บทที่ 4

การคำนวณสนามไฟฟ้าของสายส่งด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์

4.1 บทนำ

ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ (finite element method: FEM) เป็นวิธีที่ใช้ในการหาผลเฉลยแบบประมาณของสมการเชิงอนุพันธ์และเป็นวิธีที่ได้รับความนิยมอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เพราะเนื่องจากเป็นวิธีที่สามารถวิเคราะห์งานที่มีโครงสร้างซับซ้อน หรือรูปร่างที่มีลักษณะโค้งมนได้ อีกทั้งประสิทธิภาพและการประมวลผลที่สูงขึ้นของคอมพิวเตอร์ในปัจจุบัน นอกจากนี้สำหรับบางงานที่มีจุดที่ต้องการวิเคราะห์มีพื้นที่ขนาดเล็กมากเมื่อเทียบกับปัญหารวมของระบบที่เป็นพื้นที่ขนาดใหญ่ ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์จะสามารถออกแบบกริดขนาดเล็กหรือใหญ่ ที่สามารถเชื่อมความสัมพันธ์ของ 2 บริเวณที่มีขนาดแตกต่างกันได้อย่างอิสระ

4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามไฟฟ้าของสายส่งไฟฟ้าแรงสูง

สำหรับปัญหาค่าสนามไฟฟ้าแบบ 2 มิติในระบบพิกัดฉาก ระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์นิยมจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปสมการที่ (4-1)

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q = 0 \tag{4-1}$$

โดยที่ ϕ คือ ฟังก์ชันใด ๆ ที่ต้องการทราบค่า

D_x D_y G และ Q คือ ค่าคงที่สัมประสิทธิ์

จากสมการที่ (4-5) แบบจำลองสายส่งไฟฟ้าแรงสูงค่าสนามไฟฟ้าที่กระจายรอบบริเวณสายส่งไฟฟ้าแรงสูงสามารถเทียบเคียงและจัดรูปใหม่เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์หน้าพารามิเตอร์ตัวแปรต่าง ๆ (D_x D_y G และ Q) ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

$$\nabla^2 \mathbf{E} - (\frac{1}{v^2})(\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}) - \mu\sigma(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}) = 0$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}-(\frac{1}{v^2})(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2})-\mu\sigma(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t})=0 \tag{4-2}$$

เนื่องจากสภาวะอากาศทั่วไปของระบบที่พิจารณากำหนดให้ $\sigma=0$ จะได้

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}-(\frac{1}{v^2})(\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2})=0 \tag{4-3}$$

จาก $v=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ และคุณสมบัติของระบบที่เป็น time-harmonic ค่า $\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}\approx-\omega^2\mathbf{E}$ แทนค่าลงในสมการที่ (4-3) จะได้

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial y^2}+\mu\varepsilon\omega^2\mathbf{E}=0 \tag{4-4}$$

เปรียบเทียบสมการที่ (4-1) กับ (4-4) เพื่อหาค่าสัมประสิทธิ์ D_x D_y G และ Q จะได้

$$\begin{aligned} D_x &= D_y = 1 \\ G &= -\mu\varepsilon\omega^2 \\ Q &= 0 \end{aligned} \tag{4-5}$$

4.3 การคำนวณค่าสนามไฟฟ้าด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์

สืบเนื่องจากสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้ในการคำนวณหาสนามไฟฟ้าของระบบสายส่งไฟฟ้าแรงสูงดังแสดงในสมการที่ (4-4) หาผลเฉลยแม่นตรงได้ยากเพราะด้วยเหตุที่ติดอยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยขนาด 2 มิติ ดังนั้นการหาค่าผลเฉลยโดยประมาณด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์จึงถูกนำมาใช้ในการนี้ ซึ่งประกอบไปด้วยขั้นตอนการดำเนินงานต่าง ๆ ดังนี้

4.3.1 การออกแบบกริดของพื้นที่ศึกษา

สำหรับงานวิจัยนี้ระบบที่ใช้ศึกษามีระบบหลายขนาด เริ่มจากระบบไฟฟ้า 1 เฟสจะประกอบไปด้วยระบบไฟฟ้าขนาด 69 kV ระบบไฟฟ้า 3 เฟสจะประกอบไปด้วยระบบไฟฟ้าขนาด 230 kV และ 500 kV ซึ่งในหัวข้อการออกแบบกริดของพื้นที่ศึกษานี้ จะขอยกตัวอย่างระบบไฟฟ้า

1 เฟสและ 3 เฟส เพื่อให้เห็นการออกแบบกริดที่แตกต่างกันภายในแต่ละระบบ โดยสิ่งที่แตกต่างกันอย่างชัดเจนระหว่างระเบียบวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนท์กับระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ที่เห็นได้ชัด คือ การตีกริดรูปสามเหลี่ยมด้วยระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ที่มีขนาดเล็กหรือใหญ่ที่แปรเปลี่ยนตามความต้องการในการวิเคราะห์บริเวณพื้นที่ที่สนใจภายในส่วนต่าง ๆ ของระบบ

ขั้นตอนแรกเริ่มจากการแบ่งพื้นที่ของระบบสายส่งออกเป็นกริดรูปสามเหลี่ยมโดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิลิเมนท์เป็นแบบเชิงเส้น ซึ่งผ่านการเชื่อมต่อกันระหว่างโนดและอิลิเมนท์ต่าง ๆ การออกแบบกริดเป็นรูปอิลิเมนท์ต่าง ๆ ได้ใช้โปรแกรม MATLAB™ ที่พัฒนาขึ้น โดยจะมีจำนวนโนดและอิลิเมนท์ที่ใช้ภายในระบบไฟฟ้า 1 เฟสและ 3 เฟส ที่แตกต่างกันโดย ระบบไฟฟ้า 1 เฟสขนาด 69 kV และ ระบบไฟฟ้า 3 เฟส ขนาด 230 kV และ 500 kV สามารถแสดงได้ด้วยรูปที่ 4.1-4.3 ตามลำดับ นอกจากนี้ภายในแต่ละรูปยังได้แสดงภาพขยาย เพื่อให้เห็นถึงความละเอียดในการออกแบบกริดและการเชื่อมต่อระหว่างโนดได้อย่างชัดเจนยิ่งขึ้น

4.3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนท์

ขั้นตอนนี้เป็นการเลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนท์ โดยเมื่อสมมติให้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยบนอิลิเมนท์เป็นแบบเชิงเส้นจะได้

$$\mathbf{E}(x,y)=\mathbf{E}_iN_i+\mathbf{E}_jN_j+\mathbf{E}_kN_k \tag{4-6}$$

โดยที่ N_n $n = i\ j\ k$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนท์ และ $\mathbf{E}_n$ $n = i\ j\ k$ คือผลลัพธ์ของค่าสนามไฟฟ้าเชิงเวกเตอร์ในแต่ละโนด $(i\ j\ k)$ ของอิลิเมนท์ ซึ่ง

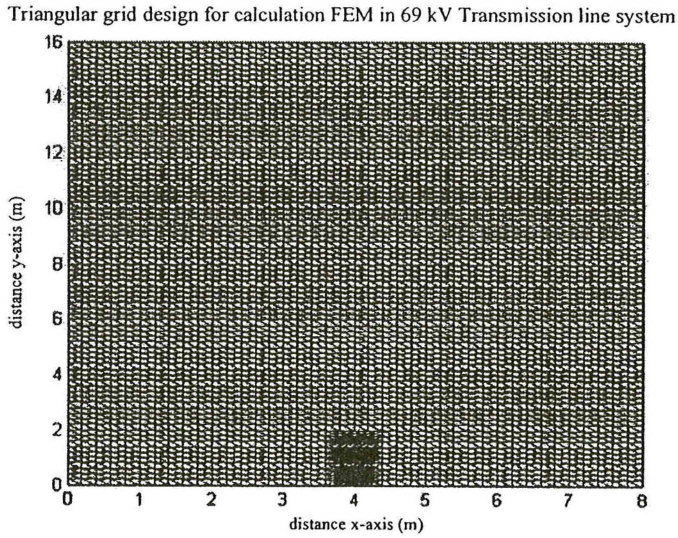
$$N_n=\frac{a_n+b_nx+c_ny}{2\Delta_e} \tag{4-7}$$

โดยที่

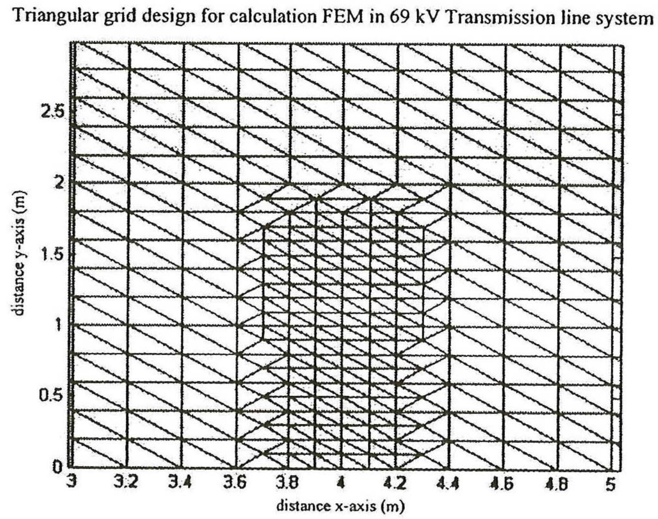
$$\begin{aligned}
&a_i = x_jy_k - x_ky_j\,, && b_i = y_j - y_k\,, && c_i = x_k - x_j\\
&a_j = x_ky_i - x_iy_k\,, && b_j = y_k - y_i\,, && c_j = x_i - x_k\\
&a_k = x_iy_j - x_jy_i\,, && b_k = y_i - y_j\,, && c_k = x_j - x_i
\end{aligned} \tag{4-8}$$

และ Δ_e คือ พื้นที่ของแต่ละอิลิเมนท์ ซึ่งหาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$\Delta_e = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \tag{4-9}$$

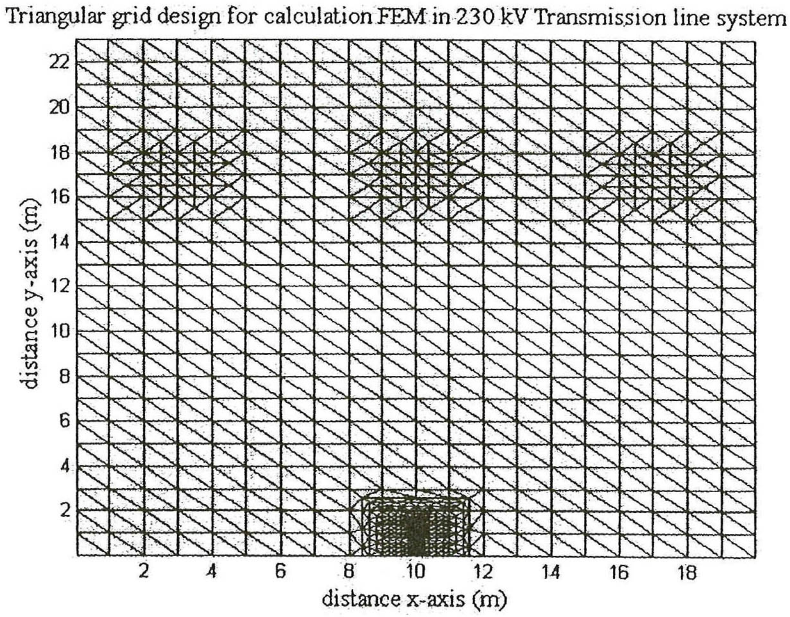


(ก) การแบ่งกริดรูปสามเหลี่ยมและการเชื่อมต่อระหว่างอิลิเมนท์ภายในโครงสร้าง

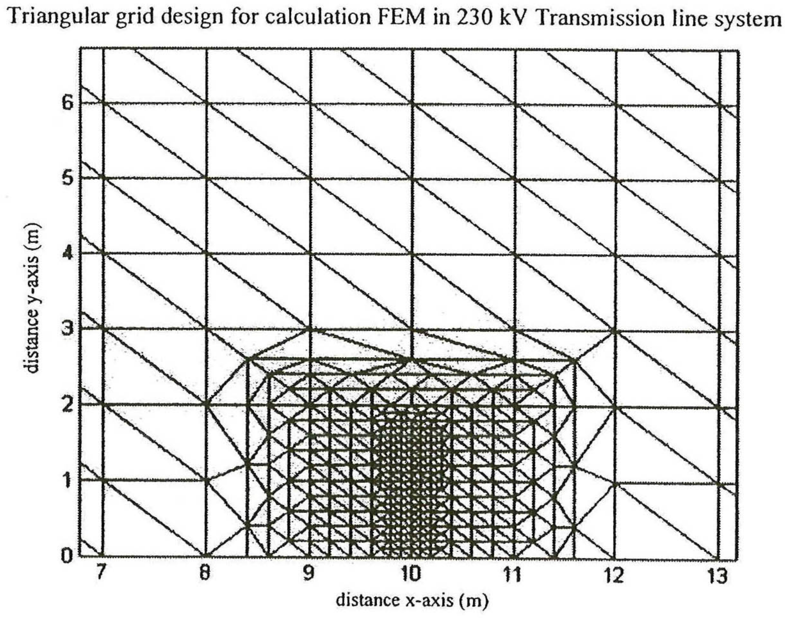


(ข) ภาพการขยายการแบ่งกริดและการเชื่อมต่ออิลิเมนท์บนบริเวณที่สำคัญ

รูปที่ 4.1 โครงสร้างของระบบไฟฟ้า 1 เฟสขนาด 69 kV

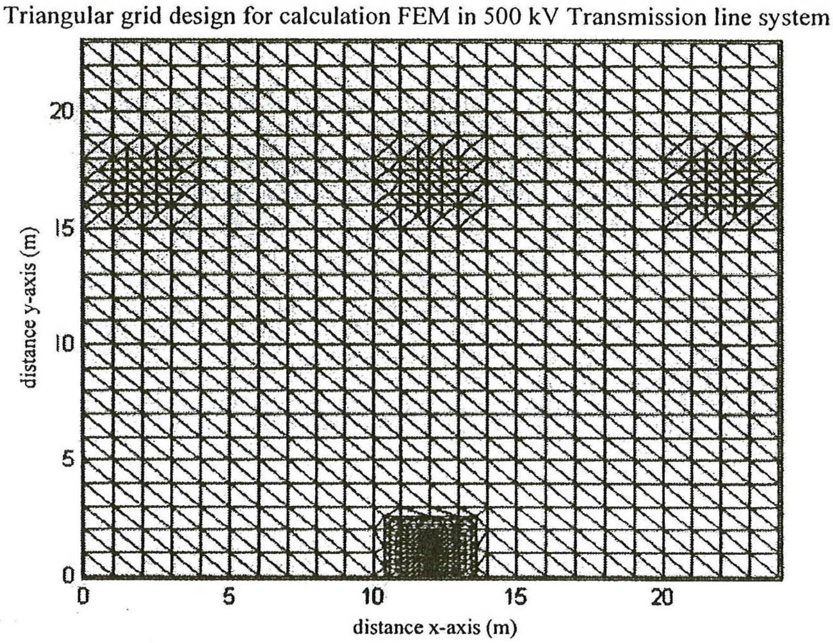


(ก) การแบ่งกริดรูปสามเหลี่ยมและการเชื่อมต่อระหว่างอิลิเมนท์ภายในโครงสร้าง

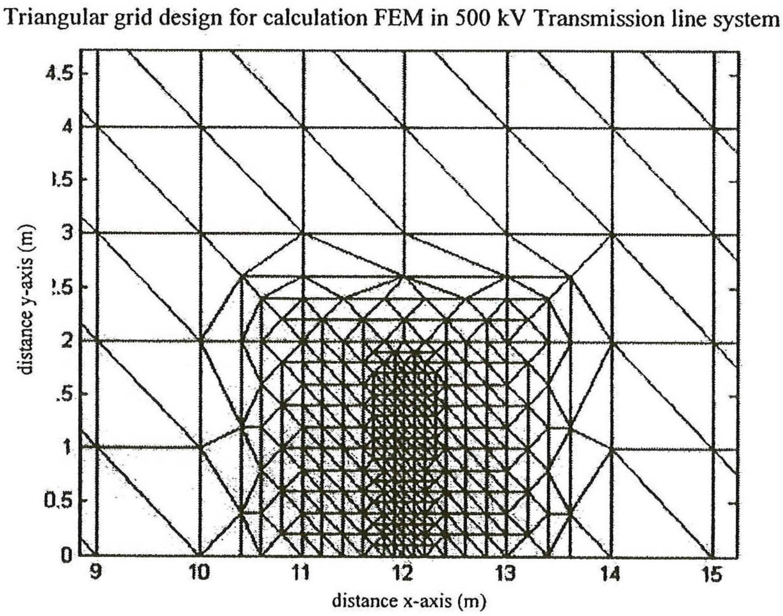


(ข) ภาพการขยายการแบ่งกริดและการเชื่อมต่ออิลิเมนท์บนบริเวณที่สำคัญ

รูปที่ 4.2 โครงสร้างของระบบไฟฟ้า 3 เฟสขนาด 230 kV



(ก) การแบ่งกริดรูปสามเหลี่ยมและการเชื่อมต่อระหว่างอิลิเมนท์ภายในโครงสร้าง



(ข) ภาพการขยายการแบ่งกริดและการเชื่อมต่ออิลิเมนท์บนบริเวณที่สำคัญ

รูปที่ 4.3 โครงสร้างของระบบไฟฟ้า 3 เฟสขนาด 500 kV

4.3.3 การสร้างสมการของอิลิเมนท์

ขั้นตอนนี้ถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์ ซึ่งเป็นการสร้างสมการของอิลิเมนท์ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาต่าง ๆ สำหรับปัญหาของระบบ 2 มิติ ทางระเบียบวิธีไฟไนท์อิลิเมนท์จะต้องจัดสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังแสดงในสมการที่ (4-1) ก่อนที่จะเข้าสู่การสร้างสมการของอิลิเมนท์ต่อไป (Larry, 1984)

$$D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q = 0$$

$$-\int_{\Delta_e} W_n R d\Delta_e = 0 \qquad (4\text{-}10)$$

ในระบบของสมการเชิงเส้นสามารถคำนวณหาค่าได้ โดยอาศัยการประมาณของการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (weighting functions) ดังสมการที่ (4-10) ในปัจจุบันการประยุกต์วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างถือเป็นวิธีที่ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ และวิธีนี้ยังสามารถจำแนกแยกย่อยออกไปได้อีก เช่น วิธีของกาเลอร์คิน (Galerkin) ซึ่งเมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากวิธีนี้ ปกติแล้วจะมีความสมมาตร จึงก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้กับปัญหาขนาดใหญ่ สำหรับกรณีระบบปัญหา 2 มิติการสร้างสมการของอิลิเมนท์ด้วยการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างมีหลักการดังนี้ คือ การแทนค่าผลเฉลยโดยประมาณลงในสมการที่ (4-1) จะไม่ก่อให้เกิดค่าเท่ากับศูนย์ หากแต่จะมีค่าเท่ากับ R แทนดังแสดงด้วยสมการที่ (4-11)

$$R = D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q \qquad (4\text{-}11)$$

โดยที่ ϕ คือตัวแปรที่ไม่ทราบค่า

ซึ่ง R เรียกว่าเศษตกค้าง (residual) เป็นค่าผิดพลาดที่เกิดขึ้นจากการใช้ผลเฉลยโดยประมาณซึ่งไม่ใช่ผลเฉลยแม่นตรงของปัญหา เศษตกค้าง R ที่เกิดขึ้นควรมีค่าต่ำที่สุด เพื่อผลเฉลยโดยประมาณที่เกิดขึ้นจะมีค่าเที่ยงตรงมากที่สุด และในงานวิจัยนี้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง

ได้ใช้วิธีของกาเลอร์คิน (Preston, Reece, and Sangha, 1988) และ (Kim, Kwon, and Park, 1999) ซึ่งวิธีนี้สามารถกระทำได้โดยการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function: W) แล้วอินทิเกรทตลอดทั้งโดเมนของอิลิเมนท์ (Δ_e) และกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$-\int_{\Delta_e} W_n R d\Delta_e = 0, \quad n = 1,2,3 \tag{4.12}$$

สำหรับอิลิเมนท์รูปสามเหลี่ยม จุดที่ไม่ทราบค่ามี 3 จุด ซึ่งได้แก่จุดต่อทั้งสาม ดังนั้นจึงต้องการ 3 สมการในการแก้หาจุดที่ไม่ทราบค่า นั่นหมายถึงในสมการที่ (4-11) จะต้องมีค่า n = 1 2 3 และโดยปกติเราจะเลือก $W_n = N_n$ ซึ่งเรียกว่า บับโนฟ-กาเลอร์คิน (Bubnov-Galerkin) ดังนั้นเมื่อแทน R ด้วยสมการที่ (4-11) ลงในสมการที่ (4-12) จะได้

$$0 = -\int_{\Delta_e} [N]^T (D_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - G\phi + Q) d\Delta_e \tag{4-13}$$

โดยที่

$[N]^T$ คือ เวกเตอร์เมทริกซ์แนวตั้งของฟังก์ชันการประมาณภายในอิลิเมนท์

เนื่องจากฟังก์ชันที่ต้องการประมาณ ($\phi(x,y)$) ไม่มีความต่อเนื่องของอนุพันธ์ระหว่างแต่ละอิลิเมนท์ดังนั้นสมการอนุพันธ์อันดับที่ 2 ตามสมการที่ (4-13) จึงสามารถแทนได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับที่ 1 ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = [N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$[N]^T \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left([N]^T \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial [N]^T}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{4-14}$$

จากสมการที่ (4-13) จะได้

$$0 = -\underbrace{\int_{\Delta_e}[N]^T D_x \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} d\Delta_e}_{(A)} - \underbrace{\int_{\Delta_e}[N]^T D_y \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} d\Delta_e}_{(B)} + \underbrace{\int_{\Delta_e}[N]^T G\phi d\Delta_e}_{(C)} - \underbrace{\int_{\Delta_e}[N]^T Q d\Delta_e}_{(D)} \qquad (4\text{-}15)$$

ส่วนเทอม A ในสมการที่ (4-15) จะสามารถแทนได้ด้วยสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง โดยอาศัยสมการที่ (4-14) จะได้สมการใหม่ดังสมการที่ (4-16)

$$-\int_{\Delta_e}[N]^T D_x \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} d\Delta_e = -\int_{\Delta_e} D_x \frac{\partial}{\partial x}\left([N]^T \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) d\Delta_e + \int_{\Delta_e} D_x \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} d\Delta_e \qquad (4\text{-}16)$$

นอกจากนี้ยังสามารถประมาณพจน์ $-\int_{\Delta_e} D_x \frac{\partial}{\partial x}\left([N]^T \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) d\Delta_e$ โดยอาศัยสมการที่ (4-17) ได้ดังนี้

$$\int_{\Delta_e} \frac{\partial}{\partial x}\left([N]^T \frac{\partial\phi}{\partial x}\right) d\Delta_e = \int_{T}[N]^T \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta d\Gamma \qquad (4\text{-}17)$$

โดยที่ θ คือ มุมที่กระทำกับพื้นผิวอิลิเมนท์

Γ คือ พื้นที่ขอบเขตของอิลิเมนท์

แทนค่าสมการที่ (4-17) ใน (4-16) จึงได้พจน์ A เป็น

$$-\int_{\Delta_e} D_x[N]^T \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} d\Delta_e = -\int_{\Gamma} D_x[N]^T \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta d\Gamma + \int_{\Delta_e} D_x \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} d\Delta_e \qquad (4\text{-}18)$$

ในทำนองเดียวกันเทอม B ในสมการที่ (4-15) จึงได้

$$-\int_{\Delta_e} D_y[N]^T \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} d\Delta_e = -\int_{\Gamma} D_y[N]^T \frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta d\Gamma + \int_{\Delta_e} D_y \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} d\Delta_e \tag{4-19}$$

แทนค่าสมการที่ (4-18) และ (4-19) ในสมการที่ (4-15) จะได้

$$\begin{aligned} 0 = &-\int_{\Gamma}[N]^T (D_x \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta) d\Gamma + \int_{\Delta_e}(D_x \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + D_y \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}) d\Delta_e \\ &+ \int_{\Delta_e} G[N]^T \phi d\Delta_e - \int_{\Delta_e} Q[N]^T d\Delta_e \end{aligned} \tag{4-20}$$

จาก $\phi^{(e)} = [N]\{\Phi^{(e)}\}$ แทนค่าในสมการที่ (4-20) จะได้

$$\begin{aligned} 0 = &-\int_{\Gamma}[N]^T (D_x \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta) d\Gamma \\ &+ \left(\int_{\Delta_e}(D_x \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}) d\Delta_e \right)\{\Phi^{(e)}\} \\ &+ \left(\int_{\Delta_e} G[N]^T [N] d\Delta_e \right)\{\Phi^{(e)}\} - \int_{\Delta_e} Q[N]^T d\Delta_e \end{aligned} \tag{4-21}$$

และสามารถเขียนให้อยู่รูปทั่วไปได้เป็น

$$0 = \{I^{(e)}\} + [K^{(e)}]\{\Phi^{(e)}\} - \{f^{(e)}\} \tag{4-22}$$

โดยที่

$$\{I^{(e)}\} = -\int_{\Gamma}[N]^T (D_x \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\theta + D_y \frac{\partial\phi}{\partial y}\sin\theta) d\Gamma$$

$$[K^{(e)}] = \int_{\Delta_e} (D_x \frac{\partial[N]^T}{\partial x}\frac{\partial[N]}{\partial x} + D_y \frac{\partial[N]^T}{\partial y}\frac{\partial[N]}{\partial y}) d\Delta_e + \int_{\Delta_e} G[N]^T [N] d\Delta_e$$

$$\{f^{(e)}\} = \int_{\Delta_e} Q[N]^T d\Delta_e$$

โดยที่ $[K^{(e)}]$ สามารถจัดรูปใหม่โดยการดำเนินการต่อไปนี้

$$[D] = \begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix} \quad (4\text{-}23)$$

และเวกเตอร์เกรเดียนต์ (gradient vector: gv)

$$\{gv\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{\phi^{(e)}\right\} = [B]\left\{\Phi^{(e)}\right\}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]}{\partial x} \\ \frac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$[B]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial[N]^T}{\partial x} & \frac{\partial[N]^T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}24)$$

จาก $[B]$ $[B]^T$ และ $[D]$ สามารถเขียน $[K^{(e)}]$ ใหม่ได้เป็น

$$[K^{(e)}] = \int_{\Delta_e} [B]^T [D][B] d\Delta_e + \int_{\Delta_e} G[N]^T [N] d\Delta_e$$

$$[K^{(e)}] = [K_D^{(e)}] + [K_G^{(e)}] \tag{4-25}$$

เนื่องจากงานวิจัยนี้เลือกกริดรูปสามเหลี่ยมในการคำนวณ ดังนั้นค่า ϕ ในรูปสามเหลี่ยมจึงสามารถกำหนดได้เป็น

$$\phi^{(e)} = [N_i \quad N_j \quad N_k]\{\Phi^{(e)}\} \tag{4-26}$$

โดยที่

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k &= \frac{1}{2\Delta_e}(a_k + b_k x + c_k y) \end{aligned} \tag{4-27}$$

และจะได้เวกเตอร์เกรเดียนต์สำหรับอิลิเมนท์นี้เป็น

จาก

$$\{gv\} = \begin{bmatrix} \dfrac{d[N]}{dx} \\ \dfrac{d[N]}{dy} \end{bmatrix} \left\{\phi^{(e)}\right\}$$

จะได้

$$\{gv\} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{\phi^{(e)}\right\} \tag{4-28}$$

แทนค่าสมการที่ (4-27) ในสมการที่ (4-28) จะได้

$$\{gv\} = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\left\{\phi^{(e)}\right\} = [B]\{\phi^{(e)}\}$$

$$\therefore [B] = \frac{1}{2\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}29)$$

จากสมการที่ (4-25) จะสังเกตเห็นได้ว่า

$$[K_D^{(e)}] = \int_{\Delta_e} [B]^T [D][B] d\Delta_e$$

เนื่องจาก $[B]$ และ $[D]$ เป็นค่าคงที่จะได้

$$[K_D^{(e)}] = [B]^T [D][B] \int_{\Delta_e} d\Delta_e$$

$$\therefore [K_D^{(e)}] = [B]^T [D][B]\Delta_e \qquad (4\text{-}30)$$

แทนค่า $[B]$ และ $[D]$ จัดอยู่ในรูปสมการ $[K_D^{(e)}]$ ใหม่ได้เป็น

$$[K_D^{(e)}] = \begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_x & 0 \\ 0 & D_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\Delta_e\left(\frac{1}{2\Delta_e}\right)\left(\frac{1}{2\Delta_e}\right)$$

$$[K_D^{(e)}] = \begin{bmatrix} D_x b_i & D_y c_i \\ D_x b_j & D_y c_j \\ D_x b_k & D_y c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}\left(\frac{1}{4\Delta_e}\right)$$

$$[K_D^{(e)}]=\begin{bmatrix} D_x b_i^2+D_y c_i^2 & D_x b_i b_j+D_y c_i c_j & D_x b_i b_k+D_y c_i c_k \\ D_x b_i b_j+D_y c_i c_j & D_x b_j^2+D_y c_j^2 & D_x b_j b_k+D_y c_j c_k \\ D_x b_k b_i+D_y c_k c_i & D_x b_k b_j+D_y c_k c_j & D_x b_k^2+D_y c_k^2 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{4\Delta_e}\right)$$

$$\therefore [K_D^{(e)}]=\frac{D_x}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix}+\frac{D_y}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} \tag{4-31}$$

จากสมการที่ (4-25) ถ้ากำหนดให้ G เป็นค่าคงที่ ภายในแต่ละอิลิเมนท์จะได้

$$[K_G^{(e)}]=\int_{\Delta_e} G[N]^T[N]d\Delta_e$$

$$=G\int_{\Delta_e}\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix}d\Delta_e$$

$$=G\int_{\Delta_e}\begin{bmatrix} N_i^2 & N_i N_j & N_i N_k \\ N_j N_i & N_j^2 & N_j N_k \\ N_i N_k & N_j N_k & N_k^2 \end{bmatrix}d\Delta_e \tag{4-32}$$

ใช้สูตรเชิงตัวประกอบ (factorial formula) ในการประมาณการอินทิเกรทในสมการที่ (4-32) เพราะเนื่องจาก $N_i = L_1$ $N_j = L_2$ และ $N_k = L_3$ จะได้

$$\int_{\Delta_e} L_1^a L_2^b L_3^c d\Delta_e = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2\Delta_e \tag{4-33}$$

$$[K_G^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{2}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} \end{bmatrix} G\Delta_e$$

$$\therefore [K_G^{(e)}] = \frac{G\Delta_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4-34}$$

จาก $[K^{(e)}] = [K_D^{(e)}] + [K_G^{(e)}]$

$$= \frac{D_x}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_i b_j & b_i b_k \\ b_i b_j & b_j^2 & b_j b_k \\ b_i b_k & b_k b_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{D_y}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_i c_j & c_i c_k \\ c_i c_j & c_j^2 & c_j c_k \\ c_i c_k & c_k c_j & c_k^2 \end{bmatrix} + \frac{G\Delta_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4-35}$$

สำหรับกรณีที่ $Q \neq 0$ จะได้

$$\int_{\Delta_e} Q[N]^T d\Delta_e = Q\int_{\Delta_e}\begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} d\Delta_e = Q\int_{\Delta_e}\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} d\Delta_e$$

$$\therefore \{f^{(e)}\} = \frac{Q\Delta_e}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

แต่ในงานวิจัยวิทยานิพนธ์นี้ $Q = 0$ จากสมการที่ (4-22) จึงได้

$$\{R^{(e)}\} = \{I^{(e)}\} + [K^{(e)}]\{\phi^{(e)}\} \tag{4-36}$$

และที่ค่าขอบเขตของแต่ละอิลิเมนต์ Γ ได้ประยุกต์เงื่อนไขแบบนอยมันน์ (Neumann condition) โดยกำหนดให้ $\frac{\partial\phi}{\partial\bar{n}} = 0$ เมื่อ $\bar{n}$ คือ เวกเตอร์ตั้งฉากกับขอบเขตของเวกเตอร์

$$0 = [K^{(e)}]\{\phi^{(e)}\} \tag{4-37}$$

โดยที่

$$[K^{(e)}] = \frac{1}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_ib_j & b_ib_k \\ b_ib_j & b_j^2 & b_jb_k \\ b_ib_k & b_kb_j & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_ic_j & c_ic_k \\ c_ic_j & c_j^2 & c_jc_k \\ c_ic_k & c_kc_j & c_k^2 \end{bmatrix} - \frac{\mu\varepsilon\omega^2\Delta_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4.3.4 การประกอบสมการอิลิเมนท์ขึ้นเป็นระบบ

ขั้นตอนนี้เป็นการนำสมการของแต่ละอิลิเมนท์ที่ได้มาประกอบกันเป็นสมการรวมของระบบ โดยจากขั้นตอนในหัวข้อที่ 4.3.1 หากเราแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนท์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n จุดต่อ จึงก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ ดังนั้นจึงได้สมการรวมของงานวิจัยนี้ตามสมการที่ (4-12) ดังที่ได้ผ่านมาในบทที่ 4 คือ

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & . & . & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & . & . & A_{3n} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & . & . & A_{nn} \end{bmatrix}_{sys(n\times n)} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}_{sys(n\times 1)} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}_{sys(n\times 1)}$$

เมื่อ

A คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของระบบรวม

x คือ ค่าสนามไฟฟ้าที่ยังไม่ทราบค่า ณ ตำแหน่งโนดต่าง ๆ

b คือ ค่าแรงภายนอกที่มากระทำ ณ ตำแหน่งโนดต่าง ๆ

เนื่องจากมีวัตถุที่มีคุณสมบัติแตกต่างกันภายในงานวิจัยนี้อยู่ 2 ชนิด คือ อากาศกับร่างกายของมนุษย์ ซึ่งทั้งสองมีค่าสภาพยอมทางไฟฟ้าสัมพัทธ์เท่ากับ 1 และ 5 ตามลำดับ จากสมการที่ (4-35) ส่วนที่มีผลต่อค่าสภาพยอมทางไฟฟ้า คือ $[K_G^{(e)}]$ ถ้าคำนึงถึงค่าดังกล่าวจะได้สมการในแต่ละอิลิเมนท์ที่มีคุณลักษณะทางเนื้อวัตถุระหว่างอากาศกับร่างกายมนุษย์จะได้ $[K^{(e)}]$ ตามสมการที่ (4-38) และ (4-39) ตามลำดับ

อากาศ:

$$[K^{(e)}]=\frac{1}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_ib_j & b_ib_k \\ b_ib_j & b_j^2 & b_jb_k \\ b_ib_k & b_kb_j & b_k^2 \end{bmatrix}+\frac{1}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_ic_j & c_ic_k \\ c_ic_j & c_j^2 & c_jc_k \\ c_ic_k & c_kc_j & c_k^2 \end{bmatrix}-\frac{\mu_0\varepsilon_0\omega^2\Delta_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}38)$$

มนุษย์:

$$[K^{(e)}]=\frac{1}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_ib_j & b_ib_k \\ b_ib_j & b_j^2 & b_jb_k \\ b_ib_k & b_kb_j & b_k^2 \end{bmatrix}+\frac{1}{4\Delta_e}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_ic_j & c_ic_k \\ c_ic_j & c_j^2 & c_jc_k \\ c_ic_k & c_kc_j & c_k^2 \end{bmatrix}-\frac{5\mu_0\varepsilon_0\omega^2\Delta_e}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4\text{-}39)$$

4.3.5 ประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตพร้อมหาผลเฉลย

ขั้นตอนการหาค่าผลเฉลยของค่าสนามไฟฟ้า เริ่มจากการกำหนดเงื่อนไขขอบเขตให้แก่สายส่งไฟฟ้ากับโทรศัพท์มือถือ โดยขั้นตอนส่วนนี้จะทำในทำนองเดียวกับระเบียบวิธีไฟไนท์ดิฟเฟอร์เรนท์

4.4 สรุป

บทนี้ได้นำเสนอแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสนามไฟฟ้าในสายส่งไฟฟ้าแรงสูง 1 เฟส และ 3 เฟส ประกอบกับคำนึงถึงคุณสมบัติของวัตถุที่แตกต่างกันในระบบ ซึ่งแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จะปรากฏอยู่ในรูปของสมการอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง การประยุกต์วิธีไฟไนท์อิลิเมนท์เพื่อคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าได้ใช้วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างของกาเลอร์คิน รายละเอียดต่างๆ ในบทนี้ จะนำไปสู่การพัฒนาโปรแกรมไฟไนท์อิลิเมนท์เพื่อใช้เป็นโปรแกรมจำลองผลระบบที่จะได้กล่าวถึงในบทที่ 6 ต่อไป