

บทที่ 3

กระบวนการสเวจ กระบวนการดีสเวจ และทฤษฎี

3.1 บทนำ

ปัจจุบันในการผลิตฮาร์ดดิสก์จะมีขั้นตอนการเชื่อมยึดติดแขนแอคทูเอเตอร์ (actuator arm) กับแขนซัสเพนชัน (suspension arm) ซึ่งมีหัวอ่าน/เขียนฮาร์ดดิสก์ (read/write head) ติดอยู่โดยกระบวนการสเวจ (swaging process) เพื่อช่วยให้สมรรถนะของการผลิตสูงขึ้น ซึ่งกระบวนการสเวจ คือ กระบวนการบีบหรืออัดให้วัสดุมีการเปลี่ยนรูป เพื่อให้วัสดุมีการยึดติดกัน โดยมีข้อดี ดังนี้

- ประหยัดเวลา เนื่องจากผิวของชิ้นงานที่ผ่านกระบวนการสเวจ มีคุณภาพดี ไม่ทำให้ผิวของชิ้นงานเปลี่ยนสภาพ จึงไม่ต้องมาเสียเวลาแต่งผิวและรูปร่างของชิ้นงาน และยังมีระยะเวลาในการประกอบชิ้นงานที่น้อยกว่าการเชื่อม การติดกาว หรือการใช้สลักเกลียว นอกจากนี้กระบวนการสเวจ ยังมีการจัดเตรียมอุปกรณ์ต่างๆ ได้ง่าย

- ประหยัดเนื้อวัสดุ เนื่องจากในกระบวนการสเวจ ชิ้นส่วนแต่ละชิ้นจะถูกดันให้ยึดติดกัน จึงไม่ต้องมีการใช้วัสดุเพิ่มเติมในการประกอบชิ้นส่วน เช่น ลวดเชื่อม กาว หรือสลักเกลียว

- ชิ้นงานที่ได้จะมีความแข็งแรงมากขึ้น เนื่องจากโครงสร้างของเกรน (Grain) ในเนื้อวัสดุจะเรียงตัวใหม่ซึ่งทำให้ชิ้นงานมีความแข็งแรงเพิ่มขึ้น

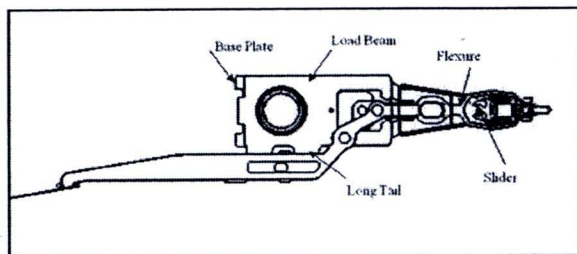
แต่เมื่อหัวอ่าน/เขียนฮาร์ดดิสก์มีข้อบกพร่องขึ้นในบางชิ้น สามารถแก้ไขปัญหาก็ได้โดยการถอดแขนซัสเพนชันที่มีหัวอ่าน/เขียนที่มีข้อบกพร่องออกจากแขนแอคทูเอเตอร์ ซึ่งเรียกว่ากระบวนการดีสเวจ (de-swaging process) แล้วนำแขนซัสเพนชันที่มีหัวอ่าน/เขียนที่ดีเข้ามาใส่แทน ในระหว่างกระบวนการดีสเวจแรงกดใบมีด (blade) ของอุปกรณ์ดีสเวจ (de-swage tool) จะแยกหัวอ่าน/เขียนฮาร์ดดิสก์ที่มีข้อบกพร่องออกมา ซึ่งขนาดของแรงกด และมุมของใบมีดอุปกรณ์ดีสเวจ จะมีผลกระทบต่อการเสียรูปของแขนแอคทูเอเตอร์

3.2 กระบวนการสเวจ (Swaging Process)

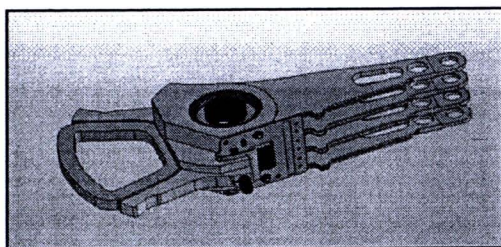
3.2.1 กระบวนการสเวจโดยใช้ลูกบอล (Ball Swaging Process)

กระบวนการสเวจชนิดนี้เป็นแบบที่ใช้ทำการศึกษาในการศึกษานี้ เป็นกระบวนการที่ใช้ลูกบอลทรงกลมที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางใหญ่กว่ารูหรือช่องของชิ้นงานที่จะทำการยึดติดกันเล็กน้อย เมื่ออิงลูกบอลผ่านรูก็จะทำให้วัสดุที่อยู่ด้านในมีการขยายตัวเปลี่ยนรูปร่างอย่างถาวรอัดตัว

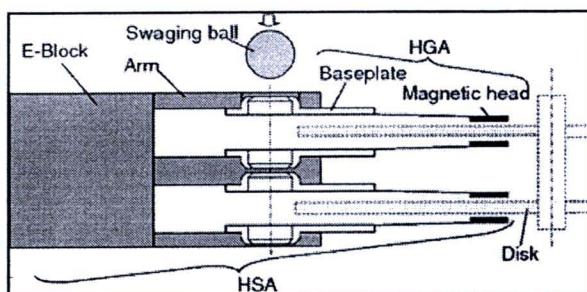
เข้ากับวัสดุที่ล้อมรอบอยู่ด้านนอก เกิดความดันสัมผัสระหว่างผิวของวัสดุทั้งสอง ทำให้วัสดุมีการยึดติดกัน ซึ่งในอุตสาหกรรมประกอบชิ้นส่วนฮาร์ดดิสก์ มีการนำกระบวนการสเวจ โดยใช้ลูกบอล ดังภาพที่ 3.1 (ก) ในกระบวนการประกอบ หัวอ่าน/เขียนข้อมูล (Head Gimbal Assembly, HGA) ดังภาพที่ 3.1 (ข) ประกอบเข้ากับ แขนหัวอ่านเขียน (Actuator Arm) ดังภาพที่ 3.1 (ค) เพื่อให้ได้ ชุดประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ (Head Stack Assembly, HSA) ดังภาพที่ 3.1 (ง)



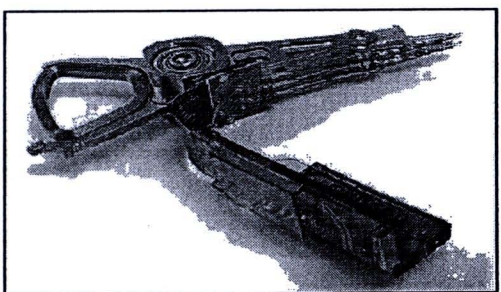
(ก)



(ข)



(ค)



(ง)

ภาพที่ 3.1 ส่วนประกอบ และลักษณะการยิงลูกบอลในกระบวนการสเวจด้วยลูกบอล

(ก) หัวอ่าน/เขียนข้อมูล (Head Gimbal Assembly, HGA) [4]

(ข) แขนหัวอ่านเขียน (Actuator Arm)

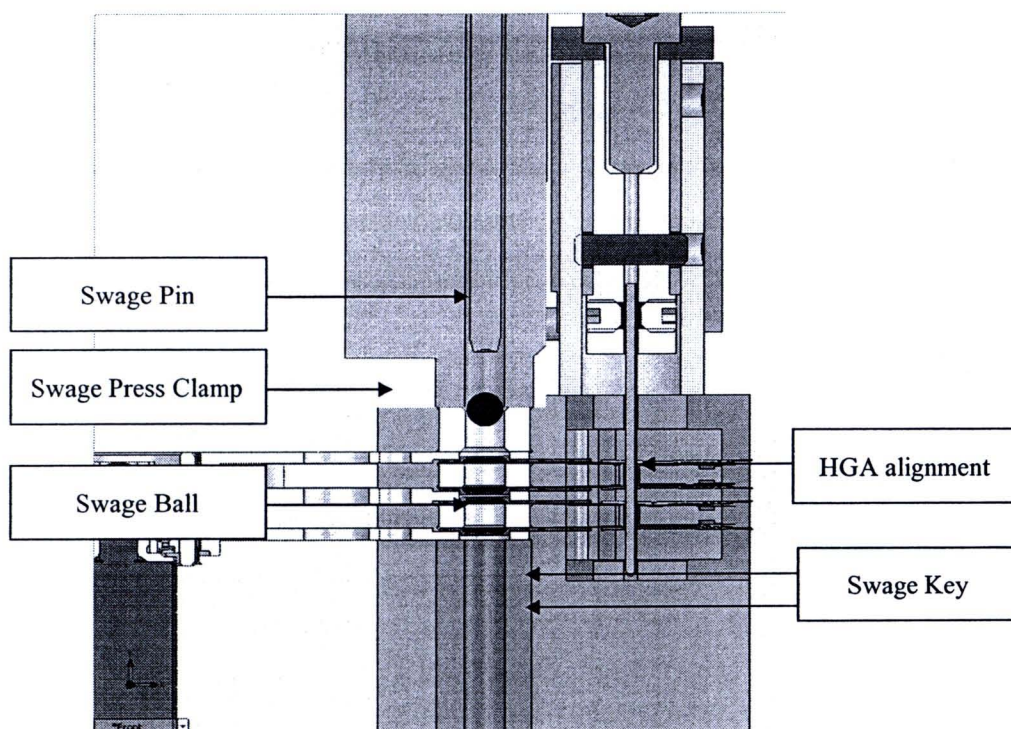
(ค) กระบวนการสเวจด้วยลูกบอล (Ball Swaging Process) [20]

(ง) ชุดประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ (Head Stack Assembly, HSA) [21]

เครื่องมือที่ใช้ในการประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ (Swaging Machine) ดังภาพที่ 3.2 ซึ่งมี ส่วนประกอบหลัก ๆ ดังนี้

1. เข็มสเวจ (Swage Pin) ทำหน้าที่ยิงหรือดันลูกบอล เพื่อบีบอัดแผ่นฐาน (Base Plate) ให้ติดกับ แขนหัวอ่านเขียน (Actuator arm)
2. อุปกรณ์จับกดชิ้นงาน (Swage Press Clamp) ทำหน้าที่ จับยึดชิ้นงาน ให้อยู่นิ่งขณะที่ยิงลูกบอล โดยที่กดด้วยแรง 150 – 250 ปอนด์

3. ชิ้นส่วนรองแขนหัวอ่าน/เขียนในแต่ละหัวอ่าน (Swage Key) ทำหน้าที่เป็นตัวรองหรือกั้นในแต่ละชั้นของหัวอ่าน/เขียน ให้ระยะห่างในแต่ละชั้นคงที่
4. ลูกบอล (Swage Ball) เป็นอุปกรณ์ที่สำคัญและมีผลต่อกระบวนการสเวจ ที่สุด ซึ่งทำมาจาก Stainless Steel มีขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางระหว่าง 0.078 – 0.0823 นิ้ว ซึ่งการกำหนดขนาดและจำนวนลูกบอลที่ใช้ ขึ้นอยู่กับแต่ละผลิตภัณฑ์
5. ชุดจัดแนวหัวอ่าน/เขียน (HGA alignment) ทำหน้าที่เป็นตัวยึดไม่ให้หัวอ่าน/เขียนเคลื่อนตัวและจัดให้หัวอ่าน/เขียน อยู่ในแนวตรงกัน ในขณะที่ทำการสเวจ



ภาพที่ 3.2 โครงสร้างของเครื่องสเวจ

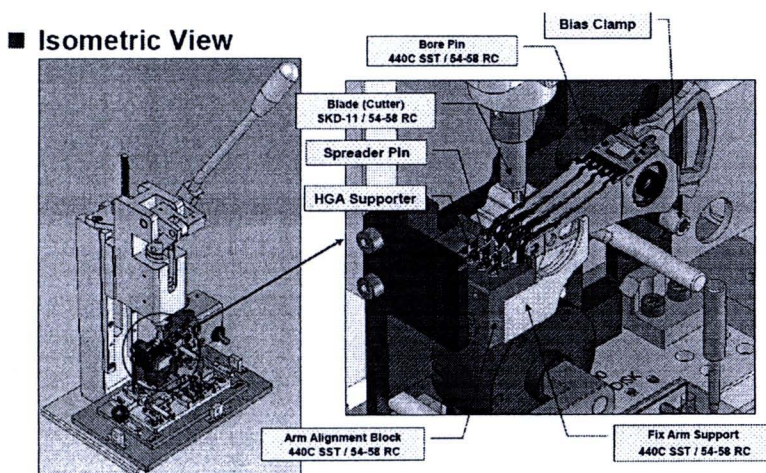
ขั้นตอนในการทำงานของเครื่องสเวจ (Swaging Machine) มีดังนี้

1. นำชุดประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ (HAS) ใส่ในชุดจับยึดชิ้นงาน (Swage Shuttle) โดยจะชิ้นส่วนรองแขนหัวอ่าน/เขียนในแต่ละหัวอ่าน (Swage Key) มาสอดรับในแต่ละชั้นของแขนหัวอ่าน/เขียน แล้วเอาเข้าสู่เครื่องสเวจ
2. อุปกรณ์จับกดชิ้นงาน (Swage Press Clamp) กดด้วยแรง 150 – 250 ปอนด์ เพื่อให้แผ่นฐาน กับ แขนหัวอ่าน/เขียน อยู่ ณ ระยะที่ยิงลูกบอล

3. เข็มสเวจ (Swage Pin) จะดันลูกบอล ด้วยความเร็ว ประมาณ 5 – 60 เมตรต่อวินาที โดยค่าความเร็วสามารถปรับค่าได้ ซึ่งลูกบอล จะมีขนาดใหญ่กว่ารูของแผ่นฐาน เพื่อที่จะบีบอัด บริเวณรูของแผ่นฐาน (Base Plate Hub) ให้ขยายไปยึดติดบริเวณขอบรูของแขนหัวอ่าน/เขียนข้อมูล (Actuator Arm) เพื่อให้ได้ ชุดประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ (Head Stack Assembly, HSA) ซึ่งวัฏจักรการทำงานหนึ่งครั้งจะใช้เวลาประมาณ 20 – 30 วินาที

3.3 กระบวนการดีสเวจ (De-Swaging Process)

ในกระบวนการประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จในขณะที่ยังประกอบหัวอ่านเขียนเสร็จแล้วจะมีการตรวจสอบคุณภาพของหัวอ่าน/เขียน และถ้าตรวจสอบพบว่าหัวอ่าน/เขียนอันใดมีข้อบกพร่อง จะต้องนำหัวอ่าน/เขียนชิ้นใหม่มาประกอบแทนชิ้นเดิม และก่อนที่จะนำหัวอ่าน/เขียนชิ้นใหม่มาประกอบจะต้องใช้ใบมีดของอุปกรณ์ดีสเวจ ดังภาพที่ 3.3 มากดลงมาระหว่างแขนแอคทูเอเตอร์กับแผ่นฐานที่มีหัวอ่าน/เขียน นั้นติดอยู่ เพื่อแยกแขนแอคทูเอเตอร์กับแผ่นฐานให้แยกออกจากกัน ซึ่งเรียกว่ากระบวนการดีสเวจ แล้วนำหัวอ่าน/เขียนใหม่เข้ามาประกอบแทนชิ้นเดิม



ภาพที่ 3.3 อุปกรณ์ดีสเวจ (De-Swage Tool)

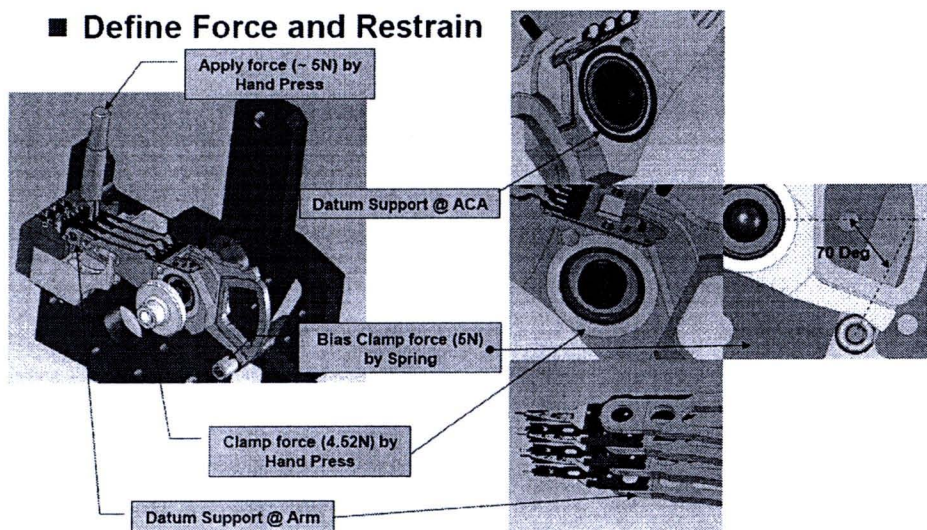
เครื่องมือที่ใช้ในกระบวนการดีสเวจมีส่วนประกอบหลัก ดังนี้

1. มือกด (Hand Press) ทำหน้าที่รับแรงกดจากภายนอกแล้วส่งผ่านแรงกดไปที่อุปกรณ์ดีสเวจและไปที่ใบมีด
2. ใบมีด (Blade) ทำหน้าที่รับแรงกดจากอุปกรณ์ดีสเวจแล้วกดลงมาระหว่างแขนแอคทูเอเตอร์กับแผ่นฐาน เพื่อแยกแขนแอคทูเอเตอร์กับแผ่นฐานให้แยกออกจากกัน

3. หมุดแยก (Spreader Pin) ทำหน้าที่แยกแกนชัสน์เพนชันออกไม่ให้ชิดกัน
4. ชิ้นส่วนจัดแนวแขนหัวอ่าน/เขียน (Arm Alignment Block) ทำหน้าที่จัดเรียงแกนหัวอ่าน/เขียนให้เรียงในระนาบเดียวกัน
5. ชิ้นส่วนรองรับหัวอ่าน/เขียน (HGA Supporter) ทำหน้าที่รองรับหัวอ่าน/เขียนในขณะดีสเวจ
6. ชิ้นส่วนรองรับแขนหัวอ่าน/เขียน (Fix Arm Support) ทำหน้าที่รองรับแขนหัวอ่าน/เขียนในขณะดีสเวจ
7. หมุดยึดชิ้นงาน (Bore Pin) ทำหน้าที่ยึดแกนแอกทูเอเตอร์ไม่ให้ขยับออกจากแนวปกติ
ขั้นตอนการทำงานของอุปกรณ์ดีสเวจ

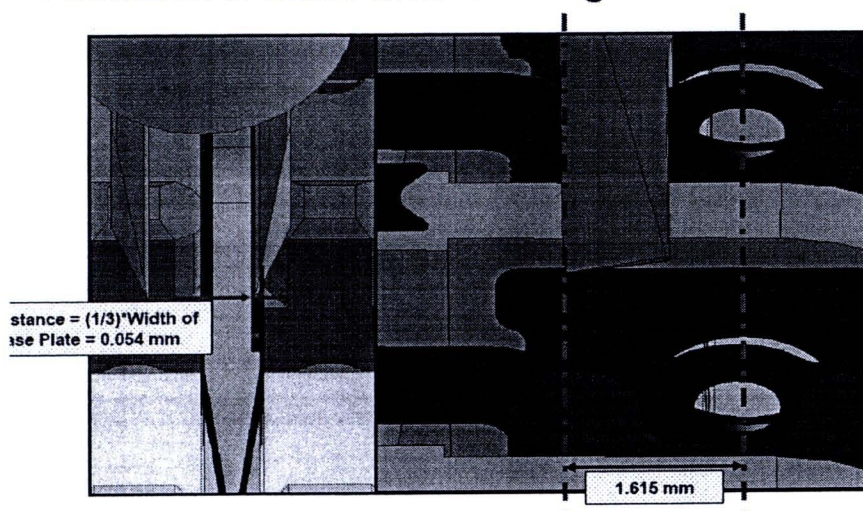
1. นำชุดประกอบหัวอ่าน/เขียนสำเร็จ (HSA) จัดวางบนชิ้นส่วนรองรับหัวอ่าน/เขียน ชิ้นส่วนรองรับแขนหัวอ่าน/เขียน และชิ้นส่วนจัดแนวแขนหัวอ่าน/เขียน โดยมีหมุดแยกแยกแกนชัสน์เพนชันออกจากกัน

2. ออกแรงกดที่มีมือกดเพื่อส่งผ่านแรงกดให้อุปกรณ์ดีสเวจ และอุปกรณ์ดีสเวจจะรับแรงกดจากอุปกรณ์ดีสเวจด้วยแรงขนาด 5 N ดังภาพที่ 3.4 แล้วกดลงมาระหว่างแกนแอกทูเอเตอร์กับแผ่นฐาน เพื่อแยกแกนแอกทูเอเตอร์กับแผ่นฐานให้แยกออกจากกัน โดยใบมีดจะอยู่ในตำแหน่งที่ห่างจากขอบของแผ่นฐาน 1 ใน 3 ของความหนาของแผ่นฐาน และห่างจากจุดศูนย์กลางรูของแผ่นฐาน 1.615 มิลลิเมตร ดังภาพที่ 3.5 และมุมของใบมีดมีขนาด 140.43 องศา ดังภาพที่ 3.6 แล้วยกมือกดขึ้น

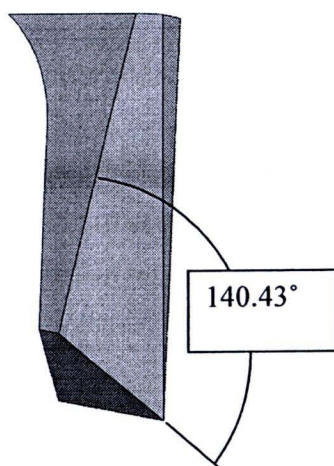


ภาพที่ 3.4 การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของอุปกรณ์ดีสเวจ

■ Location of Blade when De-swage



ภาพที่ 3.5 ตำแหน่งของใบมีดในระหว่างกระบวนการดีสเวจ



ภาพที่ 3.6 ใบมีดของอุปกรณ์ดีสเวจ

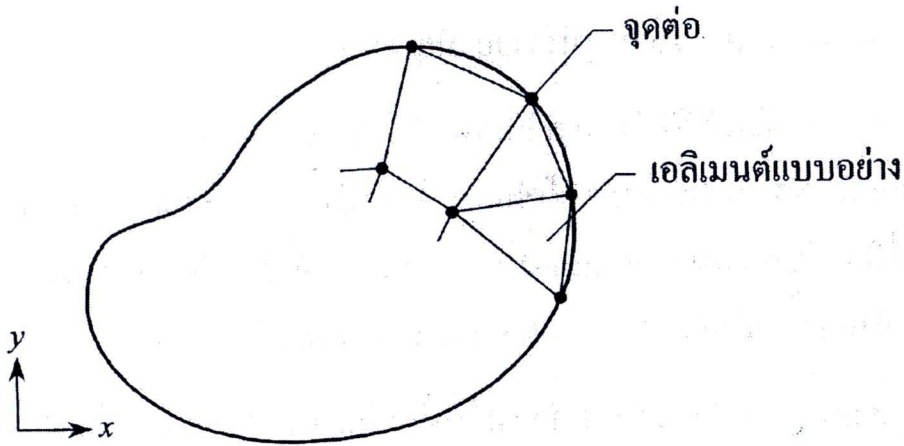
3.4 ทฤษฎี

3.4.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

3.4.1.1 ขั้นตอนทั่วไปของระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ประกอบด้วย 6 ขั้นตอนหลัก ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 การแบ่งขอบเขตรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย ๆ ดังแสดงในภาพที่ 15 ขอบเขตดังกล่าวอาจเป็นขอบเขตของปัญหาชนิดต่าง ๆ กัน เช่น ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง (Elasticity problem) รวมทั้งปัญหาของของไหล (Fluid problem) เป็นต้น

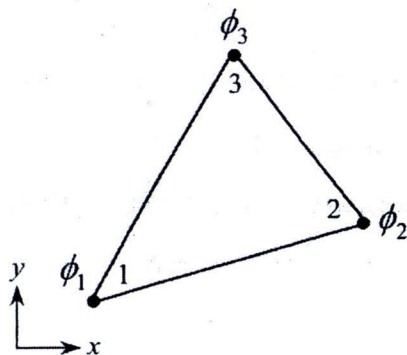


ภาพที่ 3.7 การแบ่งรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์แบบต่างๆ กัน [7]

ขั้นตอนที่ 2 การเลือกฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์ (Element interpolation functions) เช่น เอลิเมนต์สามเหลี่ยม (เอลิเมนต์แบบอย่างดังแสดงตัวอย่างในภาพที่ 3.7 เอลิเมนต์นี้ประกอบด้วย 3 จุดต่อที่มีหมายเลข 1, 2 และ 3 ดังแสดงในภาพที่ 3.8 โดยที่จุดต่อเป็นตำแหน่งที่ตั้งของตัวไม่รู้ค่า (Nodal unknowns) ซึ่งคือ ϕ_1, ϕ_2 และ ϕ_3 ตามลำดับ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่ออาจเป็นค่าของการเสียรูป (Displacement) หากเราวิเคราะห์ปัญหาความยืดหยุ่นในของแข็ง หรืออาจเป็นค่าของอุณหภูมิหากเราทำปัญหาเกี่ยวกับการถ่ายเทความร้อน หรืออาจเป็นความเร็วของของไหลหากเราวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น ลักษณะการกระจายของตัวไม่รู้ค่าบนเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของฟังก์ชันการประมาณภายในและตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อได้ คือ

$$\phi(x, y) = N_1(x, y)\phi_1 + N_2(x, y)\phi_2 + N_3(x, y)\phi_3 \quad (3.14)$$

โดย $N_i(x, y), i = 1, 2, 3$ แทนฟังก์ชันประมาณภายในเอลิเมนต์



ภาพที่ 3.8 เอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างประกอบด้วยสามจุดต่อโดยมีตัวไม่รู้ค่าอยู่ ณ ตำแหน่งที่จุดต่อ [7]

สมการ (3.14) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบของเมทริกซ์ได้ คือ

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= [N_1 \ N_2 \ N_3] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \\ &= [N]_{(1 \times 3)} \{\phi\}_{(3 \times 1)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

โดย $[N]$ แทนเมทริกซ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ และ $\{\phi\}$ แทนเวกเตอร์เมทริกซ์ที่ประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อของเอลิเมนต์นั้น ในตำราเล่มนี้ สัญญลักษณ์ $[\]$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวอน (row matrix) และ $\{ \}$ แสดงถึงเมทริกซ์แถวตั้ง (column matrix) ที่เรียกกันว่าเวกเตอร์ รายละเอียดของเมทริกซ์และการใช้ได้อธิบายในภาคผนวก ก

ขั้นตอนที่ 3 การสร้างสมการของเอลิเมนต์ (element equations) ดังตัวอย่างเช่น สมการของเอลิเมนต์สามเหลี่ยมแบบอย่างดังแสดงในภาพที่ 17 จะอยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}_e \quad (3.16)$$

ซึ่งเขียนย่อได้เป็น

$$[K]_e \{\phi\}_e = \{F\}_e \quad (3.17)$$

ขั้นตอนนี้ ถือเป็นหัวใจสำคัญของการศึกษาระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ การสร้างสมการของเอลิเมนต์ซึ่งในรูปแบบสมการ (3.16) สามารถทำได้โดย

- ก. วิธีการโดยตรง (Direct approach) สามารถทำได้โดยง่าย แต่ในขณะเดียวกันก็ใช้ได้เฉพาะปัญหาพื้นฐานเท่านั้น
- ข. วิธีการแปรผัน (Variational approach) สามารถทำได้โดยง่ายเช่นกัน แต่ในขณะเดียวกันจำเป็นต้องทราบฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์ของปัญหานั้นๆ ได้ด้วย ซึ่งโดยทั่วไปในทางปฏิบัติเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาได้ แต่ไม่สามารถหาฟังก์ชันแปรผันที่สอดคล้องกันได้
- ค. วิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง (Method of weighted residuals) สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทั่วไปได้

ขั้นตอนที่ 4 การนำสมการของแต่ละเอลิเมนต์ที่ได้มาประกอบรวมกันเข้า ก่อให้เกิดระบบสมการรวม (system of simultaneous equations) ในรูปแบบดังนี้

$$\Sigma(\text{element equations}) \rightarrow [K]_{\text{sys}} \{\delta\}_{\text{sys}} = \{F\}_{\text{sys}} \quad (3.18)$$

ขั้นตอนที่ 5 ทำการประยุกต์เงื่อนไขขอบเขต (boundary conditions) ลงในระบบสมการรวม (3.18) แล้วจึงแก้ระบบสมการรวมนี้เพื่อหา $\{\delta\}_{\text{sys}}$ อันประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ (nodal unknowns) ซึ่งอาจเป็นค่าของการเคลื่อนตัวตามจุดต่อต่าง ๆ ของโครงสร้าง หรืออาจเป็นเป็นค่าของความเร็วของของไหลตามจุดต่อหากเป็นปัญหาเกี่ยวกับการไหล เป็นต้น

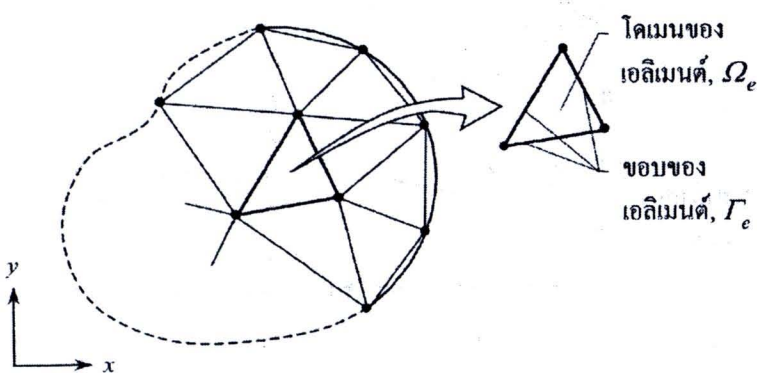
ขั้นตอนที่ 6 เมื่อคำนวณค่าต่างๆ ที่จุดต่อออกมาได้แล้วก็สามารถนำมาใช้เพื่อหาค่าอื่น ๆ ที่ต้องการต่อไปได้อีก เช่น เมื่อรู้ค่าการเสียรูป (Displacement) ตามจุดต่อต่างๆ ของโครงสร้างก็สามารถนำไปใช้หาค่าความเครียด (strain) และความเค้น (stress) ได้ตามลำดับ หรือเมื่อรู้ค่าอุณหภูมิที่จุดต่อก็สามารถคำนวณหาปริมาณการถ่ายความร้อนได้ หรือเมื่อรู้ค่าความเร็วของไหลที่จุดต่อก็สามารถนำไปคำนวณหาปริมาณอัตราไหลได้ เป็นต้น

จะเห็นได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นระเบียบวิธีที่มีระเบียบวิธีที่มีระเบียบแบบแผนอย่างเป็นขั้นตอน โดยมีหัวใจสำคัญอยู่ที่การสร้างสมการของเอลิเมนต์ในขั้นตอนที่ 3 ซึ่งโดยทั่วไปทำได้ 3 วิธี ดังที่กล่าวมาแล้วข้างต้น แต่เนื่องจากวิธีการถ่วงน้ำหนักเศษตกค้าง สามารถนำไปประยุกต์ใช้แก้ปัญหาทั่วไปได้ และยังให้ผลลัพธ์ใกล้เคียงกับวิธีการโดยตรง ซึ่งจะอธิบายในหัวข้อต่อไป

3.4.1.2 ระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษตค้ำเพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์
ลำดับขั้นตอนทั่วไป

การวิเคราะห์ปัญหาไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษ
ตค้ำประกอบด้วยลำดับที่สำคัญ 6 ขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 แบ่งรูปร่างลักษณะของปัญหาที่กำหนดมาให้ออกเป็นเอลิเมนต์ย่อย เช่น แบ่ง
ออกเป็นเอลิเมนต์สามเหลี่ยมย่อยๆ สำหรับปัญหาในสองมิติ ดังภาพที่ 3.9



ภาพที่ 3.9 การแบ่งลักษณะรูปร่างของปัญหาออกเป็นเอลิเมนต์ [7]

จากนั้นจึงหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่สอดคล้องกับปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์นั้น สมการเชิงอนุพันธ์
โดยทั่วไปสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบได้ คือ

$$L(\bar{\phi}) = 0 \tag{3.19}$$

โดย L คือ ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ (differential operator) และ $\bar{\phi}$ คือ ตัวแปรตามแม่นยำ
ขั้นตอนที่ 2 สมมุติลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณบนเอลิเมนต์ให้อยู่
ในรูป

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}(x, y) = \sum_{i=1}^m N_i \phi_i = \underset{(1 \times m)}{[N]} \underset{(m \times 1)}{\{\phi\}} \tag{3.20}$$

โดย m คือ จำนวนจุดต่อของเอลิเมนต์นั้น N_i คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์และ
 ϕ_i คือ ตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ

ขั้นตอนที่ 3 สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์โดยระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักของเศษตกค้าง หากเราแทนผลเฉลยโดยประมาณดังแสดงในสมการ (3.20) ลงในสมการเชิงอนุพันธ์ในสมการ (3.19) เราจะพบว่า

$$L(\bar{\phi}) \text{ จะ } \neq 0 \text{ แต่จะ } = R$$

โดย R คือ ค่าความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้น หรือเศษตกค้าง (Residual) นั้นหมายถึงว่า

$$R = L(\phi) = L([N]\{\phi\}) = L(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i) \quad (3.21)$$

เราจะใช้วิธีการเลอว์กิน (Galerkin) ซึ่งมีขั้นตอนโดยเริ่มจากการคูณเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนของเอลิเมนต์นั้น แล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_0^1 W_i R d\Omega = 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.22)$$

และโดยปกติเราจะเลือก $W_i = N_i$ ซึ่งเรียกว่าเป็นแบบบับโนฟ-กาเลอร์กิน (Bubnov-Galerkin) แต่หากเราเลือก $W_i \neq N_i$ ซึ่งใช้กับปัญหาบางชนิด จะเรียกว่าเป็นแบบเพโทรฟ-กาเลอร์กิน (Petrov-Galerkin)

ขั้นตอนที่ 4 อินทิเกรตทีละส่วน (integrate by parts) หากเราแทนสมการ (3.21) ลงในสมการ (3.22) แล้วอินทิเกรตทีละส่วนจะได้

$$\int_0^1 W_i R d\Omega = \int_{\Omega(e)} W_i L \left(\sum_{i=1}^m N_i \phi_i \right) d\Omega$$

$$\underbrace{\int_{\Omega(e)} (W_i N_i, \phi_i) d\Omega}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมนของเอลิเมนต์, } \Omega(e)} + \underbrace{\int_{\Gamma(e)} (W_i N_i, \phi_i) d\Gamma}_{\text{พจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์, } \Gamma(e)} = 0$$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับโดเมน
ของเอลิเมนต์, $\Omega(e)$

พจน์ที่เกี่ยวข้องกับ
ขอบเขตของเอลิเมนต์, $\Gamma(e)$

ขั้นตอนที่ 5 แทนพจน์ที่เกี่ยวข้องกับขอบเขตของเอลิเมนต์ $\Gamma(e)$ ด้วยภาวะขอบเขตอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะก่อให้เกิดสมการของเอลิเมนต์ที่สมบูรณ์สำหรับปัญหานั้น

ขั้นตอนที่ 6 จากนั้นจึงเขียนสมการของเอลิเมนต์ ซึ่งมีทั้งหมด m สมการให้อยู่
ในรูปของเมทริกซ์
นั่นคือ

$$\underset{(m \times m) \ (m \times 1)}{[K]} \underset{(m \times 1)}{\{\phi\}} = \underset{(m \times 1)}{\{F\}} \tag{3.23}$$

โดย $[K]$ คือ เอลิเมนต์เมทริกซ์ของความแข็งแรง (element stiffness matrix), $\{\phi\}$ คือ เวกเตอร์
ซึ่งประกอบด้วยตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อต่าง ๆ ของเอลิเมนต์ และ $\{F\}$ คือ โหลดเวกเตอร์ของเอลิเมนต์
นั้น เมื่อได้สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ดังแสดงในสมการ (3.23) แล้ว ขั้นตอนต่อไปคือรวมสมการ
ของเอลิเมนต์ย่อยเข้าด้วยกันก่อให้เกิดระบบสมการรวม จากนั้นก็กำหนดเงื่อนไขขอบเขต แล้วจึง
แก้ระบบสมการรวมเพื่อหาค่าผลลัพธ์ที่จุดต่อต่าง ๆ

3.4.1.3 วิธีการถ่วงน้ำหนักเสถดค้ำแบบต่างๆ
วิธีการถ่วงน้ำหนักเสถดค้ำ สามารถแบ่งเป็น 4 วิธี ดังนี้

(1) วิธีการจัดตำแหน่งจุด (point collocation)

วิธีการนี้ทำได้โดยใช้หลักการที่ง่าย ๆ คือ กำหนดให้ค่าเสถดค้ำเท่ากับศูนย์ที่บางตำแหน่ง
เนื่องจากเราต้องการ 2 สมการ ดังนั้นเราจึงกำหนด

$$\begin{aligned} R(t_1) &= 0 \\ R(t_2) &= 0 \end{aligned}$$

โดยที่ t_1 และ t_2 เป็นตำแหน่งในช่วงเวลาที่พิจารณา ซึ่งในที่นี้คือ 0 ถึง 1 เช่น

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{1}{3} ; \quad R\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + c_1\left(1 + \frac{1}{3}\right) + c_2\left(2\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) = 0 \\ t_2 &= \frac{2}{3} ; \quad R\left(\frac{2}{3}\right) = 1 + c_1\left(1 + \frac{2}{3}\right) + c_2\left(2\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 0 \end{aligned}$$

และจาก 2 สมการนี้ เราสามารถหาค่าคงที่ค่าที่ได้คือ

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.9310 \quad \text{และ} \quad c_2 = 0.3103 \\ \text{ดังนั้น} \quad x(t) &= 1 - 0.9310 t + 0.3103 t^2 \end{aligned} \tag{3.24}$$

(2) วิธีการจัดโดเมนย่อย (subdomain collocation)

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยการจัดโดเมนย่อยนั้น ทำโดยแบ่งโดเมนทั้งหมดออกเป็นส่วนย่อยๆ แล้วกำหนดให้ผลจากการอินทิเกรตของฟังก์ชันเศษตกค้าง R ของแต่ละโดเมนย่อยนั้นเท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_0^{t_1} R(t) dt = 0$$

$$\int_{t_1}^1 R(t) dt = 0$$

โดย t_1 อยู่ในช่วงเวลาที่พิจารณา หากเราเลือก $t_1 = \frac{1}{2}$ เราจะได้

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} R(t) dt ; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{8}c_1 + \frac{7}{24}c_2 &= 0 \\ \int_{1/2}^1 R(t) dt ; \quad \frac{1}{2} + \frac{7}{8}c_1 + \frac{25}{24}c_2 &= 0 \end{aligned}$$

และจาก 2 สมการนี้ เราสามารถหาค่าคงที่ได้คือ

ดังนั้น

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.9474 \quad \text{และ} \quad c_2 = 0.3158 \\ x(t) &= 1 - 0.9474 t + 0.3158 t^2 \end{aligned}$$

(3.25)

(3) วิธีการเลอว์คิน (Galerkin)

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยวิธีการเลอว์คิน ทำโดยการคูณฟังก์ชันเศษตกค้าง R ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก (weighting function) W จากนั้นจึงอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมนแล้วกำหนดผลที่ได้ให้เท่ากับศูนย์ นั่นคือ

$$\int_0^1 R(t) W_i(t) dt = 0 \tag{3.26}$$

และเนื่องจากเราต้องการ 2 สมการ ดังนั้น ค่า $i = 1, 2$ การเลือกฟังก์ชันน้ำหนัก $W_i(t)$ ทำได้โดยการเลือกจากฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับตัวไม่รู้ค่า c_1 และ c_2 ที่ปรากฏอยู่ในสมการของผลเฉลย โดยประมาณนั้น ดังเช่น

$$x(t) = 1 + c_1 \underbrace{t}_{w_1} + c_2 \underbrace{t^2}_{w_1} \tag{3.27}$$

แทน $W_1 = t$ และ $W_2 = t^2$ ลงในสมการ (4.22) จะได้

$$\int_0^1 R(t) t \, dt = 0 \quad ; \quad \frac{1}{2} + \frac{5}{6} c_1 + \frac{11}{12} c_2 = 0$$

$$\int_0^1 R(t) t^2 \, dt = 0 \quad ; \quad \frac{1}{3} + \frac{7}{12} c_1 + \frac{7}{10} c_2 = 0$$

และจาก 2 สมการนี้ ก่อให้เกิดค่าคงที่ คือ

$c_1 = -0.9143$
ดังนั้น

$c_2 = 0.2857$
 $x(t) = 1 - 0.9143 t + 0.2857 t^2$

(3.28)

อนึ่งด้วยเหตุผลหลายๆ ประการ เราจะใช้ระเบียบวิธีกาลอร์กินี้เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบต่างๆ ยกตัวอย่างเช่นเอลิเมนต์ในหนึ่งมิติ ลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณของเอลิเมนต์นี้ คือ

$$\phi = \underbrace{N_1}_{w_1} \phi_1 + \underbrace{N_2}_{w_2} \phi_2 \tag{3.29}$$

โดย ϕ_1 และ ϕ_2 คือตัวไม่รู้ค่าคล้ายกันกับ c_1 และ c_2 ในสมการ (3.27) ดังนั้น N_1 และ N_2 สามารถนำไปใช้เป็นฟังก์ชันน้ำหนัก w_1 และ w_2 เพื่อสร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ได้

(4) วิธีกำลังสองน้อยสุด (least squares)

การถ่วงน้ำหนักเศษตกค้างโดยวิธีกำลังสองน้อยสุด ทำโดยการยกกำลังสองของเศษตกค้าง จากนั้นอินทิเกรตตลอดทั้งโดเมน แล้วจึงทำการหาค่าต่ำสุด (minimization) ซึ่งสอดคล้องกับตัวไม่รู้ค่านั้นคือ

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \int_0^1 R^2(t) \, dt = 0 \tag{3.30}$$

เนื่องจากเรามีตัวไม่รู้ค่า 2 ตัว ดังนั้นจึงก่อให้เกิด 2 สมการคือ

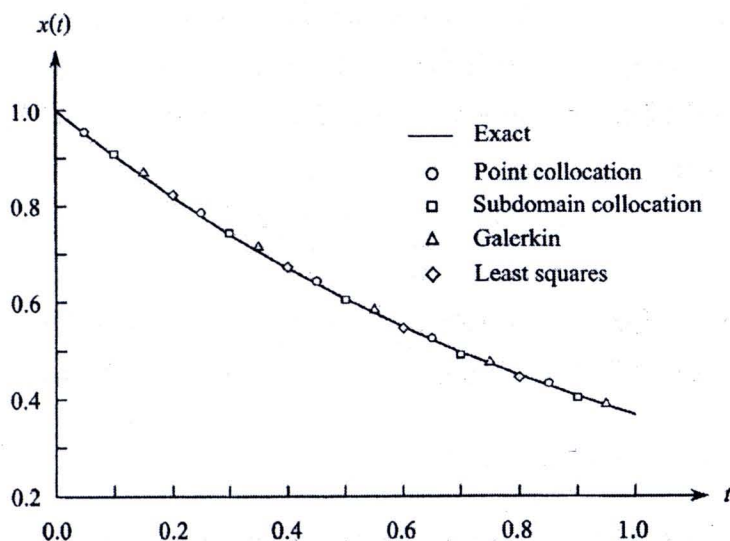
$$\frac{\partial}{\partial c_1} \int_0^1 R^2(t) dt = 0 \quad ; \quad \frac{3}{2} + \frac{7}{3}c_1 + \frac{9}{4}c_2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c_2} \int_0^1 R^2(t) dt = 0 \quad ; \quad \frac{4}{3} + \frac{9}{4}c_1 + \frac{38}{15}c_2 = 0$$

ซึ่งให้ค่าคงที่ คือ

$$\begin{aligned} c_1 &= -0.9427 \quad \text{และ} \quad c_2 = 0.3110 \\ \text{ดังนั้น} \quad x(t) &= 1 - 0.9427t + 0.3110t^2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

จากผลเฉลยโดยประมาณที่ได้จาก 4 วิธีการดังแสดงในสมการ (3.24), (3.25), (3.28), และ (3.31) เราพบว่าต่างมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำตรงดังแสดงในภาพที่ 3.10 มาก ซึ่งเมื่อพล็อตเปรียบเทียบกันจะพบว่ากราฟทั้ง 2 เส้น เกือบจะเห็นเป็นเส้นเดียวกันโดยมีความคลาดเคลื่อนไม่ถึง 1 เปอร์เซ็นต์

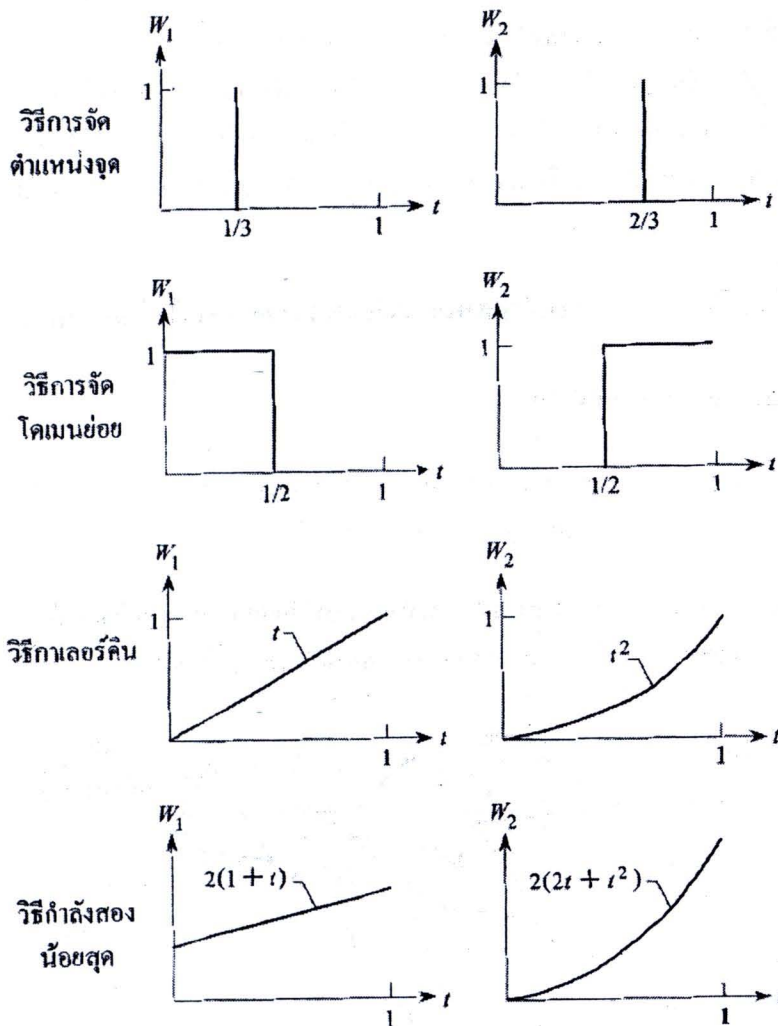


ภาพที่ 3.10 การเปรียบเทียบผลเฉลยแม่นยำตรงกับผลเฉลยโดยประมาณซึ่งเกิดจากระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเศษดกค้ำแบบต่าง ๆ [7]

อนึ่ง ทั้ง 4 กระเบียบวิธีนี้อาจเขียนให้อยู่ในรูปของสมการ

$$\int_0^1 R(t)W_i(t)dt = 0 \quad (3.32)$$

โดยฟังก์ชันน้ำหนัก W_i มีลักษณะต่างๆ กันดังแสดงในภาพที่ 3.11



ภาพที่ 3.11 ฟังก์ชันน้ำหนักที่ใช้ในระบบวิธีถ่วงน้ำหนักเสถียรแบบต่าง [7]

หากเราพิจารณาข้อดีข้อเสียในแต่ละระเบียบวิธีย่อยของระเบียบวิธีถ่วงน้ำหนักเสถียรแบบต่าง เราจะพบว่าวิธีกาลเลอรืคิน (วิธีที่ 3) มีข้อได้เปรียบมากที่สุด กล่าวคือ เราไม่จำเป็นต้องเลือกตำแหน่งดังเช่นที่ใช้ในวิธีการจัดตำแหน่งจุด (วิธีที่ 1) หรือวิธีการจัดโดเมนย่อย (วิธีที่ 2) อีกทั้งขั้นตอนการคำนวณที่ใช้ก็น้อยและสะดวกกว่าวิธีกำลังสองน้อยสุด (วิธีที่ 4) และที่สำคัญที่สุดซึ่งเราจะได้พบกันต่อไปก็คือ ไฟไนต์เอลิเมนต์เมทริกซ์ที่เกิดขึ้นจากการใช้วิธีกาลเลอรืคิน (วิธีที่ 3) นั้นปกติจะมีความสมมาตรซึ่งเป็นประโยชน์อย่างมากต่อการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์เพื่อใช้

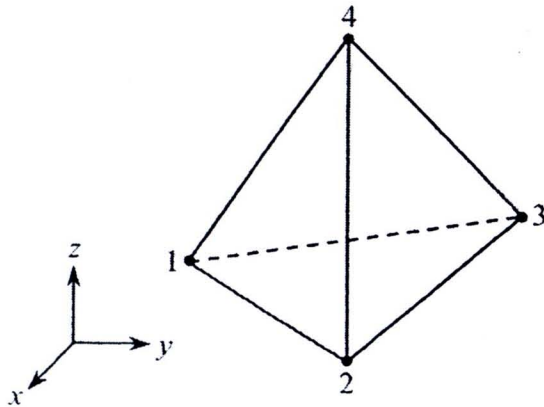
วิเคราะห์ปัญหามิติใหญ่ทำให้วิธีการจลน์นี้ได้รับความนิยมเพื่อใช้สร้างสมการไฟไนต์เอลิเมนต์

3.4.2 ฟังก์ชันประมาณการภายในเอลิเมนต์สามมิติ

เอลิเมนต์แบบสามมิติที่นิยมใช้กันมากในทางปฏิบัติมีอยู่สองแบบ คือ เอลิเมนต์ทรงสี่หน้า (*tetrahedral element*) และเอลิเมนต์ทรงหกหน้า (*hexahedral element*)

3.4.2.1 เอลิเมนต์ทรงสี่หน้า

การประดิษฐ์ฟังก์ชันประมาณการภายในเอลิเมนต์ของทรงสี่หน้าประกอบด้วยสี่จุดต่อ ดังแสดงในภาพที่ 3.12 มีหลักการคล้ายกับเอลิเมนต์สามเหลี่ยมในสองมิติ กล่าวคือ



ภาพที่ 3.12 เอลิเมนต์ทรงสี่หน้าในสามมิติ [7]

เริ่มจากการสมมุติการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูปแบบ

$$\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (3.33)$$

โดย $\alpha_i, i = 1, 2, 3, 4$ เป็นค่าคงตัวที่หาได้จากเงื่อนไขของค่าที่จุดต่อทั้งสี่ ซึ่งหลังจากหาค่าคงตัวทั้งสี่นี้ได้แล้ว เราสามารถเขียนลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณให้อยู่ในรูปของค่าที่จุดต่อได้ดังนี้

$$\phi = N_1 \phi_1 + N_2 \phi_2 + N_3 \phi_3 + N_4 \phi_4 = [N] \{\phi\} \quad (3.34)$$

โดย N_i คือ ฟังก์ชันประมาณการภายใน ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$N_i = \frac{1}{6V} (a_i + b_i x + c_i y + d_i) \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.35)$$

ในที่นี้

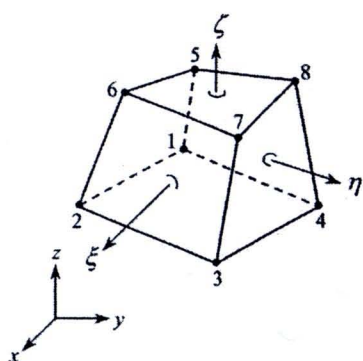
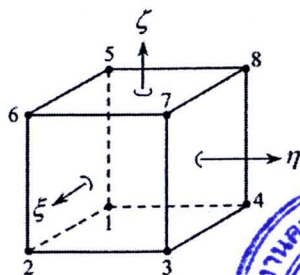
$$V = \text{ปริมาตรของเอลิเมนต์} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & c_1 &= - \begin{vmatrix} x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \\ x_4 & 1 & z_4 \end{vmatrix} \\ b_1 &= - \begin{vmatrix} 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \\ 1 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} & d_1 &= - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

และค่าคงที่ตัวอื่น ๆ $a_i, b_i, c_i, d_i, i = 2, 3, 4$ ก็มีลักษณะเช่นเดียวกับสมการ (3.37) ซึ่งสามารถเขียนขึ้นได้โดยวิธีการวนสลับเปลี่ยนตัวเลข (*cyclic permutation*)

3.4.2.2 เอลิเมนต์ทรงหกหน้า

การสร้างฟังก์ชันประมาณการภายในของเอลิเมนต์ทรงหกหน้าซึ่งประกอบด้วยจุดต่อ 8 จุดต่อ ดังในภาพที่ 3.13 (ก) ใช้หลักการเช่นเดียวกับเอลิเมนต์รูปสี่เหลี่ยมด้านไม่เท่ารูปร่างเอลิเมนต์ทรงหกหน้าซึ่งโดยปกติจะไม่มีด้านคู่ใดที่ขนานกันนั้นก่อให้เกิดความยากลำบากในการหาเอลิเมนต์เมตริกต่าง ๆ เพราะต้องอินทิเกรตบนปริมาตรทั้งหมดของเอลิเมนต์ ดังนั้นเพื่อลดความยากลำบากดังกล่าวเราจึงแปลงเอลิเมนต์ทรงหกหน้าซึ่งอยู่ในพิกัด $x - y - z$ ไปให้อยู่ในทรงลูกบาศก์ในพิกัดธรรมชาติ $\xi - \eta - \zeta$ ดังแสดงใน ภาพที่ 3.13

(ก) พิกัด $x - y - z$ (ข) พิกัด $\xi - \eta - \zeta$ 

ภาพที่ 3.13 การแปลงเอลิเมนต์ทั่วไปให้เป็นทรงลูกบาศก์ [7]

โดยขนาดลูกบาศก์ทั้งในแกน ξ, η และ ζ ต่างเริ่มจากระยะ -1 ไปจนถึง +1 โดยการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณในเอลิเมนต์นี้สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบได้ดังนี้

$$\phi = \sum_{i=1}^8 N_i \phi_i = [N]\{\phi\} \quad (3.38)$$

โดย $\phi_i = 1$ ถึง 8 คือ ค่าที่จุดต่อทั้งแปด และ $N_i = 1$ ถึง 8 คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ซึ่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัดธรรมชาติ ดังนี้

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) \end{aligned} \quad (3.39)$$

เอลิเมนต์ชนิดนี้เป็นไอโซพารามเมตริกซ์เอลิเมนต์เช่นกัน และฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ดังแสดงในสมการ (3.39)