่จำเป็นต้องเป็นการเขียน แต่จะต้องเกี่ยวข้องกับการอธิบายอย่างชัดเจนของรูปแบบบางรูปแบบที่ชัดเจน เมื่อนักเรียนได้เข้าร่วมกับการทำนายคุณสมบัติโดยไม่มีการบันทึกหรืออย่างน้อยที่สุดการสร้างข้อสังเกตภายในจิตใจที่ชัดเจนอย่างมีสติที่คุณสมบัตินั้นมีอยู่หรือดูเหมือนกับว่าคุณสมบัตินั้นใช้ได้ ดูเหมือนว่าความเข้าใจระดับการมีมโนภาพและการสังเกตคุณสมบัติ แนวคิดของการกระทำอยู่ได้ไม่นานและปราศจากการเติมเต็มด้วยการอธิบายจะไม่เหลืออยู่กับนักเรียนจากระดับหนึ่งไปสู่ระดับต่อไป ซึ่งการขาดกิจกรรมการอธิบายดูเหมือนจะขัดขวางให้นักเรียนเคลื่อนย้ายไปมากกว่ามโนภาพที่มีอยู่ก่อนแล้ว

เมื่อพิจารณาธรรมชาติของความเข้าใจในฐานะที่เป็นกิจกรรมและไม่ได้เป็นเนื้อหาที่เฉพาะเจาะจง ครูสามารถถูกคาดหวังที่จะจัดโอกาสให้นักเรียนได้ปกป้องคุณสมบัติโดยการทดสอบกรณีใหม่ที่ขัดแย้งซึ่งจะถูกเลือกอย่างรอบคอบว่าจะย้อนกลับ หรือไปสร้างมโนภาพต่อและต่อไปยังการสังเกตคุณสมบัติ ซึ่งเป็นพฤติกรรมที่แสดงให้เห็นการปรับเปลี่ยนหรือขยายมโนภาพของนักเรียนที่มีอยู่ รูปแบบของการพัฒนาความเข้าใจนี้ทำให้ครูและนักวิจัยกับภาษาซึ่งสามารถใช้เพื่อพิจารณามโนภาพที่นักเรียนได้มองเห็นและได้พูดอย่างแท้จริง มากกว่าจะคาดเดาว่ามโนมติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนสอดคล้องกับคณิตศาสตร์พื้นฐานที่จัดให้ และทำให้เชื่อได้ว่าการทำให้สมบูรณ์ของการกระทำและการอธิบายมีอยู่และเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับทุกระดับของรูปแบบการพัฒนาความเข้าใจนี้ และสามารถรวบรวมข้อมูลที่จะสามารถอธิบายกิจกรรมต่างๆเหล่านี้ที่ในระดับที่สูงกว่า ซึ่งการนำข้อมูลมาพิจารณาจะพิจารณากิจกรรมที่มีความสมบูรณ์อย่างมีศักยภาพ ในฐานะหลักฐานที่แสดงให้เห็นการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ นักเรียนอาจจะกำลังเข้าร่วมในงานที่สอดคล้องกับความรู้พื้นฐานของพวกเขาจากประสบการณ์เดิมที่พวกเขามีอยู่ เช่น อาจจะเป็นกราฟ ที่เป็นกราฟแท่ง แต่ไม่เป็นมโนภาพที่เกี่ยวกับกราฟของฟังก์ชันกำลังสอง

จากทฤษฎีการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนของ Pirie และ Kieren (Pirie & Kieren, 1994) ธรรมชาติของแต่ละระดับของทฤษฎีนี้ แสดงให้เห็นโดยวงกลม 8 วง ที่คลี่ออก ซึ่งแต่ละวงแทนระดับความเข้าใจในแต่ละระดับ นั่นคือมี 8 ระดับ ซึ่งจะเป็นกิจกรรมที่สามารถสำเร็จได้สำหรับแนวคิดที่เฉพาะเจาะจงและเฉพาะบุคคล ซึ่งระดับเหล่านี้ขยายจากวงในไปสู่วงนอกโดยเริ่มต้นด้วย ความรู้พื้นฐานหรือประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ของแต่ละคนที่เกี่ยวข้องกับงานที่กำลังจะทำ โดยผ่านการสร้างมโนภาพ และการมีมโนภาพ จากนั้นเพื่อสังเกตคุณสมบัติต่างๆและสร้างเป็นข้อสรุปเชิงนามธรรมของมโนภาพนั้น จากนั้นการสะท้อน การเชื่อมโยงข้อสรุปเชิงนามธรรมจะนำไปสู่การสังเกต และเกิดเป็นโครงสร้างต่อไป และการกลับไปจัดการที่สอดคล้องกัน ในระดับต่อไปนักเรียนจะมีโครงสร้างความรู้ที่จำเป็นที่จะทำให้ความเข้าใจสมบูรณ์ในแต่ละมโนมติ และสามารถนำไปสร้างมโนมติใหม่ในระดับที่สูงขึ้นได้ ความเชื่อที่สำคัญของทฤษฎีนี้คือระดับความเข้าใจที่อยู่วงนอกกว่าไม่จำเป็นที่จะหมายความว่าเป็นระดับที่สูงกว่าของคณิตศาสตร์ในทางตรงกันข้าม แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่อยู่ในระดับสูงจำเป็นจะต้องผ่านกระบวนการในระดับการสร้างภาพก่อนจึงจะไปถึงข้อสรุปเชิงนามธรรมหรือโครงสร้างที่เหมาะสมได้ ทฤษฎีนี้ความเข้าใจในมโนมติที่อยู่วงนอกจะมีความเป็นทั่วไปมากขึ้น และความเข้าใจที่อยู่วงนอกจะประกอบด้วยความเข้าใจที่อยู่วงในเป็นในลักษณะที่ขยายออก ดังภาพที่ 1 ลักษณะที่สำคัญของทฤษฎีคือ การไม่จำเป็นต้องมีขอบเขต คือ เมื่อเกิดมโนภาพหรือคุณสมบัติเชิงนามธรรมแล้ว

ไม่จำเป็นต้องไปจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม หรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์หรือจัดกระทำกับมโนภาพที่มีอยู่อีก นอกจากนี้แล้วเมื่อนักเรียนเจอปัญหาในระดับความเข้าใจที่สูงกว่าแต่ไม่สามารถแก้ได้ในทันที จะต้องย้อนกลับไประดับความเข้าใจที่ต่ำกว่าเพื่อขยายความเข้าใจที่มีอยู่ให้เพียงพอ หรือปรับเปลี่ยนให้ถูกต้อง เพื่อสร้างความเข้าใจในระดับที่สูงกว่านั้นได้ และมากไปกว่านั้นแต่ละระดับของความเข้าใจประกอบด้วยการเชื่อมโยงระหว่างการกระทำกับการอธิบายเพื่อให้แต่ละระดับสมบูรณ์ยิ่งขึ้น สำหรับทฤษฎีการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์นี้ไม่ได้เป็นปรากฏการณ์ที่เป็นเชิงเส้น มีการย้อนกลับไปกลับมาเพื่อกลับไปจดจำและกลับไปสร้างความเข้าใจใหม่ให้ชัดเจนยิ่งขึ้นซึ่งเป็นเส้นทางระหว่างแต่ละระดับ

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวกับการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

กัลยา ทองสุ (2550) ได้พัฒนาชุดกิจกรรมคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนเพื่อส่งเสริมการใช้ตัวแทน เรื่องระบบสมการเชิงเส้น ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 และศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและความคงทนในการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้รับการสอนโดยชุดกิจกรรม แบบสืบสวน เพื่อส่งเสริมการแสดงแทน โดยกลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2545 โดยการสุ่มจำนวน 50 คน 1 ห้องเรียน และดำเนินการสอนเรื่องระบบสมการเชิงเส้นจำนวน 17 คาบ โดยใช้แบบแผนการทดลองเป็น One – Group Pretest – Posttest Design และวิเคราะห์โดยใช้ค่าสถิติ t-test dependent ผลการศึกษาพบว่าชุดการสอนแบบสืบสวนสอบสวนเพื่อส่งเสริมการใช้การแสดงแทน มีประสิทธิภาพตามเกณฑ์ 80/80 ผลสัมฤทธิ์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ที่ได้รับการสอนโดยใช้ชุดกิจกรรมมีคะแนนสูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญที่ระดับ .01 และมีความคงทนในการเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

อรชร ภูบุญเติม(2550) ได้ศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการ ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้ตัวแทน (Representation) กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนกาฬสินธุ์พิทยาสรรพ์ อำเภอเมือง จังหวัดกาฬสินธุ์ จำนวน 60 คน โดยดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้การแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทน จำนวน 4 แผน ตามวิธีการใช้ตัวแทน 4 วิธี คือ การแก้โจทย์สมการโดยใช้วัตถุจริงหรือแบบจำลองของจริง การวาดภาพ การใช้ตารางและการใช้สัญลักษณ์ (ตัวแปร) ประเมินความสามารถของนักเรียนโดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่องโจทย์สมการชนิดอัตนัย จำนวน 5 ข้อ ผลการวิจัยพบว่าความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง

โจทย์สมการของนักเรียนหลังการสอนการแก้โจทย์สมการโดยการใช้ตัวแทนสูงกว่าก่อนสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

Saul (2001) ได้ศึกษาวิธีการสอนพีชคณิต เมื่อพีชคณิตเป็นระบบการนำเสนอบางระบบและค้นหาว่าสิ่งที่นำเสนอนั้นคืออะไร และหาวิธีการที่จะทำให้นักเรียนเข้าถึงมโนมติที่ถูกนำเสนอโดยสัญลักษณ์ทางพีชคณิต โดยการใช้ระเบียบวิธีจากทางการแพทย์ นั่นคือพิจารณากรณีแบบไม่สามารถควบคุมได้ โดยดูที่กระบวนการทำงานที่ยกเว้นและค่อนข้างไม่มีประสิทธิภาพ ซึ่งเมื่อใช้วิธีการนี้จะสามารถเรียนรู้ได้อย่างมากคืออย่างน้อยที่สุดความสามารถของนักเรียนโดยทำกรณีศึกษากับ นักศึกษา 2 คนที่มีรูปแบบการเรียน และพฤติกรรมการเรียนในการเรียนที่แตกต่างกัน โดยใช้ความยากในการเรียนคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหาที่ลึกกว่าธรรมชาติของคณิตศาสตร์ที่พวกเขากำลังเรียน โดยผู้วิจัยพยายามที่จะใช้สิ่งที่ค้นพบช่วยนักเรียนในการก้าวข้ามความยากนั้น ผลการศึกษาพบว่า ในแนวทางของนักเรียนที่เก่ง สามารถแก้ปัญหาได้โดยปราศจากการแทรกแซงของผู้วิจัย สำหรับนักเรียนอีกหนึ่งคน มีความเข้าใจทางด้วยเลขคณิตเป็นอย่างดี และถูกกระตุ้นโดยประสบการณ์เกี่ยวกับพีชคณิตของพวกเขา ซึ่งนักศึกษาทั้ง 2 คน ไม่ได้ทำงานในรูปแบบที่เป็นวิชาการในการทำงานเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และอาจจะไม่จำเป็นต้องใช้คณิตศาสตร์มากในขอบเขตของพวกเขา แต่อย่างไรก็ตามดูเหมือนว่าการต่อสู้ของพวกเขากับพีชคณิตในขณะที่การนำเสนอรูปทั่วไปในเลขคณิต และในขณะที่เรียนการดำเนินการ และการใช้ความเป็นนามธรรมของพวกเขาด้วยการอธิบายเชิงเหตุผล ทั้งหมดควรจะทำให้เกิดความเข้าใจเกี่ยวกับความเป็นนามธรรมในรูปทั่วไป และความเข้าใจนี้เป็นเครื่องมือที่เป็นพื้นฐานและเครื่องมือเชิงการรู้ที่มีคุณค่า

5.2 งานวิจัยเกี่ยวกับการนำเสนอ

เกศสุดา แนวกลาง (2550) ได้ศึกษาการแสดงแทนจำนวนเต็มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ที่เรียนโดยวิธีการเรื่องราวและแผนภาพ รูปแบบการวิจัยเป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนโนนค่าวิทยา จำนวน 27 คน ที่เรียนโดยวิธีการเรื่องราวและแผนภาพ และสัมภาษณ์เชิงลึกในประเด็นที่แสดงถึงแนวคิดทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับจำนวนเต็ม วิเคราะห์ข้อมูลโดยวิเคราะห์ระบบของการแสดงแทนภายในตามแนวคิดของ Goldin(1998) 2 ระบบ คือ ระบบของคำพูดและการสร้างประโยค (verbal/syntactic systems) ระบบในเชิงการจินตนาการ (imagistic systems) และใช้เกณฑ์การวิเคราะห์ 4 ลักษณะ คือ ความเป็น 2 พวก ความเป็นจำนวนเต็ม 0 ความเป็น 1 ต่อ 1 ผลของการแสดงแทนที่เกิดจากการดำเนินการของจำนวนเต็ม ผลการวิจัยพบว่า ระบบของคำพูดและการสร้างประโยคมีการแสดงแทนลักษณะของจำนวนเต็มสมบูรณ์ทั้ง 4 ลักษณะ ได้แก่ เรื่องการบวกจำนวนเต็ม มีการแสดงแทนจำนวนเต็ม 2 ลักษณะได้แก่ เรื่องความหมายของจำนวนเต็มและการลบจำนวนเต็ม ซึ่งลักษณะที่แสดงแทนคือ

ความเป็นทวิลักษณะของจำนวนเต็ม และผลของการดำเนินการแสดงแทนที่เกิดจากการดำเนินการของจำนวนเต็ม ระบบในเชิงจินตนาการ มีการแสดงแทนลักษณะสมบูรณ์ทั้ง 4 ลักษณะ คือ เรื่องการบวกจำนวนเต็ม และมีการแสดงแทนจำนวนเต็ม 2 ลักษณะ คือ ความหมายของจำนวนเต็มและการลบจำนวนเต็ม ซึ่งการแสดงแทนจำนวนเต็มในระบบของคำพูดและการสร้างประโยคชัดเจนกว่าระบบในเชิงจินตนาการ ส่วนลักษณะของจำนวนเต็มที่ไม่พบคือ ลักษณะความเป็นจำนวนเต็ม 0 และความเป็น 1 ต่อ 1 เช่นเดียวกันทั้งสองระบบ

เบญจวรรณ ชัยปลัด (2550) ได้ศึกษาเพื่อวิเคราะห์การนำเสนอ (Representation) ที่แสดงถึงมโนมติเรื่องเศษส่วนของครูคณิตศาสตร์ ในบริบทของการจัดการเรียนการสอนในหน่วยการเรียนรู้เรื่องเศษส่วน โดยเป็นการศึกษาที่เน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ กลุ่มเป้าหมายที่ร่วมใจการวิจัย คือ ครูที่สอนคณิตศาสตร์ในระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 ในโรงเรียนชุมชนบ้านชนบท อ.ชนบท จ.ขอนแก่น จำนวน 3 คน และเข้าร่วมกระบวนการพัฒนาวิชาชีพครูแบบการศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) ซึ่งมีกระบวนการดังนี้ ระยะที่หนึ่งการร่วมสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ ระยะที่สองคือการนำแผนการจัดการเรียนรู้ไปใช้ในชั้นเรียน ระยะที่สามคือการร่วมสะท้อนผลของการดำเนินการจัดการเรียนการสอนในหน่วยการเรียนรู้เรื่องเศษส่วน ระดับชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ผลการศึกษาพบว่า ครูกลุ่มเป้าหมายมีการนำเสนอในรูปแบบของภาษา ตัวหนังสือ สัญลักษณ์ และภาพในการนำเสนอถึงมโนมติเกี่ยวกับเศษส่วน ในระยะที่หนึ่งของกระบวนการศึกษาชั้นเรียน ครูใช้ภาษาเพื่อนำเสนอและอภิปรายในการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ร่วมกับครูและทีมวิจัย แสดงให้เห็นมโนมติเรื่องเศษส่วนเกี่ยวกับส่วนย่อยจากส่วนรวม (Part - Whole) แสดงความเป็นเอกลักษณ์ของการเป็นเศษที่เป็นส่วนย่อยโดยใช้ภาษา ในระยะที่สอง ครูใช้การนำเสนอที่เป็นภาษา สัญลักษณ์ ตัวหนังสือ และภาพ ในการนำเสนอมโนมติเกี่ยวกับเศษส่วน และมีความแตกต่างกันของการใช้ภาษาที่แสดงถึงเศษส่วนย่อยจากส่วนรวม ระยะที่สาม ครูใช้ภาษาเพื่อแสดงมโนมติเกี่ยวกับเศษส่วน เป็นในลักษณะการให้เหตุผลการใช้การนำเสนอ

ชมพู สีสัน (2551) ได้ศึกษาการใช้รูปแบบการนำเสนอเชิงคณิตศาสตร์ที่หลากหลายในกระบวนการแก้ปัญหา เรื่อง ระบบสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของนักเรียนระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นปีที่ 1 วิทยาลัยการอาชีพศีขรภูมิ จังหวัดสุรินทร์ โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพและบรรยายเชิงวิเคราะห์ กลุ่มเป้าหมายจำนวน 6 คน โดยเลือกมา 2 กลุ่ม จากกลุ่มที่มีคะแนนสูง 3 คน และจากกลุ่มที่มีคะแนนต่ำ 3 คนดำเนินการวิจัย โดยผู้วิจัยสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร หลังจากนั้นให้กลุ่มเป้าหมายทำแบบทดสอบหลังเรียน เรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร วิเคราะห์ข้อมูลจากผลการตอบแบบทดสอบ เรื่องระบบสมการเชิงเส้น

สองตัวแปร ตามกรอบทฤษฎีของ Janvier ซึ่งจำแนกการนำเสนอออกเป็น 4 ลักษณะ คือ ภาษาพูดหรือการอธิบาย (V) ตาราง (T) กราฟ (G) และสมการ(E) ผลการวิจัยแสดงให้เห็นการใช้รูปแบบการนำเสนอในการแก้ปัญหาเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร ได้แก่ 1) รูปแบบการนำเสนอ V⟶E⟶V⟶T⟶G 2) รูปแบบการนำเสนอ T⟶ G⟶ V 3) รูปแบบการนำเสนอ V⟶E⟶V 4) รูปแบบการนำเสนอ V⟶T⟶G⟶V 5) รูปแบบการนำเสนอ V⟶E⟶V⟶T⟶G⟶V เวลาที่ใช้รูปแบบการนำเสนอจากการตอบแบบทดสอบหลังเรียนเรื่องระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร จำนวน 5 ข้อ พบว่านักเรียนกลุ่มเป้าหมาย ที่อยู่ในกลุ่มที่ได้คะแนนสูง และในกลุ่มที่ได้คะแนนต่ำ ใช้เวลาในการนำเสนอแต่ละรูปแบบไม่แตกต่างกันมาก แต่ในการนำเสนอสูตร สมการ และสัญลักษณ์ (E) ทั้งสองกลุ่มใช้เวลาเฉลี่ยนานกว่าการใช้รูปแบบการนำเสนอแบบอื่น

อัจฉริยา พงษ์พิษณุ (2551) ได้ศึกษาเพื่อวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์จากการแสดงแทนจำนวนเต็มลบในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด โดยใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ เป็นการศึกษาที่เน้นการวิเคราะห์โปรโตคอล และการบรรยายเชิงวิเคราะห์ กลุ่มเป้าหมายคือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 2 กลุ่ม 6 คน โรงเรียนคูคำพิทยาสรรพ์ กิ่งอำเภอซำสูง จังหวัดขอนแก่น ปีการศึกษา 2550 ดำเนินการวิจัยในบริบทนอกชั้นเรียน โดยใช้ปัญหาปลายเปิดเกี่ยวกับจำนวนเต็มลบ 4 ปัญหา วิเคราะห์ข้อมูลจาก ผลการทำกิจกรรมการแก้ปัญหาของนักเรียน ข้อมูลในรูปโปรโตคอลการแก้ปัญหา ข้อมูลจากบันทึกภาคสนาม และข้อมูลพื้นฐานของกลุ่มเป้าหมายที่ได้จากการสังเกตชั้นเรียน โดยวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์จากการแสดงแทนจำนวนเต็มลบในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด แบ่งออกเป็น 1) กลุ่มของสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด 2) กลุ่มของความคงที่ 3) กลุ่มของการแสดงแทนในเชิงสัญลักษณ์ ผลการวิจัยพบว่า 1) แนวคิดเกี่ยวกับจำนวนเต็มลบเกิดขึ้นจากความคงที่ของแนวคิดที่มีต่อการแสดงแทนเชิงสัญลักษณ์ในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิดชนิดกระบวนการเปิด 2) จำนวนสถานการณ์การแก้ปัญหาขึ้นอยู่กับวิธีการที่ใช้แก้ปัญหาขณะเผชิญกับสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดเกี่ยวกับจำนวนเต็มลบของนักเรียนแต่ละคน 3) ในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิดนักเรียนมีแนวคิดที่ไม่เป็นไปตามเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ คือ การคูณจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มคำตอบที่ได้เป็นจำนวนเต็มลบ การหารจำนวนเต็มลบกับจำนวนเต็มคำตอบที่ได้เป็นจำนวนเต็มลบ

O'Keefe (1992) ได้ทำการศึกษาประเด็นของการนำเสนอในมุมมองของทั้งขอบเขตทางด้านคณิตศาสตร์ และคณิตศาสตรศึกษา โดยที่ศึกษาการใช้การนำเสนอที่เคลื่อนที่หรือเคลื่อนไหวได้ (Dynamic Representation) เพื่อเพิ่มความเข้าใจของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลายและวิทยาลัย ในเรื่องของฟังก์ชัน โดยให้นักเรียนได้ใช้การนำเสนอในเรื่องเกี่ยวกับฟังก์ชัน

ได้แก่ การใช้สมการ ตาราง กราฟ และใช้การนำเสนอที่เคลื่อนไหวได้ เพื่อช่วยในการเชื่อมโยงความประสบการณ์ที่เป็นรูปธรรมของนักเรียนกับโลกที่เป็นนามธรรมของคณิตศาสตร์ เช่น ความเร็ว ทิศทาง ตำแหน่ง ที่แสดงให้เห็นความสัมพันธ์ของฟังก์ชัน ผลการศึกษาพบว่า การนำเสนอที่เคลื่อนที่หรือเคลื่อนไหวได้ช่วยให้นักเรียนส่งผ่านลักษณะที่สำคัญในเรื่องฟังก์ชันได้ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ค่าวิกฤต การเปลี่ยนแปลงที่สัมพันธ์กัน และความเข้าใจเกี่ยวกับตัวแปรที่ถูกสร้างความสำคัญของนักเรียน นั่นคือ ช่วยให้นักเรียนเชื่อมโยงประสบการณ์จริงของนักเรียนที่เป็นรูปธรรมและความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรมได้

Adu – Gyamfi (1993) ได้ศึกษาเอกสารงานวิจัยที่ปรากฏอยู่ในทางคณิตศาสตรศึกษา เพื่อทดสอบและสืบค้นให้ละเอียดถึงหลักฐานที่ได้รับจากการศึกษางานวิจัยที่มีอยู่จะสนับสนุนหรือหักล้าง การกล่าวยืนยันที่ว่าในการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ การใช้ประโยชน์ของการใช้การนำเสนอที่หลากหลายในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพให้นักเรียนในระหว่างที่แก้ปัญหา และในเวลาเดียวกันช่วยให้นักเรียนพัฒนาความเข้าใจความสัมพันธ์และมโนมติทางคณิตศาสตร์ให้ลึกซึ้งยิ่งขึ้น ผลการศึกษาพบว่า หลักฐานจากงานวิจัยที่มีอยู่เกี่ยวกับการนำเสนอที่หลากหลายชี้ให้เห็นว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้การนำเสนอที่หลากหลายสามารถแสดงถึงความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์และมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ลึกซึ้งยิ่งขึ้นและประสบความสำเร็จในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ด้วย

Zhang (1997) ได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับกรอบทฤษฎีการวิจัย สำหรับการศึกษาการนำเสนอภายนอก ที่เกี่ยวกับการแก้ปัญหา โดยเกม Tic – Tac – Toe และเกมที่มีลักษณะที่คล้ายกัน เป็นขั้นตอนกระบวนการของกรอบงานวิจัยและทดสอบกรอบงานวิจัยในฐานะแบบจำลองเชิงหน้าที่ ผลการทดลองแสดงให้เห็นว่า พฤติกรรมในการเล่น Tic – Tac – Toe ถูกระบุโดยข้อมูลที่เกิดขึ้นโดยตรงในการนำเสนอภายนอกและการนำเสนอภายใน ในความหมายของอคติเชิงการรับรู้และเชิงการรู้ โดยไม่คำนึงถึงว่าอคตินั้นจะสอดคล้อง หรือไม่สอดคล้อง หรือไม่มีความสัมพันธ์กันกับงาน นั่นแสดงให้เห็นถึง การนำเสนอภายนอกไม่เพียงแค่การนำเข้าและการกระตุ้นเข้าไปสู่ภายในจิตใจของคนเท่านั้น และที่พวกเขามีหน้าที่ที่สำคัญมากกว่าหน่วยความจำเท่านั้น การให้นิยามเชิงการนำเสนอได้รับการเสนอแนะว่า รูปแบบของนิยามการนำเสนอสิ่งที่ข้อมูลสามารถถูกรับรู้ สิ่งที่กระบวนการสามารถถูกกระตุ้น และสิ่งที่โครงสร้างสามารถค้นพบจากการนำเสนอที่เฉพาะเจาะจง

Goldin (1998) ได้นำเสนอแง่มุมของการรวมกันของแบบจำลองทางจิตวิทยาเกี่ยวกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่เกี่ยวข้องกับประเภทที่แตกต่างกันของระบบการนำเสนอ และแต่ละขั้นตอนของการพัฒนาระบบการนำเสนอ เป้าหมายเพื่อไปสู่กรอบ

งานวิจัยที่เหมาะสม และมีความซับซ้อนเพียงพอในการอธิบายผลที่หลากหลายเชิงประจักษ์ แต่สามารถเข้าถึงได้ง่ายและเป็นประโยชน์ต่อวงการคณิตศาสตรศึกษาในทางปฏิบัติ แง่มุมบางแง่มุมเกี่ยวกับระบบการนำเสนอถูกอภิปราย และมีส่วนประกอบของแบบจำลองที่ถูกบรรยายในความสัมพันธ์กับแนวคิดเหล่านั้น ซึ่งประกอบด้วยการสร้างที่สัมพันธ์กับการคิดเชิงจินตนาการ ขั้นตอนวิธี และยุทธวิธี ผลที่เกิดขึ้น และบทบาทพื้นฐานของความกำกวม

Hail (2000) ได้ศึกษาการใช้การนำเสนอที่หลากหลายบนแนวคิดและความรู้เกี่ยวกับมโนมติทางพีชคณิตเบื้องต้น โดยการวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่ออธิบายผลของการใช้การนำเสนอที่หลากหลายรูปแบบ (ลำดับการพูด ภาษาพูด การจัดกระทำ กราฟ ตาราง และการเขียนสัญลักษณ์) เกี่ยวกับความเข้าใจและแง่มุมของนักเรียนเรื่อง มโนมติเชิงพีชคณิตเบื้องต้น โดยเฉพาะอย่างยิ่ง งานวิจัยนี้พยายามตอบคำถามดังนี้ (1) ความรู้และแง่มุมของนักเรียนเกี่ยวกับตัวแปรและสมการมีการเปลี่ยนแปลงในระหว่างที่นักเรียนเรียนพีชคณิตเริ่มต้นหรือไม่ อย่างไร (2) การนำเสนอที่หลากหลายช่วยให้นักเรียนพัฒนาความรู้และมุมมองของมโนมติพีชคณิตเบื้องต้นหรือไม่ อย่างไร (3) มุมมองของนักเรียนเกี่ยวกับฟังก์ชันเปลี่ยนแปลงในระหว่างที่เรียนพีชคณิตเบื้องต้นหรือไม่ อย่างไร (4) นักเรียนมีการนำเสนอรูปแบบการนำเสนอหนึ่งรูปแบบ หรือมากกว่ารูปแบบอื่น เมื่อแก้ปัญหาทางพีชคณิตหรือไม่ เพราะเหตุใด (5) นักเรียนสามารถเคลื่อนย้ายอย่างยืดหยุ่นระหว่างการนำเสนอต่างๆ หรือมุมมองต่างๆ เมื่อแก้ปัญหาหรือไม่ ถ้าไม่เปลี่ยนเพราะเหตุใด กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนที่กำลังเรียนพีชคณิตเบื้องต้น จำนวน 29 คน โดยใช้เวลาสอนจำนวน 4 สัปดาห์ ด้วยวิธีการใช้ตัวแทนที่หลากหลายเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจเรื่อง ตัวแปร สมการ และการแก้สมการ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนใช้กราฟและใช้การจัดกระทำในการดำเนินการทางสัญลักษณ์ และนักเรียนมักใช้การนำเสนอเพื่ออธิบายกระบวนการเชิงสัญลักษณ์ และข้อผิดพลาดด้วย การจัดกระทำช่วยให้นักเรียนเรียนรู้การแก้สมการด้วย กราฟช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร ทั้งกราฟและการจัดกระทำช่วยให้นักเรียนมองเห็นเครื่องหมายเท่ากับเป็นสัญลักษณ์ของการเปรียบเทียบ ถึงแม้ว่านักเรียนจะใช้กราฟในตอนท้าย และหลายคนไม่ได้พัฒนาความเข้าใจการนำเสนอเชิงกราฟ แต่มีนักเรียน 5 คน พัฒนามุมมองเชิงโครงสร้างของฟังก์ชันและมีนักเรียน 2 คน แสดงวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และมีนักเรียนบางคนที่เปลี่ยนมุมมองและการนำเสนอเพื่อแก้ปัญหาได้อย่างรวดเร็วในการเรียนพีชคณิต

Jinfa Cai (2005) ได้ทำการศึกษาเพื่อสำรวจความสัมพันธ์ระหว่างชนิดของการใช้การนำเสนอในการหาคำตอบของเด็กชาวจีนและสหรัฐอเมริกา และประเภทของการนำเสนอในวิธีการสอนของครูชาวจีนและชาวสหรัฐอเมริกาที่ใช้ในระหว่างการสอน ผลของการศึกษาพบว่า การใช้การนำเสนอของครูมีอิทธิพลต่อการใช้การนำเสนอของนักเรียน และมีผลต่อการแก้ปัญหาของ

นักเรียนด้วย แนวทางหนึ่งที่จะนำผลการศึกษาไปใช้ในทางปฏิบัติ คือ ถ้านักเรียนได้รับโอกาสในการสร้างการนำเสนอมโนมติ กฎ และความสัมพันธ์ ทางคณิตศาสตร์ของตัวเอง พวกเขาควรจะได้รับการสนับสนุนให้พัฒนาความสามารถในการใช้การนำเสนอเชิงสัญลักษณ์ด้วย มากไปกว่านั้นต้องใช้สิ่งที่เป็นนามธรรมด้วย นอกจากนี้ ผลการศึกษาพบว่า ครูชาวจีนใช้การนำเสนอที่เป็นสัญลักษณ์ในการสอนของพวกเขาอย่างมาก แต่ในขณะที่ ครูสหรัฐอเมริกา ใช้ ทั้งการอธิบายที่เป็นภาษาพูด และการนำเสนอที่เป็นรูปภาพเป็นส่วนใหญ่ ซึ่งชี้ให้เห็นว่า การปฏิบัติการสอนถูกจำกัดโดยปัจจัยทางด้านสังคมและวัฒนธรรม

5.3 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์

จาริณี อิ่มดวง (2550) ได้ศึกษาระดับความเข้าใจเชิงมโนมติเรื่อง การบวกและการลบเศษส่วนของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ตามกรอบทฤษฎีของ Pirie และ Kieren รูปแบบของการวิจัยเป็นการวิจัยเชิงคุณภาพ โดยใช้รูปแบบการทดลองสอน (Teaching Experiment) กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนบ้านโนนม่วง ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2549 อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น จำนวน 6 คน โดยแบ่งออกเป็น 2 กลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ กิจกรรมการเรียนการสอน 6 กิจกรรม เก็บข้อมูลในระหว่างที่ครูดำเนินการเรียนการสอนโดยให้นักเรียนทำกิจกรรมการแก้ปัญหาด้วยวิธีการคิดพร้อมออกเสียง (Thinking Aloud Method) วิเคราะห์ข้อมูลโดยการวิเคราะห์โปรโตคอล การแก้ปัญหาของนักเรียนจำนวน 12 โปรโตคอล งานเขียนของนักเรียน และบันทึกภาคสนาม เพื่อวิเคราะห์ระดับความเข้าใจของนักเรียนตามกรอบของ Pirie และ Kieren ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีความเข้าใจเชิงมโนมติเรื่อง การบวกและการลบเศษส่วนอยู่ในระดับที่ 1 คือ ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) กล่าวคือ นักเรียนสามารถบอกความรู้เกี่ยวกับความหมายของเศษส่วน การเท่ากันของเศษส่วน การบวกและการลบจำนวนเต็มได้ ระดับที่ 2 คือ การสร้างมโนภาพ (Image Making) กล่าวคือ นักเรียนสามารถแสดงวิธีการบวกเศษส่วน โดยใช้สื่อที่เกี่ยวข้อง และแสดงผลลัพธ์ของการบวกโดยใช้สื่อรูปธรรม และระดับที่ 3 คือ การมีมโนภาพ (Image Having) กล่าวคือ นักเรียนสามารถอธิบายวิธีการหาผลบวกโดยอาศัยการเขียนรูปเพื่อแสดงวิธีการบวกเศษส่วนได้ โดยไม่จำเป็นต้องจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมอีก

Pirie and Kieren (1994) ได้ศึกษาการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน สามารถระบุลักษณะของความเข้าใจได้อย่างไร และสามารถนำเสนอความเข้าใจได้อย่างไร ในการศึกษาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์มีวิธีการในการศึกษาได้หลากหลายวิธี และวิธีการบางวิธีได้ถูกทบทวนอีกครั้งก่อนจะมีการวางโครงร่างเพื่อสร้างแบบจำลองที่ผู้วิจัยได้นำเสนอเพื่อศึกษาการพัฒนาของความเข้าใจ แบบจำลองได้ถูกอธิบายให้รายละเอียดและยกตัวอย่างด้วยการอ้างถึงมโนมติเกี่ยวกับเศษส่วน โดยลักษณะสำคัญของแบบจำลองนี้ประกอบด้วย ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขต

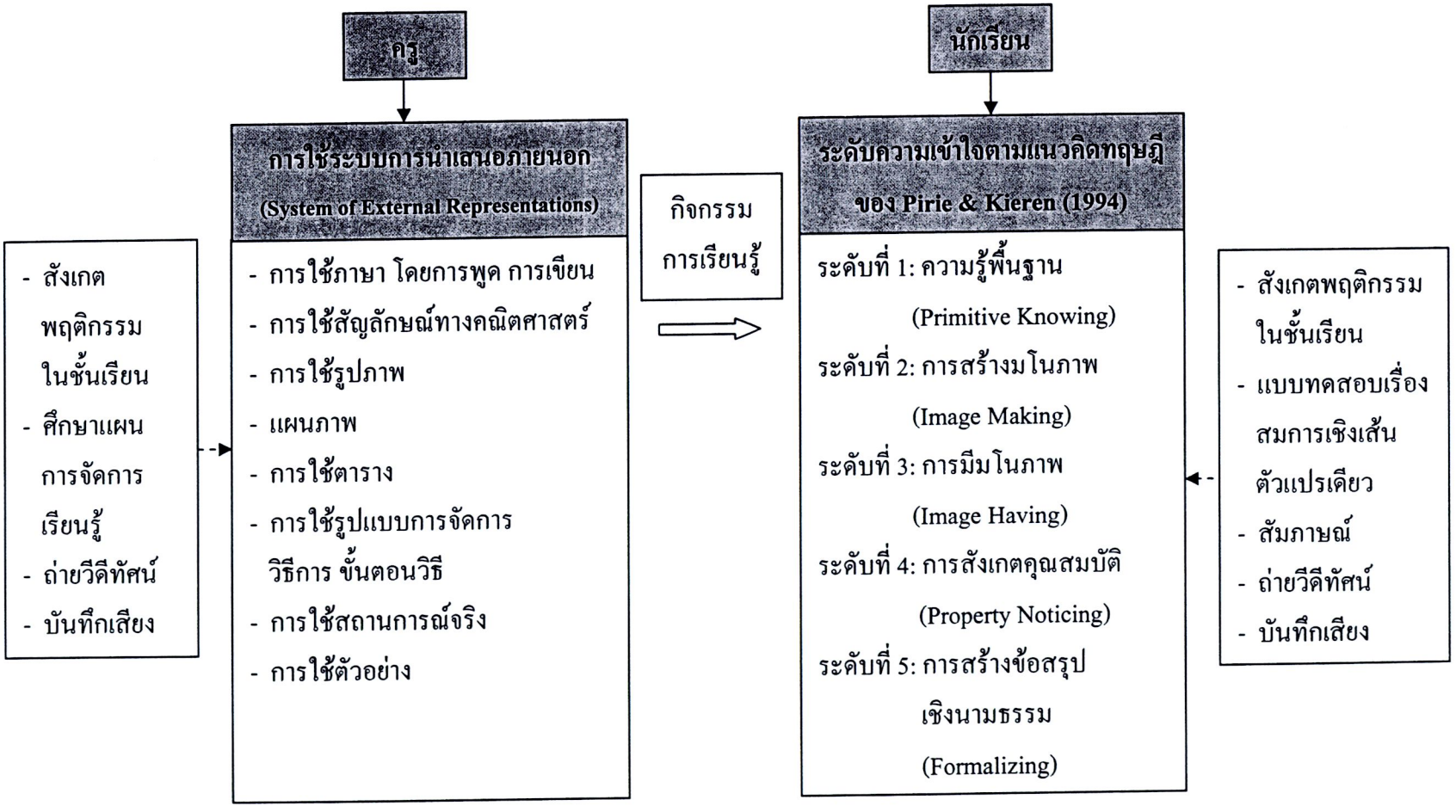
(Don't Need Boundaries) การย้อนกลับ (Folding Back) และ การทำให้สมบูรณ์ของการกระทำ (Acting) และการอธิบาย (Expressing) สิ่งที่เกิดขึ้นในแต่ละระดับของความเข้าใจ โดยทฤษฎีจะถูกแสดงโดยการยกตัวอย่างพฤติกรรมของเด็กที่ทำงานเกี่ยวกับหัวข้อและขั้นตอนที่หลากหลาย ในตอนท้ายวิธีหนึ่งที่เป็นการนำเอาทฤษฎีไปใช้ในทางปฏิบัติจะสามารถอธิบายข้อมูลรายละเอียดได้เป็นอย่างดี

Thom and Pirie (2006) ได้ศึกษาความซับซ้อนของความเข้าใจเรื่องจำนวนของนักเรียน 2 คน งานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยเชิงคุณภาพที่ศึกษาความเข้าใจเรื่องจำนวนของนักเรียนเกรด 3 จำนวน 2 คน โดยที่มีการบันทึกวีดีทัศน์ในขณะที่นักเรียนทำงาน เพื่อบันทึกทุกอย่างที่พวกเขารู้เกี่ยวกับจำนวน 72 ชิ้นงานหรือการสนทนาต่างๆ ของเด็กถูกนำมาวิเคราะห์โดยใช้กรอบทฤษฎีของ Pirie และ Kieren เพื่อวิเคราะห์การพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนนับเป็นไปตามรูปแบบที่ซับซ้อนในความแตกต่างที่หลากหลายของแบบจำลองของ Pirie และ Kieren นอกจากนี้ กรณีที่มีความสำคัญ ความรู้พื้นฐาน การสร้างมโนภาพ การมีมโนภาพ การสังเกตคุณสมบัติ การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม การสังเกตเช่นเดียวกันกับ วิธีการที่ความเข้าใจของนักเรียนมีอยู่นอกเหนือไปจาก ไม่จำเป็นต้องมีขอบเขต ถูกระบุและตรวจสอบในรายละเอียด นอกจากนี้ลักษณะอื่นๆ ของแบบจำลอง คือ การสร้างโครงสร้าง การสร้างมโนมติใหม่ การทำย้อนกลับ และการเชื่อมโยงความเข้าใจ ถูกอธิบายและยกตัวอย่างชนิดของการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสัมพันธ์กับความเข้าใจของเด็กๆ เกี่ยวกับจำนวนด้วย

Lisa (2008) ได้ศึกษาลักษณะของพฤติกรรมของนักเรียนที่สัมพันธ์กับการพัฒนาความเข้าใจในแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งมีวัตถุประสงค์คือวิเคราะห์ถึงความสัมพันธ์ระหว่างพฤติกรรมและการพัฒนาความเข้าใจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ โดยใช้แบบจำลองของ Pirie และ Kieren การวิเคราะห์นี้ถูกทำโดยผ่านชุดของกรณีศึกษา ที่เป็นนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ที่มีระดับความสามารถที่หลากหลาย โดยทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับ Combinatoric หลังจากมีการสอนการแก้ปัญหาแล้ว ผลการศึกษาเสนอแนะว่า ประเภทของพฤติกรรมของนักเรียนบางพฤติกรรม ปรากฏว่ามีความสัมพันธ์กับการพัฒนาการของแนวคิดและปรากฏขึ้นในแบบรูปที่เฉพาะเจาะจง โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในขณะที่ความเข้าใจพัฒนา มีการเปลี่ยนแปลงจากพฤติกรรม ดังเช่น นักเรียนตั้งคำถามแต่ละคำถาม การอธิบาย และการใช้แนวคิดของตัวเองหรือของคนอื่น ที่นำไปสู่พฤติกรรมที่เกี่ยวข้องกับการจัดตำแหน่งสถานการณ์ที่ตั้งสมมติฐาน พฤติกรรมที่เชื่อมโยงกับการนำเสนอ และการเชื่อมโยงบริบท เป็นที่น่าตระหนักว่า ประเภทของพฤติกรรมของนักเรียนบางประเภท มีแนวโน้มไปสู่การปรากฏขึ้นของแต่ละขั้นเฉพาะของ แบบจำลอง Pirie และ Kieren ซึ่งมีความสำคัญในการช่วยเพื่อให้เข้าใจการพัฒนาแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

6. กรอบแนวคิดในการดำเนินการวิจัย

ในการศึกษาครั้งนี้ ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยใช้กรอบทฤษฎีของ Pirie และ Kieren



ภาพที่ 5 กรอบแนวคิดในการดำเนินการวิจัย