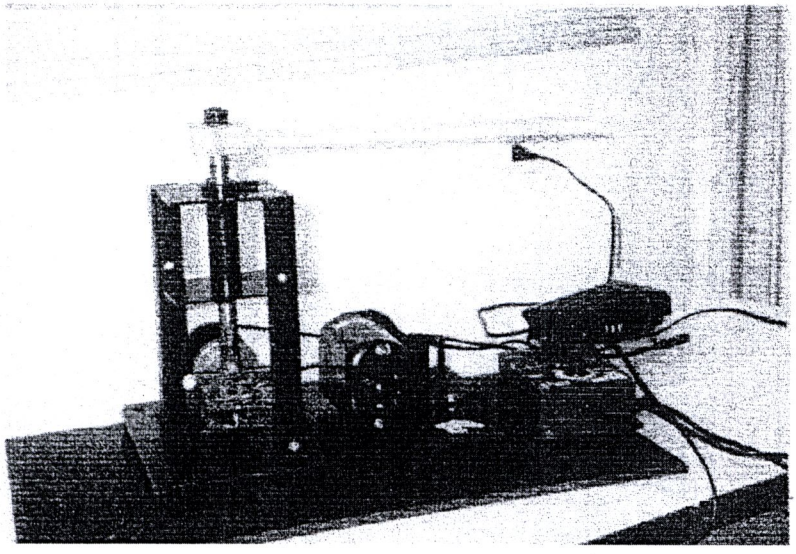
บทที่ 2
หลักการทำงานของเครื่องกำเนิดการสั่น

2.1 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบต่างๆ

เครื่องกำเนิดการสั่นที่นิยมใช้ในการทดสอบทางวิศวกรรมมีหลายแบบโดยแต่ละแบบมีข้อดีและข้อเสียต่างกันออกไป อย่างไรก็ตามสามารถที่จะแบ่งเครื่องกำเนิดการสั่นเป็นประเภทใหญ่ๆ ได้ 3 ประเภท ดังนี้คือ

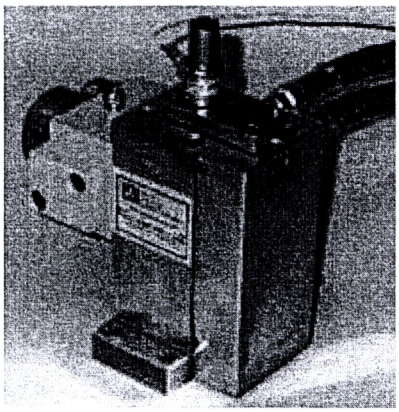
1. เครื่องกำเนิดการสั่นแบบกล (Mechanical Vibration Exciter) เครื่องกำเนิดการสั่นแบบนี้เป็นเครื่องกำเนิดการสั่นที่สร้างขึ้นเองได้อย่างง่ายคือจะใช้หลักการของลูกเบี้ยว หรือการหมุนเยื้องศูนย์เป็นหลัก เป็นเครื่องที่มีราคาถูก บำรุงรักษาง่าย สามารถกำหนดความถี่ของแรงกระทำได้โดยการปรับความเร็วรอบของมอเตอร์ ดังแสดงในรูปที่ 2.1 ส่วนข้อเสียก็คือ ชิ้นส่วนที่เคลื่อนที่จะมีมวลมาก เป็นการหมุนที่เยื้องศูนย์ ดังนั้นแรงเยื้องศูนย์จะมีค่ามากทำให้ฐานรองรับต้องแข็งแรง อีกทั้งจะทำให้ความถี่ธรรมชาติของเครื่องกำเนิดการสั่นแบบนี้มีค่าต่ำการทดลองจึงจำกัดในช่วงที่ความถี่ธรรมชาติของระบบที่ทดสอบมีค่าต่ำ และข้อเสียที่สำคัญของเครื่องกำเนิดการสั่นประเภทนี้คือสามารถที่จะกระตุ้นการสั่นแบบฮาร์โมนิกส์ได้เพียงอย่างเดียว ไม่สามารถที่จะให้การสั่นในรูปคลื่นประเภทอื่นได้



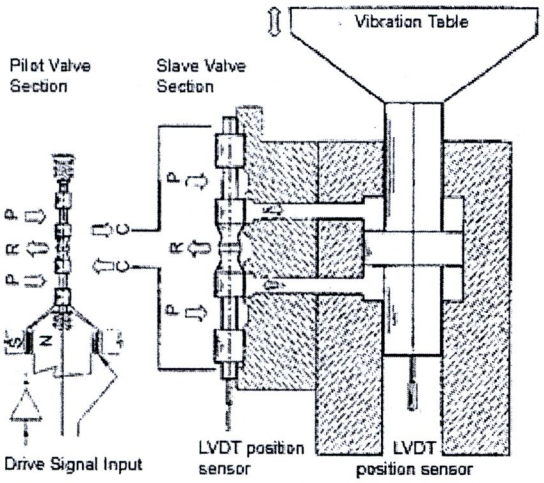
รูปที่ 2.1 เครื่องกำเนิดการสั่นเชิงกล

2 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบใช้ไฮดรอลิกส์ (Hydraulic Vibration Exciter)

เครื่องกำเนิดการสั่นแบบนี้ อาศัยการใช้ระบบไฮดรอลิกส์ควบคุมการสั่นโดยควบคุมการเปิด-ปิดน้ำมันเข้าสู่ระบบแล้วทำให้เกิดการสั่นขึ้นซึ่งจะสามารถทำงานได้ดีในกรณีที่ต้องใช้แรงในการสั่นที่มีขนาดสูง เช่นการที่จะทดสอบการสั่นกับโครงสร้างขนาดใหญ่ หรือ ยานยนต์ที่มีน้ำหนักมากๆ เพราะระบบเช่นนี้สามารถรองรับแรงที่มีขนาดสูงๆ ได้ อย่างไรก็ตามข้อเสียของระบบนี้ก็คือระบบจะควบคุมระยะการสั่นได้ยาก ดังนั้นจึงมักจะมีช่วงกว้างการสั่นที่สูงเพื่อหีควบคุมการทำงานได้ง่ายขึ้น ซึ่งผลที่ตามมาก็คือความที่ที่เครื่องกำเนิดการสั่นนี้กระตุ้นจะเป็นความถี่ที่ต่ำ ดังนั้นอุปกรณ์ที่จะใช้กับเครื่องกำเนิดการสั่นประเภทนี้จึงต้องเป็นอุปกรณ์ที่มีความถี่ธรรมชาติที่ไม่สูงมาก ข้อเสียอีกประการหนึ่งก็คือระบบนี้จะมีราคาสูงเพราะโครงสร้างของอุปกรณ์ต่างๆ จะต้องมีความคงทนสูงเพื่อรองรับแรงขนาดใหญ่ได้ เครื่องมือประเภทนี้แสดงในรูปที่ 2.2 และในรูปที่ 2.3 เป็นการแสดงแผนผังของเครื่องกำเนิดการสั่นประเภทนี้



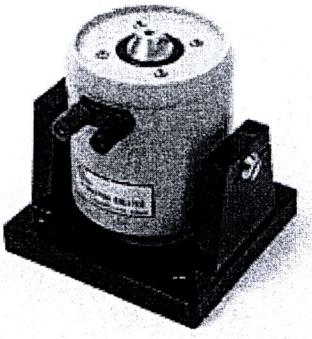
รูปที่ 2.2 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบไฮดรอลิกส์ขนาดเล็ก



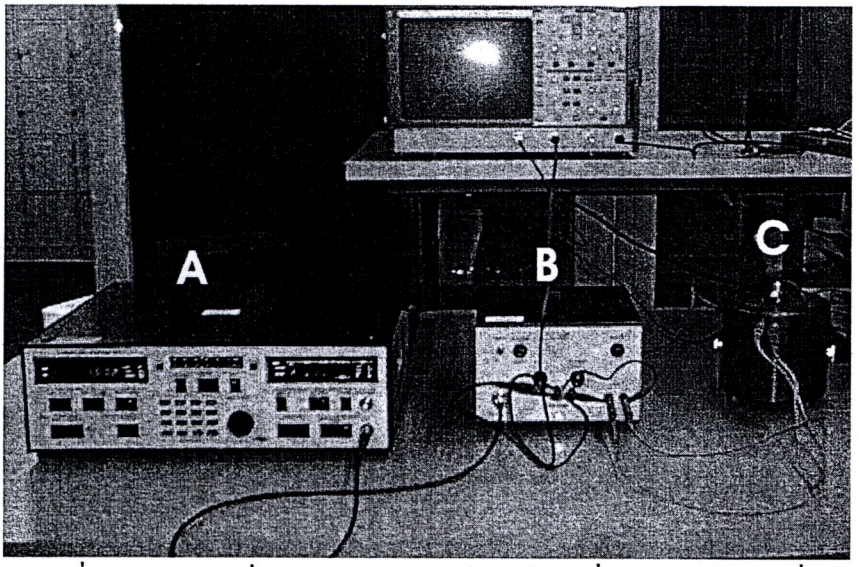
รูปที่ 2.3 แผนผังแสดงการทำงานของเครื่องกำเนิดการสั่นแบบไฮดรอลิกส์

3 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้า (Electrodynamics Vibration Exciter)

เครื่องกำเนิดการสั่นประเภทนี้ อาศัยหลักของสนามแม่เหล็ก โดยมีการป้อนไฟฟ้ากระแสสลับให้กับแกนที่เป็นแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งจะเมื่อได้รับไฟฟ้ากระแสสลับแม่เหล็กไฟฟ้าก็จะสลับขั้นเหนือ-ขั้วใต้ ตามความถี่ของกระแสสลับที่ได้ ซึ่งแม่เหล็กนี้ก็จะออกแรงผลักหรือฉุดกับแม่เหล็กถาวรที่สร้างอยู่ภายในเครื่อง ทำให้เกิดการสั่นตามความถี่ที่ได้รับจากกระแสไฟฟ้าสลับ เครื่องมือประเภทนี้จึงสามารถตอบสนองต่อความที่ที่กระตุ้นสูงๆ ได้ดี เพราะส่วนที่เคลื่อนที่มักจะมีน้ำหนักที่เบา ทำให้ค่าความถี่ธรรมชาติมีค่าสูงรองรับความถี่สูงได้ดี สามารถรองรับแรงที่กระทำได้ระดับหนึ่ง ข้อเสียของเครื่องมือประเภทนี้คือต้องมีระบบควบคุมที่ดี มีความยุ่งยากในการออกแบบระบบควบคุมทางไฟฟ้า และอุปกรณ์เหล่านี้มักมีราคาสูง ตัวอย่างของเครื่องมือประเภทนี้แสดงในรูปที่ 2.4 และสำหรับรูปที่ 2.5 เป็นการแสดงองค์ประกอบของเครื่องกำเนิดการสั่นพร้อมอุปกรณ์ควบคุมและเครื่องมือวัดความเร่ง



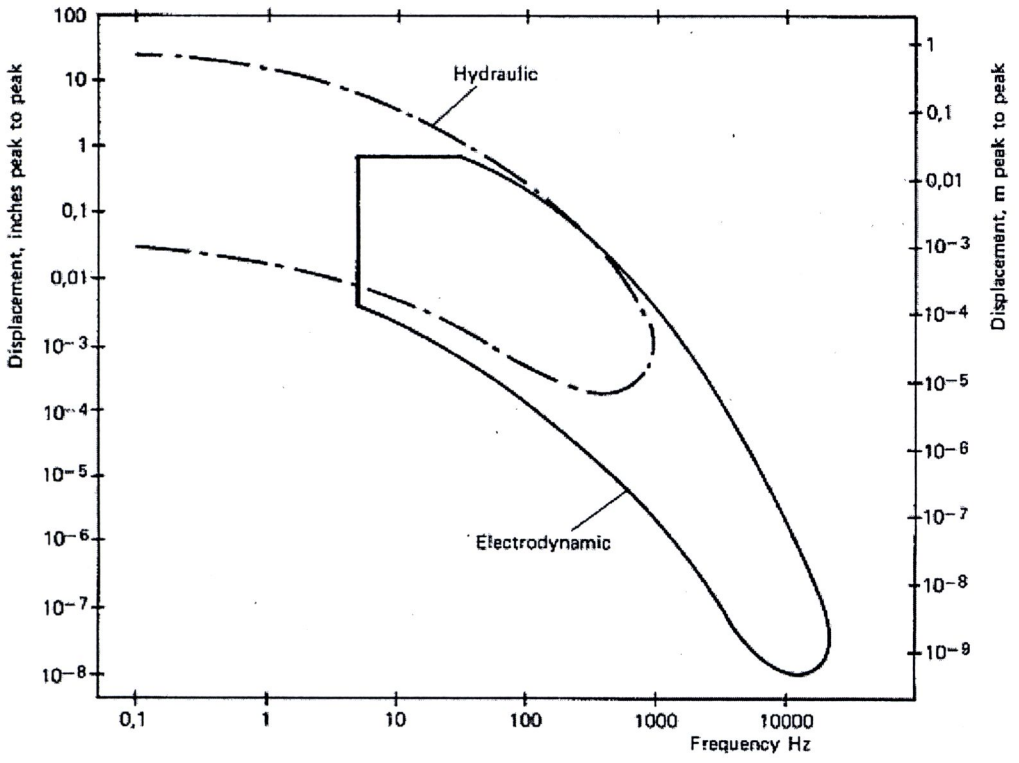
รูปที่ 2.4 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบสนามแม่เหล็ก ขนาดเล็ก



รูปที่ 2.5 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบสนามแม่เหล็ก พร้อมเครื่องควบคุมและเครื่องมือวัด

จากที่กล่าวมา ทำให้งานวิจัยนี้ เลือกที่จะลองสร้างต้นแบบของเครื่องกำเนิดการสั่นที่ใช้สนามแม่เหล็กไฟฟ้า เพื่อเป็นการทดสอบความเป็นไปได้ของการสร้างเครื่องมือประเภทนี้ที่มีราคาถูก ดังนั้นรายละเอียดการทำงานของเครื่องมือประเภทนี้จะกล่าวถึงอีกครั้งหนึ่ง

เครื่องกำเนิดการสั่นที่นิยมใช้ในวงการวิจัยทั่วไป จะเป็นแบบไฮดรอลิกส์ และแบบสนามแม่เหล็กไฟฟ้าตามเหตุผลที่ได้อธิบายมาก่อนหน้านี้แล้ว ข้อแตกต่างที่ชัดเจนของเครื่องทั้งสองคือ ขนาดของการเคลื่อนที่ และความถี่ที่เครื่องนี้สามารถที่จะทำงานได้ ดังแสดงในรูปที่ 2.6



รูปที่ 2.6 เปรียบเทียบการทำงานของเครื่องกำเนิดการสั่น Jens Trampe Broch, *Mechanical Vibration and Shock Measurements*, 2nd Ed., Bruel & Kjaer, 1984.

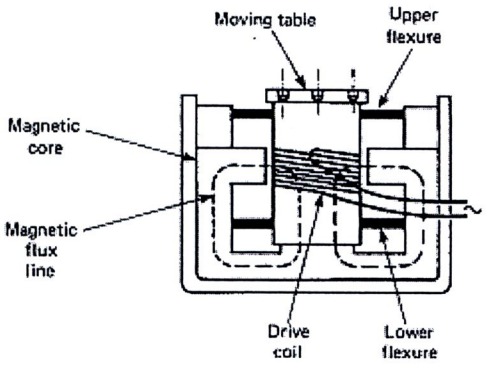
2.2 เครื่องกำเนิดการสั่นแบบสนามแม่เหล็ก

ตามที่ได้กล่าวมาก่อนหน้านี้แล้ว ว่าเครื่องกำเนิดการสั่นแบบสนามแม่เหล็กเป็นเครื่องกำเนิดการสั่นที่เหมาะสมที่ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีควรจะนำมาทดลองสร้างเครื่องต้นแบบขึ้น ทั้งนี้เพราะเป็นเครื่องที่น่าจะมีราคาไม่แพงในการสร้าง และอุปกรณ์ประกอบต่างๆ ที่จำเป็นด้วยส่วนใหญ่ ก็มีใช้ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารีอยู่ก่อนแล้ว ดังนั้นจึงมีความเป็นไปได้สูงที่จะประสบความสำเร็จในการสร้างเครื่องมือนี้ขึ้น

สำหรับองค์ประกอบหลักของเครื่องกำเนิดการสั่นแบบนี้ จะประกอบด้วย

- ตัวเรือน และแผ่นยางยืดหยุ่นที่ทำหน้าที่ป้องกันฝุ่น (Upper Flexure)
- แม่เหล็กถาวร (Magnetic Core)
- แกนกลางที่ทำด้วยโลหะพันรอบด้วยลวดทองแดง เพื่อสร้างสนามแม่เหล็กไฟฟ้าขึ้น (Drive Coil)
- แผ่นยืดหยุ่นด้านล่าง (Lower flexure)
- พื้นจัดชิ้นงาน (Moving Table) ซึ่งจะยึดติดกับแกนกลาง

ทั้งหมดนี้แสดงในรูปที่ 2.7



รูปที่ 2.7 ส่วนประกอบของเครื่องกำเนิดการสั่นแบบสนามแม่เหล็ก

สำหรับหลักการทำงานเบื้องต้น ของเครื่องมือนี้ ก็คือในเบื้องต้น แม่เหล็กถาวร จะดูดแกนกลางที่เป็นโลหะให้ติดอยู่กับแม่เหล็ก จากนั้นเมื่อมีการปล่อยไฟฟ้ากระแสสลับเข้าสู่ขดลวดไฟฟ้า จะทำให้แกนกลางนั้นมีคุณสมบัติเป็นแม่เหล็กไฟฟ้าขึ้น และเนื่องจากกระแสไฟฟ้าสลับมีการสลับขั้วอยู่ตลอดเวลา ทำให้แกนกลางแม่เหล็กเปลี่ยนคุณสมบัติเป็นขั้วเหนือและขั้วใต้ สลับกันด้วยความถี่ของกระแสไฟฟ้าที่ให้ ดังนั้นการผลัดหรือดูดกันของแม่เหล็กถาวร และแม่เหล็กไฟฟ้าก็จะเกิดขึ้นสลับกันไป ทำให้แกนกลางพร้อมกับพื้นจับชิ้นงานขยับหรือสั่นขึ้นลง ด้วยความถี่เดียวกับความถี่ของกระแสไฟฟ้าที่ให้ สำหรับขนาดของการขจัดก็จะขึ้นอยู่กับแรงดูดหรือผลักระหว่างแม่เหล็กทั้งสอง ซึ่งจะควบคุมได้จากความต่างศักย์ของกระแสไฟที่ให้กับขดลวด ในขณะที่แผ่นยางยืดหยุ่นทั้งสองจะทำหน้าที่เหมือนกับสปริงจึงทำให้การตอบสนองของแกนกลางเหมือนกับระบบการสั่นที่มีลำดับขั้นความเป็นอิสระเท่ากับหนึ่งภายใต้แรงกระทำ ซึ่งแรงที่ได้ก็จะเป็นแรงดูดและผลักกันของแม่เหล็กไฟฟ้า

ในทางปฏิบัติการประกอบแกนกลางซึ่งทำหน้าที่เป็น Armature จะสามารถกระทำได้ 2 แบบ ตามความต้องการการตอบสนองการสั่น การประกอบแกนกลางทั้งสองแบบคือ

1. Inductive Armature Assembly
2. Conductive Armature Assembly

สำหรับที่ได้อธิบายผ่านมานั้นเป็นการใช้แกนกลางแบบ Conductive Armature Assembly ซึ่งเป็นแบบที่เหมาะสมกับเครื่องกำเนิดการสั่นขนาดเล็ก เพราะกำลังที่มาจากกระแสไฟฟ้าจะเข้าสู่แกนการเคลื่อนที่โดยตรง ทำให้บางครั้งเรียกแกนกลางแบบนี้ว่า Direct Coupled

สำหรับการคำนวณหาขนาดแรงที่ได้ในการเคลื่อนที่จะสามารถคำนวณได้จากสมการที่ 2.1

$$f = (BL)i \qquad (2.1)$$

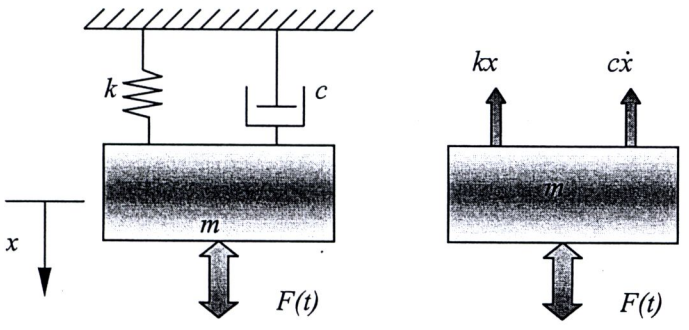
เมื่อ f คือแรงกระทำที่เกิดขึ้นกับแกนกลาง มีหน่วยเป็น N

B เป็น Magnetic Flux Density มีหน่วยเป็น Wb/m^2

L เป็นความยาวของ Conductor มีหน่วยเป็น m

i เป็นกระแสที่เข้าสู่แกนกลาง มีหน่วยเป็น A

เมื่อทราบขนาดของแรงกระทำ และความถี่ของแรงที่กระทำจะเท่ากับความถี่ของกระแสไฟฟ้าที่ป้อนให้ขดลวด ทำให้ทราบถึงแรงพลวัตรที่กระทำต่อแกนกลางที่เกิดการเคลื่อนที่ ซึ่งเราสามารถที่จะหาการตอบสนองของแกนกลางภายใต้แรงกระทำได้จากการใช้แบบจำลองการสั่นของระบบหนึ่งลำดับขั้นการเป็นอิสระ ภายใต้แรงกระทำแบบฮาร์โมนิกส์ (Harmonics force vibration of one degree of freedom system) ซึ่งจำลองระบบได้ตามรูปที่ 2.8



รูปที่ 2.8 ระบบหนึ่งลำดับขั้นการเป็นอิสระ ภายใต้แรงกระทำแบบฮาร์โมนิกส์

ผลตอบสนองของระบบที่มีความหน่วงแบบหนืด ซึ่งจากสมการการเคลื่อนที่ (2.2) และการกำหนดฟังก์ชันของแรงเป็น $F = F_0 \cos \omega t$ เราจะได้สมการการเคลื่อนที่เป็น

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \qquad (2.2)$$

ผลเฉลยของสมการนี้จะมีสองส่วนคือ ส่วนผลเฉลยเอกพันธ์ และส่วนปริพันธ์เฉพาะ และเนื่องจากการสั่นแบบอิสระแบบมีความหน่วงจะหายไปเมื่อระยะเวลาผ่านไปพอสมควร ดังนั้นจึง

จะไม่ให้ความสนใจกับการสั่นชั่วครู่ในส่วนนี้ จากนั้นหากพิจารณาผลเฉลยในส่วนของปริพันธ์เฉพาะซึ่งทำให้เกิดการสั่นอย่างคงตัวของระบบ โดยจะมองหาผลเฉลยตามลักษณะของฟังก์ชันของแรงที่กระทำ ดังนั้นในที่นี้เราจะมองหาผลเฉลยในรูป

$$x_p(t) = X\cos(\omega t - \phi) \tag{2.3}$$

เมื่อ X และ ϕ เป็นค่าคงที่ ซึ่งหมายความว่าเราได้มองหาผลตอบสนองของระบบต่อแรงกระทำนี้ด้วยการตอบสนองที่สอดคล้องไปกับแรงกระทำ แต่อาจมีมุมเฟสเปลี่ยนแปลงไปจากแรงที่กระทำบ้าง ซึ่งจากการมองหาผลเฉลยตามสมการ (2.2) นี้ทำให้ได้ค่าความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่เป็น

$$\dot{x} = -X\omega\sin(\omega t - \phi)$$

และ $$\ddot{x} = -X\omega^2\cos(\omega t - \phi)$$

ตามลำดับ จากนั้นแทนค่าลงในสมการการเคลื่อนที่ (2.4) จะได้

$$m\left[-X\omega^2\cos(\omega t - \phi)\right] + c\left[-X\omega\sin(\omega t - \phi)\right] + kX\cos(\omega t - \phi) = F_0\cos\omega t \tag{2.4}$$

และจากเอกลักษณ์ของตรีโกณมิติ

$$\cos(\omega t - \phi) = \cos\omega t\cos\phi + \sin\omega t\sin\phi$$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi$$

ดังนั้นจะสามารถเขียนสมการ (2.4) ได้ในรูป

$$-mX\omega^2\cos\omega t\cos\phi - mX\omega^2\sin\omega t\sin\phi - cX\omega\sin\omega t\cos\phi + cX\omega\cos\omega t\sin\phi$$
$$+kX\cos\omega t\cos\phi + kX\sin\omega t\sin\phi = F_0\cos\omega t$$

จากนั้นเราเทียบสัมประสิทธิ์ของเทอม $\cos\omega t$ และเทอม $\sin\omega t$ จะได้

เทอม $\cos\omega t$: $$-mX\omega^2\cos\phi + cX\omega\sin\phi + kX\cos\phi = F_0 \tag{2.5}$$

เทอม $\sin\omega t$: $$-mX\omega^2\sin\phi - cX\omega\cos\phi + kX\sin\phi = 0 \tag{2.6}$$

จากสมการ (2.6) นี้เราได้

$$\left(k - m\omega^2\right)\sin\phi - c\omega\cos\phi = 0$$

$$\tan\phi = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \tag{2.7}$$

จากบทที่สองเราได้นิยามอัตราส่วนความหน่วง ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$c = c_0\zeta = 2m\omega_n\zeta \tag{2.8}$$

และจากความถี่ธรรมชาติ

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} \tag{2.9}$$

จากสมการ (2.8) และ (2.9) เราสามารถเขียนสมการ (2.7) ได้ในรูป

$$\tan\phi = \frac{c\omega/m}{\frac{k}{m}-\omega^2} = \frac{2\omega_n\omega\zeta}{\omega_n^2-\omega^2}$$

หรือ
$$\tan\phi = \frac{2\frac{\omega}{\omega_n}\zeta}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \qquad (2.10)$$

จากอัตราส่วนความถี่ $r = \omega/\omega_n$ ทำให้สมการ (3.10) เขียนได้ในรูป

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2r\zeta}{1-r^2}\right] \qquad (2.11)$$

ส่วนค่าขนาดของการสั่น X เราจะสามารถหาได้จากการพิจารณาสมการ (2.5) และ (2.6) คือ

$$X\left[(k-m\omega^2)\cos\phi + c\omega\sin\phi\right] = F_0$$
$$X\left[(k-m\omega^2)\sin\phi - c\omega\cos\phi\right] = 0$$

จากนั้นยกกำลัง 2 สมการทั้งสอง จะได้

$$X^2\left[(k-m\omega^2)^2\cos^2\phi + (c\omega)^2\sin^2\phi + 2c\omega(k-m\omega^2)^2\cos\phi\sin\phi\right] = F_0^2 \qquad (2.12a)$$
$$X^2\left[(k-m\omega^2)^2\sin^2\phi + (c\omega)^2\cos^2\phi - 2c\omega(k-m\omega^2)^2\cos\phi\sin\phi\right] = 0 \qquad (2.12b)$$

และเมื่อนำสมการ (2.12) ทั้งสองมารวมกัน เราจะได้

$$X^2\left[(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2\right] = F_0^2$$

หรือ
$$X = \frac{F_0}{\left\{k^2\left(1-\frac{m}{k}\omega^2\right)^2 + (c\omega)^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \qquad (2.13)$$

จากคุณสมบัติ $c = c_c\zeta = 2m\omega_n\zeta$, $\omega_n^2 = \frac{k}{m}$ และ $r = \omega/\omega_n$ เราสามารถจัดรูปสมการ (2.13) ให้อยู่ในรูปอื่นได้ดังนี้

$$X = \frac{F_0}{\left\{k^2\left(1-\frac{m}{k}\omega^2\right)^2 + (2m\omega_n\zeta\omega)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$X = \frac{F_0/k_0}{\left[\left(1-\frac{m}{k}\omega^2\right)^2 + \left(2\frac{m}{k}\omega_n\zeta\omega\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$X = \frac{F_0 / k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{2.14}$$

และจากการขจัดสถิต $\delta_{st} = \frac{F_0}{k}$ ทำให้เราจัดสมการ (2.14) ได้ในรูป

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{2.15}$$

จากนั้นนิยาม *อัตราส่วนขนาด* (Amplitude Ratio หรือ Magnification Factor หรือ Normalized Magnitude) เป็น

$$M = \frac{X}{\delta_{st}}$$

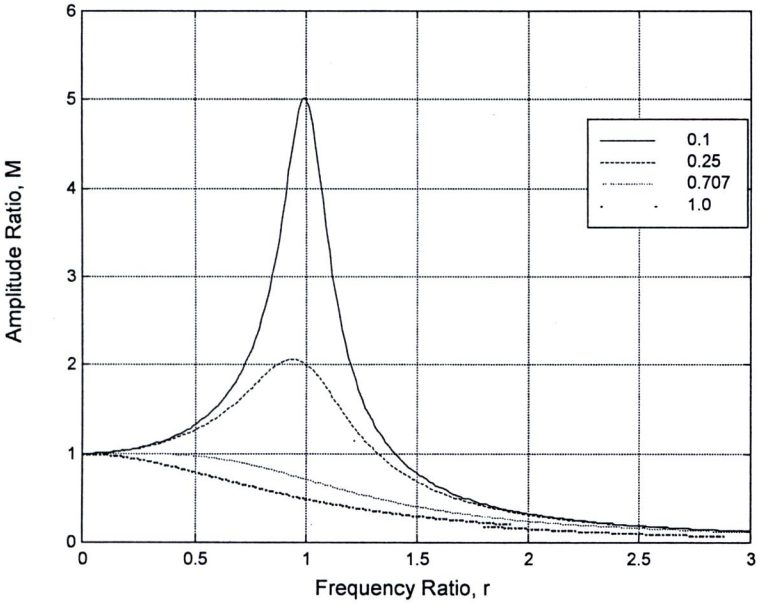
ซึ่งอัตราส่วนขนาดการสั่นนี้เป็นการเปรียบเทียบการตอบสนองเมื่อแรงมีขนาดเท่ากันแต่แรงหนึ่งเป็นแรงพลวัตในขณะที่อีกแรงหนึ่งเป็นแรงสถิต ซึ่งจากสมการ (2.15) จะได้

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \tag{2.16}$$

และ

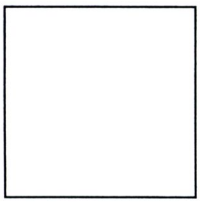
$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta r}{1-r^2}\right] \tag{2.17}$$

รูปที่ 2.9 ได้แสดงถึงผลตอบสนองของระบบในรูปไม่มีมิติตามสมการ (2.16) ตามค่าอัตราส่วนความถี่ที่เปลี่ยนไป โดยกราฟแต่ละเส้นแสดงถึงค่าอัตราส่วนความหน่วงต่างๆกัน



รูปที่ 2.9 กราฟแสดงผลการตอบสนองของขนาดการสั่นเทียบกับค่าความถี่ของแรงกระทำ

สำหรับสมการแสดงขนาดของการสั่นตามรูปที่ 2.9 นี้เราจะสามารถพิจารณาการตอบสนองของระบบต่อส่วนต่างๆ ที่สำคัญได้ดังต่อไปนี้

1. ระบบที่ไม่มีความหน่วง ($\zeta = 0$) เมื่อ $r \to 1$ ตามสมการ (2.16) จะได้ $M \to \infty$ ซึ่งระบบจะเข้าสู่การสั่นพ้อง ตามที่ได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมา
2. การที่เรามีความหน่วงในระบบการสั่น ไม่ว่าจะมากหรือน้อยเพียงใดก็ตาม ($\zeta > 0$) เราจะสามารถที่จะลดขนาดของการตอบสนอง (M) ได้ทุกความถี่ของแรงกระทำ และตำแหน่งที่เกิดการสั่นสูงสุด หรือค่า $M_{\max}$ จะเกิดขึ้นที่ $r < 1$ สำหรับทุกค่าของ ζ
3. ทุกค่าของอัตราส่วนความหน่วง ζ เมื่ออัตราส่วนความถี่มีค่าสูง ($r \to \infty$) การตอบสนองของระบบจะมีค่าน้อย ($M \to 0$)
4. ที่ค่าอัตราส่วนความถี่ r ที่กำหนดให้แน่นอนค่าหนึ่ง การเพิ่มความหน่วงหรือเพิ่มค่า  จะทำให้ขนาดของการตอบสนอง M มีค่าลดลง
5. สำหรับกรณีที่แรงกระทำเป็นแรงกระทำสถิต ($\omega = 0$) นั่นคือเราได้ $r = 0$ จะได้ว่าขนาดของผลการตอบสนอง $M = \dfrac{x}{\delta_{st}} = 1$
6. ในกรณีที่ $r = 1$ เราจะได้ $M = \dfrac{1}{2\zeta}$
7. การกำหนดค่า ζ มาให้ ค่า r ที่จะทำให้เกิดการสั่นมากที่สุดหรือได้ค่า $M_{\max}$ เราจะสามารถหาได้จากการพิจารณา ดังต่อไปนี้

$$M = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} = \left\{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.18)$$

เนื่องจาก $M = M(r)$ ถ้าเรากำหนดค่าที่แน่นอนของ ζ มาให้ ดังนั้นเราสามารถหาค่าสูงสุดของฟังก์ชันนี้ได้ ด้วยการหาอนุพันธ์เทียบกับ r แล้วให้มีค่าเท่ากับศูนย์ โดยเราได้อนุพันธ์เป็น

$$\frac{dM}{dr} = -\frac{1}{2}\left\{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2\right\}^{-\frac{3}{2}}\left[2(1-r^2)(-2r) + 2(2\zeta r)(2\zeta)\right] \qquad (2.19)$$

ฟังก์ชันนี้จะมีค่าสูงสุดเมื่อ $\dfrac{dM}{dr} = 0$ ดังนั้น

$$4r(1-r^2)+8\zeta^2 r=0$$
$$\left[4\left(1-r^2\right)+8\zeta^2\right]r=0 \qquad (2.20)$$

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

ซึ่งเราสามารถพิจารณาได้ดังนี้คือ

กรณีที่ 1 คือพิจารณาว่า $r=0$ ซึ่งกรณีนี้จะเป็นกรณีของแรงสถิตที่กระทำกับระบบ และเราจะไม่พิจารณาในที่นี้

กรณีที่ 2 คือพิจารณาว่า $4(1-r^2)+8\zeta^2=0$ ซึ่งจะทำให้ได้

$$r=\sqrt{1-2\zeta^2} \qquad (2.21)$$

นั่นคือที่ $r=\sqrt{1-2\zeta^2}$ จะได้ค่า M มากที่สุด อย่างไรก็ตามเนื่องจาก r ต้องเป็นเลขจำนวนจริงเท่านั้น ดังนั้นสมการนี้จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อค่าในรากที่สองต้องมีค่าเป็นบวก นั่นคือ

$$1-2\zeta^2>0 \qquad (2.22)$$

หรือเราได้ว่า

$$\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad (2.23)$$

นั่นคือ ถ้าหาก $0<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ เราจะได้อนุพันธ์ $\frac{dM}{dr}=0$ นั่นคือได้ค่า M สูงสุดเมื่อค่าอัตราส่วนความถี่ $r=\sqrt{1-2\zeta^2}$ และหากเราแทนค่า $r=\sqrt{1-2\zeta^2}$ นี้ลงไปในสมการ (2.18) เราจะได้ค่า M ที่เป็นค่าสูงสุด ซึ่งจะมีค่าเป็น

$$M_{\max}=\frac{1}{\sqrt{(1-(1-2\zeta^2))^2+4\zeta^2(1-2\zeta^2)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\zeta^4+4\zeta^2-8\zeta^4}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{4\zeta^2-4\zeta^4}}$$

นั่นคืออัตราส่วนขนาด M จะมีค่าสูงสุดเท่ากับ

$$M_{\max}=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad (2.24)$$

และถ้าเรากำหนดค่าอัตราส่วนความหน่วงของระบบมาให้ในช่วง $1<\zeta<\frac{1}{\sqrt{2}}$ เราจะได้ว่าการสั่นของระบบจะมีค่าสูงสุดเมื่อค่าอัตราส่วนความถี่มีค่าเป็น

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
ห้องสมุดงานวิจัย
วันที่ 30 ต.ค. 2555
เลขทะเบียน 250445
เลขเรียกหนังสือ

$$r = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

ซึ่งเราจะพบว่าที่อัตราส่วนความหน่วงในช่วง $1 < \zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ นี้ การเกิดการสั่นสูงสุดจะเกิดขึ้นก่อนที่จะเป็นการสั่นพ้องเสมอ

สำหรับในกรณีที่ค่าอัตราส่วนความหน่วงมีค่ามากกว่า $\frac{1}{\sqrt{2}}$ เราจะต้องพิจารณา สมการ (2.19) ใหม่อีกครั้งหนึ่ง นั่นคือจากสมการ (2.19)

$$\frac{dM}{dr} = \frac{-[4(1-r^2)+8\zeta^2]r}{2[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{3/2}}$$

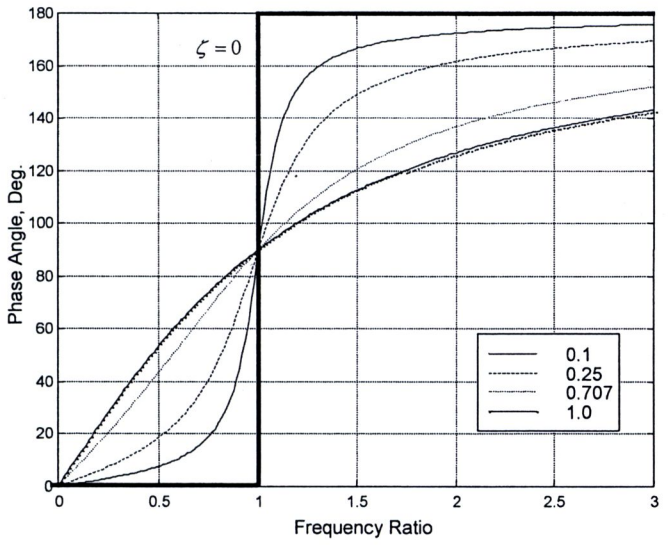
หรือ

$$\frac{dM}{dr} = \frac{-2[(1-r^2)+2\zeta^2]r}{[(1-r^2)^2+(2\zeta r)^2]^{3/2}}$$

จากสมการนี้เมื่อเราพิจารณาว่า $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ แล้วเราจะพบว่า $\frac{dM}{dr} < 0$ สำหรับทุกค่าของ r นั่นหมายความว่ากราฟของ M เทียบต่อ r นี้จะมีความชันเป็นลบเสมอหาก $\zeta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ ซึ่งจะทำให้ขนาดของ M นี้มีขนาดลดลดเพียงอย่างเดียว (Monotonic Decrease)

จึงสามารถสรุปได้ว่า ถ้า $\zeta > \frac{1}{2}$ และ $r > 0$ แล้วขนาด M จะลดลงเรื่อยๆ ตามค่า r ซึ่งก็คือผลการตอบสนองภายใต้แรงพลวัตจะมีค่าน้อยกว่าผลตอบสนองภายใต้แรงสถิตเสมอไม่ว่าแรงพลวัตที่กระทำนั้นจะมีความถี่เท่าใดก็ตาม จนกระทั่งขนาดของ M มีค่าเป็นศูนย์เมื่ออัตราส่วนความถี่ r มีค่ามากๆ

การเปลี่ยนแปลงมุมเฟสเราจะได้กราฟการเปลี่ยนแปลงตามรูปที่ 2.10 ซึ่งได้แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงเฟสตามสมการ (2.17) ที่ค่าอัตราส่วนความหน่วงต่างๆ



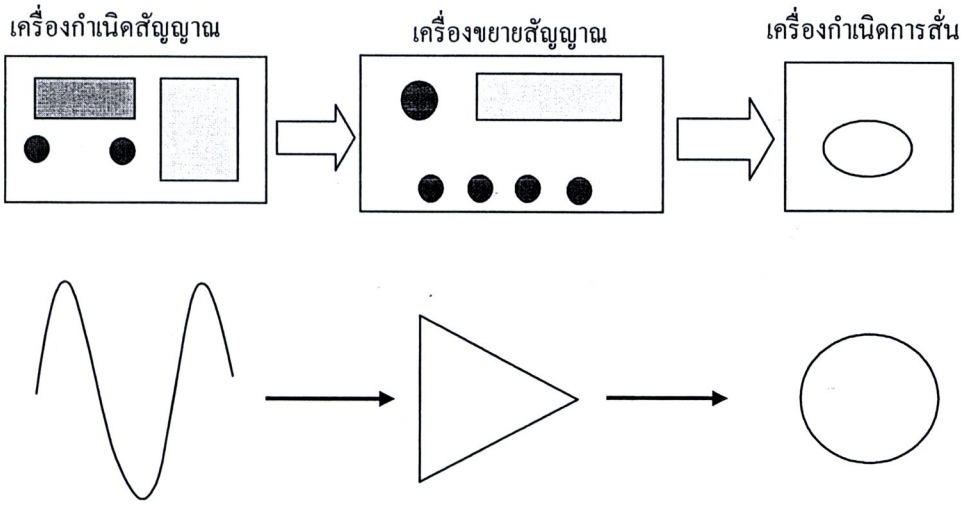
รูปที่ 2.10 กราฟแสดงผลการตอบสนองของมุมเฟสเทียบกับค่าความถี่ของแรงกระทำ

ซึ่งจากรูปที่ 2.10 นี้เราพบว่า

1. เมื่อ $\zeta = 0$ จะได้ว่ามุมเฟสเท่ากับศูนย์ เมื่อ $0 < r < 1$ และมุมเฟสจะท่ากับ $180°$ เมื่อ $r > 1$ นั่นคือ เมื่อ $\zeta = 0$ การสั่นจะอยู่ในเฟสเดียวกับแรงกระทำ เมื่อ $r < 1$ และจะมีเฟสเป็นตรงกันข้ามกันเมื่อ $r > 1$
2. เมื่อ $\zeta > 0$ และ $0 < r < 1$ จะแรงกระทำและการตอบสนองจะมีเฟสแตกต่างกันในช่วง $0 < \phi < 90°$ ดังนั้นการตอบสนองจะตามแรงกระทำอยู่ในช่วงนี้
3. เมื่อ $\zeta > 0$ และ $r > 1$ จะเกิดเฟสแตกต่างกันอยู่ในช่วง $90° < \phi < 180°$ ดังนั้นช่วงนี้การตอบสนองจะนำแรงกระทำ
4. เมื่อ $\zeta > 0$ และ $r = 1$ จะได้มุมเฟส $\phi = 90°$ สำหรับทุกค่าของอัตราส่วนความหน่วง
5. เมื่อ $\zeta > 0$ และ $r \to \infty$ จะพบว่า $\phi \to 180°$ ดังนั้นเมื่อ $r \to \infty$ ทั้งสองจะมีเฟสตรงกันข้าม

2.3 ระบบควบคุมเครื่องกำเนิดการสั่นแบบสนามแม่เหล็ก

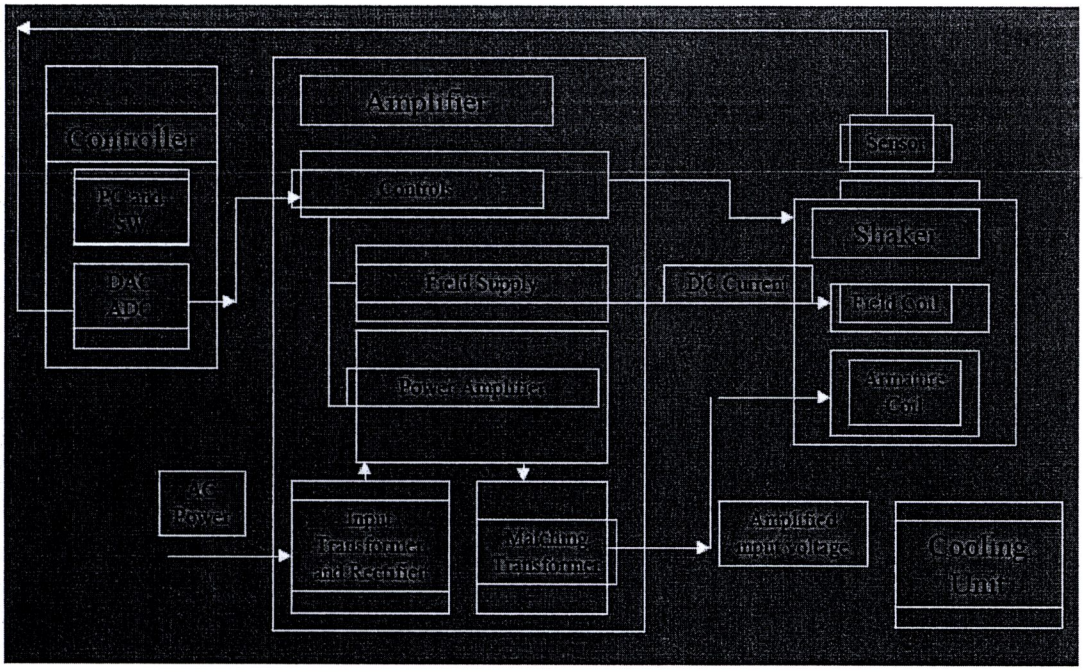
สำหรับระบบควบคุมที่ใช้กับเครื่องกำเนิดการสั่น จะมีแผนภาพแสดงการทำงานโดยคร่าวๆ ตามรูปที่ 2.11



รูปที่ 2.11 ส่วนประกอบของระบบควบคุมที่ใช้กับเครื่องกำเนิดการสั่น

จากรูปที่ 2.11 จะเห็นว่าในลำดับแรก จะเป็นการสร้างสัญญาณที่ต้องการจากเครื่องกำเนิดสัญญาณ (Signal Generator) จากนั้นสัญญาณดังกล่าวจะถูกนำไปขยายให้มีกำลังสูงขึ้น เนื่องจากสัญญาณที่ได้จากเครื่องกำเนิดสัญญาณด้วยทั่วไปจะมีกำลังต่ำไม่สามารถที่จะนำไปใช้ในการขับเคลื่อนให้เกิดการเคลื่อนที่ได้ ซึ่งที่เครื่องขยายสัญญาณนี้เราจะสามารถปรับขนาดของกระแสไฟที่จะส่งเข้าเครื่องกำเนิดการสั่นได้ เพื่อควบคุมช่วงกว้างของการสั่นได้นั่นเอง จากนั้นกระแสไฟที่มีค่ากระแสหรือความต่างศักย์ที่สูงและมีความถี่เดียวกับเครื่องกำเนิดสัญญาณ ก็จะเข้าสู่เครื่องกำเนิดการสั่นทำให้เกิดการสั่นในเครื่องต่อไป

ในทางปฏิบัติวงจรการควบคุมอาจมีความยุ่งยากมากกว่านี้ เพราะจะมีวงจรไฟฟ้าอื่นๆ เข้ามาเกี่ยวข้อง ซึ่งแผนภาพแสดงวงจรการควบคุมแสดงในรูปที่ 2.12



รูปที่ 2.12 แผนผังระบบควบคุมการทำงานของเครื่องกำเนิดการสั่น

ในระบบที่ใช้กันในทางปฏิบัติ วงจรและเครื่องมือเหล่านี้อาจถูกนำไปสร้างรวมกันเป็นเครื่องมือ 2 ถึง 3 ชิ้น เพื่อการสะดวกในการใช้งานและการควบคุม ซึ่งทั้งหมดก็ขึ้นอยู่กับลักษณะของงานที่ใช้ และสภาพแวดล้อมของงานด้วย

ข้อที่ควรคำนึงถึงระบบขยายสัญญาณนั้นมีอยู่หลายประการด้วยกัน เพราะการที่จะควบคุมการทำงานของเครื่องกำเนิดการสั่นให้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ เราจะต้องได้เครื่องมือควบคุมที่มีประสิทธิภาพและเหมาะสมกับงานหรือเครื่องมือที่จะใช้ อุปกรณ์ควบคุมเครื่องกำเนิดการสั่นที่สำคัญที่สุด ก็คือเครื่องขยายสัญญาณ ข้อควรคำนึงถึงของเครื่องขายสัญญาณที่จะใช้ร่วมกับเครื่องกำเนิดการสั่นมีดังนี้

1. ลักษณะของ Armature เป็นชนิด Inductive หรือ Conductive
2. ความต้องการกระแสและแรงเคลื่อนไฟฟ้าของเครื่องกำเนิดการสั่นว่ามีค่ามากน้อยเพียงใด
3. ความต้องการกระแสเพื่อรักษาสภาพสนามแม่เหล็ก
4. จะเป็นเครื่องขยายสัญญาณแบบ IGBT หรือ MOSFET
5. ควรจะมี Interlock หรือไม่

และประเด็นอื่นๆ ซึ่งล้วนมีผลต่อการจะเลือกใช้ หรือ สร้างเครื่องขยายสัญญาณที่เหมาะสมกับเครื่องกำเนิดการสั่นทั้งสิ้น