



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมการบินและอวกาศ)

ปริญญา

วิศวกรรมการบินและอวกาศ

วิศวกรรมการบินและอวกาศ

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง ศึกษาระบบนำวิถีสำหรับจรวดหลายลำกล้อง

Guidance Studies for Multiple Launch Rocket System

นามผู้วิจัย นางสาวรัชณี ยืนยาว

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นาวาอากาศเอกพาร์ทธณ สงวน โภคชัย, Ph.D.)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(รองศาสตราจารย์ นาวาอากาศตรีโอรุทศิลป์ นิลบุล, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา

(รองศาสตราจารย์सानติ วิริยะวิทย์, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

()

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

ศึกษาระบบนำวิถีสำหรับจรวดหลายลำกล้อง

Guidance Studies for Multiple Launch Rocket System

โดย

นางสาวรัชณี ยืนยาว

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมการบินและอวกาศ)

พ.ศ. 2554

ลิขสิทธิ์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

รัชณี ยืนยาว 2554: ศึกษาระบบนำวิถีสำหรับจรวดหลายลำกล้อง ปรินญาวิศวกรรม
ศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมการบินและอวกาศ) สาขาวิศวกรรมการบินและอวกาศ
ภาควิชาวิศวกรรมการบินและอวกาศ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก:
ผู้ช่วยศาสตราจารย์ นาวาอากาศเอกพาทร์ณ สงวน โภคัย, Ph.D. 62 หน้า

การเพิ่มความแม่นยำและความถูกต้องในการยิงจรวดเปรียบเสมือนเป็นการเพิ่มอนุภาพ
และประสิทธิภาพในการรบ เพื่อให้สามารถควบคุมเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดจากจุดเริ่มต้น
ไปยังเป้าหมายจึงจำเป็นต้องเพิ่มส่วนการนำวิถีให้กับจรวด งานวิจัยนี้นำเสนอผลศึกษาระบบนำ
วิถีของจรวดหลายลำกล้องซึ่งจัดเป็นยุทธโศปกรณ์แบบพื้นสู่พื้น เป็นการยิงจรวดออกจากท่อยิงไป
ยังเป้าหมายที่ต้องการ โดยจรวดที่ถูกยิงมีลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบ Ballistic (วิถีโค้ง) ซึ่ง
ปัญหาการนำวิถีในที่นี้เป็นส่วนหนึ่งของปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดแบบกำหนดเงื่อนไข
บังคับ

การแก้ปัญหาคำนวณนำวิถีจรวดในงานวิจัยนี้ได้กำหนดขอบเขตให้ทราบพิกัดตำแหน่งของ
จรวดด้วยระบบหาพิกัดตำแหน่งด้วยดาวเทียม และกำหนดให้ช่วงเวลานำวิถีเริ่มต้นตั้งแต่เชื้อเพลิง
ในจรวดเผาไหม้หมดจนถึง ณ.เวลาที่จรวดอยู่ตำแหน่งสูงสุด โดยพิจารณาให้ค่ามุมคลาดเคลื่อน
ไปจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดแบบที่เหมาะสมที่สุดขณะที่เชื้อเพลิงเผาไหม้หมดเป็น
พารามิเตอร์หลักที่ทำให้จรวดยิงไม่ตรงเป้าหมาย งานวิจัยนี้ได้นำเสนอระเบียบวิธีการ Dynamic
Programming เพื่อใช้แก้ปัญหาคำนวณนำวิถีซึ่งให้ผลการคำนวณออกมาเป็นเซตของอัตราการขยาย
แบบป้อนกลับในช่วงที่ทำการนำวิถีเพื่อชดเชยค่ามุมคลาดเคลื่อนดังกล่าว การทดสอบความ
ถูกต้องของระเบียบวิธีการ Dynamic Programming ทำโดยการเปรียบเทียบเส้นทางการเคลื่อนที่
ของจรวดแบบที่ทำการควบคุมกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดแบบที่เหมาะสมที่สุด และทำการ
วิเคราะห์ระยะทางที่จรวดตกห่างจากเป้าหมายเมื่อกำหนดค่ามุมคลาดเคลื่อนที่ตำแหน่งต่างๆ ผล
ของการศึกษาสามารถนำมาปรับใช้กับจรวดหลายลำกล้องแบบไม่นำวิถีที่มีอยู่แล้วในประเทศโดย
ปรับปรุงอุปกรณ์ภายในตัวจรวดเพียงเล็กน้อยก็จะสามารถนำวิถีได้

ลายมือชื่อนิสิต

ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Ratchani Yuenyaw 2011: Guidance Studies for Multiple Launch Rocket System.
Master of Engineering (Aerospace Engineering), Major Field: Aerospace Engineering,
Department of Aerospace Engineering. Thesis Advisor: Assistant Professor
Group Captain Pahron Sanguanbhokai, Ph.D. 62 pages.

Increasing the precision and accuracy for the rockets will provide greater lethality and effectiveness. To achieve a controlled trajectory of the rocket from the initial launch to its target need the rocket guidance section. In this study, describes guidance system studies for multiple launch rocket system (MLRS), ground to ground munitions that fired from launcher tubes to the target with ballistic trajectory. This guidance problem is the portion of constrained optimization.

The solution of the rocket guidance problem in this research was assigned to be received GPS navigation updates and commenced during the initial phase of flight from the motor burnout up to the time of apogee that account for significant parameter is launch-induced offsets from nominal at burnout state. Dynamic programming method is applied to correct the ballistic trajectory by generating a set of feedback gains for guided portion to compensate that launch offsets. Dynamic programming method validation is obtained by comparison of the controlled ballistic trajectory with the nominal trajectory and also analyzed the target miss distance with respect to the different launch offsets. Results from studies will retrofit of existing domestic unguided rocket as a few internal hardware actuator add-ons that become to the guided rocket.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผศ.ดร.น.อ.พาหรัณ สวงน โภคัย อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก และ รศ.ดร.น.ต. โอฐศิลป์ นิลบุล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม ที่ให้คำปรึกษาในการเรียน การค้นคว้าวิจัย ตลอดจนการตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์

ขอกราบขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมการบินและอวกาศทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนและมอบความรู้อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการนำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

ขอขอบคุณ เจ้าหน้าที่ประจำภาควิชาวิศวกรรมการบินและอวกาศทุกท่าน และเพื่อนๆ คณะวิศวกรรมการบินและอวกาศ ที่ได้ให้ความช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่างๆ เป็นอย่างดีตลอดของการทำงานวิจัย

ด้วยความดีหรือประโยชน์อันใดเนื่องจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอมอบแต่คุณพ่อ คุณแม่ ที่ได้อบรมและให้กำลังใจผู้วิจัยมาตลอดในทุกเรื่อง

รัชนี้ ยืนยาว
เมษายน 2554

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(5)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	2
การตรวจเอกสาร	3
อุปกรณ์และวิธีการ	26
อุปกรณ์	26
วิธีการ	26
ผลและวิจารณ์	40
ผล	40
วิจารณ์	46
สรุปและข้อเสนอแนะ	48
สรุป	48
ข้อเสนอแนะ	49
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	50
ภาคผนวก	53
ภาคผนวก ก คำอธิบายหน่วยมวลของจรวด MLRS	54
ภาคผนวก ข ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์และสภาพอากาศมาตรฐาน	56
ภาคผนวก ค State Transition Matrices	59
ประวัติการศึกษา และการทำงาน	62

สารบัญตาราง

ตารางที่	หน้า
1 การเปรียบเทียบ Control fin ประเภทต่างๆ	5
2 ค่าความผิดพลาดในการยิงจรวด MLRS ที่ระยะยิง 60 กิโลเมตร	16
3 แบบจำลองที่ 1	38
4 แบบจำลองที่ 2	38
5 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 1	45
6 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 2	45
7 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 3	45
8 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 4	46
ตารางผนวกที่	
ก1 การเปรียบเทียบหน่วยมวล	55
ข1 ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ที่ได้จากการแบ่งสเกลกราฟ	57

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	MLRS รุ่น DTI-1	3
2	MLRS รุ่น M270	4
3	ส่วนประกอบของจรวด	4
4	Fin deployment ของจรวด MLRS	6
5	การนำวิถีด้วยวิธี Beam rider guidance	9
6	การนำวิถีด้วยวิธี Command guidance	10
7	การนำวิถีด้วยวิธี Semi-active homing	11
8	การนำวิถีด้วยวิธี Active homing guidance	11
9	การนำวิถีด้วยวิธี Passive homing guidance	12
10	การนำวิถีด้วยวิธี Retransmission homing guidance	13
11	การนำวิถีด้วยระบบหาพิกัดตำแหน่งด้วยดาวเทียม	14
12	ส่วนประกอบที่ใช้ในการนำวิถีสำหรับจรวด MLRS	14
13	CORRECT block diagram	15
14	MLRS rocket trajectory	16
15	Moving Mass Trim Controller	17
16	เส้นทางที่เป็นไปได้ระหว่างจุด 2 จุด	18
17	ลำดับ Fibonacci	19
18	การคำนวณค่าลำดับ Fibonacci ที่ n	19
19	การหาค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุดในการเดินทางจากจุด A ไปจุด B	20
20	หลักการ Optimality สำหรับ Single state variable	21
21	Trajectory/Optimizer และ Feedback control system	24
22	Trajectory/Optimizer ของจรวด MLRS	25
23	รูปร่างของปัญหาการนำวิถี	28
24	Horizontal heading angle และ Vertical heading angle ของจรวด MLRS	29
25	การเคลื่อนที่ของ Point-mass ในระนาบ 3 มิติ	30

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
26	ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของแบบจำลองจรวด MLRS	31
27	ข้อมูลสภาพอากาศที่ระดับความสูงที่ครอบคลุมการใช้งานจรวด MLRS	31
28	Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 1 ($\gamma = 0.36^\circ, \psi = 1^\circ$)	41
29	Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 2 ($\gamma = -0.64^\circ, \psi = -0.75^\circ$)	41
30	Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 3 ($\gamma = 0.5^\circ, \psi = 1^\circ$)	42
31	Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 4 ($\gamma = -0.5^\circ, \psi = -0.75^\circ$)	42
32	Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 1 ($\gamma = 0.36^\circ, \psi = 1^\circ$)	43
33	Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 2 ($\gamma = -0.64^\circ, \psi = -0.75^\circ$)	43
34	Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 3 ($\gamma = 0.5^\circ, \psi = 1^\circ$)	44
35	Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 4 ($\gamma = -0.5^\circ, \psi = -0.75^\circ$)	44
ภาพผนวกที่		
ข1	แบบจำลองสภาพอากาศมาตรฐาน NRLMSISE	58

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

A_k, B_k	=	State transition matrices at k th time step
C, d, E, F	=	Sensitivity matrices
C_{D_0}	=	Drag coefficient used to simulate modeling errors
C_L, C_S, C_D	=	Lift, side-force, and drag coefficients
$C_{L_\alpha}, C_{D_0}, k_D$	=	Mach number dependent coefficients used in aerodynamic model
c	=	Speed of sound
g	=	Acceleration of gravity
h	=	Time step for discretization of input
K_k	=	Feedback gain matrix at the k th time step
m	=	Mass of munitions after motor burnout
r	=	Radius of Earth
S	=	Reference area of munitions
T, t_f	=	Times of impact the target for nominal and controlled trajectories
t_N	=	Time at apogee for nominal trajectory
$u(t), x(t)$	=	Input and state for guidance problem
V	=	Magnitude of velocity vector
W_k, H_{2k}, H_{3k}	=	Matrices used in dynamic programming algorithm at the k th time step
x_c, y_c, z_c	=	Downrange, crossrange and altitude coordinates
x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}	=	Coordinates of target
$\tilde{x}(t)$	=	Ballistic trajectory from t_N to t_f
$\hat{x}(t)$	=	Nominal trajectory
α, β	=	Angles of attack and sideslip
γ, ψ	=	Vertical and horizontal heading angle
λ	=	Parameter used in definition of guidance problem
ρ	=	Density of atmosphere

ศึกษาระบบนำวิถีสำหรับจรวดหลายลำกล้อง

Guidance Studies for Multiple Launch Rocket System

คำนำ

ปัจจุบันยุทธโศปกรณ์ด้านการทหารได้ถูกนำมาวิจัยและพัฒนาอย่างต่อเนื่องเพื่อใช้เพิ่มขีดความสามารถในการทำภารกิจต่างๆอันให้ได้มาซึ่งศักยภาพด้านความมั่นคงของแต่ละประเทศ ถึงแม้สถานการณ์โลกในปัจจุบันจะอยู่ในภาวะไม่มีสงครามก็ตาม แต่ก็มีความจำเป็นที่ต้องมีการจัดหายุทธโศปกรณ์ด้านการทหารให้พร้อมสำหรับยามที่มีศึกสงคราม สำหรับจรวดหลายลำกล้อง หรือ Multiple Launch Rocket System (MLRS) จัดเป็นยุทธโศกรณ์แบบพื้นสู่พื้น โดยทั่วไปนำมาใช้สนับสนุนอาวุธปืนใหญ่ให้ได้ระยะยิงที่ไกลขึ้นและใช้ในการโจมตีเป้าหมายสำคัญ อาทิ เช่น ค่ายทหาร สนามรบ และฐานยิงจรวด เป็นต้น การใช้ MLRS แบบไม่นำวิถีจรวด จรวดที่ยิงออกไปจะตกไม่ตรงเป้าหมายเป็นส่วนใหญ่เนื่องจากไม่สามารถควบคุม Trajectory (เส้นทางการเคลื่อนที่) ของจรวดได้ เป็นผลให้สิ้นเปลืองปริมาณจรวดที่ยิงออกไปแล้วตกไม่ตรงพื้นที่เป้าหมาย

ด้วยเหตุผลข้างต้น การศึกษาระบบนำวิถีจรวด จึงมีประโยชน์อย่างยิ่งเนื่องจากเป็นพื้นฐานที่สามารถนำมาปรับใช้กับ MLRS แบบไม่นำวิถีจรวดที่มีอยู่ในประเทศไทยให้สามารถนำวิถีได้ ทำให้ประหยัดค่าใช้จ่ายด้านการทหาร และลดการพึ่งพาจากต่างประเทศ ประกอบกับในอนาคตแนวโน้มการใช้ MLRS ที่มีระบบนำวิถีจรวดนั้นเพิ่มมากขึ้นทุกวัน อีกทั้งต้องการระยะยิงที่ไกลขึ้น ในขณะที่พื้นที่เป้าหมายมีขนาดเล็กและต้องการความแม่นยำสูง ในงานวิจัยชิ้นนี้นำเสนอระเบียบวิธีการ Dynamic Programming เพื่อใช้ในการนำวิถีให้กับ MLRS

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาระบบนำวิถีของจรวดที่มีอยู่ในปัจจุบันเพื่อหาระเบียบวิธีการสำหรับนำวิถีให้กับ MLRS
2. เพื่อนำเสนอระเบียบวิธีการแก้ปัญหาคำนวณนำวิถีด้วยวิธี Optimization ที่เหมาะสมซึ่งสามารถปรับปรุงจรวดแบบที่มีอยู่เดิมให้สามารถนำวิถีได้
3. สามารถวิเคราะห์และเปรียบเทียบจุดตกที่ได้จากการควบคุมเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดด้วยระเบียบวิธีการ Dynamic Programming ที่ตำแหน่ง Launch offsets ไม่เกิน $\pm 1^\circ$

การตรวจเอกสาร

1. เอกสารงานวิจัยที่ผ่านมา (Literature Review)

1.1 การใช้งานของจรวดหลายลำกล้อง

Gadiot (1999) จรวดหลายลำกล้อง หรือ Multiple Launch Rocket System (MLRS) เป็นยุทธโศปกรณ์ด้านการทหารแบบพื้นสู่อากาศใช้ในการป้องกันประเทศยามมีศึกสงครามโดยนำมาใช้สนับสนุนอาวุธปืนใหญ่เพื่อโจมตีแนวลึกของข้าศึกให้มีระยะยิงที่ไกลขึ้นและมีอำนาจรุนแรง ลักษณะการใช้งานเป็นการยิงจรวดที่บรรจุอยู่ในชุดท่อยิงจรวดที่ละท่อต่อเนื่องกันจนครบจากภาพที่ 1 เป็น MLRS รุ่น DTI-1 ของกองทัพบกไทยแบบไม่นำวิถีจรวด ประกอบไปด้วยรถบรรทุก 2 คัน รถคันแรกดังภาพที่ 1 (ด้านซ้าย) ติดตั้งระบบค้นหาเป้าหมาย ระบบอำนวยความสะดวกจากฐานยิงจรวด (Launcher) และระบบควบคุมการยิง สำหรับรถคันที่สอง ดังภาพที่ 1 (ด้านขวา) ประกอบด้วยชุดอุปกรณ์สำหรับบรรทุกและบรรจุจรวด ซึ่งรถทั้งสองคันสามารถเคลื่อนที่และเปลี่ยนที่ตั้งยิงได้อย่างรวดเร็วโดยมีเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดเป็นแบบ ballistic หรือวิถีโค้งสำหรับภาพที่ 2 แสดง MLRS รุ่น M270 ของประเทศสหรัฐอเมริกาแบบนำวิถีจรวด



ภาพที่ 1 MLRS รุ่น DTI-1

ที่มา: Defence Technology Institute (2011)

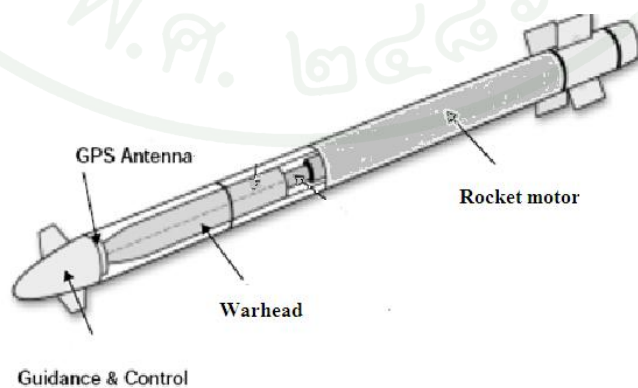


ภาพที่ 2 MLRS รุ่น M270

ที่มา: Lockheed Martin. (1983)

1.2 จรวด

ส่วนประกอบทั่วไปของจรวดเมื่อวิเคราะห์ตามหลัก Aerodynamic (อากาศพลศาสตร์) ของจรวด มีส่วนประกอบดังภาพที่ 3



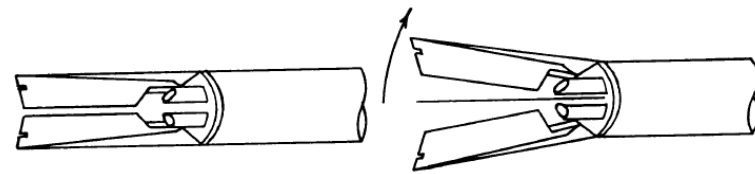
ภาพที่ 3 ส่วนประกอบของจรวด

1.2.1 ส่วนโครงสร้างจรวด (Airframe) ได้แก่ วัสดุที่ประกอบกันเป็นพื้นผิวภายนอกทั้งหมด ได้แก่ Nose (ส่วนหัวจรวด) Body (ลำตัวจรวด) และ Control fin (ครีบกควบคุม) ซึ่งการเปรียบเทียบ Control fin ประเภทต่างๆ แสดงในตารางที่ 1 ในส่วนนี้จะรับแรงเนื่องมาจาก Aerodynamic ดังนั้นจะต้องได้รับการออกแบบเป็นอย่างดีเพื่อให้จรวดมี Stability (ความสามารถในการทรงตัว) จึงใช้โครงสร้างที่แข็งแรง มีน้ำหนักเบาและพื้นผิวต้องสามารถต้านทานความร้อนที่เกิดจากแรงเสียดทานของอากาศได้ เนื่องจากขนาดและรูปร่างของ Fixed fin (ครีบบังคับ) จะมีผลต่อขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของท่อยิงและทำให้เกิดช่องว่างระหว่างตัวจรวดและท่อยิง ดังนั้นจึงออกแบบ Control fin ให้สามารถพับเก็บได้โดยในขณะที่พับเก็บจะมีขนาดไม่เกินเส้นผ่านศูนย์กลางรวมของตัวจรวดและจะกางออกทันทีที่จรวดถูกยิงออกจากท่อ ดังภาพที่ 4 แสดงตัวอย่าง Fin deployment (ครีบบังคับที่พับเก็บและกางออก) ของจรวด MLRS

ตารางที่ 1 การเปรียบเทียบ Control fin ประเภทต่างๆ

Control fin	ข้อดี	ข้อเสีย
Canard (ครีบบังคับหัวจรวด) ตัวอย่างเช่น Stinger FIM92, Grouse SA-18, Starburst และ AIM-9L เป็นต้น	-การตอบสนองรวดเร็ว -แรงที่ได้เป็นไปตามทิศทางที่ เหมาะสม -ระบบนำวิถีและควบคุมอยู่ ใกล้กัน	-เกิด Cross coupling มากเนื่อง จาก Vortices จาก Roll control ซึ่งเมื่อแก้ปัญหาด้วยการ ออกแบบ indexed จะเป็นผล ให้การควบคุมเป็นไปได้ยาก
Body fin (ครีบบังคับลำตัวจรวด) ตัวอย่างเช่น Sparrow AIM-7, Skyflash, Alamo AA-10 และ Aspide เป็นต้น	-การตอบสนองรวดเร็ว -แรงที่ได้เป็นไปตามทิศทางที่ เหมาะสม -Down wash จาก Tail จะหมุน ลำตัวจรวดทำให้เพิ่มแรงยก	-มีการออกแบบที่ซับซ้อน -Roll control ขึ้นอยู่กับผลของ Tail fin
Tail fin (ครีบบังคับท้ายจรวด) ตัวอย่างเช่น Rapler 2000, Seawolf, R-37 และ Patriot PAC-2 เป็นต้น	-มีการออกแบบที่ง่าย -เกิด Cross coupling น้อย เมื่อเทียบกับ Canard	-แรงที่ได้มีทิศทางที่ไม่ต้องการ -ระบบนำวิถีและควบคุมอยู่ ไกลกัน

ที่มา: Shepherd *et al.* (1979)



(A) Folding Fins



(B) Wrap-Around Fins



(C) Tangential Fins



(D) Pop-Out Fins

ภาพที่ 4 Fin deployment ของจรวด MLRS

ที่มา: Richard *et al.* (1990)

1.2.2 ส่วนบรรจุ หรือหัวรบ (Payload or Warhead) ได้แก่ ดินระเบิดแรงดันสูง การออกแบบขึ้นอยู่กับภารกิจที่ยิง เช่น หัวรบระเบิดย่อย หัวรบนิวเคลียร์ และหัวรบเคมี เป็นต้น

1.2.3 ส่วนขับเคลื่อน (Propulsion motor) ได้แก่ ส่วนที่ให้แรงดันเพื่อขับเคลื่อนจรวด สำหรับเชื้อเพลิงของจรวด MLRS จะเป็นแท่งดินขับ (Rocket motor) การกำหนดค่าของแรงขับเคลื่อนขึ้นอยู่กับรูปร่างของพื้นผิวเผาไหม้ของแท่งดินขับ

1.2.4 ส่วนนำวิถี (Guidance and control) ได้แก่ ส่วนที่ช่วยนำทางให้จรวดไปยังเป้าหมายที่ต้องการ ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาข้อมูลในส่วนนี้อย่างละเอียดเนื่องจากเป็นส่วนที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยชิ้นนี้

การจำแนกประเภทของจรวดสามารถจัดแบ่งตามชนิดของเชื้อเพลิง ลักษณะการยิงไปยังเป้าหมาย ระยะทางการเคลื่อนที่ตามภารกิจที่ยิง และระบบนำวิถี ดังต่อไปนี้

1.3 Sutton (1992) การแบ่งประเภทของจรวดด้วยชนิดของเชื้อเพลิง

1.3.1 จรวดเชื้อเพลิงแข็ง เป็นจรวดที่ตัวสารที่เผาไหม้และสารให้ออกซิเจนช่วยเผาไหม้อยู่ในรูปของแข็ง มักผสมอยู่ด้วยกันเป็นแท่งเรียกว่า แท่งดินขับ ข้อดีของจรวดเชื้อเพลิงแข็งคือการใช้งานง่าย และมีความซับซ้อนน้อย ไม่ต้องการเตรียมการล่วงหน้าจึงสามารถทำงานได้ทันทีเมื่อจุดจรวด ตัวอย่างเช่น จรวดหลายลำกล้องในงานวิจัยชิ้นนี้ จรวดเสริมแรงขับในการส่งดาวเทียม สำหรับข้อเสียของจรวดเชื้อเพลิงแข็งคือ ให้ Specific impulse (ค่าความขับเคลื่อนเฉพาะ) น้อยกว่าจรวดเชื้อเพลิงเหลว และเมื่อจุดจรวดแล้วไม่สามารถปรับค่าแรงขับเคลื่อนของจรวดได้

1.3.2 จรวดเชื้อเพลิงเหลว เป็นจรวดที่ตัวสารที่เผาไหม้และสารให้ออกซิเจนช่วยเผาไหม้อยู่ในรูปของเหลวบรรจุภายในถังเก็บ สารทั้งสองชนิดจะถูกดูดให้มาผสมกันในห้องสันดาปเพื่อเผาไหม้จนเกิดแก๊สร้อนเพื่อใช้ในการขับเคลื่อนจรวด ข้อดีของจรวดเชื้อเพลิงเหลวคือ ให้ Specific impulse สูงและสามารถปรับค่าแรงขับเคลื่อนของจรวดได้ ตัวอย่างเช่น จรวดส่งดาวเทียมซึ่งใช้ไฮโดรเจนเหลวเป็นตัวสารที่เผาไหม้และออกซิเจนเหลวเป็นสารให้ออกซิเจนช่วยเผาไหม้ สำหรับข้อเสียของจรวดเชื้อเพลิงเหลวคือไม่สามารถบรรจุเชื้อเพลิงไว้เป็นเวลานานได้เนื่องจากเป็นสารพิษที่กัดกร่อนวัสดุต่างๆ ได้ จึงจำเป็นต้องมีการเตรียมการล่วงหน้าก่อนยิงจรวด

1.3.3 จรวดเชื้อเพลิงแบบผสม (Hybrid) เป็นจรวดซึ่งรวมข้อดีของจรวดเชื้อเพลิงแข็งและจรวดเชื้อเพลิงเหลวไว้รวมกัน โดยที่ใช้ตัวสารที่เผาไหม้เป็นของแข็ง ส่วนสารให้ออกซิเจนช่วยเผาไหม้อยู่ในรูปของเหลว ข้อดีของจรวดเชื้อเพลิงแบบผสม คือสามารถปรับค่าแรงขับเคลื่อนของจรวดได้และมีคุณภาพไอเสียที่ไม่เป็นพิษต่อสิ่งแวดล้อม สำหรับข้อเสียของจรวดเชื้อเพลิงผสม คือให้ Specific impulse ที่ไม่คงที่ขึ้นอยู่กับอัตราส่วนผสมตามสภาวะคงตัวของระบบและมีค่าต่ำกว่าจรวดเชื้อเพลิงเหลวแต่สูงกว่าจรวดเชื้อเพลิงแข็ง

1.4 Shepherd *et al.* (1979) การแบ่งประเภทของจรวดด้วยลักษณะการยิงไปยังเป้าหมาย ได้แก่ (1) แบบพื้นสู่อากาศ สำหรับจรวด MLRS ได้จัดอยู่ในประเภทนี้ (2) แบบพื้นสู่อากาศ (3) แบบอากาศสู่อากาศ และ (4) แบบอากาศสู่อากาศ

1.5 Ronald *et al.* (1995) การแบ่งประเภทของจรวดด้วยระยะทางการเคลื่อนที่และภารกิจ

1.5.1 ระยะใกล้ หรือ Tactical rocket มีจุดมุ่งหมายเพื่อเพิ่มระยะยิงให้ไกลกว่าปืนใหญ่ ปืนเรือ หรือ ปืนกลอากาศ ใช้ในภารกิจต่อต้านอากาศยาน ได้แก่ จรวดแบบพื้นสู่อากาศและอากาศสู่อากาศ ในปัจจุบันได้เริ่มนำไปใช้ในจรวดแบบอากาศสู่อากาศแทนการทิ้งระเบิด เนื่องจากมีประสิทธิภาพสูงกว่ามาก

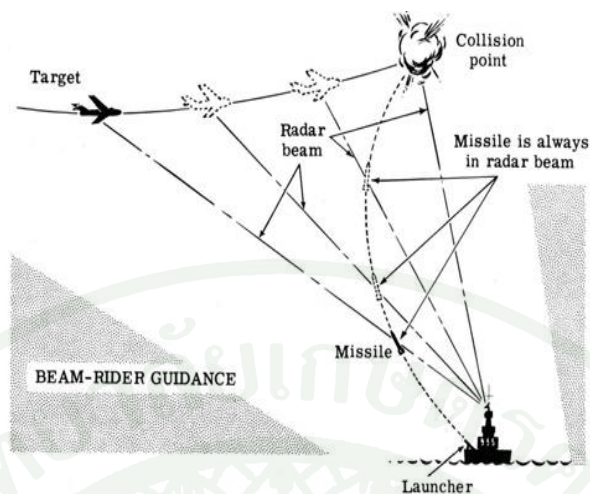
1.5.2 ระยะปานกลาง หรือ Strategic rocket มีจุดมุ่งหมายเพื่อทำลายเป้าหมาย โดยสามารถนำจรวดที่มีอยู่มาปรับปรุงระบบนำวิถี สำหรับจรวด MLRS ได้จัดอยู่ในประเภทนี้

1.5.3 ระยะไกล หรือ Space launch rocket มีจุดมุ่งหมายเพื่อนำส่งดาวเทียมหรือยานอวกาศเข้าสู่วงโคจรของโลกหรือดาวในระบบสุริยะ

1.6 Jeff (2004) แบ่งประเภทของจรวดด้วยระบบนำวิถีจรวด

ระบบนำวิถีที่ทำการศึกษานี้สำหรับจรวด (Rocket) ทั่วไปและจรวดชนิดที่เป็นจรวดนำวิถี (Missile) ผู้วิจัยได้ทำการศึกษาเพื่อประกอบงานวิจัย ได้แก่

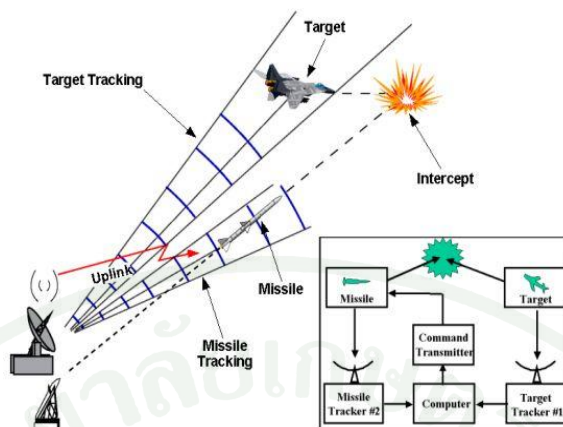
1.6.1 Beam rider guidance เป็นการนำวิถีโดยอาศัยแหล่งกำเนิดสัญญาณคลื่นเรดาร์หรือเลเซอร์ จากภายนอกตัวจรวด โดยสถานีภาคพื้นดินจะส่งสัญญาณคลื่นดังกล่าวจากแหล่งกำเนิดจนกระทั่งตรวจพบเป้าหมาย และติดตามเป้าหมายอยู่ตลอดเวลา สัญญาณคลื่นจะเป็นตัวนำวิถีให้กับจรวดเดินทางเข้าสกัดกั้นเป้าหมาย ดังภาพที่ 5



ภาพที่ 5 การนำวิถีด้วยวิธี Beam rider guidance

ที่มา: Jeff (2004)

1.6.2 Command guidance คือการนำวิถีโดยอาศัยการสั่งการ โดยอาศัยสัญญาณเรดาร์หรือเลเซอร์ จากแหล่งกำเนิดภายนอกในการติดตามเป้าหมาย โดยแบ่งสัญญาณที่ส่งออกไปเป็น 2 ส่วน ส่วนแรกจะติดตามเป้าหมายเพื่อให้ทราบถึงทิศทางที่เป้าหมายเดินทางไป ส่วนที่ 2 จะติดตามจรวดที่ถูกปล่อยออกจากฐานยิง ข้อมูลที่ได้รับจากสัญญาณทั้งสองส่วนจะถูกส่งกลับมายังสถานีภาคพื้นเพื่อประมวลผลเส้นทางที่จรวดจะเดินทางไปสกัดกั้นเป้าหมาย โดยที่จรวดสามารถรับข้อมูลได้ผ่านทางตัวรับสัญญาณที่ติดตั้งบนจรวด และทำการปรับเปลี่ยนเส้นทางของตัวเองเพื่อสกัดกั้นเป้าหมายตรงตามจุดที่คำนวณไว้ ดังภาพที่ 6

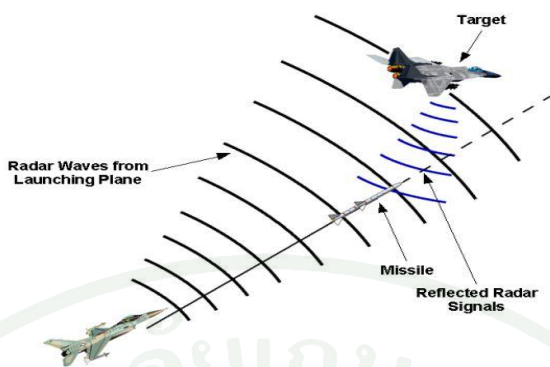


ภาพที่ 6 การนำวิถีด้วยวิธี Command guidance

ที่มา: Jeff (2004)

1.6.3 Homing guidance ถือเป็นมาตรฐานของการนำวิถีจรวดที่ใช้ต่อต้านอากาศยานในปัจจุบันนี้ แบ่งออกได้เป็น 3 ประเภท

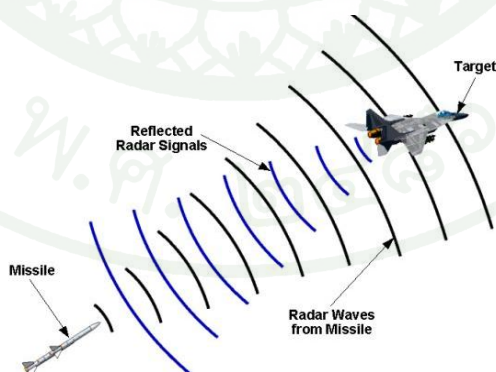
ก. Semi-active homing เป็นการนำวิถีโดยแหล่งกำเนิดสัญญาณภายนอกในการติดตามเป้าหมายและนำวิถีให้จรวด เมื่อสถานีภาคพื้นส่งสัญญาณเรดาร์ หรือเลเซอร์ไปยังเป้าหมาย สัญญาณจะกระทบเป้าหมายแล้วสัญญาณจะสะท้อนกลับมายังตัวรับสัญญาณบนตัวจรวดจรวดจะทำการประมวลผลและคำนวณเส้นทางที่จะเข้าสกัดกั้นเป้าหมายโดยอาศัยสัญญาณที่สะท้อนออกมาจากเป้าหมายตลอดเวลาเพื่อให้นำทางเข้าสกัดกั้นเป้าหมาย ดังภาพที่ 7



ภาพที่ 7 การนำวิถีด้วยวิธี Semi-active homing

ที่มา: Jeff (2004)

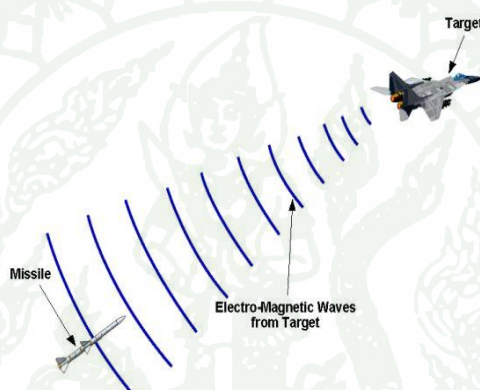
ข. Active homing guidance เป็นการนำวิถีที่มีลักษณะคล้ายกับหลักการนำวิถีแบบ Semi-active homing จรวดจะมีเครื่องรับสัญญาณเพื่อคอยรับสัญญาณที่สะท้อนกลับออกมาจากเป้าหมายเช่นกัน แต่ Active homing guidance จะมีตัวส่งสัญญาณออกไปได้เองโดยไม่ต้องอาศัยแหล่งกำเนิดสัญญาณภายนอก เนื่องจากมีทั้งตัวส่งและตัวรับสัญญาณในตัวจรวด ด้วยหลักการนี้จึงอาจกล่าวได้ว่า จรวดสามารถนำวิถีเข้าหาเป้าหมายได้ด้วยตัวเองโดยสมบูรณ์ จรวดนำวิถีที่ใช้หลักการนำวิถีแบบ Active homing guidance นี้ส่วนใหญ่มักจะใช้สัญญาณเรดาร์ในการค้นหาเป้าหมายและประมวลผลสัญญาณที่ได้รับอยู่ตลอดเวลาจนตัดสินใจเข้าสกัดกั้นเป้าหมาย ดังภาพที่ 8



ภาพที่ 8 การนำวิถีด้วยวิธี Active homing guidance

ที่มา: Jeff (2004)

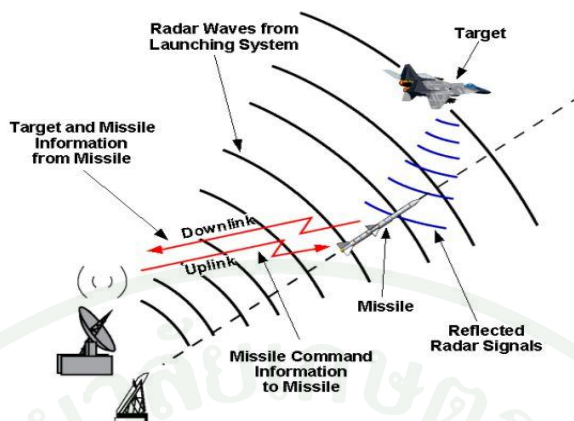
ค. Passive homing guidance เป็นการนำวิถีที่มีลักษณะคล้ายกับหลักการนำวิถีแบบ Semi-active homing กล่าวคือ ภายในตัวจรวดจะสามารถรับคลื่นสัญญาณได้เท่านั้นไม่สามารถส่งคลื่นสัญญาณออกจากตัวเองได้ แต่แหล่งกำเนิดสัญญาณนั้นจะถูกปล่อยออกมาจากเป้าหมายในรูปของพลังงานหรือคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ตัวค้นหาสัญญาณบนหัวจรวดจะทำการตรวจจับและอาศัยคลื่นที่แพร่ออกมาจากเป้าหมาย และทำการประมวลผลเพื่อติดตามแหล่งที่มาของพลังงานจนสามารถเข้าสกัดกั้นเป้าหมาย สำหรับพลังงานที่จะใช้ตรวจจับมีอยู่หลายรูปแบบ เช่น อินฟราเรด เรดาร์ และคลื่นเสียง หรือถึงแม้เป้าหมายไม่ได้ปล่อยพลังงานออกมา จรวดนำวิถีประเภทนี้ก็สามารถใช้เซ็นเซอร์แสงที่ติดตั้งอยู่บนหัวจรวดสร้างภาพเสมือนของเป้าหมายขึ้นมาได้ ดังภาพที่ 9



ภาพที่ 9 การนำวิถีด้วยวิธี Passive homing guidance

ที่มา: Jeff (2004)

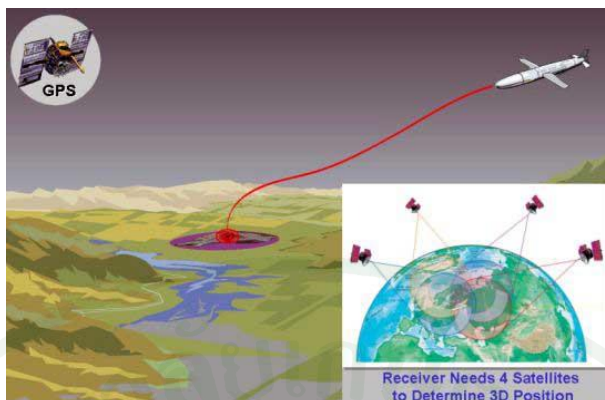
1.6.4 Retransmission homing guidance คือการนำวิถีที่อาศัยการผสมผสานระหว่างการนำวิถีที่กล่าวไปแล้วข้างต้น เป้าหมายถูกตรวจจับและติดตามโดยสถานีภาคพื้นดิน สัญญาณเรดาร์ที่สะท้อนกลับจะถูกตรวจจับได้จากตัวรับสัญญาณบนจรวด จรวดจะส่งข้อมูลของเป้าหมายและตัวจรวดเองกลับมายังสถานีภาคพื้นดินเพื่อประมวลผลและระบุตำแหน่งที่จะเข้าสกัดกั้น หลังจากนั้นสถานีภาคพื้นดินจะส่งพิกัดและคำสั่งกลับมายังจรวดอีกครั้งเพื่อให้จรวดเข้าสกัดกั้นเป้าหมายโดยสมบูรณ์ ดังภาพที่ 10 ทั้งนี้จรวดและสถานีรับภาคพื้นดินจะต้องมีความรวดเร็วในการส่งสัญญาณระหว่างกันเนื่องจากสัญญาณจะถูกส่งผ่านตัวกลางอยู่ตลอดเวลา



ภาพที่ 10 การนำวิถีด้วยวิธี Retransmission homing guidance

ที่มา: Jeff (2004)

1.6.5 การนำวิถีด้วยระบบหาพิกัดตำแหน่งด้วยดาวเทียม หรือ Global Positions System (GPS) เป็นการนำวิถีให้กับจรวดที่มีแนวโน้มการใช้งานในปัจจุบันและในอนาคตมากขึ้น ระบบ GPS คือระบบที่ใช้ระบุตำแหน่งบนพื้นโลก โดยอาศัยดาวเทียมที่โคจรบนอวกาศ แรกเริ่ม GPS ได้ถูกนำมาใช้ในวงการทหารในการกำหนดตำแหน่งต่างๆบนพื้นโลก สร้างแผนที่ และใช้ในการนำทาง หลักการนำวิถีจรวดด้วย GPS ต้องประกอบด้วยข้อมูลจากดาวเทียมตั้งแต่ 4 ดวงขึ้นไป จึงจะสามารถสร้างเป็นภาพ 3 มิติ เพื่อระบุพิกัดตำแหน่งได้ ดังภาพที่ 11 ดาวเทียมจะทำการระบุตำแหน่งบนพื้นโลกและส่งข้อมูลไปยังตัวรับสัญญาณดาวเทียมภาคพื้นซึ่งจะทำการถอดรหัสและระบุตำแหน่งเป้าหมายก่อนที่จะเริ่มยิงจรวด หรือแม้กระทั่งให้จรวดที่ยิงออกไปแล้วก็ตาม การนำวิถีด้วย GPS นี้ สามารถใช้ได้ในทุกช่วงเวลาของการนำวิถี เช่น ใช้นาวิถีช่วงระยะกลาง หรือตลอดเส้นทางจนกระทั่งเป้าหมาย สำหรับในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้ใช้ GPS นำวิถีจรวด MLRS เฉพาะในช่วงแรก คือเริ่มต้นตั้งแต่เชื้อเพลิงในจรวดเผาไหม้หมดจนถึง ณ.เวลาที่จรวดอยู่ตำแหน่งสูงสุด

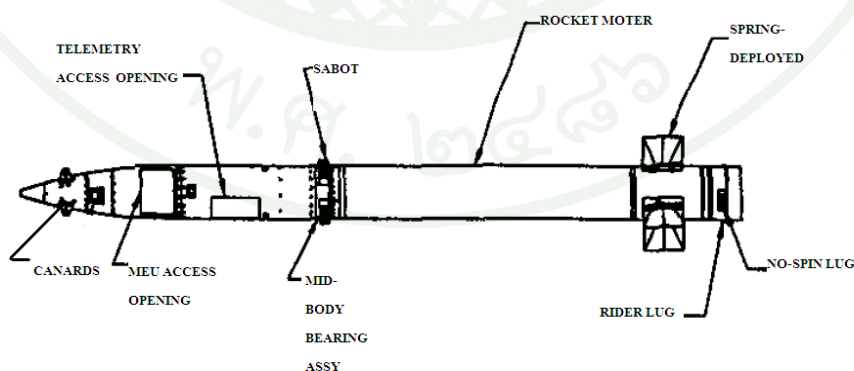


ภาพที่ 11 การนำวิถีด้วยระบบหาพิกัดตำแหน่งด้วยดาวเทียม

ที่มา: Jeff (2004)

1.7 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการนำวิถีของจรวด MLRS

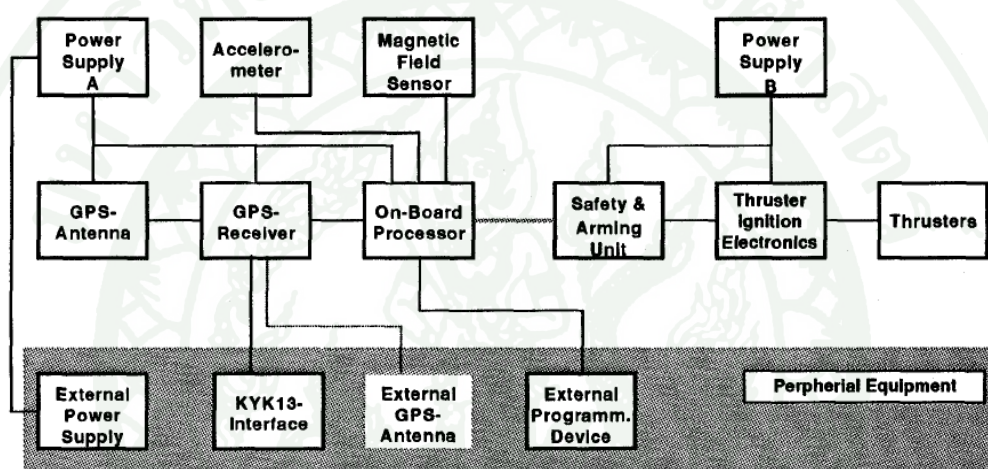
1.7.1 งานวิจัยเรื่อง Low Cost Guidance for the Multiple Launch Rocket System (MLRS) Artillery Rocket (Allan *et al.*, 2000) ภาพที่ 12 แสดงถึงอุปกรณ์ที่ใช้ในการนำวิถีจรวด MLRS ซึ่งประกอบด้วย (1) GPS (2) IMU หรือ Inertial Measurement Unit (3) Canard และ (4) Tail fin โดยมีวัตถุประสงค์ในการเพิ่มระยะยิงของจรวด MLRS จาก 32 กิโลเมตรไปเป็น 45 กิโลเมตร โดยกำหนดให้มีความถูกต้องและแม่นยำในการยิงเท่าเดิม



ภาพที่ 12 ส่วนประกอบที่ใช้ในการนำวิถีสำหรับจรวด MLRS

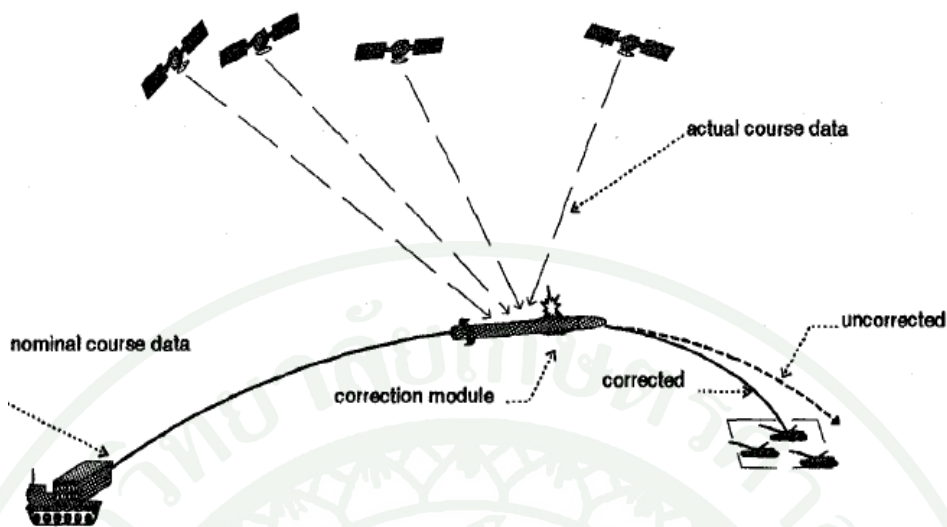
ที่มา: Allan *et al.* (2000)

1.7.2 งานวิจัยเรื่อง Rocket Trajectory Correction using Strap-on GPS Guided Thrusters (Thomas *et al.*, 1998) เป็นการนำ (1) GPS (2) Accelerometer (เซนเซอร์วัดความเร่ง) (3) Magnetic Field Sensor (เซนเซอร์วัดทิศสนามแม่เหล็ก) และ (4) Thruster (อุปกรณ์ให้แรงขับเคลื่อนจรวด) ซึ่งเป็นเทคนิคการใช้ Thrust vector control เพื่อใช้ปรับค่ามุม Angle of attack โดยมีวัตถุประสงค์ในการปรับปรุงความถูกต้องและแม่นยำในการยิง ประกอบรวมเข้าเป็น CORECT Module ดังภาพที่ 13 สำหรับภาพที่ 14 เป็นแสดงการนำ CORECT Module ไปใช้ในการนำวิถีให้กับจรวด MLRS



ภาพที่ 13 CORECT block diagram

ที่มา: Thomas *et al.* (1998)



ภาพที่ 14 MLRS rocket trajectory

ที่มา: Thomas *et al.* (1998)

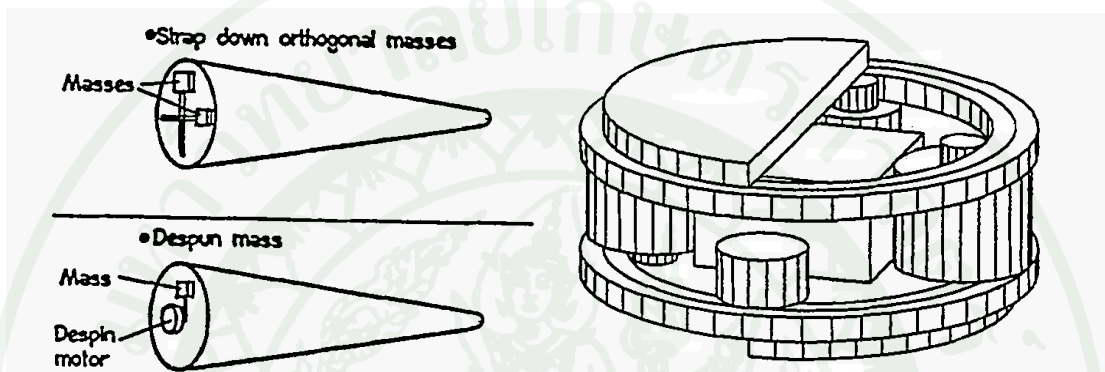
1.7.3 งานวิจัยเรื่อง Trajectory Simulation Model for a Side-Thruster Guided MLRS-Type Vehicle (Gadiot, 1999) เป็นการนำ Thruster ขนาดเล็กมาใช้ปรับแก้เส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวด MLRS เพื่อนำวิถีให้กับ MLRS ในช่วงตั้งแต่เชื้อเพลิงในจรวดเผาไหม้หมดจนถึง ณ.เวลาที่จรวดอยู่ตำแหน่งสูงสุด โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเพิ่มระยะยิงของจรวด MLRS จาก 30 กิโลเมตร ไปเป็น 60 กิโลเมตร โดยลักษณะการยิงของ Thruster จะอยู่ในรูป Impulsive shot ระเบียบวิธีการที่ใช้ในการนำวิถี คือ Dynamic Programming ตารางที่ 2 แสดงค่าความผิดพลาดที่ระยะยิง 60 กิโลเมตร

ตารางที่ 2 ค่าความผิดพลาดในการยิงจรวด MLRS ที่ระยะยิง 60 กิโลเมตร

State variable	Ref. Burn-out conditions	State error at burn-out	Ref. Impact conditions	State error at impact
Velocity (m/s)	1191.7	0.2	461.8	0.5
Flight path angle (°)	35	0.045	-55.172	-0.003
Heading (°)	0	0.048	0.0	0.048
Downrange (m)	0	12.5	60000.0	135.1
Crossrange (m)	0	25.0	0.0	75.2
Altitude (m)	2252.5	4.7	0.0	0.0

ที่มา: Gadiot (1999)

1.7.4 งานวิจัยเรื่อง Moving Mass Trim Control for Aerospace Vehicles (Robinett *et al.*, 1995) เป็นการนำ Moving Mass Trim Controller (ชุดควบคุมการเคลื่อนที่ของตุ้มน้ำหนัก) ดังภาพที่ 15 ซึ่งประกอบด้วยลูกตุ้มถ่วงน้ำหนักและมอเตอร์ขนาดเล็กเพื่อนำมาใช้เป็น Internal hardware actuator (อุปกรณ์ทำงานที่อยู่ภายใน) เพื่อปรับค่ามุม Angle of attack ให้กับจรวดแบบ Ballistic ให้มีเส้นทางการเคลื่อนที่ตามที่กำหนด



ภาพที่ 15 Moving Mass Trim Controller

ที่มา: Robinett *et al.* (1995)

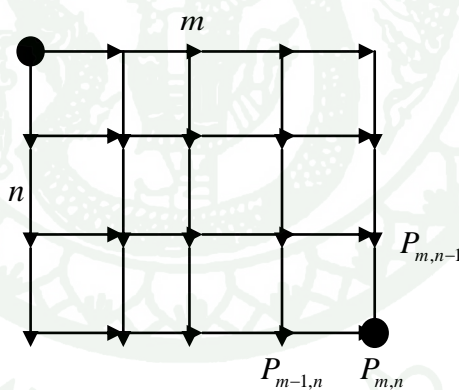
จากการศึกษาวิจัยที่ผ่านมา การออกแบบระบบนำวิถีให้กับจรวด MLRS ในปัจจุบันมีการนำเทคโนโลยีของ IMU และ GPS มาใช้ในการระบุตำแหน่งได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีค่าใช้จ่ายไม่มาก ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงกำหนดให้ใช้ GPS ในการระบุพิกัดตำแหน่งของจรวดเช่นกัน และกำหนดให้สามารถเพิ่มเติมอุปกรณ์เพื่อปรับค่ามุม Angle of attack และ Angle of sideslip ให้กับจรวดได้เพียงเล็กน้อย เช่น Moving Mass Trim Controller เป็นต้น และจากที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด สามารถนำเอาข้อมูลต่างๆมาใช้งานวิจัยอ้างอิงในการเลือกระเบียบวิธีการที่เหมาะสมเพื่อใช้ในการนำวิถีให้กับ MLRS ต่อไป โดยในส่วนของรายละเอียดในแต่ละงานวิจัยที่กล่าวมาขออธิบายแต่เพียงพอสังเขปตามข้างต้นเท่านั้น

2. ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1 Dynamic Programming

Michael (2002) ทฤษฎีของ Dynamic Programming โดยทั่วไปนำมาใช้หาคำตอบของปัญหาหลายชนิด ซึ่งสามารถทำให้อยู่ในรูปของปัญหาเดียวกันที่มีขนาดเล็กกว่า โดยทั่วไปจะใช้วิธีการแบ่งปัญหาให้อยู่ในรูปของการเรียกตัวเองซึ่งส่วนใหญ่จะหาคำตอบได้อย่างแน่นอน อย่างไรก็ตามวิธีการแบบเรียกตัวเองที่ได้นั้นมีประสิทธิภาพการทำงานต่ำ เนื่องจากการเรียกตัวเองที่ซ้ำซ้อนมากจึงทำให้ใช้เวลาในการประมวลผลนาน ดังนั้น Dynamic Programming จึงเป็นวิธีการที่ใช้ตารางเพื่อจดจำค่าของคำตอบของปัญหาย่อย สำหรับปัญหาย่อยที่มีจำนวนไม่มาก เพื่อช่วยในการแก้ปัญหาทำได้รวดเร็วขึ้น จึงเป็นสาเหตุที่เลือกใช้ระเบียบวิธีการ Dynamic Programming ในการแก้ปัญหาการนำวิถีให้กับจรวด MLRS ปัญหาตัวอย่างที่สามารถประยุกต์ใช้วิธีการ Dynamic Programming มีดังนี้

2.1.1 ปัญหาตัวอย่างที่ใช้ในการหาจำนวนเส้นทางที่เป็นไปได้ระหว่างจุด 2 จุดในภาพที่ 16 โดยกำหนดให้ ถนนมีทิศทางจากซ้ายไปขวา ซอยมีทิศทางจากบนลงล่าง กำหนดให้ m เป็นจำนวนถนน และ n เป็นจำนวนซอย แทนหัวมุมด้วยคู่อันดับ (i, j) โดยกำหนดให้ $P_{m,n}$ แทนจำนวนเส้นทางการเดินทางที่เป็นไปได้ ดังภาพที่ 16



ภาพที่ 16 เส้นทางที่เป็นไปได้ระหว่างจุด 2 จุด

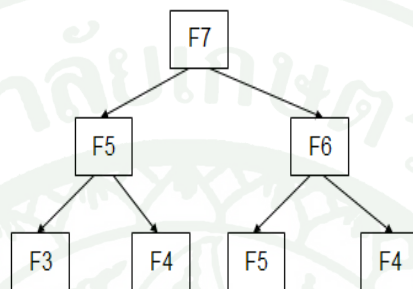
ที่มา: Michael (2002)

ซึ่งลำดับความสัมพันธ์แบบเรียกตัวเอง ของ $P_{m,n}$ ดังสมการ (1)

$$P_{m,n} = P_{m-1,n} + P_{m,n-1} \quad (1)$$

2.1.2 ปัญหาตัวอย่างที่ใช้ในการคำนวณหาลำดับ Fibonacci กำหนดให้ F_0, F_1 เป็นค่าเริ่มต้น การคำนวณค่า F_n โดยที่ลำดับความสัมพันธ์แบบเรียกตัวเองในสมการ (2) ดังภาพที่ 17

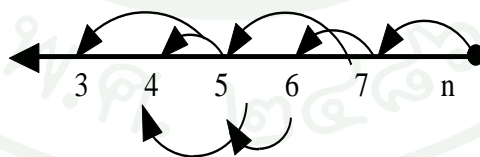
$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (2)$$



ภาพที่ 17 ลำดับ Fibonacci

ที่มา: Michael (2002)

จากภาพที่ 18 อธิบายวิธีการทำงานของฟังก์ชันลำดับ Fibonacci ซึ่งจะคำนวณค่าลำดับที่ n โดยการอ้างอิงถึงลำดับก่อนหน้า $n-1$, $n-2$ ต่อเนื่องกันไปจนกระทั่งถึงค่าที่เป็นค่าเริ่มต้น จากวิธีการสรุปได้ว่าลำดับ Fibonacci ใช้เวลาการทำงานเป็น Exponential เนื่องจากต้องมีการคำนวณในส่วนที่เคยถูกคำนวณมาแล้ว (คำนวณซ้ำๆ) ดังภาพที่ 18

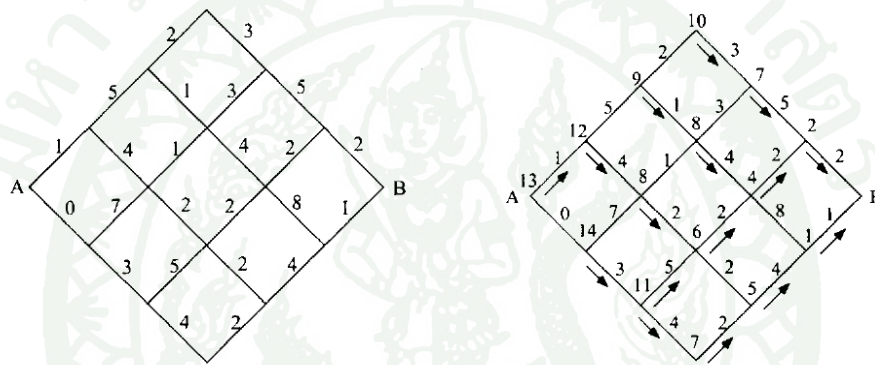


ภาพที่ 18 การคำนวณค่าลำดับ Fibonacci ที่ n

ที่มา: Michael (2002)

วิธีแก้ปัญหานี้ทำได้โดยการกำหนดฟังก์ชันย่อยเพื่อเก็บค่าที่ได้คำนวณไปแล้วซึ่งทำให้ใช้ระยะเวลาในการคำนวณน้อยลงเนื่องจากได้มีการเก็บคำตอบของปัญหาที่เล็กกว่าไว้ก่อน (Fibonacci $[n-1]$, Fibonacci $[n-2]$) สำหรับใช้ในการคำนวณคำตอบของปัญหาที่ใหญ่กว่า ในที่นี้คือ Fibonacci $[n]$

2.1.3 ปัญหาตัวอย่างที่ใช้ในการหาค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุดในการเดินทางจากจุด A ไปจุด B ตัวเลขที่แสดงในภาพที่ 19 หมายถึง ค่าใช้จ่ายที่ใช้เดินทางจากจุดปัจจุบันไปยังจุดที่อยู่ข้างเคียง



ภาพที่ 19 การหาค่าใช้จ่ายที่น้อยที่สุดในการเดินทางจากจุด A ไปจุด B

ที่มา: Michael (2002)

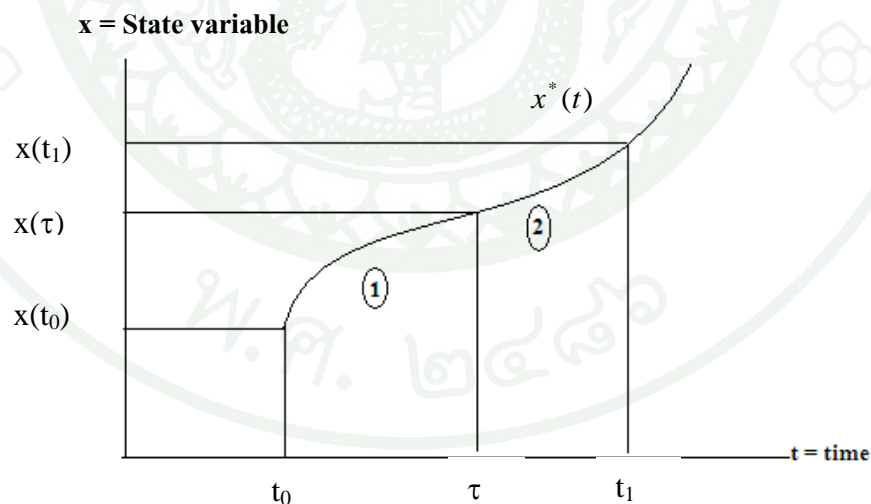
วิธีแก้ปัญหานี้ทำได้โดยการกำหนดจุดเริ่มต้นย้อนจากจุด B ซึ่งในการตัดสินใจทุกครั้งจะเลือกเส้นทางที่ใช้ค่าใช้จ่ายน้อยที่สุดจนกลับไปจุด A โดยอาศัย Principle of optimality (จะกล่าวถึงในหัวข้อถัดไป) ซึ่งจะได้คำตอบของปัญหานี้เป็นเส้นทางที่มีค่าใช้จ่ายน้อยที่สุด คือ 13 หรือเส้นทาง “ udduud ” โดยที่ u คือเส้นทางที่เลือกขึ้นไปด้านบนจากจุดที่ตัดสินใจ และ d คือเส้นทางที่เลือกกลงไปด้านล่างจากจุดที่ตัดสินใจ

2.2 Principle of optimality (หลักการของความเหมาะสมที่สุด) และสมการของ Bellman

Michael (2002) ปัญหาการนำวิธีนี้เป็นส่วนหนึ่งของปัญหาประเภท Constrained optimization (การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดแบบกำหนดเงื่อนไขบังคับ) จากแนวความคิดในการ

ออกแบบการระบบควบคุมที่ซับซ้อน เมื่อรวมเข้ากับ Optimal performance (ข้อกำหนดความต้องการทางด้านประสิทธิภาพ) ทำให้ต้องการหาระบบควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด (Optimal control) จากทฤษฎี Optimal control ได้ให้นิยามของ Principle of optimality คือ ลำดับชั้นของการตัดสินใจที่เหมาะสมที่สุดสำหรับปัญหาที่มีหลายลำดับชั้น โดยมีคุณสมบัติที่ว่าเมื่อไรก็ตามที่มีสถานะเริ่มต้นและการตัดสินใจเลือก (ในที่นี้คือการควบคุม) การตัดสินใจส่วนที่เหลืออยู่จะต้องคงไว้ด้วยหลักการของความเหมาะสมที่สุดตามลำดับนั้นคือ สถานะที่ตามมาต้องขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ของสถานะที่ได้จากการตัดสินใจครั้งแรก

Richard Bellman เป็นผู้ริเริ่มใช้วิธีการ Dynamic Programming ในการแก้ปัญหา Optimal control โดยอาศัยพื้นฐานจาก Principle of optimality และลำดับความสัมพันธ์แบบเรียกตัวเอง ดังแสดงในภาพที่ 20 เป็นกรณีปัญหาที่มีตัวแปรสถานะเดียว (Single state variable) เส้นโค้ง $x^*(t)$ ที่ $t_0 \leq t \leq t_1$ เป็น Trajectory ที่สัมพันธ์กับการควบคุมแบบเหมาะสมที่สุด สมมุติให้มีสถานะเริ่มต้น $t = t_0$ และสถานะสุดท้าย $t = t_1$ และแบ่ง Trajectory ออกเป็น 2 ส่วนที่เวลา τ จาก Principle of optimality สำหรับ Trajectory 2 ในช่วงเวลา $\tau \leq t \leq t_1$ เป็นตัวแทนของ Optimal trajectory ที่ขึ้นอยู่กับสถานะเริ่มต้น $x(\tau)$



ภาพที่ 20 หลักการ Optimality สำหรับ Single state variable

ที่มา: Michael (2002)

Dynamic Programming เป็นวิธีการที่นำมาใช้แก้ปัญหาประเภท Constrained optimization วิธีการหนึ่ง โดยเฉพาะปัญหาที่เป็น Dynamic (เกี่ยวข้องกับ การเคลื่อนที่) มักจะทำให้เป็น Discrete time (การแบ่งช่วงเวลา) และนิยมนำมาใช้ในการแก้ปัญหา Constrained optimization ที่มีหลายสถานะ (State) จากภาพที่ 20 กำหนดให้แบ่งช่วงเวลาในแต่ละ State เป็น t_0, τ และ t_1 โดย $x(t)$ เป็นเวกเตอร์สถานะของระบบที่เวลา t และ $u(t)$ เป็นเวกเตอร์ควบคุมที่เวลา t สมการที่ใช้แก้ปัญหา Constrained optimization ดังสมการ (3)

$$\begin{aligned}
 x(t) &= f(x(t), u(t)), \quad t = t_0, \tau, t_1 \\
 \max_{\{u(t)\}} J &= \int_{t_0}^{t_1} I(x, u, t) dt + F(x_1, t_1) \\
 \text{โดยที่} \quad I &= \text{Intermediate function} \\
 \max_{\{u(t)\}} J &= \text{Optimal performance function} \quad (3) \\
 \dot{x} &= f(x, u, t) \\
 x(t_0) &= x_0 \\
 x(t_1) &= x_1
 \end{aligned}$$

จากสมการ(3) เมื่อนำมาเขียนให้อยู่ในรูป Optimal performance function เมื่อกำหนด State เริ่มต้นที่ x และเวลาเริ่มต้นที่ t จะได้สมการ (4)

$$J^* = J^*(x, t) \quad (4)$$

สำหรับ Optimal performance function ใน Trajectory ๒) คือ $J^*(x + \Delta x, t + \Delta t)$ มี state เริ่มต้น $x + \Delta x$ และเวลาเริ่มต้น $t + \Delta t$ ในช่วงเวลาที่ t ถึง $t + \Delta t$ มี Intermediate function เพิ่ม $I(x, u, t)\Delta t$ ดังนั้น Optimal performance function ตลอดช่วงเวลาทั้งหมดที่เริ่มต้นจากเวลา t จากภาพที่ 20 จะได้สมการ (5)

$$J^*(x, t) = \max_{\{u(t)\}} [I(x, u, t)\Delta t + J^*(x + \Delta x, t + \Delta t)] \quad (5)$$

เมื่อเขียน $J^*(x + \Delta x, t + \Delta t)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรม Taylor จะได้

$$J^*(x + \Delta x, t + \Delta t) = J^*(x, t) + \frac{\partial J^*}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial J^*}{\partial t} \Delta t + \dots \quad (6)$$

โดยที่ $\frac{\partial J^*}{\partial x}$ เป็นเวกเตอร์แถว ดังสมการ (7)

$$\frac{\partial J^*}{\partial x} = \left(\frac{\partial J^*}{\partial x_1}, \frac{\partial J^*}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J^*}{\partial x_n} \right) \quad (7)$$

เมื่อแทนค่าจากสมการ (7) ในสมการ (6) จะได้ สมการ (8)

$$0 = \max_{\{u(t)\}} \left[(I(x, u, t) \Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial J^*}{\partial t} + \dots) \right] \quad (8)$$

จากสมการ (8) เมื่อให้ $\Delta t \rightarrow 0$ จะได้สมการ (9) ซึ่งเป็นสมการ Partial differential ของ Dynamic Programming

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \dot{x} = f(x, u, t) \\ -\frac{\partial J^*}{\partial t} &= \max_{\{u(t)\}} \left[(I(x, u, t) \Delta t + \frac{\partial J^*}{\partial x} f(x, u, t)) \right] \end{aligned} \quad (9)$$

และเมื่อจัดให้อยู่ในรูปสมการของ Bellman จะได้สมการ (10)

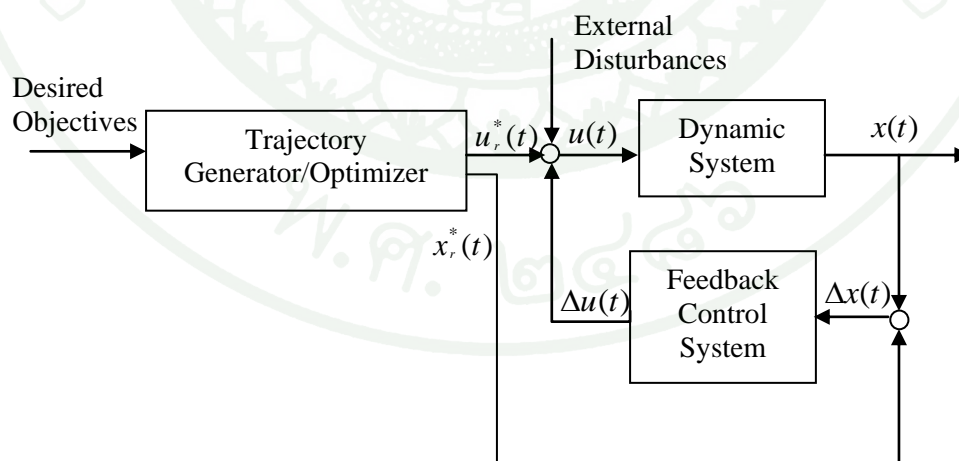
$$-\frac{\partial J^*}{\partial t} = \max_{\{u(t)\}} \left[(I(x, u, t) \Delta t + \sum_{j=1}^n \frac{\partial J^*}{\partial x_j} f_j(x, u, t)) \right] \quad (10)$$

จากภาพที่ 20 Boundary condition ของสมการของ Bellman เป็น State สุดท้ายที่เวลา $t = t_1$ ดังสมการ (11)

$$J^*(x(t_1), t_1) = f(x_1, t_1) \quad (11)$$

2.3 การนำวิธีการ Dynamic Programming มาใช้ในระบบควบคุม

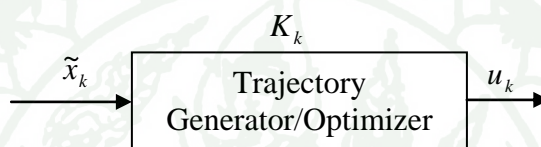
Robinett *et al.* (2005) จากภาพที่ 21 การออกแบบระบบควบคุมที่ดีเป็นส่วนหนึ่งในการพัฒนาเทคโนโลยีด้านต่างๆ โดยการนำระบบป้อนกลับมาประยุกต์ใช้ในการควบคุมเพื่อปรับพฤติกรรม Dynamic (เกี่ยวกับการเคลื่อนที่) ของระบบเมื่อมีสิ่งรบกวนจากภายนอกให้ตอบสนองได้ตามความต้องการ จึงนำมาใช้ในระบบควบคุมยุคใหม่ (Modern control system) ซึ่งประกอบด้วย Trajectory generator/Optimizer และระบบควบคุมแบบป้อนกลับ ในส่วนของ Trajectory generator มีการควบคุมเป็นแบบป้อนไปข้างหน้า (Feed forward) หรือ การควบคุมแบบเปิด (Open-loop control) โดยมีวัตถุประสงค์คือต้องการหาเส้นทางที่เหมาะสมที่สุด (Trajectory path planning) หรือ เส้นทางอ้างอิง (Reference trajectory) ซึ่งจะทำให้ระบบจะมีพฤติกรรม Dynamic แบบอุดมคติ ทั้งนี้ต้องขึ้นอยู่กับเงื่อนไขบังคับของระบบและจำนวนพารามิเตอร์ที่เข้ามาเกี่ยวข้องกับระบบด้วย ในทางทฤษฎีเมื่อ $\Delta x = 0$ จะทำให้ $\Delta u = 0$ จะส่งผลให้ระบบ Dynamic มีประสิทธิภาพในการควบคุมสูงสุด ($u_r^*(t), x_r^*(t)$) อย่างไรก็ตามในความเป็นจริงมักมีสิ่งรบกวนจากภายนอกและความไม่แน่นอนของแบบจำลองที่ใช้ ซึ่งระบบควบคุมแบบป้อนกลับสามารถรักษาเสถียรภาพของระบบจนได้ Trajectory ที่ใกล้เคียง Reference trajectory โดยในส่วนของ Trajectory path planning สามารถนำระเบียบวิธีการ Dynamic Programming มาใช้คำนวณ Feedback gains ไว้ล่วงหน้าเพื่อให้ระบบสามารถทำงานได้อย่างรวดเร็ว (Real time) ในการใช้งานจริง



ภาพที่ 21 Trajectory/Optimizer และ Feedback control system

ที่มา: Robinett *et al.* (2005)

ในงานวิจัยนี้ได้นำระเบียบวิธีการ Dynamic Programming มาใช้ในการออกแบบระบบควบคุมการนำวิถีของจรวด MLRS ดังภาพที่ 22 จะแสดงให้เห็นถึงขอบเขตของงานวิจัยชิ้นนี้ โดยเริ่มจาก Desired objective หรือ \tilde{x}_k หมายถึง $x(t_k) - \hat{x}(t_k)$ เป็นเวกเตอร์ที่ได้มาจากความแตกต่างระหว่าง Measured trajectory หรือค่าจริงที่วัดได้ กับ Nominal trajectory ที่ตำแหน่ง State ที่กำหนดให้มีการนำวิถี สำหรับ Trajectory generator/Optimizer หรือ K_k หมายถึง Feedback gains เป็นเมทริกซ์ที่คำนวณได้จากระเบียบวิธีการ Dynamic Programming และ u_k หมายถึง $[\dot{c}_L \ \dot{c}_S]^T$ เป็นค่า Angle of attack และ Angle of sideslip ที่ต้องการปรับแก้ให้จรวดเคลื่อนที่ไปยังเป้าหมายที่ต้องการ โดยกำหนดให้ $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ และ $k = 1, \dots, N-1$ โดยที่ $N-1$ คือ จำนวน State ที่กำหนดให้มีการวิถี



ภาพที่ 22 Trajectory/Optimizer ของจรวด MLRS

ระเบียบวิธีการที่ใช้เลือกใช้สำหรับแก้ปัญหาคำนวณนำวิถีในงานวิจัยนี้คือ Dynamic Programming เนื่องจากมีข้อดีดังนี้

ก. เนื่องจาก Linear Programming ไม่เพียงพอต่อการ Implement แบบ Real time สำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยทั่วไปที่ฟังก์ชันเป้าหมาย (Objective function) และกำหนดเงื่อนไขบังคับ (Constraints) ที่สามารถจัดเข้ารูปแบบของระบบอยู่ในรูปเชิงเส้น เรียกว่า Linear Programming ซึ่งเป็นรูปแบบแทนระบบที่รู้จักและใช้งานอย่างแพร่หลาย สำหรับงานวิจัยชิ้นนี้มี Objective function เป็นสมการแบบยกกำลังสอง (Quadratic) ส่วน Constraints เป็นแบบเชิงเส้น

ข. ในแต่ละขั้นตอนที่ใช้ในการคำนวณจะไม่มีกรคำนวณซ้ำในแต่ละ State ที่ได้คำนวณไปแล้ว จึงทำให้ประสิทธิภาพควบคุมที่ได้เป็นแบบราบเรียบและสามารถนำปัญหา Physical model มาวิเคราะห์ร่วมกับปัญหาคำนวณนำวิถีโดยกำหนดสมมุติฐานให้ค่าเริ่มต้นเป็นศูนย์ ซึ่งจะส่งผลลดความผิดพลาดที่อาจเกิดจากการสมมุติค่า และเนื่องจากสามารถหา Feedback gains ที่ตำแหน่งใดๆตลอดช่วงที่นำวิถี จึงสามารถทำ Optimal return (การหาค่าที่เหมาะสมที่สุดแบบย้อนกลับ) ที่ตำแหน่งใดๆในช่วงเวลาที่กำหนดให้มีการนำวิถีได้

อุปกรณ์และวิธีการ

ในหัวข้อนี้จะแบ่งออกเป็น 2 ส่วน คือส่วนแรกจะกล่าวถึง อุปกรณ์ที่นำมาใช้ และส่วนที่สองกล่าวถึงวิธีการ ซึ่งประกอบด้วยขอบเขตของงานวิจัย และขั้นตอนการทำงานวิจัย

อุปกรณ์

1. เครื่องคอมพิวเตอร์แบบพกพา (Intel Core 2 Duo CPU T8300) ความเร็ว 2.2 GHz
2. เครื่องพิมพ์ชนิดใช้แสงเลเซอร์ (Laser Printer) และเครื่องพิมพ์ชนิดใช้หมึกฟ้น (Inkjet Printer)
3. ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของแบบจำลองจรวด MLRS (Dohrmann, 1996)
4. ข้อมูลสภาพอากาศที่ระดับความสูงที่ครอบคลุมการใช้งานจรวด MLRS (Dohrmann, 1996)
5. โปรแกรม MATHEMATICA version 8.0

วิธีการ

ขั้นตอนในการทำงานวิจัยคือ การเริ่มต้นด้วยการทำความเข้าใจในส่วนของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหาให้ถูกต้อง รวมทั้งต้องกำหนดขอบเขตของงานวิจัยที่เป็นไปได้และใช้ระยะเวลาอันเหมาะสมในการทำงาน จากนั้นจึงเริ่มทำการแบ่งขั้นตอนการทำงานออกเป็นส่วนต่างๆ โดยแต่ละส่วนจะเป็นการวิเคราะห์หลังลึกในรายละเอียดของทุกๆ ส่วนในงาน เพื่อให้เข้าใจและสามารถแก้ปัญหาที่จะเกิดขึ้นในอนาคตได้ โดยที่ส่วนต่างๆ ที่ทำการวิจัยนี้เมื่อนำมารวมเข้าด้วยกันจะทำให้ได้ระเบียบวิธีการที่สามารถนำไปใช้ในการปฏิบัติจริงได้

ขอบเขตของงานวิจัย

1. กำหนดช่วงเวลาการนำวิถีเริ่มตั้งแต่เชื้อเพลิงจรวดเผาไหม้หมดจนกระทั่งถึง ณ.เวลาที่จรวดอยู่ตำแหน่งสูงสุด (Motor burnout up to apogee)
2. กำหนดให้ Launch offsets (ค่ามุมที่คลาดเคลื่อนไปจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดแบบที่เหมาะสมที่สุดขณะที่เชื้อเพลิงเผาไหม้หมด) เป็นพารามิเตอร์หลักที่ทำให้จรวดยิงไม่ตรงเป้าหมาย
3. กำหนดให้สามารถนำมาปรับใช้กับจรวดหลายลากล่องแบบไม่นำวิถีที่มีอยู่แล้วในประเทศโดยการปรับปรุงอุปกรณ์ภายในตัวจรวดได้เพียงเล็กน้อย
4. กำหนดให้ทราบพิกัดตำแหน่งของจรวดด้วย GPS (ระบบหาพิกัดตำแหน่งด้วยดาวเทียม)
5. กำหนดให้มีรูปแบบการยิงจรวดที่ออกจากท่อยิงทีละท่อ ซึ่งใช้แบบจำลองของจรวด MLRS ที่มีคุณลักษณะทางอากาศยานศาสตร์ดังภาพที่ 26

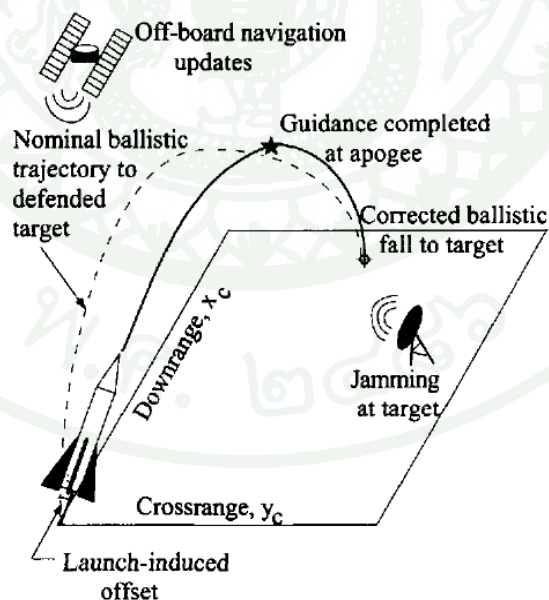
เพื่อให้เข้าใจและสามารถแก้ปัญหาการนำวิถีของจรวด MLRS จึงเริ่มจากศึกษา Physical Model ของจรวดด้วยการวิเคราะห์สมการการเคลื่อนที่ของจรวด MLRS ตามขอบเขตที่กำหนดในงานวิจัยและนำเข้าสู่ Guidance control problem (ปัญหาการควบคุมการนำวิถี) ซึ่งเป็นส่วนที่กำหนดพารามิเตอร์ที่ใช้ในการนำวิถี ตลอดจนนำสมการการเคลื่อนที่ของจรวดมาปรับให้เข้ากับปัญหาการนำวิถี จากนั้นจึงทำการ Transformation of guidance problem (การแปลงปัญหาการนำวิถี) ให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่องกับเวลา (Discrete time) แล้วจึงทำการแก้ปัญหาการนำวิถีด้วยระเบียบวิธีการที่เหมาะสม ซึ่งในงานวิจัยนี้คือ Dynamic Programming ขั้นตอนสุดท้ายเป็นการทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีการด้วยการ Simulation ในโปรแกรม MATHEMATICA จึงทำการสรุปผลและวิจารณ์ รวมทั้งข้อเสนอแนะสำหรับการทำงานในอนาคต

ขั้นตอนการทำงานวิจัย

สามารถแบ่งออกเป็น 5 ส่วนหลักๆ ได้แก่ (1) Physical model (2) Guidance control problem (3) Transformation of guidance problem (4) Dynamic Programming solution (5) Simulation

1. Physical Model (แบบจำลองทางฟิสิกส์)

Physical Model สำหรับจรวด MLRS ที่ทำการศึกษาในงานวิจัยนี้ มีรูปแบบการยิงจรวดที่ออกจากท่อยิงทีละท่อ และกำหนดช่วงเวลาการนำวิถีเริ่มตั้งแต่เชื้อเพลิงจรวดเผาไหม้หมดจนกระทั่งถึงณ.เวลาที่จรวดอยู่ตำแหน่งสูงสุด ดังนั้นจะไม่มีการนำวิถีในช่วงที่จรวดยังมีแรงขับเคลื่อนจากเชื้อเพลิง และกำหนดให้ใช้ GPS เพื่อระบุพิกัดตำแหน่งของจรวดในช่วงเวลาที่ทำการนำวิถี ดังนั้นหากมีการส่งสัญญาณรบกวนจากฝ่ายตรงข้ามบริเวณใกล้กับเป้าหมายในช่วงที่นำวิถีก็จะทำให้ขาดช่วงการนำวิถีในช่วงเวลาดังกล่าว ดังนั้นจึงเป็นสาเหตุให้มีการกำหนดเงื่อนไขการนำวิถีให้อยู่ในการเคลื่อนที่ช่วงแรกของจรวดเพื่อให้มีผลต่อสัญญาณรบกวนจากฝ่ายตรงข้ามน้อยที่สุด โดยกำหนดให้ปัจจัยหลักที่มีผลต่อความแม่นยำและความถูกต้องในการยิงจรวด MLRS คือ Launch offsets (ค่ามุมที่คลาดเคลื่อนไปจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของจรวดแบบที่เหมาะสมที่สุดขณะที่เชื้อเพลิงเผาไหม้หมด) ภาพที่ 23 แสดงรูปร่างของปัญหาการนำวิถีและ Trajectory ของจรวด ในช่วงที่กำหนดให้มีการนำวิถีรวมถึงพารามิเตอร์ที่ใช้ระบุพิกัดตำแหน่งของจรวด Downrange (ระยะทางการเคลื่อนที่เทียบกับแกน x), Crossrange (ระยะทางการเคลื่อนที่เทียบกับแกน y) และ Altitude (ระยะทางการเคลื่อนที่เทียบกับแกน z)



ภาพที่ 23 รูปร่างของปัญหาการนำวิถี

ที่มา: Dohrmann (1996)

Dohrmann (1996) กำหนดสมมติฐานให้จรวดมีมวลที่มีลักษณะเป็นจุด หรือ Point-mass ซึ่งไม่มีแรงขับเคลื่อนจากเชื้อเพลิงจรวดตลอดช่วงเวลาที่ทำการนำวิถีที่มีการเคลื่อนที่อยู่ภายในโลกซึ่งไม่สามารถเคลื่อนที่รอบตัวเอง และมีความสูงน้อยมากเมื่อเทียบกับรัศมีของโลก Dohrmann (1996) ได้ให้สมการ (12) ซึ่งเป็นสมการการเคลื่อนที่ของจรวดที่เป็น Point-mass สำหรับภาพที่ 24 แสดง Horizontal heading angle (ψ) และ Vertical heading angle (γ) ของจรวด MLRS ขณะกำลังตกสู่เป้าหมาย และภาพที่ 25 แสดงการเคลื่อนที่ของ Point-mass ในระนาบ 3 มิติ

$$\dot{x}_c = V \cos \gamma \cos \psi$$

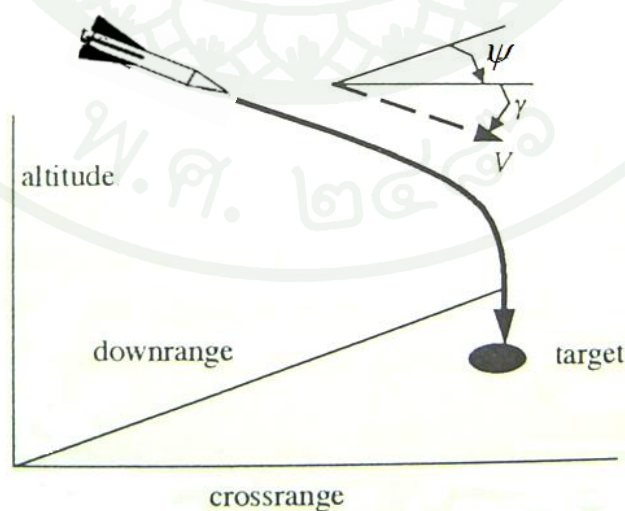
$$\dot{y}_c = V \cos \gamma \sin \psi$$

$$\dot{z}_c = V \sin \gamma$$

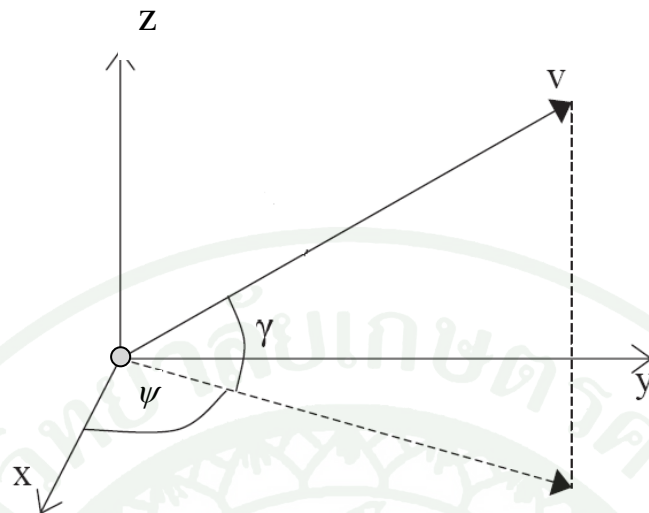
$$\dot{V} = \frac{-\rho V^2 C_D S}{2m} - g \sin \gamma \quad (12)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho V^2 C_L S}{2mV} - \left(\frac{g}{V} - \frac{V}{r} \right) \cos \gamma$$

$$\dot{\psi} = \frac{\rho V^2 C_S S}{2mV \cos \gamma}$$



ภาพที่ 24 Horizontal heading angle และ Vertical heading angle ของจรวด MLRS



ภาพที่ 25 การเคลื่อนที่ของ Point-mass ในระนาบ 3 มิติ

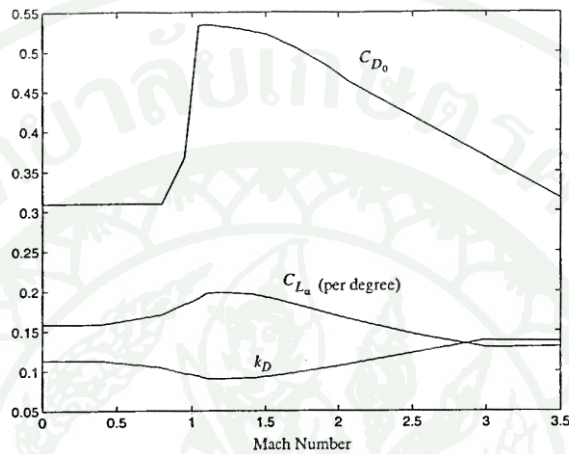
ที่มา: Jakka (2004)

Dohrmann (1996) ค่าสัมประสิทธิ์ C_L , C_S และ C_D สมมติให้เป็นเชิงเส้นเมื่อมุม α และ β มีขนาดเล็กและรูปทรงจรวดเป็นแบบสมมาตร ซึ่งทำให้ได้สมการ (13)

$$\begin{aligned} C_L &= C_{L_\alpha} \alpha \\ C_S &= C_{L_\alpha} \beta \\ C_D &= C_{D_0} + k_D (C_L^2 + C_S^2) \end{aligned} \quad (13)$$

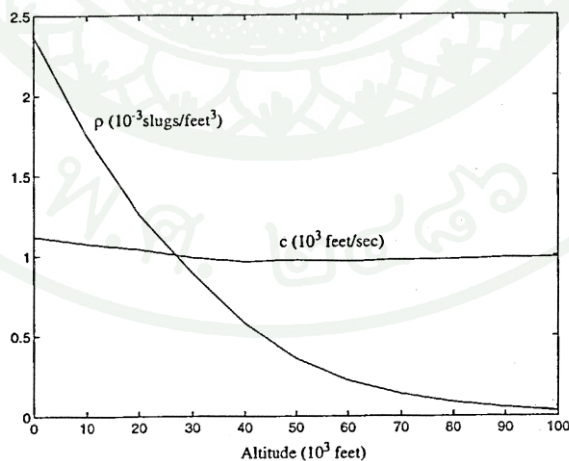
Dohrmann (1996) ภาพที่ 26 เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์ C_{D_0} , C_{L_α} และ k_D ที่ขึ้นอยู่กับค่า Mach number ซึ่งข้อมูลนี้ได้มาจากการทดลองในอุโมงค์ลมและเป็นแบบจำลองของจรวด MLRS ที่กำหนดให้มีรูปร่างทางอากาศพลศาสตร์แบบ Complex (ซับซ้อน) เนื่องจากตามสภาพความเป็นจริงจรวด MLRS มีการเปลี่ยนความเร็วจากช่วง Transonic ไปเป็น Moderate-supersonic ทำให้ค่าสัมประสิทธิ์ C_{D_0} , C_{L_α} และ k_D มีการเปลี่ยนแปลงคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์มากในช่วงดังกล่าว ในการทำงานส่วนนี้เพื่อให้ได้ข้อมูลมาใช้ในการวิจัย ผู้วิจัยได้ทำการแบ่งสเกลของกราฟในภาพที่ 26 ออกเป็นช่วงความเร็วของจรวดที่กำหนดให้มีการนำวิถีซึ่งมีค่า Mach Number อยู่ในช่วง 1.0 ถึง 2.5 (ตารางผนวกที่ ข1)

Dohrmann (1996) ภาพที่ 27 แสดงค่าความหนาแน่นของอากาศและความเร็วเสียงซึ่งเปลี่ยนแปลงตามสภาพอากาศมาตรฐานที่ระดับความสูงต่างๆที่ใช้ในงานวิจัยนี้ ข้อมูลเพิ่มเติมในส่วนของความหนาแน่นอากาศอ้างอิงมาจากแบบจำลองสภาพอากาศมาตรฐาน NRLMSISE (ภาพผนวกที่ ข1)



ภาพที่ 26 ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ของแบบจำลองจรวด MLRS

ที่มา: Dohrmann (1996)



ภาพที่ 27 ข้อมูลสภาพอากาศที่ระดับความสูงที่ครอบคลุมการใช้งานจรวด MLRS

ที่มา: Dohrmann (1996)

2. Guidance control problem (ปัญหาการควบคุมการนำวิถี)

Dohrmann (1996) กำหนดให้ Input u สำหรับ Guidance control problem ดังสมการ (14)

$$u = [\dot{C}_L \quad \dot{C}_S]^T \quad (14)$$

เมื่อนำ Physical model จากสมการที่ (12) และ (14) จัดให้อยู่ในรูปสมการอนุพันธ์ทั่วไปจะได้สมการ (15)

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_1) = x_1 \quad (15)$$

กำหนดให้ x เป็น State ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ดังนี้

$$x = [x_c \quad y_c \quad z_c \quad V \quad \gamma \quad \psi \quad C_L \quad C_S]^T \quad (16)$$

กำหนดให้ Input $u(t) = 0$ ที่ Initial condition (สถานะเริ่มต้น) สำหรับ Nominal trajectory หรือ $\hat{x}(t_1)$ จะได้สมการ (17)

$$\hat{x}(t_1) = [\hat{x}_c(t_1) \quad \hat{y}_c(t_1) \quad \hat{z}_c(t_1) \quad \hat{V}(t_1) \quad \hat{\gamma}(t_1) \quad \hat{\psi}(t_1) \quad 0 \quad 0]^T \quad (17)$$

และกำหนดให้ที่ Nominal trajectory จรวดพุ่งชนเป้าหมายที่เวลา T จะได้สมการ (18) ซึ่งมี (x_{ct}, y_{ct}, z_{ct}) จึงเป็นพิกัดตำแหน่งของเป้าหมาย

$$\begin{aligned} \hat{x}_c(T) &= x_{ct} \\ \hat{y}_c(T) &= y_{ct} \\ \hat{z}_c(T) &= z_{ct} \end{aligned} \quad (18)$$

ดังนั้นปัญหาในการนำวิถีในสมการ (19) จะเป็นสมการ Objective function ที่ใช้วิเคราะห์หาค่า Input $u(t)$ ที่จะทำให้ได้ค่า $\Gamma(u)$ น้อยที่สุดแบบที่ไม่มีการเจาะจงเวลาสุดท้าย

$$\Gamma(u) = \lambda[(x_c(t_f) - x_{ct})^T \quad (y_c(t_f) - y_{ct})^T] \begin{bmatrix} (x_c(t_f) - x_{ct}) \\ (y_c(t_f) - y_{ct}) \end{bmatrix} + \int_{t_1}^{t_f} [u(t)]^T [u(t)] dt \quad (19)$$

สำหรับสมการ (20) เป็นการกำหนดเงื่อนไขให้ Input $u(t) = 0$ ที่ช่วงเวลา $t = t_1, t_N \leq t \leq t_f$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

3. Transformation of Guidance problem (การแปลงปัญหาการนำวิถี)

Dohrmann (1996) แปลงปัญหาการนำวิถีให้เป็นแบบไม่ต่อเนื่องกับเวลา (Discrete time) กำหนดให้ $\tilde{x}(t)$ เป็นการเคลื่อนที่ของจรวดเป็นแบบ Ballistic trajectory ตั้งแต่เวลา t_N จนถึง t_f และกำหนดให้ Input $u(t) = 0$ ที่ Initial condition $t = t_N$

$$\tilde{x}(t_N) = [\tilde{x}_c(t_N) \quad \tilde{y}_c(t_N) \quad \tilde{z}_c(t_N) \quad \tilde{V}(t_N) \quad \tilde{\gamma}(t_N) \quad \tilde{\psi}(t_N) \quad 0 \quad 0]^T \quad (21)$$

เมื่อกำหนดให้เวลาที่ Final condition เป็นเวลาขณะที่จรวดชนเป้าหมาย ซึ่งเวลาที่ t_f ของ Controlled trajectory ไม่จำเป็นต้องเท่ากับเวลา T ของ Nominal trajectory จะได้สมการ (22) และในขณะเดียวกันที่ Initial condition $t = t_N$ เวกเตอร์ $\tilde{x}(t)$ ของ Ballistic trajectory กับ เวกเตอร์ $\hat{x}(t)$ ของ Nominal trajectory ไม่จำเป็นต้องเท่ากัน ดังนั้นจะได้สมการ (23)

$$\Delta t_f = t_f - T \quad (22)$$

$$\Delta x(t_N) = \tilde{x}(t_N) - \hat{x}(t_N) \quad (23)$$

เมื่อทำการประมาณค่าแบบเชิงเส้นจะได้สมการ (24) และ (25)

$$\tilde{z}_c(t_f) = z_{ct} + C\Delta x(t_N) + d\Delta t_f \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t_f) \\ \tilde{y}_c(t_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{ct} \\ y_{ct} \end{bmatrix} - E\Delta x(t_N) + F\Delta t_f \quad (25)$$

ซึ่งเมื่อจรวดตกถึงเป้าหมาย $z_c(t_f) = z_{ct}$ จากสมการ (24) จะได้สมการ (26)

$$\Delta t_f = -C \frac{\Delta x(t_N)}{d} \quad (26)$$

จากนั้นแทนค่าสมการ (25) ลงในสมการ (26) จะได้สมการ (27) และ (28)

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_c(t_f) - x_{ct} \\ \tilde{y}_c(t_f) - y_{ct} \end{bmatrix} = G\Delta x(t_N) \quad (27)$$

โดยที่

$$G = E - \frac{1}{d}FC \quad (28)$$

จากสมการ (27) จะเปลี่ยนปัญหาการนำวิถีให้อยู่ในรูปมาตรฐานทั่วไป สำหรับการพิจารณาการเคลื่อนที่ของจรวดทำโดยการแบ่ง Input u ออกเป็นส่วนๆ (Discrete time) สำหรับในช่วงเวลาที่มีการนำวิถี ระหว่าง $t_1 \leq t \leq t_N$

$$u(t) = u_k \quad \text{เมื่อ } t_k \leq t \leq t_{k+1} \quad (29)$$

$$k = 1, \dots, N-1$$

ดังนั้น

$$t_k = t_1 + h(k-1) \quad (30)$$

โดยที่

$$h = \frac{(t_N - t_1)}{(N-1)} \quad (31)$$

จากที่กำหนดให้ $u = 0$ สำหรับช่วงเวลา $t \geq t_N$ ซึ่งทำให้ $\tilde{x}(t)$ ในสมการ (21) สอดคล้องกับสมการ (20) สำหรับช่วงเวลา $t_N \leq t \leq t_f$ โดยที่ในช่วงเวลานี้สามารถพิจารณาให้ $x(t) = \tilde{x}(t)$ ซึ่งเมื่อแทนค่าสมการ (27) และ (29) ลงในสมการ (19) จะได้สมการ (32) ซึ่งเป็น Objective function ที่ใช้วิเคราะห์หาค่า Input u_k ที่จะทำให้ได้ค่า Γ น้อยที่สุด

$$\Gamma(u_k) = \lambda \tilde{x}_N^T G^T G \tilde{x}_N + h \sum_{k=1}^{N-1} u_k^T u_k \quad (32)$$

โดยที่

$$\tilde{x}_k = x(t_k) - \hat{x}(t_k), \quad k = 1, \dots, N \quad (33)$$

ถ้าต้องการให้สมการ (20) เป็นจริงที่เวลา $t = t_N$ สมาชิกในตำแหน่งที่ 7 และ 8 ของ \tilde{x}_N ต้องมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นสำหรับ Input $u(t) = u_k$ จากสมการ (29) และทำการอินทิเกรต สมการ (14) ในช่วงเวลา t_{N-1} ถึง t_N จะได้สมการ (34)

$$u_{N-1} = -D \tilde{x}_{N-1} \quad (34)$$

โดยที่

$$D = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

สำหรับ Nominal trajectory เมื่อทำให้เป็นสมการแบบเชิงเส้นจะได้สมการ (36)

$$\tilde{x}_{k+1} = A_k \tilde{x}_k + B_k u_k, \quad k = 1, \dots, N-1 \quad (36)$$

ซึ่งการหา State transition matrices A_k และ B_k ได้จากการอินทิเกรตเชิงตัวเลข (ภาคผนวก ข) และเมื่อแทนสมการ (34) และ (36) ด้วย $k = N-1$ ลงในสมการ (32) จะได้สมการ (37) ซึ่งอยู่ในรูป Discrete time

$$\Gamma(u_k) = \tilde{x}_{N-1}^T W_{N-1} \tilde{x}_{N-1} + h \sum_{k=1}^{N-2} u_k^T u_k \quad (37)$$

โดยที่

$$W_{N-1} = \lambda (A_{N-1} - B_{N-1} D)^T G^T G (A_{N-1} - B_{N-1} D) + h D^T D \quad (38)$$

กล่าวโดยสรุปการคำนวณข้างต้นเป็นการเปลี่ยนปัญหาการนำวิถีจรวดจากแบบที่ไม่มีมีการเจาะจงเวลาสุดท้ายในสมการ (19) มาเป็นแบบเจาะจงเวลาสุดท้าย t_N ในสมการ (37)

4. Dynamic Programming Solution

สามารถสรุปขั้นตอนของระเบียบวิธีการ Dynamic Programming ในการแก้ปัญหาการนำวิธีจรวัด MLRS ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1: เริ่มต้นจาก W_{N-1} จากสมการ (38) และหา W_k โดยการคำนวณย้อนกลับสำหรับ $k = N-2, \dots, 1$ ด้วยสมการ (39)

$$W_k = A_k^T W_{k+1} A_k - H_{2k} H_{3k}^{-1} H_{2k}^T \quad (39)$$

โดยที่

$$H_{2k} = A_k^T W_{k+1} B_k \quad (40)$$

$$H_{3k} = h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + B_k^T W_{k+1} B_k \quad (41)$$

ในขั้นตอนต่อไปมีการเก็บค่า Feedback gains ที่เป็นเมทริกซ์ที่คำนวณได้จากสมการ (42)

$$K_k = H_{3k}^{-1} H_{2k}^T \quad (42)$$

ขั้นตอนทั้งหมดในส่วนของการคำนวณเมทริกซ์ Feedback gains (K_k) ข้างต้นจะทำก่อนเริ่มยิงจรวัด ซึ่งจะทำให้การนำวิธีของจรวัด MLRS มีการทำงานได้รวดเร็วขึ้น (Real time)

ขั้นตอนที่ 2: คำนวณหาค่า Input u_1, \dots, u_{N-1} จากสมการ (43)

$$u_k = -K_k \tilde{x}_k \quad (43)$$

สำหรับ u_{N-1} หาได้จากสมการ (34) และ (35) สำหรับ \tilde{x}_k ในสมการ (34) และ (43) เป็นเวกเตอร์ของผลต่างระหว่าง Measured trajectory หรือค่าที่วัดได้ กับค่า Nominal trajectory ดังแสดงในสมการ (33) และจากที่กำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ C_L และ C_S มีค่าเป็นศูนย์ที่ $t = t_1$ จึงทำให้สามารถกำหนดให้สมาชิกแถวที่ 7 และ 8 ของ \tilde{x}_1 มีค่าเป็นศูนย์ และ Input u จะได้มาจากการอินทิเกรตสมการ (14) ดังนี้

$$\begin{bmatrix} C_L(t_{k+1}) \\ C_S(t_{k+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_L(t_k) \\ C_S(t_k) \end{bmatrix} + hu_k \quad (44)$$

$$k = 1, \dots, N-1$$

ในช่วงเวลาระหว่าง t_k และ t_{k+1} ค่าสัมประสิทธิ์ C_L และ C_S มีการเปลี่ยนแปลงแบบเชิงเส้น ดังที่ได้กล่าวไปแล้วข้างต้นถึงข้อดีของระเบียบวิธีการ Dynamic Programming คือสามารถให้ Optimal return ที่ตำแหน่งใดๆในช่วงเวลาที่มีการนำวิถี ซึ่งหมายถึง สมการ (43) ในที่นี้จะนำมาใช้เป็น Control law ที่ใช้สำหรับหาค่า \tilde{x}_k และ u_i ที่จะทำให้ได้ค่า Γ_k ที่น้อยที่สุด ด้วยสมการ (45)

$$\Gamma_k(\tilde{x}_k, u_i) = \tilde{x}_{N-1}^T W_{N-1} \tilde{x}_{N-1} + h \sum_{i=k}^{N-2} u_i^T u_i \quad (45)$$

5. Simulation

แบบจำลองของจรวด MLRS ที่ใช้เป็นข้อมูลในการศึกษาครั้งนี้ได้กำหนดให้มี Burnout mass 14.25 slug (ดูคำอธิบายคำจำกัดความของหน่วยมวลในภาคผนวก ก) มีพื้นที่อ้างอิง 0.4356 ft^2 การเปลี่ยนแปลงของ Mach No. มีค่าอยู่ระหว่าง 1.09 ถึง 2.33 และได้แบ่งช่วงเวลานำวิถีสำหรับ Nominal trajectory ออกเป็น 500 time steps โดยกำหนดให้ใช้ข้อมูล Boundary conditions สำหรับ Nominal trajectory ของจรวด MLRS ในตารางที่ 3 เป็นแบบจำลองที่ 1 และในตารางที่ 4 เป็นแบบจำลองที่ 2 ในการจำลองการทำงานด้วยกราฟ Nominal trajectory และ Controlled trajectory ได้จากการประมาณค่าเชิงตัวเลขจากสมการอนุพันธ์ $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_1) = x_1$ ด้วยวิธี Fixed-step, 4th order, Runge-kutta

สำหรับ Trajectory ในช่วงเวลาที่มีการนำวิถี (Controlled trajectory) คือ $t_1 \leq t \leq t_N$ กำหนดให้ใช้ $\lambda/h = 1 \times 10^{-6}$ และมีจำนวน State = 209 time steps คือ x_1, \dots, x_N ($N = 209$) โดยใช้ Input u จากสมการ (34) และ (43) และในส่วนของ Controlled ballistic trajectory คือ $t > t_N$ ได้จากการกำหนดเงื่อนไขให้ค่าสัมประสิทธิ์ C_L และ C_S มีค่าเป็นศูนย์

ในการวิเคราะห์จะพิจารณาค่ามุมคลาดเคลื่อนไปจาก Nominal trajectory ขณะที่เชื้อเพลิงเผาไหม้หมด ในที่นี้หากกำหนดให้ค่ามุม γ และ ψ เป็นเครื่องหมาย (-) หมายถึงตำแหน่งที่

เชื้อเพลิงจรวดเผาไหม้หมด Launch offsets ทำมุนน้อยกว่าค่ามุนของ Nominal trajectory ในทางตรงกันข้ามหากค่ามุน γ และ ψ เป็นเครื่องหมาย (+) จะหมายถึง Launch offsets ที่กำหนดนั้นทำมุนมากกว่าค่ามุนของ Nominal trajectory

ตารางที่ 3 แบบจำลองที่ 1

กำหนด Boundary Condition สำหรับ Nominal trajectory ของจรวด MLRS ใช้เป็นข้อมูลในกรณีที่ 1 และ 2 โดยกำหนดให้ตำแหน่ง Apogee จรวดมีความสูง 41,000 ft

<i>Variable</i>	<i>Initial condition</i>	<i>Final value</i>	<i>Unit</i>
x_c	0	98,270	ft
y_c	0	0	ft
z_c	7,390	0	ft
V	2,532	1,332	ft / sec
γ	48.64	-65.13	deg
ψ	0	0	deg

ตารางที่ 4 แบบจำลองที่ 2

กำหนด Boundary Condition สำหรับ Nominal trajectory ของจรวด MLRS ใช้เป็นข้อมูลในกรณีที่ 3 และ 4 โดยกำหนดให้ตำแหน่ง Apogee จรวดมีความสูง 27,600 ft

<i>Variable</i>	<i>Initial condition</i>	<i>Final value</i>	<i>Unit</i>
x_c	0	92,952	ft
y_c	0	0	ft
z_c	7,390	0	ft
V	2,532	1,222	ft / sec
γ	35	-57.64	deg
ψ	0	0	deg

ในการทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีการ Dynamic Programming สำหรับแบบจำลองที่ 1 (ตารางที่ 3) แบ่งเป็น 2 กรณี ได้แก่

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $\gamma = 0.36^\circ$ และ $\psi = 1^\circ$

กรณีที่ 2 กำหนดให้ $\gamma = -0.64^\circ$ และ $\psi = -0.75^\circ$

และสำหรับแบบจำลองที่ 2 (ตารางที่ 4) แบ่งเป็น 2 กรณี เช่นกัน ได้แก่

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $\gamma = 0.5^\circ$ และ $\psi = 1^\circ$

กรณีที่ 4 กำหนดให้ $\gamma = -0.5^\circ$ และ $\psi = -0.75^\circ$

สำหรับ Launch offsets ที่เลือกใช้ในแต่ละกรณีจะอยู่ในช่วงไม่เกิน $\pm 1^\circ$ เนื่องจากในงานวิจัยนี้ ได้กำหนดให้จรวด MLRS มีการปรับปรุงโครงสร้างภายในจรวดได้เพียงเล็กน้อยเพื่อให้สามารถนำวิถีได้ ดังนั้นการเพิ่มอุปกรณ์ภายในตัวจรวดเพื่อใช้ในการปรับแก้ Trajectory ของจรวดจึงทำได้ไม่มากเช่น Moving Mass Trim Controller เป็นผลทำให้ Angle of attack (α) และ Angle of sideslip (β) ที่ใช้ปรับแก้ Trajectory ของจรวดสามารถปรับได้ไม่เกิน $\pm 1^\circ$ ประกอบกับในส่วนของการสมการ (13) ได้มีการกำหนดให้ค่าสัมประสิทธิ์ C_L , C_S และ C_D สมมติให้เป็นเชิงเส้นเมื่อมุม α และ β มีขนาดเล็ก ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษา Trajectory ของจรวดที่เกิดจาก Launch offsets ทั้ง 4 กรณีข้างต้น

สถานที่ทำงานวิจัย

กองวิชาวิศวกรรมไฟฟ้า, โรงเรียนนายเรืออากาศ 171/1 ถนน พหลโยธิน แขวงคลองถนน เขตสายไหม กรุงเทพฯ 10220

ระยะเวลาในการวิจัย

การวิจัยเริ่มตั้งแต่เดือนมิถุนายน 2551 สิ้นสุดเมื่อเดือนเมษายน 2554

ผลและวิจารณ์

ผล

ผลจากการจำลองการทำงานของ Dynamic Programming

จากการทำงานวิจัยเพื่อศึกษาระบบนำวิถีสำหรับจรวดหลายลำกล้อง (MLRS) โดยเลือกใช้ระเบียบวิธีการ Dynamic Programming การทำงานวิจัยเริ่มต้นด้วยการพิจารณาในส่วนของ Physical model, Guidance control problem, Transformation of guidance problem, Dynamic Programming Solution และขั้นตอนสุดท้าย คือ Simulation ด้วยโปรแกรม MATHEMATICA เพื่อใช้ทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธีการ Dynamic Programming โดยใช้แบบจำลองที่ 1 (สำหรับกรณีที่ 1 และ 2) และแบบจำลองที่ 2 (สำหรับกรณีที่ 3 และ 4) เป็นตัวอย่าง ซึ่งได้ทำการเปลี่ยนค่า Launch offsets ดังนี้

กรณีที่ 1 กำหนดให้ $\gamma = 0.36^\circ$ และ $\psi = 1^\circ$

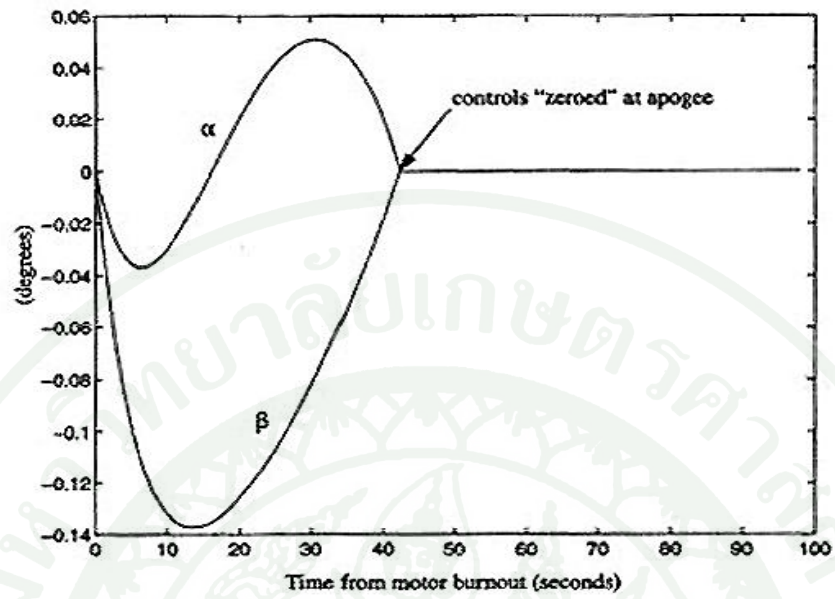
กรณีที่ 2 กำหนดให้ $\gamma = -0.64^\circ$ และ $\psi = -0.75^\circ$

กรณีที่ 3 กำหนดให้ $\gamma = 0.5^\circ$ และ $\psi = 1^\circ$

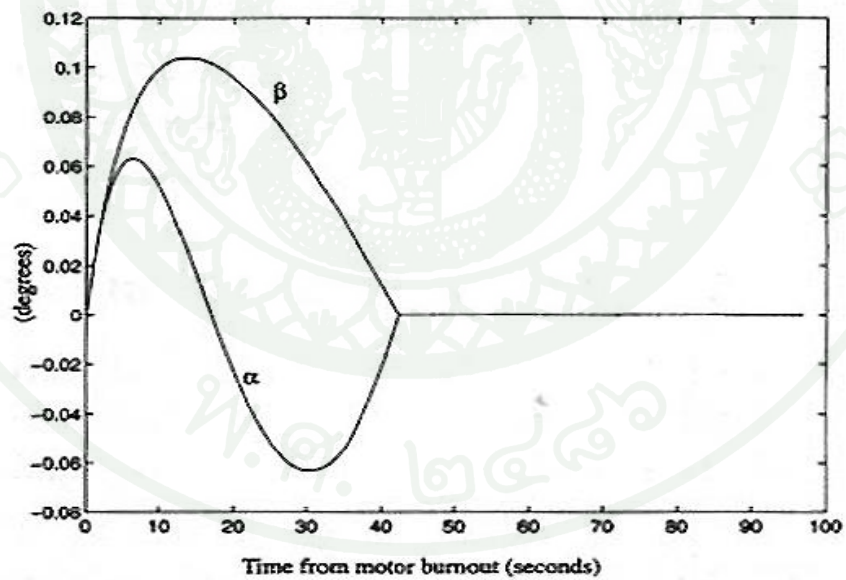
กรณีที่ 4 กำหนดให้ $\gamma = -0.5^\circ$ และ $\psi = -0.75^\circ$

ให้ผลการทดสอบดังต่อไปนี้

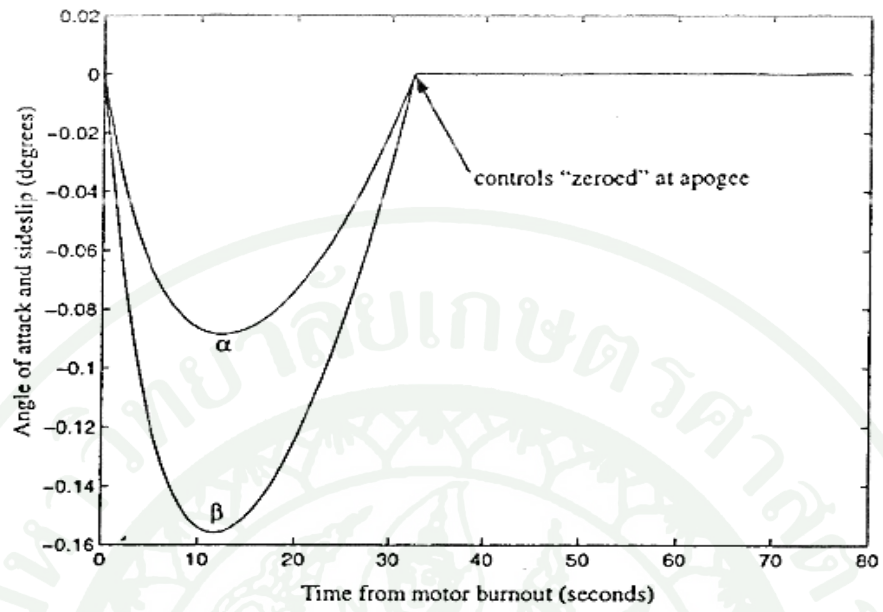
จากภาพที่ 28, 29, 30 และ 31 เป็นกราฟแสดง Angle of attack (α) และ Angle of sideslip (β) ที่ใช้ในการควบคุมจรวด MLRS ให้ไปยังเป้าหมายที่ต้องการสำหรับ Launch offsets ในแต่ละกรณีที่แตกต่างกัน ซึ่งค่ามุม α และ β คำนวณได้จากสมการ (13) สำหรับทั้ง 4 กรณี เมื่อคำนวณออกมาแล้วจะให้ค่ามุม α และ β ที่จะนำมาใช้ปรับแก้ไม่เกิน $\pm 1^\circ$ สำหรับเวลาที่ $t = 0$ เป็นช่วงที่เริ่มนำวิถี คือ ขณะที่ Motor burnout และจากการที่กำหนดให้มีจำนวน State = 209 time steps จึงทำให้สิ้นสุดการนำวิถี ณ ตำแหน่ง Apogee ที่เวลา $t = 42.5$ วินาที (สำหรับกรณีที่ 1 และ 2) และที่เวลา $t = 32.5$ วินาที (สำหรับกรณีที่ 3 และ 4) หลังจากสิ้นสุดการนำวิถีได้มีการกำหนดเงื่อนไขให้ $C_L = C_S = 0$ ดังนั้นจึงทำให้ค่ามุม α และ β มีค่าเป็นศูนย์ด้วย



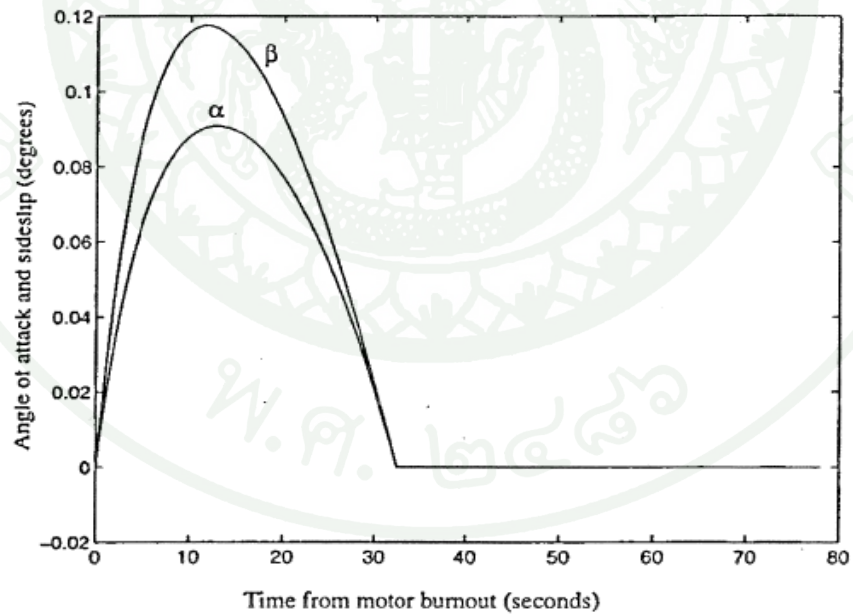
ภาพที่ 28 Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 1 ($\gamma = 0.36^\circ$, $\psi = 1^\circ$)



ภาพที่ 29 Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 2 ($\gamma = -0.64^\circ$, $\psi = -0.75^\circ$)

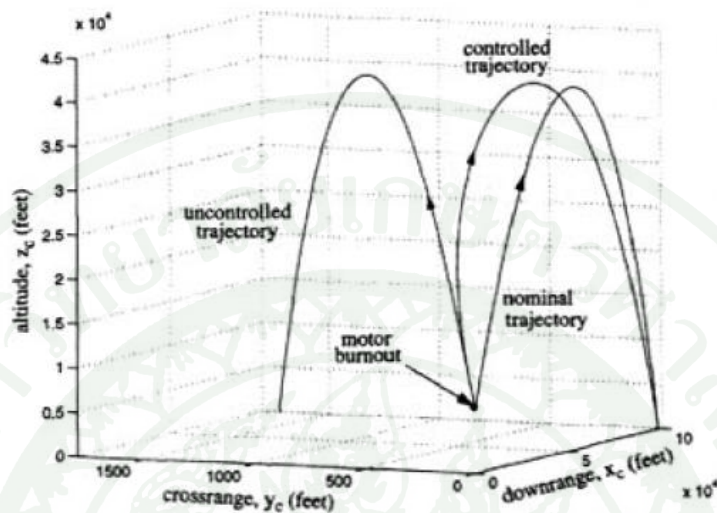


ภาพที่ 30 Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 3 ($\gamma = 0.5^\circ, \psi = 1^\circ$)



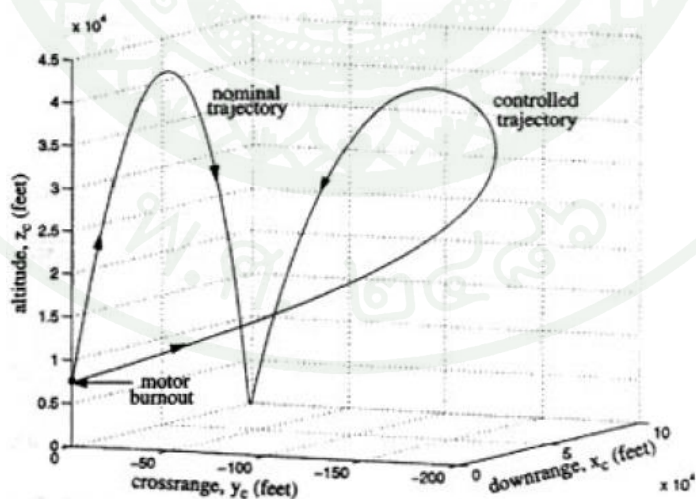
ภาพที่ 31 Aerodynamic control angle สำหรับกรณีที่ 4 ($\gamma = -0.5^\circ, \psi = -0.75^\circ$)

จากภาพที่ 32 เป็นกราฟแสดง Nominal trajectory, Controlled trajectory และ Uncontrolled trajectory สำหรับกรณีที่ 1



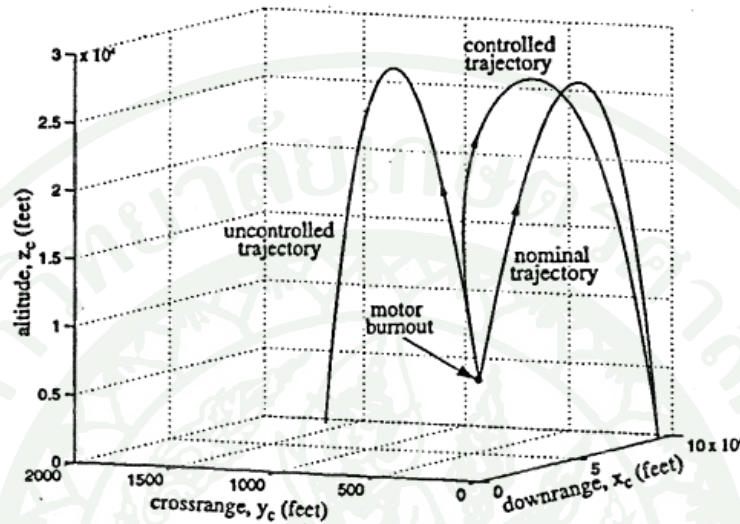
ภาพที่ 32 Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 1 ($\gamma = 0.36^\circ$, $\psi = 1^\circ$)

จากภาพที่ 33 เป็นกราฟแสดง Nominal trajectory และ Controlled trajectory สำหรับกรณี
ที่ 2



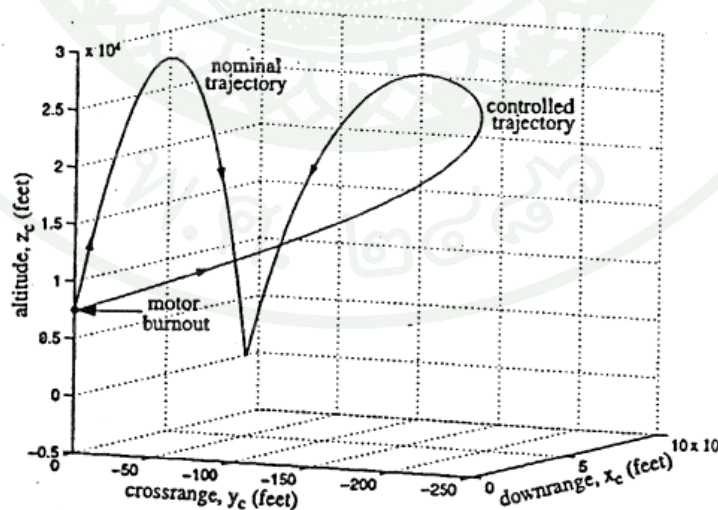
ภาพที่ 33 Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 2 ($\gamma = -0.64^\circ$, $\psi = -0.75^\circ$)

จากภาพที่ 34 เป็นกราฟแสดง Nominal trajectory, Controlled trajectory และ Uncontrolled trajectory สำหรับกรณีที่ 3



ภาพที่ 34 Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 3 ($\gamma = 0.5^\circ, \psi = 1^\circ$)

จากภาพที่ 35 เป็นกราฟแสดง Nominal trajectory และ Controlled trajectory สำหรับกรณี
ที่ 4



ภาพที่ 35 Point-mass trajectory สำหรับกรณีที่ 4 ($\gamma = -0.5^\circ, \psi = -0.75^\circ$)

จากการคำนวณและ Simulate เมื่อกำหนด Launch offsets จากทั้ง 4 กรณี ด้วยโปรแกรม MATHEMATICA ในการทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธี Dynamic Programming ซึ่งแสดงผลดังกราฟข้างต้น และเมื่อทำการเปรียบเทียบพารามิเตอร์ x_c, y_c และ z_c ที่สถานะ Nominal trajectory at burnout state, Nominal trajectory at target state และ Controlled trajectory at target state แสดงผลในตารางที่ 5, 6, 7 และ 8 ดังนี้

ตารางที่ 5 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 1 ($\gamma = 0.36^\circ, \psi = 1^\circ$)

<i>Variable</i>	<i>Nominal trajectory at burnout state</i>	<i>Nominal trajectory at target state</i>	<i>Controlled trajectory at target state</i>
$x_c (ft)$	0	98,270	98,277
$y_c (ft)$	0	0	0
$z_c (ft)$	7,390	0	0

ตารางที่ 6 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 2 ($\gamma = -0.64^\circ, \psi = -0.75^\circ$)

<i>Variable</i>	<i>Nominal trajectory at burnout state</i>	<i>Nominal trajectory at target state</i>	<i>Controlled trajectory at target state</i>
$x_c (ft)$	0	98,270	98,275
$y_c (ft)$	0	0	0
$z_c (ft)$	7,390	0	0

ตารางที่ 7 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 3 ($\gamma = 0.5^\circ, \psi = 1^\circ$)

<i>Variable</i>	<i>Nominal trajectory at burnout state</i>	<i>Nominal trajectory at target state</i>	<i>Controlled trajectory at target state</i>
$x_c (ft)$	0	92,952	92,952.4
$y_c (ft)$	0	0	0
$z_c (ft)$	7,390	0	0

ตารางที่ 8 Trajectory at burnout state และ target state สำหรับกรณีที่ 4 ($\gamma = -0.5^\circ, \psi = -0.75^\circ$)

Variable	Nominal trajectory at burnout state	Nominal trajectory at target state	Controlled trajectory at target state
$x_c (ft)$	0	92,952	92,953.2
$y_c (ft)$	0	0	0
$z_c (ft)$	7,390	0	0

วิจารณ์

จากการทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธี Dynamic Programming เพื่อใช้ในการนำวิถีให้กับจรวด MLRS ซึ่งได้ทดลองทำการเปลี่ยนค่า Launch offsets ดังรายละเอียดข้างต้น ได้ผลการทดสอบด้วยแบบจำลอง Boundary condition ของจรวด MLRS ที่ 1 และ 2 ได้แสดงไว้ดังตารางที่ 5, 6, 7 และ 8 โดยมีสาระสำคัญดังต่อไปนี้

ความสัมพันธ์ระหว่างการปรับแก้ Aerodynamic control angle เมื่อกำหนด Launch offsets ต่างๆ

ในการกำหนด Launch offsets (γ, ψ) ที่ใช้เป็นกรณีศึกษาด้วยเครื่องหมาย (+) หรือ (-) จะมีผลต่อทิศทางขณะเริ่มต้นปรับแก้มุม Angle of attack (α) และ Angle of sideslip (β) ดังเช่นกรณีที่ 1 และ 3 Launch offsets ทำมุมมากกว่า Nominal trajectory หรือมีเครื่องหมาย (+) ดังนั้นในขณะเริ่มต้นปรับแก้ทิศทางจะเป็นไปในทางตรงกันข้าม คือ α, β จะมีทิศทางไปทางเครื่องหมาย (-) ส่วนในกรณีที่ 2 และ 4 มีทิศทางขณะเริ่มต้นปรับแก้มุม α, β ตรงกันข้ามกับกรณีที่ 1 และ 3 เนื่องจากค่า Launch offsets ทำมุมน้อยกว่า Nominal trajectory หรือมีเครื่องหมาย (-)

ในการควบคุม Trajectory ของจรวด MLRS สำหรับช่วงที่มีการนำวิถีเป็นแบบ Real time และเนื่องจากทุกจุดบนเส้นกราฟเป็นจุด Optimum จึงส่งผลให้กราฟของ Aerodynamic control angle มีการเปลี่ยนแปลงค่อนข้างมาก ดังนั้นการปรับแก้มุม α, β ที่ช่วงเวลาใดๆขณะที่นำวิถี อาจมีการปรับเกินกว่า Nominal trajectory ดังเช่นภาพที่ 28 และ 29 แต่เมื่อถึงเวลาสิ้นสุดการนำวิถี ระเบียบวิธีการ Dynamic Programming จะสามารถปรับค่ามุมกลับมายัง Trajectory ที่ทำให้จรวด MLRS ตกสู่เป้าหมายได้

ในสภาพความเป็นจริง จรวด MLRS ที่มีการใช้งานในสนามรบซึ่งอาจได้รับผลกระทบเนื่องจากลมขณะที่กำลังอยู่ในช่วงนำวิถี เช่น Head wind ซึ่งทำให้เกิดความผิดพลาดที่ Downrange เช่นเดียวกับ Cross wind ซึ่งทำให้เกิดความผิดพลาดที่ Crossrange ดังนั้นควรที่จะปรับปรุงระเบียบวิธีการในการนำวิถีให้ครอบคลุมผลเนื่องจากลมซึ่งจะทำให้การยิงจรวดมีความถูกต้องและแม่นยำขึ้น และหากปรับปรุงหรือลดสัญญาณรบกวนจากฝ่ายตรงข้ามได้ ก็จะสามารถเพิ่มระยะเวลาการนำวิถีได้นานขึ้น ซึ่งจะเป็นการเพิ่มความถูกต้องและแม่นยำในการยิงจรวด MLRS ได้เช่นกัน



สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

เริ่มจากที่มาของปัญหา MLRS ที่มีอยู่ในประเทศไทยเป็นแบบไม่มีระบบนำวิถีจรวด จึงต้องการหาระเบียบวิธีการที่สามารถนำมาปรับใช้ในการนำวิถีให้กับจรวดที่มีอยู่แล้วให้สามารถนำวิถีได้ซึ่งเป็นการลดค่าใช้จ่ายด้านการทหาร ผู้วิจัยจึงได้ทำการศึกษาปัญหาการนำวิถีของ MLRS ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของปัญหาการหาค่าที่เหมาะสมที่สุดแบบกำหนดเงื่อนไขบังคับ โดยกำหนดขอบเขตงานวิจัยให้สามารถทราบพิกัดตำแหน่งจรวดด้วย GPS สำหรับช่วงเวลาที่ทำการนำวิถีเริ่มต้นตั้งแต่เชื้อเพลิงในจรวดเผาไหม้หมดจนถึงเวลาที่จรวดอยู่ตำแหน่งสูงสุด โดยพิจารณาให้ Launch offsets เป็นพารามิเตอร์หลักที่ทำให้จรวดยิงไม่ตรงเป้าหมาย ในส่วนของขั้นตอนการทำงานวิจัยเริ่มจากการศึกษาในส่วนของ Physical model เพื่อหาสมการการเคลื่อนที่ของจรวดแบบ Point mass และเปลี่ยนให้อยู่ในรูปปัญหาการนำวิถีที่เป็นสมการแบบ Discrete time หลังจากนั้นจึงนำระเบียบวิธีการ Dynamic Programming มาใช้แก้ปัญหการนำวิถีให้กับ MLRS ข้อสังเกตอย่างหนึ่งของระเบียบวิธีการ Dynamic Programming คือปัญหาที่จะนำมาปรับใช้ส่วนใหญ่จัดเป็นกรณีปัญหาเฉพาะที่ไม่สามารถหาสมการที่แน่นอน โดยต้องเริ่มต้นศึกษา Physical model และทำตามขั้นตอนวิธีการในการแก้ปัญหาใหม่ทุกครั้งซึ่งเป็นส่วนที่ยุ่ยากที่สุดในการทำงานวิจัย

จากการที่มีการคำนวณ Feedback gains ไว้ล่วงหน้าก่อนการยิงจรวดจึงทำให้สามารถหาค่า Angle of attack (α) และ Angle of sideslip (β) ที่ต้องใช้ปรับแก้ Trajectory ของจรวดได้แบบ Real time ซึ่งเหมาะในการนำไปใช้งานจริง และสามารถหา Optimal return จากตำแหน่งใดๆที่อยู่ในช่วงเวลาที่นำวิถีได้

ในขั้นตอนสุดท้ายเป็นการทดสอบความถูกต้องของระเบียบวิธี Dynamic Programming พบว่า Feedback gains ที่คำนวณได้จะมีความถูกต้องในกรณีที่กำหนดให้ Launch offsets มีค่าน้อยกว่า $\pm 1^\circ$ แต่ทั้งนี้ต้องขึ้นอยู่กับความถูกต้องของแบบจำลองของ MLRS ที่ใช้ ความถูกต้องของเครื่องมือวัด และความผิดพลาดของการปรับแก้ค่า Angle of attack และ Angle of side slip จาก Internal hardware actuator ด้วย

ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยนี้ได้กำหนดให้นำวิถีจรวด MLRS ในช่วงที่เชื้อเพลิงถูกเผาไหม้หมดแล้ว ซึ่งทำให้ไม่มีผลจากอัตราเร่งของคินซัทจรวด สำหรับกรณีอื่นที่น่าสนใจคือการนำวิถีในช่วงที่เชื้อเพลิงยังเผาไหม้ไม่หมดหรือเป็นช่วงที่มีการเปลี่ยนแปลงของน้ำหนักจรวด ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการนำวิถีให้กับจรวดแบบ Tactical missile เกือบทุกประเภท เช่น จรวดแบบพื้นสู่อากาศ หรือ แบบอากาศสู่อากาศ เป็นต้น ดังนั้นสิ่งที่ต้องทำการศึกษาเพิ่มเติมคือ ปัญหาการนำวิถีสำหรับช่วงที่มีแรงขับเคลื่อนจากเชื้อเพลิง

เพื่อให้เป็นการเชื่อมโยงกับระเบียบวิธีการ Dynamic Programming ที่ใช้ในการนำวิถีให้กับจรวด MLRS จึงควรศึกษาเพิ่มเติมในส่วนของ Hardware actuator เพื่อช่วยให้ Trajectory path planning ที่ได้มีความสมบูรณ์มากขึ้น อาทิเช่น Moving Mass Trim Controller, Thrust vector control หรือ Aerodynamic control surface แบบ Actuated canard เป็นต้น รวมทั้งต้องทำการศึกษามุมการในส่วนของ Kinetic energy หรือ Force ที่เข้ามาเกี่ยวข้องเพื่อใช้คำนวณค่าที่ต้องปรับแก้ใน Hardware actuator ให้เป็นไปตาม Trajectory ที่ต้องการ

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

Bhatti Asghar. 1998. **Practical Optimization methods with Mathematica Applications.**

Springer-Verlag, New York, USA.

Clark, R. Dohrmann, G. Richard Eisler and Rush, D. Robinett. 1996. **Dynamic Programming Approach for Burnout-to-apogee Guidance of Precision Munitions.** Journal of Guidance, Control, and Dynamics (Vol. 19 No. 2): 340-347.

Defence Technology Institute. 2011. **DTI-1 MLRS Model.** Available Source:

<http://www.thaiarmedforce.com/taf-gallery/42-rta-photos/240-tafwallpaper33.html>,
January 26, 2011.

Gadiot, G. M. H. J. L. 1999. **Trajectory Simulation Model for a Side-Thruster Guided MLRS-Type Vehicle.** TNO report PML 1998-A80. 45.

Gamble Allan, E and Philip, N. Jenkins. 2000. **Low Cost Guidance for the Multiple Launch Rocket System (MLRS) Artillery Rocket.** US Army Aviation and Missile Command Aviation and Missile Research, Development, and Engineering Center Redstone Arsenal, AL,35889

Humble Ronald, W., Henry Gary, N. and Larson Wiley, J. 1995. **Space Propulsion Analysis and Design.** 1 ed. McGraw-Hill. U.S.A.

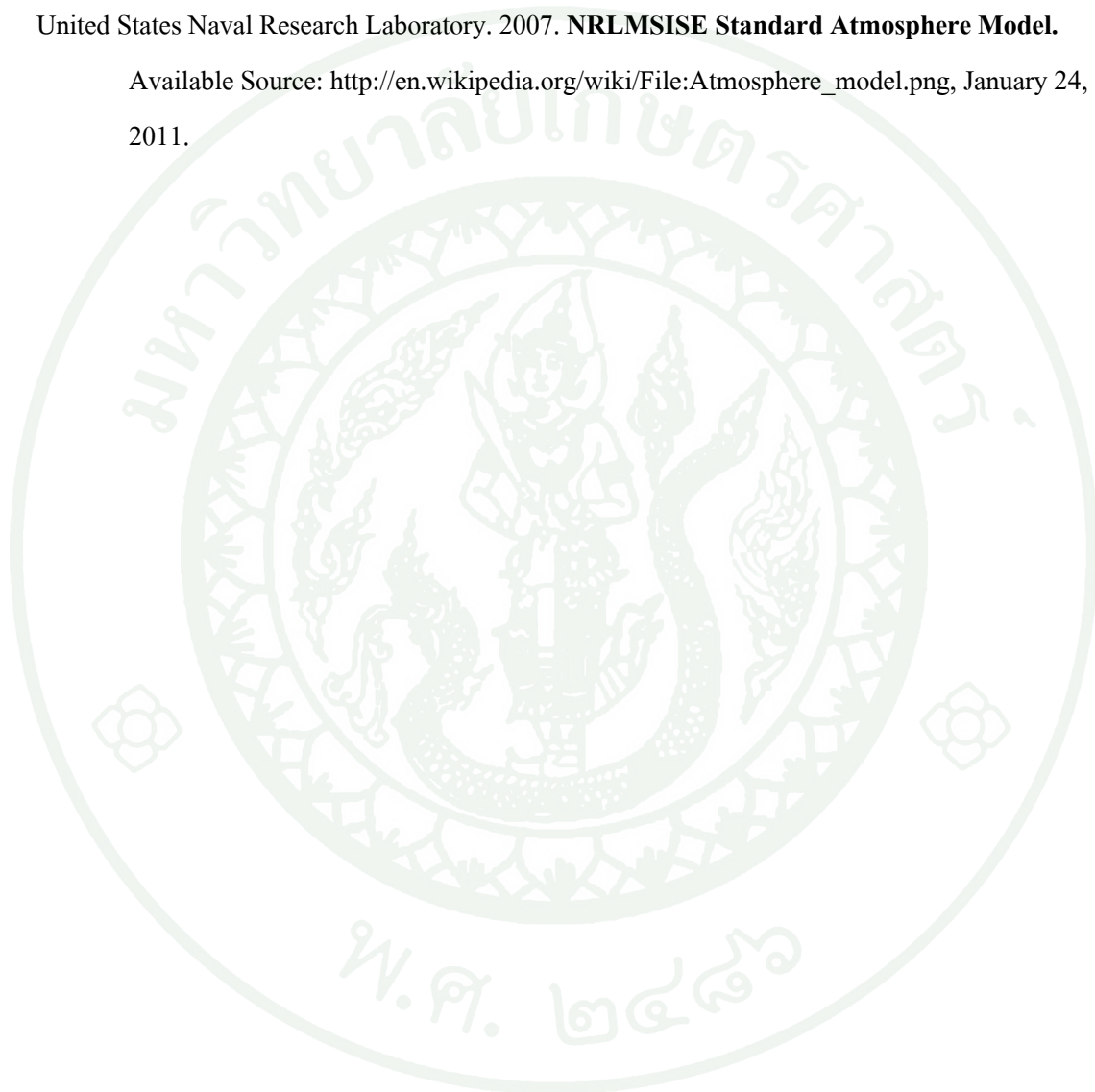
Intriligator Michael, D. 2002. **Mathematical Optimization and Economic Theory.** 1 ed. SIAM, U.S.A.

Jukka Ranta. 2004. **Optimal control and flight trajectory optimization applied to evasion analysis.** Helsinki University of Technology.

- Lockheed Martin. 1983. **The M270 MLRS conducts a rocket launch.** Available Source:
http://en.wikipedia.org/wiki/M270_Multiple_Launch_Rocket_System, November 5, 2010.
- Neuman Richard, D., Burke, G. L., Hayes, Jr. and Lewis, A. B. 1990. **Design of Aerodynamically Stabilized Free Rockets.** 716.
- Nielsen Jack, N. 1960. **Missile Aerodynamics.** 1 ed. McGraw-Hill, U.S.A.
- Rush, D. Robinett, David, G. Wilson, Richard, G. Eisler and John, E. Hurtado. 2005. **Applied Dynamic Programming for Optimization of Dynamical Systems.** 1ed. the Society for Industrial and Applied Mathematics. U.S.A.
- Rush, D. Robinett, Rainwater Beverly, A. and Kerr Shaw, A. 1995. **Moving Mass Trim Control for Aerospace Vehicles,** 17.
- Scott Jeff. 2004. **Missile Guidance Weapons.** Available Source:
<http://www.aerospaceweb.org/question/weapons/q0187.shtml>, June 25, 2008.
- Shepherd, J.T. and Stollery, J.L. 1979. **The Effect of Guidance and Control on Missile Design.** 1 ed. Cranfield Institute of Technology.
- Shigley Joseph, E. and Charles, R. Mischke. 2006. **Mechanical Engineering Design.** 6 ed. McGraw Hill, U.S.A.
- Sutton George Paul. 1992. **Rocket Propulsion Elements.** 6th ed. John Wiley & Sons, U.S.A.
- Tewari Ashish. 2006. **Atmospheric and Space flight dynamics Modeling and Simulation with MATLAB and Simulink.** Birkhauser Boston, India.

Thomas Drescher, Wolfgang Kreuzer, Dr. and John Nielson. 1998. **Rocket Trajectory Correction using Strap-on GPS Guided Thruster.** Oerlikon Contraves GmbH and Rockell Collins.

United States Naval Research Laboratory. 2007. **NRLMSISE Standard Atmosphere Model.**
Available Source: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Atmosphere_model.png, January 24, 2011.







ภาคผนวก ก
คำอธิบายหน่วยมวลของจรวด MLRS

คำอธิบายหน่วยมวลของจรวด MLRS

Slug เป็นหน่วยของมวลแบบอังกฤษ Joseph and Charles (2006) ให้นิยามไว้ว่า เมื่อมีแรงขนาด 1 pound-force (lbs) มากระทำจะทำให้มวลขนาด 1 slug นั้นมีความเร่ง 1 ft/sec^2 ตารางผนวกที่ ก1 เปรียบเทียบหน่วยมวล slug กับหน่วยมวลอื่นๆ

ตารางผนวกที่ ก1 การเปรียบเทียบหน่วยมวล

ระบบ	FPS Engineering	FPS Gravitational	FPS Absolute	Metric
แรง (F)	$F = m.a$	$F = w.a / g$	$F = m.a$	$F = m.a$
น้ำหนัก (w)	$w = mg$	$w = m$	$w = mg$	$w = mg$
หน่วย				
ความเร่ง (a)	ft/sec^2	ft/sec^2	ft/sec^2	m/sec^2
มวล (m)	slug	pound-mass	pound	Kilogram
แรง (F)	pound	pound-force	pound	newton

ที่มา: Joseph and Charles (2006)



ภาคผนวก ข
ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์และสภาพอากาศมาตรฐาน

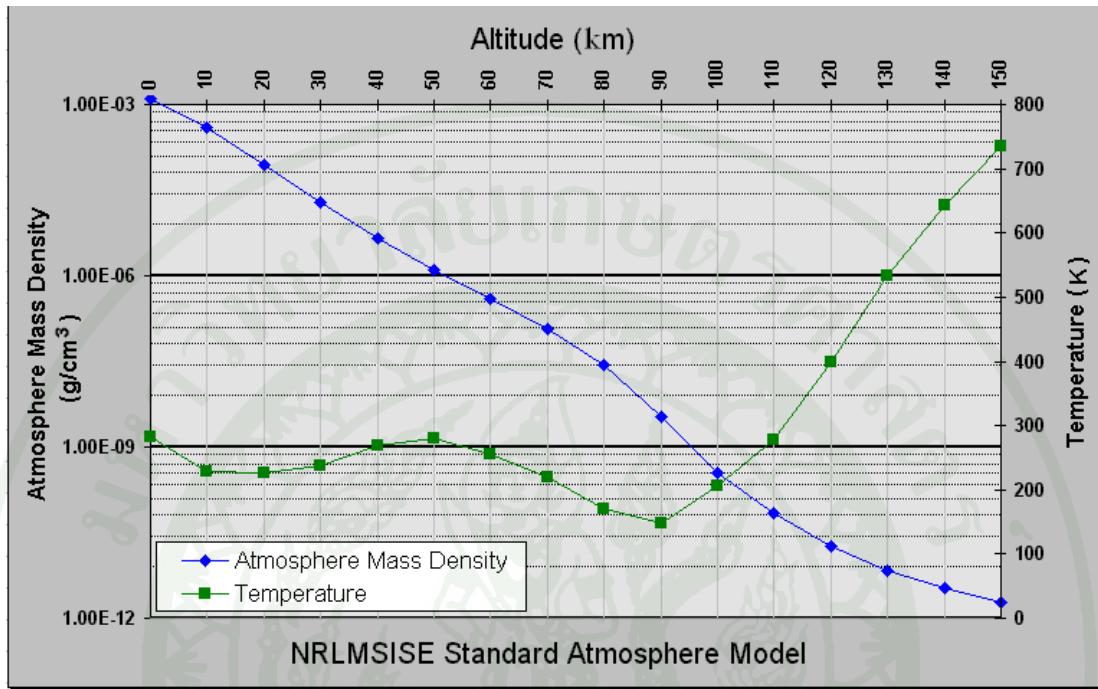
ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์และสภาพอากาศมาตรฐาน

ข้อมูลจากการแบ่งสเกลกราฟแสดงความสัมพันธ์ของค่าสัมประสิทธิ์ C_{D_0} , C_{L_α} และ k_D ที่ขึ้นอยู่กับค่า Mach number จากภาพที่ 26 เพื่อใช้ในระเบียบวิธีการ Dynamic Programming

ตารางผนวกที่ ข1 ข้อมูลคุณลักษณะทางอากาศพลศาสตร์ที่ได้จากการแบ่งสเกลกราฟ

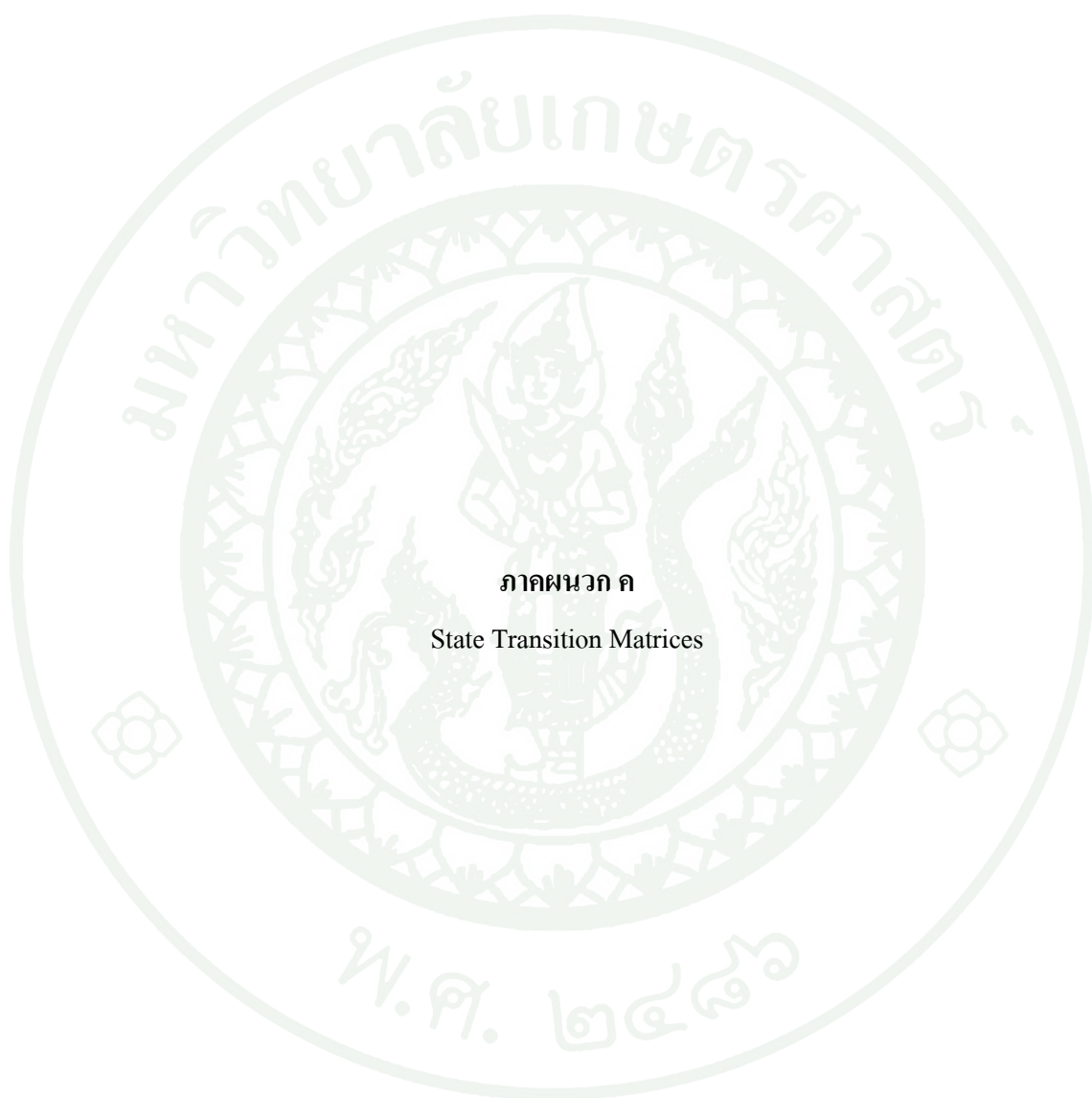
Mach No.	C_{L_α}	C_{D_0} (per $^\circ$)	k_D
1.00	0.180	0.450	0.095
1.05	0.200	0.540	0.085
1.10	0.200	0.540	0.085
1.20	0.200	0.540	0.085
1.30	0.200	0.535	0.085
1.40	0.195	0.530	0.085
1.50	0.190	0.520	0.085
1.60	0.185	0.515	0.090
1.70	0.180	0.510	0.095
1.80	0.175	0.500	0.100
1.90	0.170	0.490	0.105
2.00	0.168	0.480	0.110
2.10	0.163	0.470	0.115
2.20	0.162	0.460	0.120
2.30	0.160	0.450	0.125
2.40	0.155	0.440	0.130
2.50	0.150	0.425	0.135

ข้อมูลสภาพอากาศมาตรฐาน NRLMSISE ในส่วนของความหนาแน่นของอากาศ (ρ) ที่ระดับความสูงต่างๆ



ภาพผนวกที่ ข1 แบบจำลองสภาพอากาศมาตรฐาน NRLMSISE

ที่มา: United States Naval Research Laboratory (2007)



ภาคผนวก ค
State Transition Matrices

การหา State Transition Matrices

ในการแก้ปัญหาสมการ (15) หรือ $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, $x(t_1) = x_1$ และสมการของ State ที่อยู่ติดกันดังสมการ (36) หรือ $\tilde{x}_{k+1} = A_k \tilde{x}_k + B_k u_k$ ด้วยการกำหนดตัวแปร

$$A_k = \frac{\partial g_k}{\partial x_k}$$

$$B_k = \frac{\partial g_k}{\partial u_k}$$

จาก Partial derivative ข้างต้น เพื่อนำมาใช้หา Nominal Trajectory ดังที่กล่าวมาก่อนหน้า วิธีการ Fixed-step, 4th order Runge-kutta จะนำมาใช้ในการ numerical integrate สมการ (15) โดยมีวิธีการคำนวณดังนี้

$$g_k = x_k + \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)}{6}$$

เมื่อกำหนดให้

$$k_1 = hf(x_k, u_k, t_k)$$

$$k_2 = hf\left(x_k + \frac{k_1}{2}, u_k, t_k + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_k + \frac{k_2}{2}, u_k, t_k + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_k + k_3, u_k, t_k + h)$$

จากนั้นใช้ chain rule ในการ differentiation จะได้

$$A_k = I + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial k_1}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial x_k} + \frac{\partial k_4}{\partial x_k} \right)$$

$$B_k = I + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial k_1}{\partial u_k} + 2 \frac{\partial k_2}{\partial u_k} + 2 \frac{\partial k_3}{\partial u_k} + \frac{\partial k_4}{\partial u_k} \right)$$

เมื่อ I = identity matrix และ

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_k} = h \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_k, u_k, t_k}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_k} = h \frac{\partial f}{\partial u_k} \Big|_{x_k, u_k, t_k}$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial x_k} = h \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_k + \frac{k_1}{2}, u_k, t_k + \frac{h}{2}} \left(I + \frac{1}{2} \frac{\partial k_1}{\partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial k_2}{\partial u_k} = h \frac{\partial f}{\partial u_k} \Big|_{x_k + \frac{k_1}{2}, u_k, t_k + \frac{h}{2}} \left(I + \frac{1}{2} \frac{\partial k_1}{\partial u_k} \right)$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial x_k} = h \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_k + \frac{k_2}{2}, u_k, t_k + \frac{h}{2}} \left(I + \frac{1}{2} \frac{\partial k_2}{\partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial k_3}{\partial u_k} = h \frac{\partial f}{\partial u_k} \Big|_{x_k + \frac{k_2}{2}, u_k, t_k + \frac{h}{2}} \left(I + \frac{1}{2} \frac{\partial k_2}{\partial u_k} \right)$$

$$\frac{\partial k_4}{\partial x_k} = h \frac{\partial f}{\partial x_k} \Big|_{x_k + k_3, u_k, t_k + \frac{h}{2}} \left(I + \frac{\partial k_3}{\partial x_k} \right)$$

$$\frac{\partial k_4}{\partial u_k} = h \frac{\partial f}{\partial u_k} \Big|_{x_k + k_3, u_k, t_k + \frac{h}{2}} \left(I + \frac{\partial k_3}{\partial u_k} \right)$$

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ -นามสกุล	รัชณี ยืนยาว
วัน เดือน ปี ที่เกิด	8 พฤศจิกายน 2515
สถานที่เกิด	กรุงเทพมหานคร
ประวัติการศึกษา	วิศวกรรมศาสตรบัณฑิต สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	วิศวกรอากาศยาน หน่วยงานสอบเทียบเครื่องมือวัด สำหรับการซ่อมบำรุงอากาศยาน
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	ฝ่ายช่าง (ดอนเมือง) บริษัทการบินไทย (จำกัด) มหาชน
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-