

บทที่ 2

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

การศึกษาและเข้าใจถึงทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย นับว่ามีความสำคัญ และเป็นประโยชน์อย่างมากในการดำเนินงาน ทั้งนี้เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ และความเข้าใจในงาน นำไปเป็นแหล่งอ้างอิงในการดำเนินงานวิจัย ดังนั้นในบทนี้จึงได้นำเสนอทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ ซึ่งประกอบไปด้วย 5 หัวข้อหลัก ได้แก่ สนามไฟฟ้า สายส่งกำลังไฟฟ้า โทรศัพทมือถือ ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ โดยจะกล่าวถึงเฉพาะส่วนที่เป็นประโยชน์ หรือถูกกล่าวอ้างถึงการดำเนินงานวิจัย ทั้งนี้เพื่อให้เนื้อหา มีความกระชับและชัดเจน

2.2 สนามไฟฟ้า

2.2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับศักย์ไฟฟ้า

จากความรู้เรื่องสนามไฟฟ้าที่ผ่านมาได้กล่าวถึง สนามไฟฟ้าของประจุไฟฟ้าในลักษณะของเวกเตอร์ที่สามารถกำหนดค่าได้ด้วยฟังก์ชันเวกเตอร์ $\mathbf{E}$ นอกจากสนามเวกเตอร์ดังกล่าวแล้ว ยังมีปริมาณไฟฟ้าอีกแบบหนึ่งที่เป็นฟังก์ชันสเกลาร์ หรือ สนามสเกลาร์ โดยสนามสเกลาร์นี้เป็นฟังก์ชันของตำแหน่งในปริภูมิเช่นเดียวกับสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ แตกต่างกันที่ค่าดังกล่าวนี้เป็นปริมาณสเกลาร์ ซึ่งถูกเรียกว่า ศักย์ไฟฟ้า สามารถแทนสัญลักษณ์ได้ด้วย v และสามารถวัดออกมาในรูปหน่วยของแรงดัน (volt) โดยความสัมพันธ์ระหว่าง v และ $\mathbf{E}$ ในรูปปริพันธ์สามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2-1)

$$\begin{aligned}v_x - v_y &= -\frac{1}{q} \int_y^x q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\int_y^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

$$= -\left(\int_R^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_R^y \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\right) \quad (2-1)$$

จากสมการที่ (2-1) ทำให้สามารถได้สูตรคำนวณศักย์ไฟฟ้าที่จุดใดจุดหนึ่งในสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ ได้ดังสมการที่ (2-2)

$$v_x = -\int_R^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (2-2)$$

เมื่อ R คือ จุดอ้างอิง

เป็นที่ทราบว่าศักย์ไฟฟ้าเป็นฟังก์ชันของตำแหน่ง โดยเฉพาะอย่างยิ่งในระบบพิกัดฉากจะใช้สัญลักษณ์ $v(x,y,z)$ ซึ่งการศึกษาการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชันสเกลาร์ v ในปริภูมิสามารถทำได้โดยอาศัยทฤษฎีอนุพันธ์ย่อย

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad (2-3)$$

หรือในรูปการกำหนดตัวดำเนินการอนุพันธ์ที่เรียกว่า เกล (∇) ดังสมการที่ (2-4)

$$dv = \nabla v \cdot d\mathbf{r} \quad (2-4)$$

จากสมการที่ (2.20) สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างเกรเดียนต์ศักย์ไฟฟ้า และสนามไฟฟ้าได้ดังนี้

$$v_{xy} = v_x - v_y = -\int_y^x \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

สามารถเขียนในรูปใหม่ของระบบพิกัดฉากได้เป็น

$$\begin{aligned}
-\int_y^x (\mathbf{E}_x dx + \mathbf{E}_y dy + \mathbf{E}_z dz) &= v(x_x, y_x, z_x) - v(x_y, y_y, z_y) \\
&= \int_y^x dv(x, y, z) \\
&= \int_y^x \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) \quad (2-5)
\end{aligned}$$

เมื่อทำการเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์ทางซ้ายเทียบกับขวาของสมการที่ (2-5) จะได้

$$\mathbf{E}_x = -\frac{\partial v}{\partial x}, \mathbf{E}_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \mathbf{E}_z = -\frac{\partial v}{\partial z} \quad (2-6)$$

หรือ

$$\mathbf{E} = -\nabla v \quad (2-7)$$

2.2.2 สมการปัวส์ซองและสมการลาปลาซ

จากสมการที่ (2-7) จะเห็นว่าสนามไฟฟ้าสามารถเขียนอยู่ในรูปของเกรเดียนต์ของฟังก์ชัน สเกลาร์ v ได้ และจากกฎของเกาส์ในรูปอนุพันธ์ คือ

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2-8)$$

เมื่อ ρ คือ ความหนาแน่นประจุเชิงปริมาตรการกระจายของประจุไฟฟ้า (volume charge density)

ϵ_0 คือ สภาพยอมของอวกาศว่าง (permittivity of free space)

สมการปัวส์ซอง (poisson's equation): จากไดเวอร์เจนซ์ของ $\mathbf{E}$ สามารถเขียนในรูปของพจน์ v ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot (-\nabla v) \\ &= -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \\ &= -\nabla^2 v\end{aligned}\quad (2-9)$$

จากสมการที่ (2-9) จะเห็นว่าสมการดังกล่าว คือ สมการที่มีการดำเนินการเคลสองครั้ง เพื่อให้ได้อนุพันธ์อันดับสอง ซึ่งเรียกว่า ลาปลาเซียน (laplacian: ∇^2) และจากสมการข้างต้นสามารถจัดรูปตามกฎของเกาส์ในรูปอนุพันธ์ใหม่ได้เป็น

$$\nabla^2 v = -\frac{\rho}{\epsilon_0}\quad (2-10)$$

และจะเรียกสมการ (2-10) นี้ว่า สมการปัวส์ซอง

สมการลาปลาซ (laplace's equation): บริเวณใด ๆ ในปริภูมิที่ไม่มีประจุ นั่นคือ $\rho = 0$ ดังนั้นสมการปัวส์ซองจะกลายเป็น

$$\nabla^2 v = 0\quad (2-11)$$

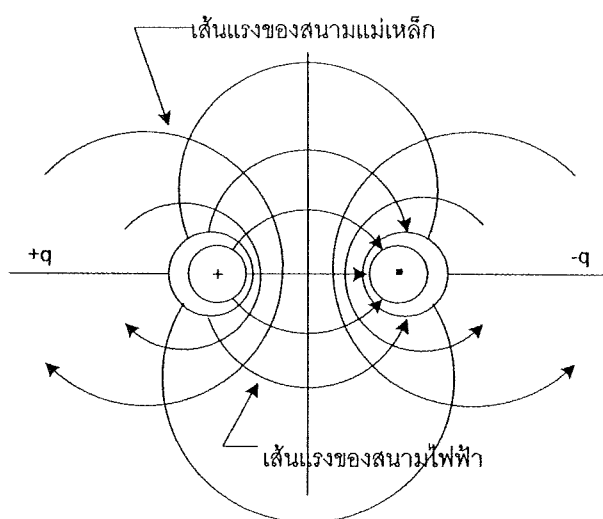
ซึ่งสมการดังกล่าวสามารถเรียกได้ว่า สมการลาปลาซ

ทั้งสองสมการ คือ สมการปัวส์ซองและสมการลาปลาซจะถูกนำไปใช้ในการคำนวณศักย์ไฟฟ้าและสนามไฟฟ้าในบริเวณสายส่งแรงสูงภายใต้สภาวะขอบเขต (boundary condition)

ตามระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับ

2.3 สายส่งกำลังไฟฟ้า

ตัวนำในสายส่งไฟฟ้าแรงสูงใดๆ ก็ตามที่มีความต่างศักย์ไฟฟ้าจะทำให้เกิดสนามไฟฟ้า E และเมื่อมีกระแสไฟฟ้าไหลผ่านตัวนำ จะมีสนามแม่เหล็ก B เกิดขึ้นรอบตัวนำนั้น ณ จุดใดๆ สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะตั้งฉากกันเสมอ ดังแสดงในรูปที่ 2.1

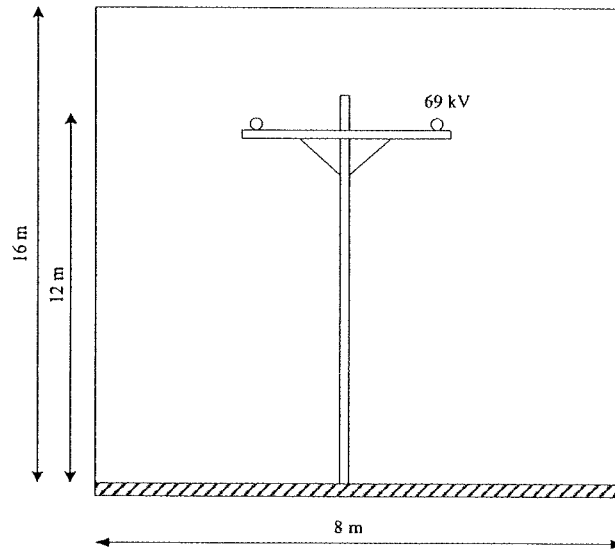


รูปที่ 2.1 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กบริเวณรอบตัวนำ 2 เส้น
ที่มีความต่างศักย์ไฟฟ้าและกระแสไหลผ่าน

2.3.1 โครงสร้างระบบสายส่งไฟฟ้า 1 เฟสและ 3 เฟส

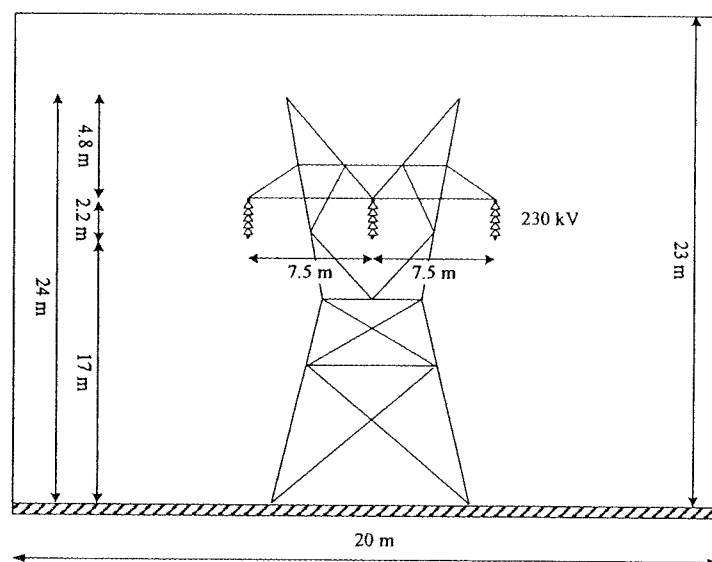
สำหรับในงานวิจัยจะทำการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าที่กระจายรอบตัวนำ ตามระบบสายส่งไฟฟ้า 1 เฟสและ 3 เฟส โดยระบบไฟฟ้า 1 เฟสจะคำนึงถึงระบบไฟฟ้าที่มีพิกัดขนาด 69 kV ส่วนระบบไฟฟ้า 3 เฟสจะคำนึงถึงระบบไฟฟ้าที่มีพิกัดตั้งแต่ 230 kV และ 500 kV ซึ่งแต่ละระบบมีรายละเอียดและโครงสร้าง อันได้แก่ ตำแหน่งตัวนำ ระยะห่างระหว่างตัวนำ เป็นต้น ดังนี้

- ระบบไฟฟ้า 1 เฟสขนาด 69 kV



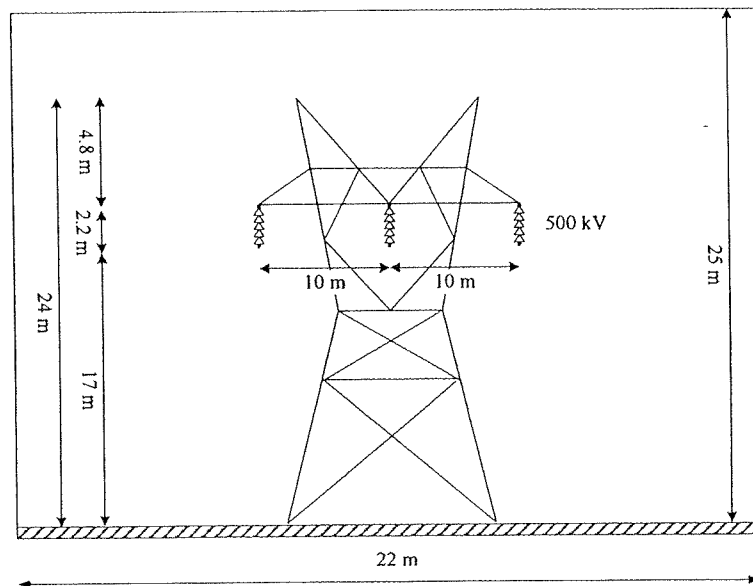
รูปที่ 2.2 โครงสร้างระบบสายส่ง 1 เฟสขนาด 69 kV

- ระบบไฟฟ้า 3 เฟสขนาด 230 kV



รูปที่ 2.3 โครงสร้างระบบสายส่ง 3 เฟสขนาด 230 kV

- ระบบไฟฟ้า 3 เฟสขนาด 500 kV



รูปที่ 2.4 โครงสร้างระบบสายส่ง 3 เฟสขนาด 500 kV

2.3.2 หลักการเหนี่ยวนำสนามไฟฟ้าภายในระบบสายส่ง

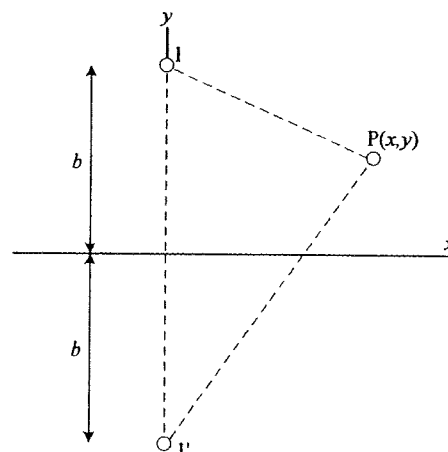
ค่าความเข้มสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กที่ตำแหน่งต่าง ๆ รอบตัวนำนี้จะขึ้นอยู่กับระยะห่างจากตัวนำ ขนาดแรงดันและกระแสในตัวนำ ฉะนั้นตัวนำของระบบสายส่งจ่ายกำลังไฟฟ้าแรงสูง จึงถือได้ว่าเป็นแหล่งกำเนิดของสนามไฟฟ้า และสนามแม่เหล็กได้ประเภทหนึ่ง เพราะเนื่องจากตัวนำในสายส่งภายในระบบส่งจ่ายกำลังไฟฟ้า ประกอบไปด้วยผลคูณของแรงดัน V และกระแส I เมื่อใช้สายส่งจ่ายในการส่งกำลังไฟฟ้า ก็จะมีกระแสไหลในตัวนำ นั่นก็คือจะมีสนามแม่เหล็กโดยรอบตัวนำสายส่งจ่าย ถ้าส่งกำลังไฟฟ้ามาก ๆ หากไม่เพิ่มแรงดัน ก็จะทำให้เกิดกระแสในสายส่งมีค่ามาก เป็นผลให้เกิดกำลังไฟฟ้าสูญเสียเนื่องจากความต้านทาน R ในสายส่ง คือ I^2R ฉะนั้นการส่งกำลังไฟฟ้าปริมาณมาก ๆ เป็นระยะทางไกล ๆ จึงต้องส่งจ่ายด้วยระบบแรงดันสูง เมื่อตัวนำสายส่งมีแรงดันสูง ก็จะก่อให้เกิดความเครียดสนามไฟฟ้าโดยรอบตัวนำมีค่าสูงขึ้น ความเครียดสนามไฟฟ้าสูงสุดเกิดขึ้นที่ผิวตัวนำไฟฟ้าก็ยังมีค่าสูงขึ้นด้วย ในสภาวะแวดล้อมที่เลวร้าย เช่น ความชื้นสูง มีฝุ่นละอองมาก เป็นต้น ความเครียดสนามไฟฟ้าที่ผิวตัวนำเปลี่ยนไปในอากาศ อาจจะทำให้เกิดการคายประจุบางส่วนแบบคอโรนา (partial discharge corona) ได้ง่ายขึ้น ซึ่งการที่มนุษย์อยู่ใกล้บริเวณที่มีสายส่งไฟฟ้าแรงสูงพาดผ่านหรือการใช้อุปกรณ์สื่อสาร เช่น

โทรศัพท์มือถือก็อาจทำให้ได้รับอันตรายจากการใช้งานใกล้สายส่งไฟฟ้าแรงสูงได้เช่นกัน อันตรายจากการอยู่ใกล้สายส่งแรงสูงสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณี คือ กรณีสนามไฟฟ้าจากระบบไฟฟ้า 1 เฟส กรณีสนามไฟฟ้า 3 เฟส ไม่สมดุล และกรณีสนามไฟฟ้า 3 เฟสสมดุลซึ่งค่าสนามไฟฟ้าที่มีผลกระทบต่อมนุษย์สามารถเกิดขึ้นได้จากค่าสนามไฟฟ้าที่มีค่าสูงขึ้นเนื่องจากความต่างศักย์ไฟฟ้าที่เกิดขึ้นระหว่างพื้นดินกับสายส่ง ตำแหน่งของมนุษย์ที่อยู่ใกล้สายส่ง เมื่อเทียบกับพื้นดินซึ่งสามารถทำให้เกิดความไม่สมดุลของสายส่งได้ และความไม่สมดุลของแรงดันภายในสายส่งแต่ละเส้นก็สามารถก่อให้เกิดอันตรายจากสายส่งแรงสูงที่มีผลต่อมนุษย์ได้ในที่สุด

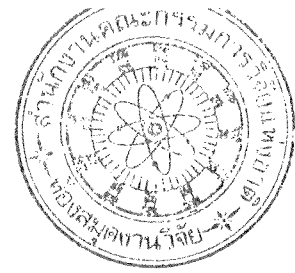
ค่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นรอบๆสายส่งไฟฟ้าแรงสูงเป็นค่าสนามไฟฟ้าที่มีปริมาณสูงมากพอที่จะทำให้เกิดอันตรายต่อวัตถุที่เคลื่อนเข้าใกล้สายส่งได้ โดยเฉพาะมนุษย์ ดังนั้นการหาพื้นที่ปลอดภัยหรือระยะห่างน้อยสุดระหว่างสายส่งแรงสูงกับมนุษย์ จึงเป็นสิ่งสำคัญ โดยในที่นี้จะทำการศึกษาค่าความเข้มสนามไฟฟ้าทั้งหมด 3 กรณี ได้แก่

- ความเข้มสนามไฟฟ้าเมื่อพิจารณา 1 เฟส
- ความเข้มสนามไฟฟ้าเมื่อพิจารณา 3 เฟส ไม่สมดุล
- ความเข้มสนามไฟฟ้าเมื่อพิจารณา 3 เฟส สมดุล
- ความเข้มสนามไฟฟ้าเมื่อพิจารณา 1 เฟส จากสายส่งที่ส่งผลกระทบต่อร่างกายมนุษย์

จากรูปที่ 2.5 สามารถแทนตำแหน่งตัวนำสายส่งได้ด้วย 1 และ 1' จากสมการแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation) สามารถหาค่าศักย์ไฟฟ้า (electric potential: φ) ที่จุด $P(x,y)$ ณ ตำแหน่งใด ๆ (Gao, and Yu, 1998) ได้ดังสมการที่ (2-12)



รูปที่ 2.5 ความเข้มสนามไฟฟ้าของระบบไฟฟ้า 1 เฟส



$$\varphi(x, y) = \frac{U_1}{n_{11}} n_{1p} \text{ (V)} \quad (2-12)$$

และสามารถหาค่าสนามไฟฟ้าที่จุด $P(x, y)$ ณ ตำแหน่งใด ๆ ดังสมการที่ (2-13)

$$\mathbf{E} = \frac{2bU_1}{n_{11}\sqrt{x^4 + y^4 + b^4 + 2b^2x^2 + 2x^2y^2 - 2b^2y^2}} \text{ (V/m)} \quad (2-13)$$

โดยที่ U_1 คือ ค่าแรงดันของสายส่ง (V)

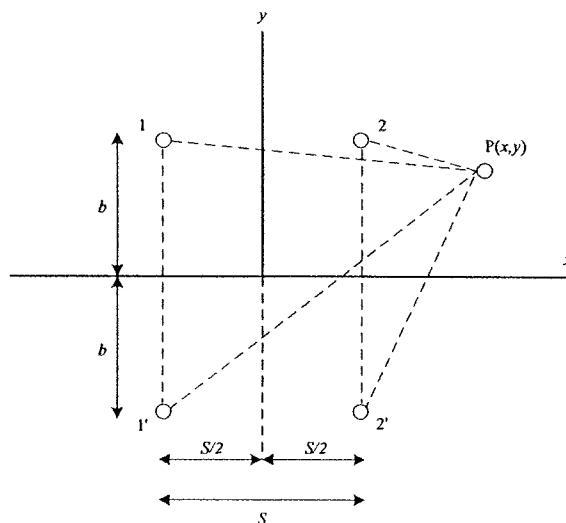
$n_{11} = \ln \frac{2b}{r}$ เป็นค่า self potential-coefficient ของสายส่ง

r คือ รัศมีของสายส่ง

$n_{1p} = \ln \sqrt{\frac{x^2 + (b+y)^2}{x^2 + (b-y)^2}}$ เป็นค่า mutual potential-coefficient

- ความเข้มสนามไฟฟ้าของไฟ 3 เฟสไม่สมดุล จากสายส่งที่ส่งผลกระทบต่อร่างกายมนุษย์

เนื่องจากเฟสหนึ่งของสายส่ง 3 เฟสไม่สมดุล จะเปรียบเสมือนเป็นสายกราวด์ ดังนั้น จะเหลือสายส่งเพียง 2 เฟสเท่านั้นที่จะส่งผลกระทบต่อร่างกายมนุษย์ดังรูปที่ 2.6 จากสมการแมกซ์เวลล์สามารถหาค่าศักย์ไฟฟ้าที่จุด $P(x, y)$ ณ ตำแหน่งใด ๆ (Gao, and Yu, 1998) ดังสมการที่ (2-14)



รูปที่ 2.6 ความเข้มสนามไฟฟ้าของระบบไฟฟ้า 3 เฟสไม่สมดุล

อ. นันทวัฒน์ นาคะพรหมกร (อ. นันทวัฒน์ นาคะพรหมกร)
 อ. นันทวัฒน์ นาคะพรหมกร
 วันที่ 18 มิ.ย. 2553
 เลขที่ 227109
 เลขที่ 227109

$$\varphi(x, y) = \frac{\sqrt{3}(n_{1p} + n_{2p})U_1}{2(n_{11} + n_{12})} + j \frac{(n_{1p} - n_{2p})U_1}{2(n_{11} - n_{12})} \quad (2-14)$$

จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = & \frac{\sqrt{3}U_1}{4(n_{11} + n_{12})} \left\{ \frac{S+2x}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b+y)^2} - \frac{S+2x}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b-y)^2} \right. \\ & \left. - \frac{S-2x}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b+y)^2} + \frac{S-2x}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b-y)^2} \right\} \\ & + j \frac{U_1}{4(n_{11} - n_{12})} \left\{ \frac{S+2x}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b+y)^2} - \frac{S+2x}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b-y)^2} \right. \\ & \left. + \frac{S-2x}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b+y)^2} - \frac{S-2x}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b-y)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2-15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = & \frac{\sqrt{3}U_1}{2(n_{11} + n_{12})} \left\{ \frac{b+y}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b+y)^2} - \frac{b-y}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b-y)^2} \right. \\ & \left. - \frac{b+y}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b+y)^2} + \frac{b-y}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b-y)^2} \right\} \\ & + j \frac{U_1}{2(n_{11} - n_{12})} \left\{ \frac{b+y}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b+y)^2} - \frac{b-y}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b-y)^2} \right. \\ & \left. - \frac{b+y}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b+y)^2} + \frac{b-y}{(\frac{S}{2}-x)^2 + (b-y)^2} \right\} \end{aligned} \quad (2-16)$$

โดยที่

$$n_{1p} = \ln \sqrt{\frac{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b+y)^2}{(\frac{S}{2}+x)^2 + (b-y)^2}} \text{ เป็นค่า mutual potential-coefficient ระหว่างจุด } P(x,y) \text{ กับสายส่งเส้นที่ 1}$$

$$n_{2p} = \ln \sqrt{\frac{\left(\frac{S}{2} - x\right)^2 + (b+y)^2}{\left(\frac{S}{2} - x\right)^2 + (b-y)^2}}$$

เป็นค่า mutual potential-coefficient ระหว่างจุด P(x,y) กับสายส่งเส้นที่ 2

$$n_{11} = \ln \frac{2b}{r}$$

เป็นค่า self potential-coefficient ของสายส่ง

$$n_{12} = \ln \sqrt{1 + \frac{4b^2}{S^2}}$$

เป็นค่า mutual potential-coefficient ระหว่างสายส่งเส้นที่ 1 กับสายส่งเส้นที่ 2

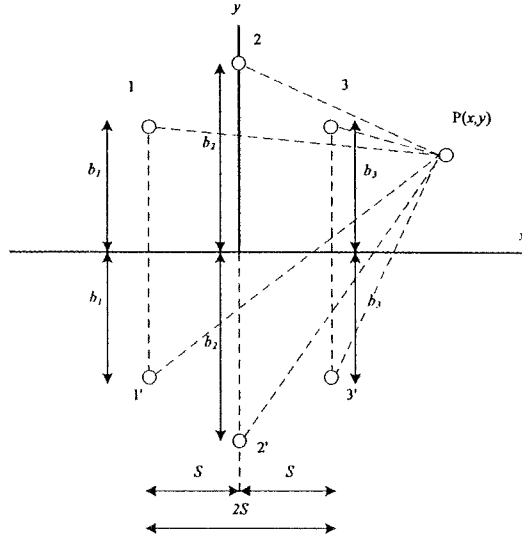
ซึ่งจากการหาค่า $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ สามารถหาค่าสนามไฟฟ้าที่จุด P(x,y) ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้
 ดังสมการที่ (2-17)

$$\mathbf{E} = \sqrt{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2} \quad (2-17)$$

- ความเข้มสนามไฟฟ้าของไฟ 3 เฟสสมดุล จากสายส่งที่ส่งผลกระทบต่อร่างกายมนุษย์

จากการศึกษาค่าสนามไฟฟ้าที่มีผลกระทบต่อมนุษย์ทั้ง 2 กรณีที่ผ่านมา จะเห็นว่าเนื่องจากความไม่สมดุลของแรงดันภายในสายส่งแต่ละเส้นเป็นสาเหตุที่ทำให้เกิดอันตรายต่อมนุษย์ ดังนั้นในการศึกษาผลกระทบของสนามไฟฟ้าระหว่างสายส่งแรงสูงกับมนุษย์อาจจะลดการศึกษาค่าสนามไฟฟ้าของระบบไฟฟ้า 3 เฟสสมดุลได้ อย่างไรก็ตามผลกระทบจากสนามไฟฟ้าของระบบไฟฟ้า 3 เฟสสมดุลอาจจะส่งผลกระทบต่อมนุษย์ได้เพราะค่าสนามไฟฟ้าจะมีค่าสูงได้เนื่องจากความแตกต่างของค่าศักย์ไฟฟ้าระหว่างพื้นดินกับสายส่ง 3 เฟสที่มีความแตกต่างกันมาก และตำแหน่งของมนุษย์ที่อยู่ใกล้สายส่ง เมื่อเทียบกับพื้นดินจึงทำให้เกิดความไม่สมดุลของสายส่งได้ ซึ่งถ้าร่างกายมนุษย์อยู่ในตำแหน่งนั้นเป็นเวลานานอาจจะทำให้เกิดอันตรายจากสายส่งได้เช่นกัน

ในระบบไฟฟ้า 3 เฟสสมดุลสามารถแสดงได้ดังรูปที่ 2.7 ซึ่งเป็นการคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าได้ในทำนองเดียวกับกรณีความเข้มสนามไฟฟ้าของไฟ 3 เฟสไม่สมดุล



รูปที่ 2.7 ความเข้มสนามไฟฟ้าของระบบไฟฟ้า 3 เฟสสมดุล

จากสมการแมกซ์เวลล์สามารถหาค่า $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ได้ดังสมการที่ (2-18) และ (2-19) ดังนี้

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{U_1}{\sqrt{3}(n_{11} - n_{12})} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{S+x}{(S+x)^2 + (b_1+y)^2} - \frac{S+x}{(S+x)^2 + (b_1-y)^2} \right] \\ & + (0.5 + j0.866) \left[\frac{x}{x^2 + (b_2-y)^2} - \frac{x}{x^2 + (b_2+y)^2} \right] \\ & + (0.5 - j0.866) \left[\frac{x-S}{(x-S)^2 + (b_3-y)^2} - \frac{x-S}{(x-S)^2 + (b_3+y)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{U_1}{\sqrt{3}(n_{11} - n_{12})} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{b_1+y}{(S+x)^2 + (b_1+y)^2} - \frac{b_1-y}{(S+x)^2 + (b_1-y)^2} \right] \\ & + (0.5 + j0.866) \left[\frac{b_2-y}{x^2 + (b_2-y)^2} - \frac{b_2+y}{x^2 + (b_2+y)^2} \right] \\ & + (0.5 - j0.866) \left[\frac{b_3-y}{(x-S)^2 + (b_3-y)^2} - \frac{b_3+y}{(x-S)^2 + (b_3+y)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

ซึ่งจากการหาค่า $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ และ $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ สามารถหาค่าสนามไฟฟ้าที่จุด $P(x,y)$ ณ ตำแหน่งใด ๆ ได้ดังสมการที่ (2-20)

$$E = \sqrt{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|^2} \quad (2-20)$$

2.4 โทรศัพท่มือถือ

จากการศึกษาผลกระทบของสนามไฟฟ้าที่มีต่อมนุษย์เมื่ออยู่ใกล้บริเวณสายส่งไฟฟ้าแรงสูง ที่อาจทำให้ได้รับอันตรายจากการเหนี่ยวนำระหว่างมนุษย์กับสายส่งนั้น ยังสามารถพิจารณาอีกสาเหตุหนึ่งที่จะส่งผลให้เกิดอันตรายระหว่างมนุษย์กับสายส่งไฟฟ้าแรงสูงได้อีก นั่นคือ การใช้งานอุปกรณ์สื่อสารใกล้สายส่งไฟฟ้าแรงสูง เพราะเนื่องจากหลักการทำงานของโทรศัพท่มือถือ คือ การเปลี่ยน แปลงอากาศบริเวณรอบ ๆ โทรศัพท่มือถือจากที่มีสภาพเป็นฉนวน ให้มีสภาพกลายเป็นตัวนำเพื่อให้สามารถรับข้อมูลการติดต่อสื่อสารจากดาวเทียมหรือสถานีส่งสัญญาณได้ โดยอาศัยหลักการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้า ถ้าการใช้งานโทรศัพท่มือถือเกิดขึ้นบริเวณใกล้สายส่งไฟฟ้าแรงสูงอาจจะทำให้เกิดการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้ากันเองระหว่างโทรศัพท่มือถือกับสายไฟฟ้าแรงสูง ถ้าการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้าระหว่างโทรศัพท่มือถือกับสายไฟฟ้าแรงสูงมีค่าสูงเกินกว่าค่าความ เกรียดสนามไฟฟ้าวิกฤตของอากาศโดยรอบ จะก่อให้เกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำที่สามารถไหลผ่านอากาศเข้ามาผ่านโทรศัพท่มือถือและส่งผลให้เกิดอันตรายถึงชีวิตแก่ผู้ใช้งานได้ในที่สุด ด้วยเหตุนี้ จะทำการศึกษาค่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นบนโทรศัพท่มือถือ และศึกษาผลกระทบที่เกิดขึ้นจากการใช้งานโทรศัพท่มือถือใกล้สายส่งไฟฟ้าแรงสูง โดยพิจารณาจากการเปลี่ยนแปลงค่าสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นภายในระบบ

สำหรับการคำนวณค่าสนามไฟฟ้าระหว่างระบบไฟฟ้าแรงสูงกับโทรศัพท่มือถือ จะกำหนดให้โทรศัพท่มือถือเปรียบเสมือนเป็นแหล่งกำเนิดค่าสนามไฟฟ้าเพียงจุดเดียว (monopole) ซึ่งสามารถทราบค่าสนามไฟฟ้าได้จากตารางที่ 2.1 (Selim, Apaydm, and Celik, 2003)

ตารางที่ 2.1 ค่าสนามไฟฟ้าสูงสุดในแต่ละด้านของโทรศัพท์มือถือในระหว่างการรับสาย (Incoming call phase) โทรออก (Outgoing call phase) และสนทนา (Talking phase)

Phone			
PANASONIC GD90			
	Outgoing call	Incoming call	Talking phase
Front side	30.5 V/m	26.1 V/m	23.5 V/m
Back side	30.5 V/m	25.2 V/m	23.1 V/m
Left side	34.5 V/m	30.5 V/m	22.3 V/m
Right side	32.5 V/m	26.2 V/m	20.5 V/m
ERICSSON GH688			
	Outgoing call	Incoming call	Talking phase
Front side	68.0 V/m	47.5 V/m	38.3 V/m
Back side	68.2 V/m	46.3 V/m	34.5 V/m
Left side	69.2 V/m	48.5 V/m	36.4 V/m
Right side	58.1 V/m	40.2 V/m	28.3 V/m
ALCATEL			
	Outgoing call	Incoming call	Talking phase
Front side	40.5 V/m	33.2 V/m	22.5 V/m
Back side	33.5 V/m	31.2 V/m	21.5 V/m
Left side	27.5 V/m	23.5 V/m	17.5 V/m
Right side	25.6 V/m	21.5 V/m	15.6 V/m
NOKIA 3210			
	Outgoing call	Incoming call	Talking phase
Front side	45.5 V/m	37.2 V/m	26.3 V/m
Back side	48.5 V/m	47.2 V/m	35.1 V/m
Left side	33.5 V/m	27.2 V/m	18.6 V/m
Right side	48.2 V/m	47.6 V/m	30.2 V/m

จากการคำนวณหาค่าสนามไฟฟ้าดังกล่าว สามารถนำค่าสนามไฟฟ้าจากโทรศัพท์มือถือ nokia 3210 ที่เกิดขึ้นในบริเวณ Front side, Back side, Left side และ Right side มาใช้ในการกำหนดสถานะขอบเขต (boundary condition) ตามระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์และระเบียบวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ได้ ซึ่งจะได้กล่าวต่อไปในบทที่ 4 และ 5 ตามลำดับ

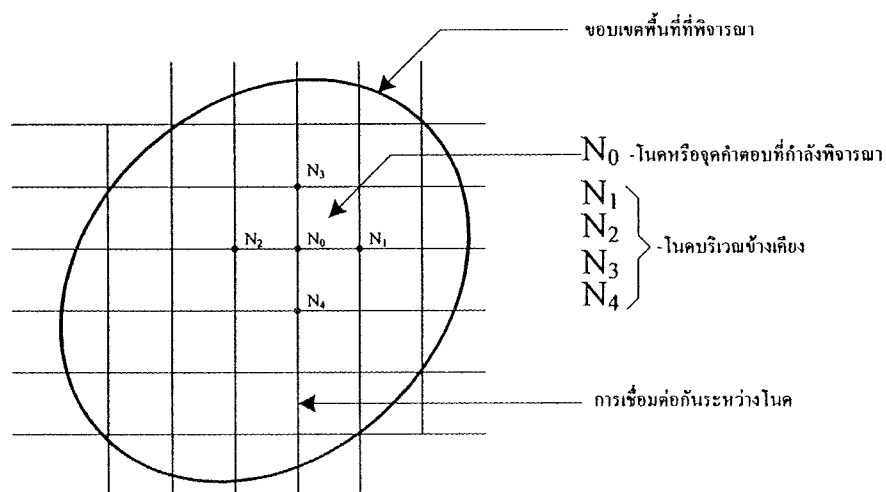
2.5 ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

เนื่องจากปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์โดยส่วนมากแล้ว จะมีแบบจำลองคณิตศาสตร์อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์หรือสมการอินทิกรัล สำหรับในกรณีที่เป็สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation: PDE) โดยส่วนมากมักจะต้องการหาผลเฉลยด้วยวิธีประมาณ เพราะเนื่องจากความซับซ้อนของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นเอง วิธีการหาผลเฉลยด้วยวิธีประมาณในปัจจุบันมีหลายวิธีซึ่งมีอยู่วิธีหนึ่งที่ได้รับการนิยมนอย่างกว้างขวางจากอดีตจนถึงปัจจุบัน คือ ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ (finite different method: FDM) สำหรับขั้นตอนโดยทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์จะประกอบไปด้วย 5 ขั้นตอน ซึ่งสามารถอธิบายขั้นตอนต่างๆ ได้ดังต่อไปนี้

1) การออกแบบกริดให้กับระบบ

การแบ่งขอบเขตรูปร่างปัญหาของระบบที่ต้องการหาผลเฉลยออกเป็นตารางสี่เหลี่ยมย่อย ๆ โดยสี่เหลี่ยมแต่ละช่องจะมีการเชื่อมต่อกันโดยอาศัยโนดต่าง ๆ เป็นตัวเชื่อมดังสามารถแสดงในรูปที่ 2.8

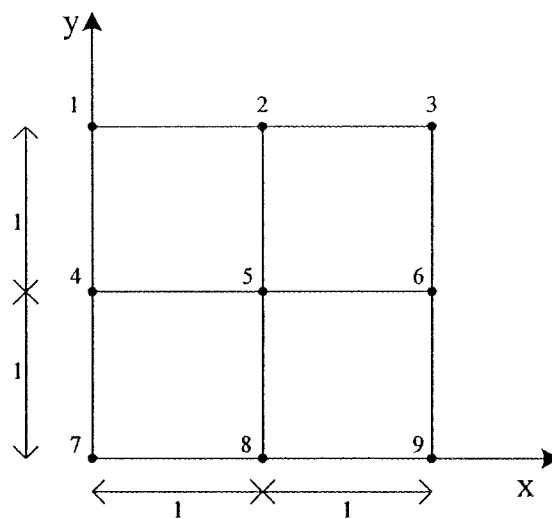
จากขั้นตอนที่ 1) เมื่อออกแบบกริดให้กับระบบเรียบร้อยแล้ว สิ่งที่สำคัญและจำเป็นในการโปรแกรมด้วยคอมพิวเตอร์ คือ ความสัมพันธ์ระหว่างหมายเลขโนดที่พิจารณากับหมายเลขโนดบริเวณข้างเคียงตามรูปที่ 2.8 รวมถึงค่าตำแหน่งพิกัดของแต่ละโนดภายในในระบบ ซึ่งสามารถยกตัวอย่างตามรูปที่ 2.9 โดยสามารถสรุปได้เป็นตารางที่ 2.2 และตารางที่ 2.3 ตามลำดับ



รูปที่ 2.8 การตีกริดรูปสี่เหลี่ยมของระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ 2 มิติ

ตารางที่ 2.2 ลักษณะข้อมูลของโนด

หมายเลขโนด (N_0)	หมายเลขโนดรอบข้าง			
	(N_1)	(N_2)	(N_3)	(N_4)
1	2	-	-	4
2	3	1	-	5
3	-	2	-	6
4	5	-	1	7
5	6	4	2	8
6	-	5	3	9
7	8	-	4	-
8	9	7	5	-
9	-	8	6	-



รูปที่ 2.9 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยกริดสี่เหลี่ยมจำนวน 9 โหนด

ตารางที่ 2.3 ลักษณะพิกัดในแต่ละโนด

หมายเลขโนด	พิกัดแกน x	พิกัดแกน y
1	0	2
2	1	2
3	2	2
4	0	1
5	1	1
6	2	1
7	0	0
8	1	0
9	2	0

2) ฟังก์ชันการประมาณภายในแต่ละโนด

เนื่องจากกริดที่ใช้ในการคำนวณเป็นรูปสี่เหลี่ยม ดังนั้นในการพิจารณา 1 ครั้งจึงประกอบไปด้วยโนดทั้งหมด 5 โหนด คือ โหนดที่พิจารณา 1 โหนดกับโนดบริเวณข้างเคียงอีก 4 โหนด ซึ่งในการประมาณค่าปัญหา 2 มิติจะต้องอาศัยการประมาณแบบ 1 มิติเป็นพื้นฐาน ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

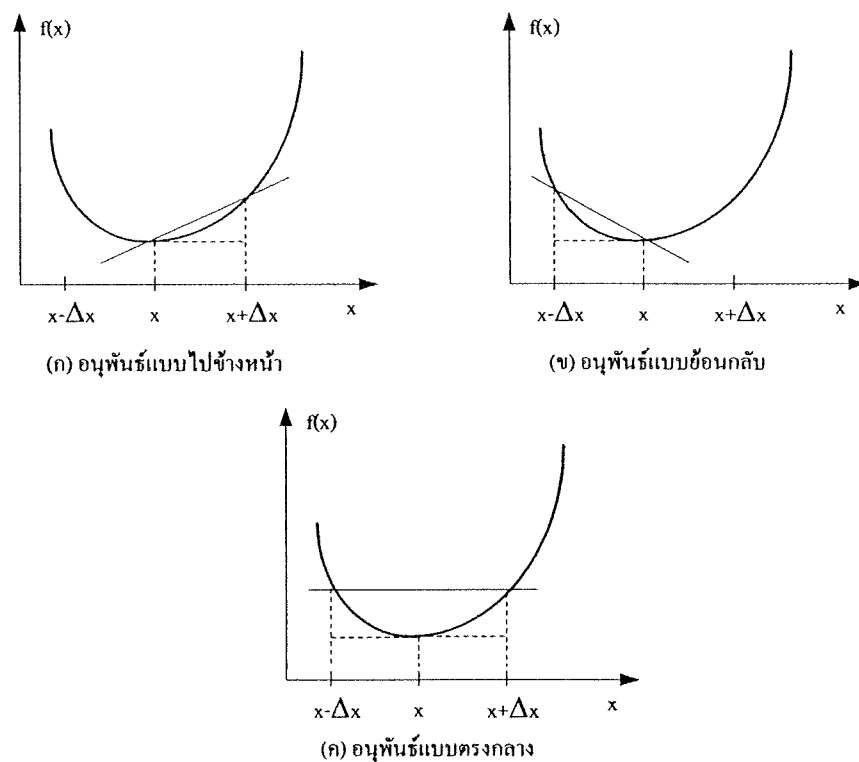
การหาอนุพันธ์อันดับ 1 ของฟังก์ชัน f ใดๆ สามารถหาได้ดังสมการที่ (2-21)

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-21)$$

จากสมการที่ (2-21) ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์สามารถประมาณสมการใหม่ได้เป็น

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-22)$$

การที่สามารถประมาณค่าจากสมการที่ (2-21) ไปเป็นสมการที่ (2-22) ได้ เป็นเพราะอาศัย ทฤษฎีอนุกรมเทเลอร์ (taylor series) นั่นคือ การละเลียดตั้งแต่เทอมที่ 3 ของอนุกรมเทเลอร์เป็นต้นไป ซึ่งจากการดำเนินการและอาศัยสมการที่ (2-22) ดังกล่าว ทำให้สามารถสร้างฟังก์ชันในการประมาณค่าได้ 3 รูปแบบ คือ อนุพันธ์แบบไปข้างหน้า (forward scheme) อนุพันธ์แบบย้อนหลัง (backward scheme) และอนุพันธ์แบบตรงกลาง (central scheme) ซึ่งสามารถแสดงได้ดังสมการที่ (2-23) (2-24) และ (2-25) ตามลำดับ



รูปที่ 2.10 การประมาณค่าอนุพันธ์แบบต่าง ๆ

อนุพันธ์แบบไปข้างหน้า:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2-23)$$

อนุพันธ์แบบย้อนหลัง:

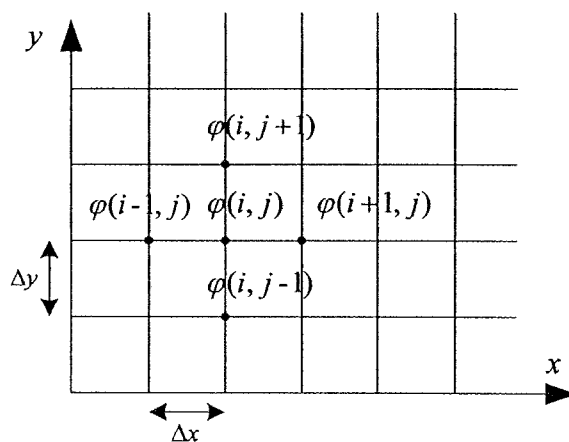
$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2-24)$$

อนุพันธ์แบบตรงกลาง:

$$\frac{df}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2-25)$$

จากความรู้เรื่องการประมาณแบบ 1 มิติ เมื่อทำการพิจารณาปัญหา 2 มิติจะได้ค่า ณ ตำแหน่งโนดใด ๆ ซึ่งเกิดจากผลรวมเชิงเส้นของค่า ณ ตำแหน่งโนดรอบข้างนั้น ๆ โดยสำหรับปัญหาระบบ 2 มิติ ที่มีระนาบ xy ตามรูปที่ 2.11 จะถูกกำหนดให้ระบบมีแหล่งจ่ายอิสระ และมีค่าขอบเขต (boundary condition) อยู่ในรูปศักย์ไฟฟ้าที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปอนุพันธ์ ซึ่งปัญหาดังกล่าวสามารถแสดงได้ในรูปสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (2-26)$$



รูปที่ 2.11 โครงสร้างโนดย่อยสำหรับปัญหา 2 มิติ

โดยที่ φ คือ ศักย์ไฟฟ้าที่ไม่ทราบค่าภายในระบบที่พิจารณา

สำหรับปัญหาระบบ 2 มิติในระบบพิกัดฉากสามารถหาค่าศักย์ไฟฟ้าได้ตามสมการที่ (2-27)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (2-27)$$

จากสูตรอนุพันธ์แบบตรงกลาง กับ อนุพันธ์อันดับ 2 จะได้

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varphi(i+1, j) - 2\varphi(i, j) + \varphi(i-1, j)}{(\Delta x)^2} \quad (2-28)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\varphi(i, j+1) - 2\varphi(i, j) + \varphi(i, j-1)}{(\Delta y)^2} \quad (2-29)$$

แทนค่าสมการที่ (2-28) กับ (2-29) ในสมการลาปลาซที่ (2-27) จะได้สูตรการคำนวณตามสมการที่ (2-30)

$$\varphi(i, j) = \frac{1}{4} [\varphi(i+1, j) + \varphi(i-1, j) + \varphi(i, j+1) + \varphi(i, j-1)] \quad (2.48)$$

3) สร้างสมการรวมของระบบ

นำสมการของแต่ละโนดที่ได้ภายในระบบมาประกอบรวมกัน (assembly) มารวมกันเป็นสมการรวมของระบบ จากขั้นตอนที่ 1 ถ้าทำการแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นโนดย่อย ๆ ทั้งหมด n โหนด จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบไปด้วยสมการย่อยทั้งหมด n สมการ

4) เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบเขต

ประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขค่าขอบเขตที่เกี่ยวข้อง ให้สอดคล้องและเหมาะสมกับปัญหา ใส่ลงในสมการรวมของระบบเพื่อหาค่าผลเฉลย โดยการแก้สมการรวมของระบบเพื่อหาตัวแปรไม่ทราบค่าที่โนดต่าง ๆ

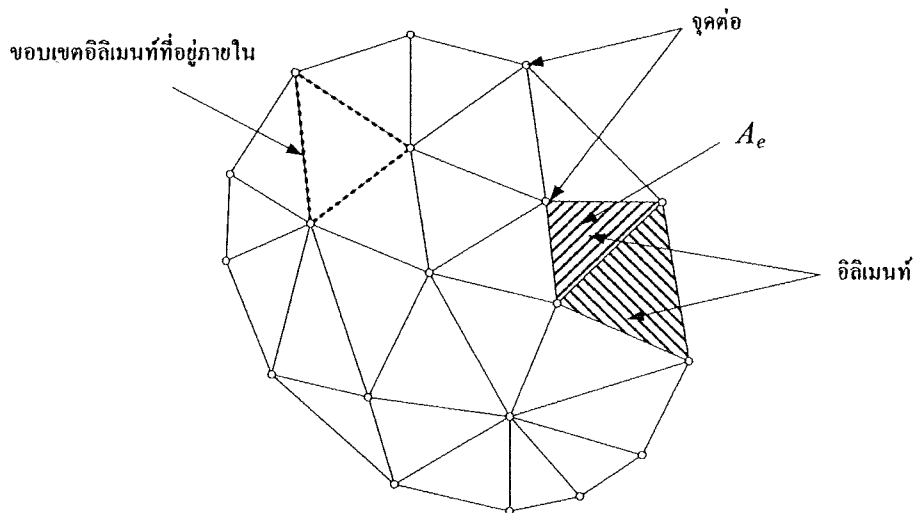
5) คำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ภายในระบบ

ถึงแม้วิธีดังกล่าวเป็นวิธีที่สามารถเข้าใจได้ง่าย แต่ถ้ามระบบที่พิจารณามีโครงสร้างที่ซับซ้อน จึงทำให้ระเบียบวิธีดังกล่าวไม่ค่อยได้รับความนิยม แต่สำหรับงานวิจัยนี้เป็นงานวิจัยที่วิเคราะห์สนามไฟฟ้ารอบสายส่งไฟฟ้าแรงสูง ที่เป็นพื้นที่โล่งไม่มีสิ่งกีดขวาง ทำให้ระบบดังกล่าว

เป็นระบบเปิดกว้างและไม่มีความซับซ้อน จึงสามารถออกแบบกริดของระบบที่พิจารณาได้อย่างอิสระ ซึ่งไม่ก่อให้เกิดปัญหาจากการใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์

2.6 ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์

หลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ในขั้นต้นคล้ายกับระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ กล่าว คือ เริ่มจากการแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นพื้นที่หลาย ๆ ส่วนที่เรียกว่า “อิลิเมนต์” โดยที่การกระจัด และแรงภายในของแต่ละอิลิเมนต์ ณ จุดที่อิลิเมนต์ต่อโงกันจะต้องเข้ากันได้และสมดุล ซึ่งอิลิเมนต์ต่าง ๆ นี้ จะขึ้นอยู่กับความละเอียดของแต่ละงานว่าต้องการรูปร่างลักษณะใกล้เคียงกับของจริงดั้งเดิมมากเท่าใด ซึ่งอาจอยู่ในรูปลักษณะของสามเหลี่ยมและสี่เหลี่ยมคางหมูเท่าก็ได้ ดังนั้นค่าผลเฉลยโดยประมาณที่มีจำนวนที่นับได้ที่จะคำนวณออกมา จึงมีความแม่นยำมากขึ้น ซึ่งความแม่นยำนี้ขึ้นอยู่กับขนาด และจำนวนของอิลิเมนต์ที่ใช้ในการแก้ปัญหานั้น ซึ่งขั้นตอนโดยทั่วไปของวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ประกอบไปด้วยขั้นตอนใหญ่ ๆ ทั้งหมด 6 ขั้นตอน (ปราโมทย์ เชอะอำไพ, 2542) โดยมีรายละเอียดดังนี้ คือ

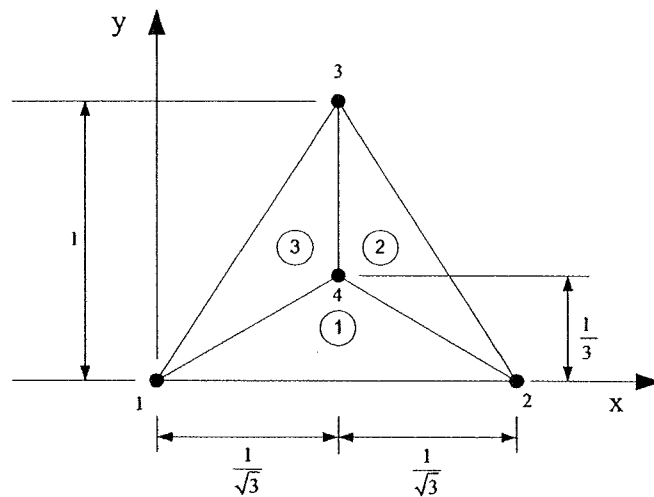


รูปที่ 2.12 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นอิลิเมนต์

1) การออกแบบอิลิเมนต์ย่อยให้กับระบบ (discretization) แบ่งขอบเขตรูปร่างของระบบปัญหาที่ต้องการหาผลลัพท์ออกเป็นอิลิเมนต์ย่อย ๆ โดยแต่ละอิลิเมนต์จะมีพื้นที่ A_e ดังแสดงในรูปที่ 2.12 ซึ่งเป็นรูปแสดงการแบ่งอิลิเมนต์ของรูปร่างปัญหาแบบ 2 มิติ (ระนาบ xy) โดยใช้

อีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมสามจุดต่อ ซึ่งประกอบไปด้วย โหนด (nodes) อีลิเมนต์ (elements) และขอบเขตของอีลิเมนต์ที่อยู่ภายใน (interelement boundaries) และเพื่อเป็นแนวทางในการสร้างโปรแกรมการคำนวณสำหรับการป้อนข้อมูลของทุก ๆ อีลิเมนต์ จึงขอยกตัวอย่างรูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วยอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมทั้งหมด 3 อีลิเมนต์ 4 โหนด ดังแสดงด้วยรูปที่ 2.13

ข้อมูลเบื้องต้นสำหรับโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ต้องการ คือ หมายเลขของอีลิเมนต์ และหมายเลขของโหนด พร้อมทั้งค่าพิกัดของแต่ละโหนด ดังแสดงด้วยรูปที่ 2.13 พร้อมทั้งสรุปเป็นตารางได้ดังตารางที่ 2.4 และ 2.5 ตามลำดับ



รูปที่ 2.13 รูปร่างของปัญหาที่ประกอบด้วย 3 อีลิเมนต์ 4 โหนด

ตารางที่ 2.4 ลักษณะข้อมูลของอีลิเมนต์

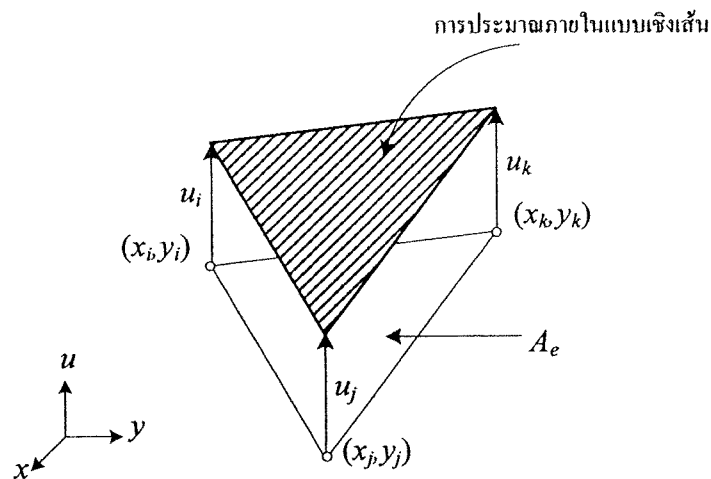
หมายเลข อีลิเมนต์	หมายเลขโหนด		
	โหนด i	โหนด j	โหนด k
1	1	2	4
2	4	2	3
3	1	4	3

หมายเหตุ โหนด i j และ k คือหมายเลขของโหนดที่ i j และ k ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ตารางที่ 2.5 ลักษณะข้อมูลของตำแหน่งโนด

หมายเลขโนด	พิกัดแกน x	พิกัดแกน y
1	0	0
2	$2/\sqrt{3}$	0
3	$1/\sqrt{3}$	1
4	$1/\sqrt{3}$	$1/3$

2) ฟังก์ชันการประมาณภายในแต่ละอีลิเมนต์ เลือกรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในอีลิเมนต์ (element interpolation function) อย่างในกรณีอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยมจะประกอบด้วย 3 โหนดที่มีตัวห้อย i, j และ k ซึ่งวนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ ดังแสดงในรูปที่ 2.14 (Bickford, 1994) ซึ่งเป็นการประมาณค่าภายในอีลิเมนต์แบบเชิงเส้น (linear representation)



รูปที่ 2.14 การประมาณภายในแบบเชิงเส้นบนอีลิเมนต์รูปสามเหลี่ยม

ตำแหน่งของโนด (x_n, y_n) $n = i, j, k$ เป็นตำแหน่งของตัวที่ไม่ทราบค่า u_n โดยสมมติลักษณะการกระจายของผลลัพธ์โดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอีลิเมนต์ $u_e(x, y)$ เป็นแบบเชิงเส้น ดังนี้

$$u_e(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y \quad (2-31)$$

โดยที่ α, β, γ เป็นค่าคงที่ ซึ่งสามารถหาได้จากโนดทั้งสามดังนี้

$$u_e(x_i, y_i) = u_i = \alpha + \beta x_i + \gamma y_i$$

$$u_e(x_j, y_j) = u_j = \alpha + \beta x_j + \gamma y_j$$

$$u_e(x_k, y_k) = u_k = \alpha + \beta x_k + \gamma y_k$$

นำค่า α β γ ที่ได้จากการแก้สมการทั้งสามข้างต้น แทนค่ากลับลงไปในสมการที่ (2-31) จะได้ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณ ณ ตำแหน่งใด ๆ บนอิทธิเมนต์เป็น

$$u_e(x, y) = u_i N_i + u_j N_j + u_k N_k \quad (2-32)$$

ซึ่ง N_n , $n = i, j, k$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในอิทธิเมนต์

$$N_n = \frac{a_n + b_n x + c_n y}{2A_e} \quad (2-33)$$

โดยที่

$$\begin{array}{lll} a_i = x_j y_k - x_k y_j & b_i = y_j - y_k & c_i = x_k - x_j \\ a_j = x_k y_i - x_i y_k & b_j = y_k - y_i & c_j = x_i - x_k \\ a_k = x_i y_j - x_j y_i & b_k = y_i - y_j & c_k = x_j - x_i \end{array}$$

และ A_e คือพื้นที่ของแต่ละอิทธิเมนต์ ซึ่ง $2A_e$ หาได้จากดีเทอร์มิแนนต์ของสัมประสิทธิ์ดังนี้

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = x_j(y_k - y_i) + x_i(y_j - y_k) + x_k(y_i - y_j) \quad (2-34)$$

ความแม่นยำของผลเฉลยจะขึ้นอยู่กับฟังก์ชันการประมาณภายในที่สมมติขึ้นมานี้มีความใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงของปัญหามากน้อยเพียงใดด้วย

3) สร้างสมการของอีลิเมนต์ (element formulation) ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหา ซึ่งขั้นตอนนี้อถือว่าเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุดของวิธีไฟไนต์อีลิเมนต์ อย่างเช่นกรณีสมการของอีลิเมนต์สามเหลี่ยมที่ได้ยกมาเป็นตัวอย่างดังแสดงในรูปที่ 2.14 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}_e \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{bmatrix}_e = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{bmatrix}_e \quad (2-35)$$

ซึ่งเขียนโดยย่อได้ว่า $[K]_e [u]_e = [f]_e$ โดย $[u]_e$ คือ เมทริกซ์ตัวไม่ทราบค่าที่โนด และตัวห้อย e แสดงให้ทราบว่า เป็นเมทริกซ์ระดับอีลิเมนต์ ซึ่งสมการของอีลิเมนต์ดังกล่าว จำเป็นต้องถูกสร้างขึ้นมาให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้น ๆ การสร้างสมการของอีลิเมนต์ซึ่งอยู่ในรูปแบบของสมการที่ (2-35) สามารถทำได้โดยวิธีการโดยตรง (direct approach) วิธีการแปรผัน (variational approach) และ วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (method of weighted residuals) ซึ่งวิธีสุดท้าย ถูกจัดให้เป็นวิธีที่นิยมที่สุดในการประยุกต์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ในปัจจุบัน เพราะเนื่องจากเป็นวิธีที่ใช้การสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์จากสมการเชิงอนุพันธ์โดยตรง โดยไม่จำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้อง ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการสร้างสมการไฟไนต์อีลิเมนต์สำหรับปัญหาทั่ว ๆ ไปได้

4) นำสมการของแต่ละอีลิเมนต์ที่ได้มาประกอบกัน (assembly) เป็นสมการรวมของระบบ จากขั้นตอนที่ 1 หากแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นอีลิเมนต์ย่อยซึ่งประกอบด้วย n โหนด จะก่อให้เกิดระบบสมการรวมซึ่งประกอบด้วยสมการย่อยจำนวนทั้งสิ้น n สมการ โดยแสดงได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdot & \cdot & K_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & K_{n3} & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}_{sys(n \times n)} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{bmatrix}_{sys(n \times 1)} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{bmatrix}_{sys(n \times 1)} \quad (2-36)$$

หรือเขียนโดยย่อได้ดังนี้ $[K]_{sys} [u]_{sys} = [f]_{sys}$ จากสมการที่ (2-36) เมทริกซ์ $[K]_{sys}$ จะมีคุณสมบัติของความเป็นเมทริกซ์สมมาตร กล่าวคือ $[K]_{sys} = [K]_{sys}^T$ และมีคุณสมบัติของการจับ

กลุ่มกันของค่าที่ไม่เท่ากับศูนย์บริเวณแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ ซึ่งจะมีลักษณะอยู่รวมกันเป็น แถบ (banded matrix) จากคุณสมบัติดังกล่าวนี้ จะก่อให้เกิดประโยชน์อย่างมากในการพัฒนา โปรแกรมคอมพิวเตอร์ การนำสมการย่อยของแต่ละอิเลเมนต์มาประกอบกันเข้าเป็นสมการรวมของ ระบบจำเป็นต้องมีหลักการ ซึ่งหลักการที่จะกล่าวนี้ เป็นหลักการที่ง่าย สามารถทำได้โดยสะดวก เหมาะกับรูปร่างของปัญหาที่มีอิเลเมนต์ย่อยจำนวนมาก ๆ และหลักการนี้จะถูกนำไปใช้ในการ พัฒนาคอมพิวเตอร์โปรแกรมด้วย โดยสามารถทำความเข้าใจได้จากตัวอย่างรูปร่างของปัญหาดัง รูปที่ 2.14 กล่าวคือเราจะทำการสร้างสมการรวมของระบบซึ่งประกอบด้วย 3 อิเลเมนต์ 4 โหนด โดยจะแสดงการรวมของเมทริกซ์ $[K]_{sys}$ เพื่อเป็นตัวอย่าง

วิธีการนี้ทำได้โดย เขียนสมการของอิเลเมนต์ต่าง ๆ พร้อมทั้งกำกับหมายเลขของโนดทาง แนวนอนและแนวตั้งของแต่ละอิเลเมนต์ให้ถูกต้อง โดยจากรูปที่ 2.13 $[K]_e$ ของอิเลเมนต์ที่ 1 ประกอบด้วยโนดหมายเลข 1 2 และ 4 ส่วน $[K]_e$ ของอิเลเมนต์ที่ 2 ประกอบด้วยโนดหมายเลข 2 3 และ 4 และ $[K]_e$ ของอิเลเมนต์ที่ 3 ซึ่งเป็นอิเลเมนต์สุดท้ายประกอบด้วยโนดหมายเลข 1 3 และ 4 โดยสามารถเขียนแสดงให้เห็นได้ดังนี้

$$[K]_{e1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-37)$$

$$[K]_{e2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-38)$$

$$[K]_{e3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} g_1 & h_1 & i_1 \\ g_2 & h_2 & i_2 \\ g_3 & h_3 & i_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-39)$$

เมื่อมีหมายเลขกำกับทั้งทางแถวอนและแถวตั้งกำกับสัมประสิทธิ์ทุกตัวของเมทริกซ์ของทุกอิลิเมนต์แล้ว จากนั้นนำสัมประสิทธิ์ต่าง ๆ เหล่านี้มาใส่ลงในเมทริกซ์ระบบรวม $[K]_{sys}$ เช่นค่าสัมประสิทธิ์ b_3 ซึ่งอยู่ในแถวอนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของอิลิเมนต์ย่อยที่ 1 จะไปปรากฏอยู่ในแถวอนที่ 4 แถวตั้งที่ 2 ของเมทริกซ์ระบบรวมดังแสดงในสมการ เป็นต้น

$$[K]_{sys} = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1) & (2) & (3) & (4) \end{matrix} \\ \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix} & \begin{bmatrix} a_1 + g_1 & b_1 & h_1 & c_1 + i_1 \\ a_2 & b_2 + d_1 & e_1 & c_2 + f_1 \\ g_2 & d_2 & e_2 + h_2 & f_2 + i_2 \\ a_3 + g_3 & b_3 + d_3 & e_3 + h_3 & c_3 + f_3 + i_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-40)$$

5) ประยุกต์เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต (initial and boundary conditions) ที่สอดคล้องกับปัญหาลงในสมการรวมของระบบเพื่อหาค่าผลเฉลย โดยการแก้สมการรวมของระบบเพื่อหาตัวไม่ทราบค่าที่โนด

6) คำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่ต้องการต่อไป เมื่อทราบค่าผลลัพธ์ที่โนดต่าง ๆ แล้วสามารถคำนวณหาค่าตัวแปรต่าง ๆ ที่สัมพันธ์กับผลลัพธ์นี้ต่อไปได้

จากขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอน จะเห็นได้ว่า ระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์เป็นวิธีที่มีแบบแผนเป็นขั้นเป็นตอน โดยมีส่วนที่สำคัญที่สุดคือการสร้างสมการของอิลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ให้สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหาที่กำหนด และในขั้นตอนทั้ง 6 ขั้นตอนนี้จะนำไปพัฒนาขึ้นเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อช่วยในการคำนวณต่อไป

2.7 สรุป

บทนี้ได้นำเสนอทฤษฎีและหลักการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย อันได้แก่ ทฤษฎีของสนามไฟฟ้า สายส่งกำลังไฟฟ้า โครงข่ายมือถือ ระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ ที่อธิบายถึงขั้นตอนต่าง ๆ ภายในการคำนวณด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์ดิฟเฟอเรนซ์ และระเบียบวิธีไฟไนต์อิลิเมนต์ โดยได้กล่าวเฉพาะส่วนที่จะนำมาใช้หรือส่วนที่จะถูกกล่าวอ้างถึงในบทต่อ ๆ ไป ทั้งนี้เพื่อเป็นประโยชน์และเป็นแนวทางในการนำไปประยุกต์ใช้แก่ผู้ดำเนินงานวิจัย