บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ.2542 (ฉบับแก้ไขเพิ่มเติม พ.ศ. 2545) ได้กำหนดให้มีการปฏิรูปการศึกษาหลายด้าน ด้านการบริหารการจัดการศึกษา ครู มาตรฐานการศึกษา การเรียนรู้ โดยเฉพาะด้านการจัดการเรียนรู้ ตามหมวด 4 มาตรา 22 การจัดการศึกษาต้องยึดหลักสำคัญที่ว่า ผู้เรียนทุกคนมีความสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้ และถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ และตามมาตราที่ 23 การจัดการศึกษาทั้งการศึกษาในระบบ การศึกษานอกระบบ และการศึกษาตามอัธยาศัย ต้องเน้นความสำคัญทั้งความรู้ คุณธรรม กระบวนการเรียนรู้และบูรณาการตามความเหมาะสมของแต่ละระดับการศึกษาในหลายเรื่อง โดยเฉพาะความรู้และทักษะด้านคณิตศาสตร์ (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2545)

คณิตศาสตร์เป็นศาสตร์หนึ่งที่มีความสำคัญในการพัฒนาประเทศ เนื่องจากคณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาความคิดมนุษย์ ให้คิดอย่างมีเหตุผล สร้างสรรค์ และมีระบบระเบียบแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาและสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ทำให้สามารถวางแผน ตัดสินใจ และแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการพัฒนาทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี รวมไปถึงศาสตร์ทางด้านอื่นๆ ดังนั้นคณิตศาสตร์มีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิตประจำวัน มีส่วนช่วยในการพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และช่วยให้คนเป็นมนุษย์ที่สมบูรณ์ขึ้น มีความสมดุลทั้ง ทางด้านร่างกาย จิตใจ สติปัญญา และอารมณ์ เมื่อเผชิญกับปัญหาสามารถคิดแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม และอยู่ร่วมกันในสังคมได้อย่างสงบสุข (กรมวิชาการ, 2545)

ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ผ่านมา แม้ว่านักเรียนจะมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระเป็นอย่างดี แต่มีนักเรียนจำนวนไม่น้อยที่ขาดความสามารถทางด้านการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารและนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยงระหว่างเนื้อหาคณิตศาสตร์กับสถานการณ์ต่างๆ และความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งเป็นผลทำให้นักเรียนไม่สามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ จะเห็นได้ว่าทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์จำเป็นสำหรับนักเรียนทุกคน ดังนั้นครูจะต้องจัดการเรียนการสอนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ ฝึกฝนและพัฒนาให้มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์มากขึ้น

ไม่สอนเฉพาะเนื้อหาเพียงอย่างเดียว (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี [สสวท.], 2550) ซึ่งการที่ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีคุณภาพจะต้องมีความสมดุลระหว่างด้านความรู้ ทักษะกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรม จริยธรรมและค่านิยมที่ดีงาม

จากการศึกษาแนวโน้มการจัดการศึกษาคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ระดับนานาชาติ (TIMSS 2007) พบว่า นักเรียนไทยส่วนใหญ่มีระดับความสามารถทางการเรียนคณิตศาสตร์ระดับต่ำกว่าระดับ 1 (ระดับต่ำมาก) และมีจำนวนนักเรียนที่อยู่ในระดับ 4 (ระดับก้าวหน้า) น้อยมาก นักเรียนไทยมีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ต่ำกว่าค่าเฉลี่ยนานาชาติ และมีแนวโน้มของคะแนนลดลง เนื้อหาที่นักเรียนมีคะแนนน้อยที่สุดคือ เนื้อหาพีชคณิต สำหรับพฤติกรรมการเรียนรู้ ด้านการประยุกต์ใช้ความรู้ต่ำกว่าด้านความรู้/ ความเข้าใจ และการบูรณาการความรู้และการให้เหตุผล และนักเรียนในภาคตะวันออกเฉียงเหนือมีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์น้อยที่สุด (โครงการ TIMSS 2007, 2552) และนอกจากนี้ จากรายงานผลการประเมินผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ปีการศึกษา 2550 คะแนนเฉลี่ยร้อยละของวิชาคณิตศาสตร์คิดเป็น 34.73 และจำนวนนักเรียนอยู่ในเกณฑ์ปรับปรุง, พอใช้ และดี คิดเป็นร้อยละ 37.93, 56.97 และ 5.10 จะเห็นได้ว่าร้อยละของจำนวนนักเรียนที่อยู่ในระดับดีมีจำนวนน้อยมาก เมื่อพิจารณาในแต่ละสาระพบว่าสาระที่มีคะแนนเฉลี่ยน้อยที่สุดคือ การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น รองลงมา คือ การวัด, พีชคณิต, จำนวนและการดำเนินการ และเรขาคณิตตามลำดับ(สำนักทดสอบทางการศึกษา, 2551)

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับปัญหาในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน พบว่านักเรียนมีข้อบกพร่องในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ในเนื้อหาที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวและการแก้โจทย์สมการ(สุมารี เวียงรัตน์, 2541; นภาภรณ์ สุวรรณภา, 2536 อ้างถึงใน นพวรรณ ทับทอง, 2548; นพวรรณ ทับทอง, 2548) ซึ่งเป็นเนื้อหาที่จัดอยู่ในสาระการเรียนรู้พีชคณิต ของวิชาคณิตศาสตร์ช่วงชั้นที่ 3 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2551

Booth (1996) ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับพีชคณิตเพื่อค้นหาความเข้าใจของนักเรียนเกี่ยวกับการใช้ตัวอักษรและการจัดกระทำกับตัวอักษรเหล่านั้นในประโยคสัญลักษณ์และสมการ ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมีความยุ่งยากในเรื่องของ ความหมายของตัวอักษรที่อยู่ในประโยคสัญลักษณ์ และสมการ และการมองว่าตัวอักษรแทนตัวที่ไม่ทราบค่า หรือยุ่งยากในการเข้าใจว่า ค่าหนึ่งสามารถแทนอีกค่าหนึ่งได้ ได้ เช่น 5a + 2a และ 7a สามารถใช้แทนกันได้ และนักเรียนยังมีความยุ่งยากในการอ่านประโยคสัญลักษณ์ทางพีชคณิตอย่างยืดหยุ่นได้ กล่าวคือ นักเรียนมีความยุ่งยากในการแปลความหมายประโยคสัญลักษณ์อันเดียวกันไปในหลากหลายแนวทาง นอกจากนี้ยังมีความยุ่งยากในเรื่องของสัญลักษณ์ทางพีชคณิต โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ผลลัพธ์ที่มีตัวไม่ทราบค่ารวมอยู่ด้วย เช่น 6s จากงานวิจัย เห็นได้ชัดว่าวิธีการสอนแบบเดิมใน

การสอนพีชคณิตไม่ได้ช่วยให้นักเรียนพ้นจากความยุ่งยากเหล่านี้ และในความเป็นจริงแล้วทำให้เกิดความยุ่งยากเหล่านี้ด้วย กล่าวคือ การเริ่มต้นเกี่ยวกับตัวอักษรผ่านกิจกรรมเกี่ยวกับการหาค่าเมื่อกำหนดค่าของตัวอักษรให้ เช่น หาค่าของ $2n + 3$ เมื่อ $n = 7$ การจัดกระทำทางพีชคณิต เช่น ทำ $2a + 5a - 3a$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และการแก้สมการ เช่น หาค่าของ x จากสมการ $2x + 1 = 5$ ไม่ได้สนับสนุนมุมมองที่ตัวอักษรแทนขอบเขตที่มีค่า หรือ เป็นตัวแปร

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) ได้กำหนดการนำเสนอ (Representations) ทางคณิตศาสตร์ไว้ในหลักการและมาตรฐานหลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ (Principles and Standards of School Mathematics 2000) การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ควรจัดให้นักเรียนสามารถ คิดหาวิธีและใช้การนำเสนอ เพื่อใช้ในการรวบรวมความรู้ จดบันทึก ตลอดจนสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ สามารถเลือกใช้ ประยุกต์ และแปลความหมายของการการนำเสนอเพื่อใช้ในการแก้ปัญหาได้ และสามารถใช้การนำเสนอเพื่อสร้างแบบจำลอง และแปลความหมายปรากฏการณ์ทางกายภาพ สังคม และทางคณิตศาสตร์ได้โดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์นั้น ซึ่งสอดคล้องกับหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พ.ศ.2551 วิชาคณิตศาสตร์ ที่ได้กำหนดมาตรฐานในสาระที่ 6 ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ให้ผู้เรียนมีความสามารถในการนำเสนอทางคณิตศาสตร์ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551)

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา ได้วางเป้าหมายที่ระบุไว้อย่างชัดเจนโดยพยายามใช้วิธีการต่างๆ เพื่อยกระดับมาตรฐานผลสัมฤทธิ์ทางคณิตศาสตร์(NCTM, 2000) มีโรงเรียนเพียงไม่กี่โรงเรียนที่เข้าใจและนำเทคนิคมาใช้เพื่อให้เกิดความก้าวหน้าและพัฒนาผู้เรียน โดยสภาพที่เป็นจริงการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในโรงเรียนโดยทั่วไป ที่ยังใช้รูปแบบการสอนคณิตศาสตร์แบบท่องจำ ไม่ได้คำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล เป็นสาเหตุให้ความเข้าใจของนักเรียนบางคน ไม่ใช่เนื้อหาที่แท้จริง ไม่ได้เกิดจากตัวของผู้เรียนเอง การนำเสนอภายในของผู้เรียนถูกพัฒนาเป็นเพียงบางส่วน ไม่สามารถเชื่อมโยงเป็นเครือข่ายได้ ซึ่งเป็นอุปสรรคเชิงการรู้และอุปสรรคทางด้านอารมณ์ เป็นระยะเวลายาวนาน โดยเครื่องมือที่ช่วยในการเอาชนะอุปสรรคได้มาจากการให้ความสำคัญกระบวนการเรียนรู้ของผู้เรียน ที่จะนำไปสู่การพัฒนาเครื่องมือ โดยอาศัยการนำเสนอ นั่นคือ พัฒนาระบบการนำเสนอภายนอกที่จะสอดคล้องกับระบบการนำเสนอภายในของผู้เรียนที่จะทำให้เกิดองค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ในตัวผู้เรียนอย่างมีประสิทธิภาพ (Goldin & Shteingold, 2001)

Goldin (1998) กล่าวว่า ระบบการนำเสนอ (Representational System) ประกอบด้วยระบบย่อยๆ หลายระบบ ระบบภาษาพูด ภาษาเขียน ภาพเขียน หรือรูปภาพ รูปแบบการจัดการ และ

สถานการณ์จริงของโลกที่อยู่รอบๆ ตัวเรา การนำเสนอมี 2 แบบ คือ การนำเสนอภายนอก (External Representations) และ การนำเสนอภายใน (Internal Representations) หรือการนำเสนอทางจิตวิทยาของบุคคล ระบบการนำเสนอภายนอกประกอบด้วยระบบย่อยๆ ตั้งแต่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ไปจนถึงสิ่งแวดล้อมของการเรียนรู้ที่มีโครงสร้าง เช่น วัสดุ เครื่องมือที่จับต้องได้ ในทางตรงข้าม ระบบการนำเสนอภายในจะรวมเอาการสร้างสัญลักษณ์ภายในตัวบุคคล และการกำหนดส่งผ่านความหมายไปยังสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ รวมถึงการนำเสนอด้วยภาพที่สื่อถึงแนวคิด และการนำเสนอในเชิงปริภูมิ และครอบคลุมถึงยุทธวิธีในการแก้ปัญหา และที่สำคัญคือผลของการนำเสนอมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยองค์ประกอบของระบบการนำเสนอภายในประกอบด้วย 5 ประเภท คือ 1) ภาษาพูดและระบบโครงสร้างของภาษา (Verbal and Syntactic Systems) 2) ระบบการจินตนาการ (Imagistic Systems) 3) ระบบสัญลักษณ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ (Formal Notational Systems of Mathematics) 4) ระบบการวางแผนและการควบคุม (A System of Planning , Monitoring , and Executive Control) 5) ระบบการนำเสนอที่เกี่ยวข้องกับอารมณ์ (A System of Affective Representation)

ปฏิสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายในและการนำเสนอภายนอก เป็นพื้นฐานในการสอนและการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ ความหมายและการแปลความหมายอะไรก็ตาม ที่ครูอาจจะนำไปใช้ในการนำเสนอภายนอก คือธรรมชาติของการพัฒนาการนำเสนอภายในของนักเรียนที่จะรวบรวมขึ้นและก่อให้เกิดองค์ความรู้ (Goldin,1998)

แนวคิดที่เป็นที่ยอมรับอย่างกว้างขวางในวงการคณิตศาสตรศึกษา คือ นักเรียนควรจะเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ ซึ่งเห็นได้จากเป้าหมายของงานวิจัยหลายงานและการพยายามนำไปใช้ในทางคณิตศาสตรศึกษาได้เกิดขึ้นเพื่อสนับสนุนการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ (Hiebert & Carpenter, 1992) นอกจากนี้การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจได้ขยายขอบเขตมากไปกว่าในวงการคณิตศาสตรศึกษา มีทฤษฎีการเรียนรู้หลายทฤษฎีในหลายสาขาวิชาที่ได้เปลี่ยนกระบวนทัศน์ที่แตกต่างไปจากแบบเดิม ตัวอย่างเช่น ความพยายามที่เกิดขึ้นใน รูปแบบเดิมของศาสตร์เชิงการรู้ (Cognitive Science) ที่เน้นการสร้างรูปแบบการนำเสนอภายในด้วยการรับรู้ที่สามารถพิจารณาได้ (Garder, 1985 อ้างถึงใน Hiebert & Carpenter, 1992) สามารถถูกแปลความหมายในฐานะของการตระหนักที่ว่าความเข้าใจเป็นแง่มุมที่เป็นพื้นฐานของการเรียนรู้และรูปแบบการเรียนรู้ที่ต้องให้ความสำคัญกับประเด็นในเรื่องความเข้าใจ(Mayer, 1989; Ohlsson & Rees, 1988; Perkins & Simmons, 1988 อ้างถึงใน Hiebert & Carpenter, 1992)

Hiebert and Carpenter (1992) กล่าวว่า ความเข้าใจในแนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นภายในเฉพาะตัวบุคคล ในความหมายที่ข้อมูลถูกนำเสนอและสร้างโครงสร้าง

ขึ้นมา โดยที่แต่ละบุคคลจะเข้าใจแนวคิด หรือกระบวน หรือข้อเท็จจริง ทางคณิตศาสตร์ได้เมื่อแนวคิดนั้นเข้าไปเป็นส่วนหนึ่งในโครงสร้างทางปัญญา หรือเครือข่ายความรู้ (Schema or Network of Knowledge) และนอกจากนี้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์จะถูกเข้าใจถ้าการนำเสนอภายในของความเข้าใจเป็นส่วนหนึ่งของเครือข่ายของการนำเสนอ ระดับของความเข้าใจบ่งบอกได้โดยจำนวนหรือความแข็งแรงของการเชื่อมโยง นั่นคือการที่ผู้เรียนมีความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ผู้เรียนจะต้องมีการเชื่อมโยงความรู้ ข้อเท็จจริง แนวคิดที่เกี่ยวข้องสัมพันธ์กันภายในโครงสร้างทางปัญญาของตนเอง ดังนั้นนักเรียนจะต้องสร้างความรู้ทางคณิตศาสตร์ด้วยตัวของเขาเองมากกว่าการได้รับจากครูหรือจากหนังสือเรียน นักเรียนจะต้องสร้างการนำเสนอภายในของปฏิสัมพันธ์กับโลกของแต่ละคนขึ้นเอง และสร้างเครือข่ายของการนำเสนอขึ้นเอง เมื่อเป้าหมายของการจัดการเรียนรู้คือเพื่อให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ รูปแบบการจัดการเรียนรู้ควรจะถูกออกแบบเพื่อให้นักเรียนสร้างการเชื่อมโยงแนวคิดที่มีความสัมพันธ์กัน และวิธีการจัดการเรียนรู้ควรจะช่วยสนับสนุนให้เกิดการเชื่อมโยงเหล่านี้ และการใช้การนำเสนอภายนอกของครู เช่น การใช้วัตถุที่เป็นรูปธรรม การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ การใช้ภาษาของครูในขณะที่มีการอภิปรายในชั้นเรียน จะช่วยให้นักเรียนเกิดความเข้าใจได้ดีขึ้น Luitel (n.d.) กล่าวว่า การนำเสนอที่หลากหลาย เช่น การนำเสนอโดยใช้แผนภาพ การนำเสนอโดยใช้ภาษาพูด และการนำเสนอโดยใช้วัตถุที่เป็นรูปธรรม เป็นวิธีการหนึ่งที่ช่วยให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจ

Pirie and Kieren (1994) ได้เสนอกรอบการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เป็นกระบวนการไม่หยุดนิ่ง และไม่ได้เป็นเชิงเส้น นักเรียนสามารถย้อนกลับมาที่ระดับความเข้าใจในระดับก่อนหน้า เมื่อพบว่ามโนภาพที่มีอยู่ไม่เพียงพอ เพื่อปรับมโนภาพที่มีอยู่ให้สมบูรณ์ยิ่งขึ้น ซึ่งช่วยให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจไปสู่ระดับที่สูงขึ้นได้ โดยมีระดับความเข้าใจ 8 ระดับ ได้แก่ ระดับที่ 1 ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) เป็นความรู้เดิมที่ใช้เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่ เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนาความรู้ทางคณิตศาสตร์ โดยการที่นักเรียนนำเอาความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับสิ่งที่นักเรียนกำลังจัดกระทำอยู่ ระดับที่ 2: การสร้างมโนภาพ (Image Making) เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่นักเรียนนำความรู้พื้นฐานมาสร้างความหมายจากการจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ระดับที่ 3: การมีมโนภาพ (Image Having) ความเข้าใจในระดับนี้เป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนจัดกระทำกับสื่อหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์แล้วสามารถสร้างภาพความคิดในใจได้ สามารถอธิบาย สะท้อน หรือคิดย้อนกลับกระบวนการสร้างนั้นโดยไม่ต้องมีการจัดกระทำอีก ระดับที่ 4: การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) ความเข้าใจระดับนี้เกิดจากการที่นักเรียนสามารถจัดกระทำกับมโนภาพที่มีอยู่และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการ ระดับที่ 5: การสร้าง

ข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) ความเข้าใจในระดับนี้เกิดจากการที่นักเรียนหาข้อสรุปเชิงนามธรรม นิยามหรือสูตร หรือข้อสรุปในกรณีทั่วไปได้ ระดับที่ 6: การสังเกต (Observing) ความเข้าใจในระดับนี้นักเรียนสามารถ สะท้อน เชื่อมโยง รวมความเข้าใจระดับการสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรมเพื่อสร้างเป็นทฤษฎีบทได้ ระดับที่ 7: การสร้างโครงสร้าง (Structuring) ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถนึกถึงผลสรุปเชิงนามธรรมที่เป็นทฤษฎี เชื่อมโยงภายในทฤษฎี สามารถให้เหตุผลและพิสูจน์โดยไม่ต้องจัดกระทำกับสื่อรูปธรรมหรือขั้นตอนที่กำหนด ระดับที่ 8: การสร้างมโนมติใหม่ (Inventizing) เป็นความเข้าใจในระดับสูงสุด โดยที่นักเรียนมีโครงสร้างของความเข้าใจที่สมบูรณ์ และสามารถนำไปเป็นพื้นฐานในการสร้างมโนมติใหม่ในระดับที่สูงขึ้นได้

Thom and Pirie (2006) ได้ใช้แนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren ในการศึกษาความซับซ้อนของความเข้าใจเรื่องจำนวนของนักเรียน 2 คน ผลการวิจัยพบว่า ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเกี่ยวกับจำนวนนับเป็นไปตามรูปแบบที่ซับซ้อนในความแตกต่างที่หลากหลายของแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren นอกจากนี้ Warner (2008) ได้ศึกษาลักษณะของพฤติกรรมของนักเรียนที่สัมพันธ์กับการพัฒนาความเข้าใจในแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน โดยใช้กรอบแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren พบว่า พฤติกรรมของนักเรียนบางพฤติกรรม มีความสัมพันธ์กับการพัฒนาการของแนวคิดและปรากฏขึ้นในแบบรูปที่เฉพาะเจาะจงโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในขณะที่ความเข้าใจพัฒนา จะมีการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรม

จากที่กล่าวมาข้างต้น ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยวิเคราะห์ระดับความเข้าใจตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เพื่อเป็นแนวทางให้ครูพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพและ เพื่อส่งเสริมให้ผู้เรียนเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ อันจะสามารถช่วยยกระดับผลการเรียนของนักเรียนให้ดียิ่งขึ้น

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1

3. ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาเกี่ยวกับการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู จำนวน 1 คน และระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 จำนวน 3 คน ที่กำลังศึกษาในปีการศึกษา 2552 ภาคเรียนที่ 2 โรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดขอนแก่น โดยใช้เนื้อหาตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว โดยศึกษาในบริบทที่ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามปกติในห้องเรียน

4. นิยามศัพท์เฉพาะ

4.1 ระบบการนำเสนอ หมายถึง ผลลัพธ์ที่ได้จากกระบวนการนำเสนอ ซึ่งแบ่งได้เป็น 2 ระบบ คือ ระบบการนำเสนอภายนอก และระบบการนำเสนอภายใน

4.1.1 ระบบการนำเสนอภายนอก หมายถึง การนำเสนอในรูป สัญลักษณ์ โครงร่างของสัญลักษณ์ ภาษาพูด ภาษาเขียน รูปภาพ แผนภาพ ไดอะแกรม รูปแบบการจัดการ วิธีการ ขั้นตอนวิธี วัตถุที่เป็นรูปธรรม และสถานการณ์จริง

4.1.2 ระบบการนำเสนอภายใน หมายถึง โครงสร้างทางปัญญาที่อยู่ในสมองของแต่ละบุคคล ซึ่งไม่สามารถสังเกตได้โดยตรง การสังเกตหรือการวัดต้องอ้างอิงจากการนำเสนอภายนอก หรือพฤติกรรมภายนอกของแต่ละบุคคล

4.2 การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู หมายถึง การใช้ภาษา รูปภาพ แผนภาพ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ รูปแบบการจัดการ วิธีการ ขั้นตอนวิธี วัตถุที่เป็นรูปธรรม และสถานการณ์จริง ตัวอย่าง ลำดับการจัดการเรียนรู้ ในการจัดการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว เช่น การใช้ตัวแปรที่เป็นตัวอักษรแทนตัวไม่ทราบค่า การใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการอธิบายความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวโดยการเขียนในรูปทั่วไป การใช้ภาษาทั้งการพูดและการเขียนในการอธิบายขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว หรือขั้นตอนวิธีการแก้โจทย์ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว รวมไปถึงลำดับขั้นตอนการจัดการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวของครู

4.3 ความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กระบวนการที่เกิดขึ้นภายในเฉพาะตัวบุคคล โดยที่แต่ละบุคคลมีการสร้างความเชื่อมโยงแนวคิด กระบวนการ ข้อเท็จจริง ที่มีความสัมพันธ์กัน ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายใน และการนำเสนอภายนอก และการเชื่อมโยงภายในของการนำเสนอแต่ละรูปแบบ

4.4 ระดับความเข้าใจตามแนวคิดทฤษฎีของ Pirie และ Kieren

Pirie and Kieren (1994) ได้เสนอกรอบการพัฒนาระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่ทำให้เกิดการเรียนรู้ 8 ระดับ แต่เนื่องจากมโนมติที่เกี่ยวข้องกับเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนยังไม่ถึงขั้นที่จะสะท้อนข้อสรุปเชิงนามธรรมเพื่อสร้างทฤษฎีบทหรือมาพิสูจน์ทฤษฎีบทได้ และการจัดการเรียนรู้ของครูเป็นเพียงเรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวเท่านั้นยังไม่ได้จัดกิจกรรมในมโนมติที่สูงกว่า เช่น เรื่องระบบสมการ เรื่องอสมการ ดังนั้นนักเรียนยังไม่ถึงขั้นความเข้าใจสูงสุด เพื่อไปสร้างมโนมติใหม่ในระดับที่สูงขึ้นได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงปรับเป็น 5 ระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1: ความรู้พื้นฐาน (Primitive Knowing) เป็นความรู้พื้นฐาน หรือประสบการณ์เดิมที่มีอยู่ ที่นำไปเป็นพื้นฐานในการสร้างและพัฒนาระดับความเข้าใจต่อไป ไม่ใช่ความรู้ทางคณิตศาสตร์ในระดับต่ำ แต่เป็นจุดเริ่มต้นของการพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสิ่งที่ผู้สังเกต ครู หรือผู้วิจัยคาดเดาว่านักเรียนจะมีความรู้พื้นฐานนี้เพื่อไปสร้างมโนมติใหม่ เช่น ความรู้เรื่องความหมายของสมการ การเขียนประโยคภาษาให้เป็นประโยคสัญลักษณ์ ความหมายของตัวแปร ความรู้เรื่องสมบัติการเท่ากัน ในการสร้างมโนมติเกี่ยวกับเรื่องการแก้ปัญหาสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

ระดับที่ 2: การสร้างมโนภาพ (Image Making) เป็นความเข้าใจที่เกิดจากการที่ผู้เรียนนำความรู้พื้นฐานหรือประสบการณ์เดิมที่นักเรียนมีอยู่และที่เกี่ยวข้องกับมโนมติใหม่ มาสร้างสิ่งที่แตกต่างจากความรู้พื้นฐานเพื่อใช้ในแนวทางใหม่ หรือมาสร้างความหมาย จากการจัดกระทำกับสื่อรูปธรรม หรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนนำความรู้เรื่องความหมายของสมการมาสร้างความหมายกับสมการที่ครูยกตัวอย่าง เพื่อสร้างมโนมติในเรื่องความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว นักเรียนนำความรู้เกี่ยวกับสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการมาสร้างความหมายกับตัวอย่างที่ครูแสดงการแก้สมการ

ระดับที่ 3: การมีมโนภาพ (Image Having) ความเข้าใจระดับนี้ แนวคิดทางคณิตศาสตร์หรือมโนภาพได้ถูกสร้างขึ้นแล้ว ซึ่งเป็นความเข้าใจที่พัฒนาจากการที่นักเรียนจัดกระทำกับสื่อที่เป็นรูปธรรมหรือกิจกรรมทางคณิตศาสตร์แล้วสามารถสร้างภาพความคิดในใจโดยสามารถ อธิบาย สะท้อน คิดย้อนกลับมโนภาพนั้น โดยไม่ต้องแสดงการจัดกระทำเหมือนการสร้างมโนภาพอีก แต่อย่างไรก็ตาม ความเข้าใจถูกเรียกว่าการเชื่อมโยง ถ้าผู้เรียนย้อนกลับไปในระดับความเข้าใจที่ระดับก่อนหน้าเมื่อพิสูจน์ได้ว่ามีความจำเป็นที่จะต้องเปลี่ยนมโนภาพที่มีอยู่ ซึ่งแสดงให้นักเรียนเห็นในภายหลังว่าไม่เพียงพอ หรือเป็นมโนภาพที่ผิด เช่น นักเรียนสามารถเลือกใช้สมบัติในการแก้สมการเพื่อหาคำตอบของสมการได้และแสดงขั้นตอนวิธีการแก้สมการ พร้อมทั้งอธิบายวิธีการแก้สมการได้

ระดับที่ 4: การสังเกตคุณสมบัติ (Property Noticing) ความเข้าใจระดับนี้เกิดขึ้นเมื่อผู้เรียนจัดการ หรือรวมแง่มุมของมโนภาพที่มีอยู่เพื่อสร้างคุณสมบัติที่เฉพาะ เป็นวิธีการเฉพาะ และสังเกตเห็นคุณสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกัน รวมไปถึงการที่ผู้เรียนสามารถสร้างการเชื่อมโยงและหาข้อแตกต่างระหว่างมโนภาพที่มีอยู่นั้น เช่น นักเรียนอธิบายการใช้สมบัติที่นำมาแก้สมการพร้อมทั้งบอกเหตุผลการเลือกใช้สมบัตินั้นได้ และแสดงวิธีการอื่นในการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

ระดับที่ 5: การสร้างข้อสรุปเชิงนามธรรม (Formalizing) ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถหาข้อสรุปเชิงนามธรรม นิยาม สูตร หรือข้อสรุปทั่วไป ของมโนภาพที่เฉพาะเจาะจงที่มีอยู่จากขั้นตอนการสังเกตคุณสมบัติ เช่น นักเรียนสามารถบอกความหมายของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้ และเขียนสมการการเชิงเส้นตัวแปรเดียวในรูปทั่วไปที่เป็นสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ คือ $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนใดๆ และ x เป็นตัวแปร หรือนักเรียนสามารถสรุปขั้นตอนวิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้และสามารถแสดงขั้นตอน วิธีการแก้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวได้

4.5 สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว หมายถึง สมการที่มี x เป็นตัวแปร และอยู่ในรูป $ax + b = 0$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว ที่ $a \neq 0$

4.6 แบบทดสอบ เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว หมายถึง แบบทดสอบที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นเพื่อใช้ทดสอบนักเรียนหลังจากเรียนจบในแต่ละเรื่อง เพื่อนำมาวิเคราะห์ระดับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

4.7 โปรโตคอล (Protocol) หมายถึง ข้อความที่ได้จากการถอดบันทึกเสียง และบันทึกวีดีทัศน์ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครูและข้อความที่ได้จากการถอดจากการบันทึกเสียงพูดคุยของนักเรียนในระหว่างที่ทำกิจกรรม ด้วยเครื่องบันทึกเสียงหรือเครื่องบันทึกวีดีทัศน์ เพื่อให้เห็นถึงการสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนและเห็นถึงระดับความเข้าใจของนักเรียนตลอดจนการอธิบาย อภิปรายซักถามกันในกลุ่มหรือกับครู ในขณะที่ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้เรื่องสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว

4.8 ครู หมายถึง ครูที่กำลังสอนวิชาคณิตศาสตร์ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จากโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น(ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา จำนวน 1 คน

4.9 นักเรียน หมายถึง นักเรียนที่กำลังเรียนในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 และเรียนกับครูที่เป็นกลุ่มเป้าหมาย จากโรงเรียนสาธิตมหาวิทยาลัยขอนแก่น (ศึกษาศาสตร์) ระดับมัธยมศึกษา จำนวน 3 คน

5. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

5.1 เป็นแนวทางสำหรับครูในการพัฒนาการจัดการเรียนรู้เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ให้มีประสิทธิภาพ

5.2 เป็นแนวทางให้ครูเลือกใช้รูปแบบการนำเสนอเพื่อพัฒนาความเข้าใจของนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์

5.3 เป็นแนวทางในการพัฒนานักเรียนให้สามารถเรียนรู้ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ด้วยความเข้าใจ และมีประสิทธิภาพ รวมไปถึงยกระดับผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

5.4 เป็นแนวทางในการศึกษาวิจัย และค้นคว้า เพื่อปรับปรุงการจัดการเรียนรู้ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวให้ดียิ่งขึ้น