

ในดีโวลุ่ม ได้มีการพัฒนาโดยใช้การประมาณค่าภายในเอลิเมนต์แบบ cell-center ร่วมกับการประมาณการแลกเปลี่ยนฟลักซ์แบบ Roe [7] และมีการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติเช่นเดียวกัน [8,9]

ในช่วงเวลาไม่กี่ปีที่ผ่านมาได้มีความพยายามที่จะทำนายพฤติกรรมการไหลที่มีความเร็วสูงกว่าเสียงมากกว่า 10 เท่า หรือพฤติกรรมการไหลที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น เช่น การเกิด kinked Mach stem, การเกิด carbuncle phenomena เป็นต้น ทำให้มีความต้องการพัฒนาระเบียบวิธีการคำนวณที่สามารถทำนายพฤติกรรมดังกล่าวให้ได้ผลที่แม่นยำและคำนวณได้รวดเร็วมากกว่าในอดีต ซึ่งมีการพัฒนาอยู่ด้วยกันหลายระเบียบวิธีการคำนวณ เช่น วิธี Direct Simulation Monte Carlo Method [10,11], วิธีการปรับปรุงฟลักซ์ให้มีความแม่นยำกว่าแบบ Roe ทั่วไป [12–14], วิธีการเลอว์จินแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Galerkin) [15,16] เป็นต้น

ผลการดำเนินงาน

การดำเนินงานวิจัยนี้ ได้ทำการศึกษาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ ทั้ง 1 และ 2 มิติ โดยพฤติกรรมการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ใน 1 มิติ [15, 16] สามารถพิจารณาปัญหาอยู่ในสมการเชิงอนุพันธ์อย่างง่าย ดังนี้

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t)u(t) \quad 0 \leq t \leq T \quad (1)$$

โดย u คือ ค่าตอบที่ต้องการทราบและมีค่าขึ้นกับเวลา , f คือ ฟังก์ชันที่ขึ้นกับเวลา , t คือ เวลา มีเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

$$u(t=0) = u_0 \quad (2)$$

คูณสมการ (1) ด้วย u ตลอดทั้งสมการ

$$u(t) \frac{du(t)}{dt} = f(t)u^2(t)$$

$$\frac{1}{2} \frac{du^2(t)}{dt} = f(t)u^2(t)$$

ทำการอินทิเกรตตลอดสมการในช่วง $0 \leq t \leq T$

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{du^2(t)}{dt} dt = \int_0^T f(t)u^2(t) dt$$

$$\frac{1}{2} [u^2(t)]_0^T = \int_0^T f(t) u^2(t) dt$$

$$\frac{1}{2} u^2(t) - \frac{1}{2} u^2(0) = \int_0^T f(t) u^2(t) dt$$

ประยุกต์สมการ (2) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2} u^2(t) - \frac{1}{2} u_0^2 = \int_0^T f(t) u^2(t) dt \quad (3)$$

สมการ (3) เป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ (1) ซึ่งการหาคำตอบแบบประมาณจะต้องสอดคล้องตามสมการ (3) นี้ด้วย

จากนั้นประยุกต์วิธีการกัลเลอร์คินกับสมการ (1) โดยกำหนดเป็นเศษตกค้าง (Residual) ดังนี้

$$R = \frac{du(t)}{dt} - f(t)u(t) \quad (4)$$

คูณตลอดสมการ (4) ด้วยฟังก์ชันน้ำหนัก $v(t)$ และทำการอินทิเกรตตลอดทั้งสมการให้เท่ากับศูนย์ ดังนั้น

$$\int R(t)v(t)dt = 0 = \int v(t) \frac{du(t)}{dt} dt - \int f(t)u(t)v(t)dt$$

$$\int v(t) \frac{du(t)}{dt} dt = \int f(t)u(t)v(t)dt$$

อินทิเกรตทีละส่วนที่เทอมด้านซ้ายของสมการ

$$\int v(t) \frac{du(t)}{dt} dt = u(t)v(t) \Big|_0^T - \int u(t) \frac{dv(t)}{dt} dt$$

$$\text{ดังนั้น} \quad - \int u(t) \frac{dv(t)}{dt} dt + u(t)v(t) \Big|_0^T = \int f(t)u(t)v(t)dt \quad (5)$$

จากนั้นแทนคำตอบ $u(t)$ ด้วย คำตอบแบบประมาณที่ไม่ต่อเนื่อง (discontinuous approximation) , u_h และประมาณบริเวณขอบซึ่งมักจะมีค่าไม่ต่อเนื่องของแต่ละช่องด้วยตัวแปรติดตามแบบประมาณ (numerical trace) , \hat{u}_h ซึ่งมีข้อกำหนดดังนี้

$$\hat{u}_h(t^n) = \begin{cases} u_0 & \text{เมื่อ } t^n = 0 \\ \lim_{\epsilon \downarrow 0} (t^n - \epsilon) & \text{เมื่อ } t^n > 0 \end{cases} \quad (6ก)$$

$$(6ข)$$

ทำการประยุกต์เงื่อนไขไหลเหล่านี้ลงในสมการ (5) จะได้ว่า

$$-\int u_h(t) \frac{dv(t)}{dt} dt + \hat{u}_h(t)v(t)|_{t^n}^{t^{n+1}} = \int f(t)u_h(t)v(t)dt \quad (7)$$

เนื่องจากต้องการให้ได้สมการสุดท้ายที่เหมือนกับสมการ (3) ดังนั้นจึงกำหนดให้ฟังก์ชันน้ำหนัก $v(t)$ มีค่าเท่ากับ $u_h(t)$ ดังนั้นในแต่ละช่วงจะมีสมการดังนี้

$$-\int u_h(t) \frac{du_h(t)}{dt} dt + \hat{u}_h(t)u_h(t)|_{t^n}^{t^{n+1}} = \int f(t)u_h^2(t)dt$$

$$-\left[\frac{1}{2}u_h(t)\right]_{t^n}^{t^{n+1}} + \hat{u}_h(t)u_h(t)|_{t^n}^{t^{n+1}} = \int f(t)u_h^2(t)dt \quad (8)$$

และเมื่อพิจารณาทุก ๆ ช่วงรวมกันตั้งแต่เวลา 0 จนถึง T จะได้ว่า

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}u_h^2(t) + \hat{u}_h(t)u_h(t)\right) \Big|_{t^n}^{t^{n+1}} = \int_0^T f(t)u_h^2(t)dt$$

จากนั้นเพิ่มเทอมทางซ้ายของสมการด้วย $\frac{1}{2}u_h^2(T^-) - \frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{2}u_0^2$

$$\frac{1}{2}u_h^2(T^-) - \frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}u_h^2(t) + \hat{u}_h(t)u_h(t)\right) \Big|_{t^n}^{t^{n+1}} + \frac{1}{2}u_0^2 - \frac{1}{2}u_0^2 = \int_0^T f(t)u_h^2(t)dt$$

รวมเทอม 2 - 4 ทางด้านซ้ายให้เป็น $\theta_h(T)$ ดังนั้น

$$\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \theta_h(T) - \frac{1}{2}u_0^2 = \int_0^T f(t)u_h^2(t)dt \quad (9)$$

การหาคำตอบแบบประมาณด้วยสมการ (8) จะต้องสอดคล้องกับผลเฉลยที่ได้จากสมการ (3) เนื่องจากเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สมการเดียวกัน ดังนั้น $\theta_h(T)$ ควรจะเท่ากับศูนย์เมื่อพิจารณาเฉพาะเทอม $\theta_h(T)$ ที่ประกอบด้วย

$$\theta_h(T) = -\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}u_h^2(t) + \hat{u}_h(t)u_h(t) \right)_{t^n}^{t^{n+1}} + \frac{1}{2}u_0^2$$

ความมีเสถียรภาพ (Stability) จะอยู่ที่เทอม $\theta_h(T)$ จะต้องเป็นบวกเสมอ ดังนั้นทำให้

$$\theta_h(T) \geq 0$$

และสมการ (7) สามารถเขียนใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการดังนี้

$$\frac{1}{2}u_h^2(T^-) - \frac{1}{2}u_0^2 \leq \int_0^T f(t)u_h^2(t)dt \quad (10)$$

เนื่องจากความมีเสถียรภาพจะเกิดขึ้นเมื่อ $\theta_h(T) \geq 0$ ดังนั้นจะพิจารณาเทอม $\theta_h(T)$

$$\begin{aligned} \theta_h(T) &= -\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \sum_{n=0}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}u_h^2(t) + \hat{u}_h(t)u_h(t) \right)_{t^n}^{t^{n+1}} + \frac{1}{2}u_0^2 \\ &= -\frac{1}{2}u_h^2(T^-) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \hat{u}_h(T)u_h(T^-) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-1}^+) + \hat{u}_h(t_{N-1})u_h(t_{N-1}^+) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-1}^-) + \hat{u}_h(t_{N-1})u_h(t_{N-1}^-) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-2}^+) + \hat{u}_h(t_{N-2})u_h(t_{N-2}^+) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-2}^-) + \hat{u}_h(t_{N-2})u_h(t_{N-2}^-) \right] \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \hat{u}_h(T)u_h(T^-) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-1}^+) + \hat{u}_h(t_{N-1})u_h(t_{N-1}^+) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-1}^-) + \hat{u}_h(t_{N-1})u_h(t_{N-1}^-) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-2}^+) + \hat{u}_h(t_{N-2})u_h(t_{N-2}^+) \right] \\ &+ \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-2}^-) + \hat{u}_h(t_{N-2})u_h(t_{N-2}^-) \right] \right\} \begin{array}{l} \text{มาจากช่วง } I_{N-1} \\ \text{ก็คือ } t_{N-1} \rightarrow t_N = T \end{array}$$

$t_N = T$

↑

I_{N-1}

↓

t_{N-1}

↑

I_{N-2}

↓

t_{N-2}

↑

↓

→

$\left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-1}^+) + \hat{u}_h(t_{N-1})u_h(t_{N-1}^+) \right]$

$\left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-1}^-) + \hat{u}_h(t_{N-1})u_h(t_{N-1}^-) \right]$

$\left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-2}^+) + \hat{u}_h(t_{N-2})u_h(t_{N-2}^+) \right]$

$\left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-2}^-) + \hat{u}_h(t_{N-2})u_h(t_{N-2}^-) \right]$

$$\begin{array}{l}
 t_{N-3} \\
 \vdots \\
 t_2 \\
 \downarrow I_1 \\
 t_1 \\
 \downarrow I_0 \\
 t_0 = 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 I_{N-3} \longrightarrow \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_{N-3}^+) + \hat{u}_h(t_{N-3})u_h(t_{N-3}^+) \right] \\
 \downarrow \\
 \text{จัดกลุ่มใหม่} = \sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}[|u^2|] + \hat{u}[|u|] \right)(t^n) \\
 \uparrow \\
 \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_1^+) + \hat{u}_h(t_1)u_h(t_1^+) \right] + \left[-\frac{1}{2}u_h^2(t_1^-) + \hat{u}_h(t_1)u_h(t_1^-) \right] \\
 - \left[-\frac{1}{2}u_h^2(0^+) + \hat{u}_h(0)u_h(0^+) \right] + \frac{1}{2}u_0^2
 \end{array}$$

กำหนดให้ $[|u_h|] = u_h(t_h^-) - u_h(t_h^+) \quad , \quad \{u_h\} = \frac{1}{2}(u_h(t_h^-) + u_h(t_h^+))$

$$\begin{aligned}
 [|u^2|] &= u_h^2(t_h^-) - u_h^2(t_h^+) \\
 &= [u_h(t_h^-) + u_h(t_h^+)] [u_h(t_h^-) - u_h(t_h^+)] \\
 &= 2\{u_h(t_h)\} [|u_h|]
 \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \theta_h(t) &= -\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \left[-\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \hat{u}_h(T)u_h(T^-) \right] + \sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}[|u_h^2|] + \hat{u}_h[|u_h|] \right)(t_h) \\
 &\quad + \frac{1}{2}u_h^2(0^+) - \hat{u}_h(0)u_h(0^+) + \frac{1}{2}u_0^2 \\
 &= -u_h^2(T^-) + \hat{u}_h(T)u_h(T^-) + \sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}[|u_h^2|] + \hat{u}_h[|u_h|] \right)(t_h) + \frac{1}{2}u_h^2(0^+) \\
 &\quad - \hat{u}_h(0)u_h(0^+) + \frac{1}{2}u_0^2 \\
 &= u_h(T^-) [\hat{u}_h(T) - u_h(T^-)] + \sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}[|u_h^2|] + \hat{u}_h[|u_h|] \right)(t_h) \\
 &\quad + \frac{1}{2}[|u_h|]^2 + [u_h(0^-) - \hat{u}_h(0)]u_h(0^+)
 \end{aligned}$$

กรณี $\theta_h(t) = 0$ มี 3 กรณี ดังนี้

$$\theta_h(t) = \begin{cases} \text{กรณี 3 เมื่อ } t_n = T \\ \hat{u}_h(t) = u_h(t^-) \end{cases} + \begin{cases} \text{กรณี 2 เมื่อ } 0 < t < T \\ \sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{1}{2} [|u_h^2|] + \hat{u}_h [|u_h|] \right) (t_h) \end{cases} + \begin{cases} \text{กรณี 1 เมื่อ } t_n = 0 \\ \hat{u}_h(0) = u_h(0^-) \\ = u_0 \end{cases}$$

$$+ \frac{1}{2} [|u_h|]^2 + [u_h(0^-) - \hat{u}_h(0)] u_h(0^+)$$

กรณี 2

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left(-\frac{1}{2} [|u_h^2|] + \hat{u}_h [|u_h|] \right) (t_h) = \sum_{n=1}^{N-1} [(\hat{u}_h - \{u_h\}) [|u_h|]] (t_h)$$

ถ้า $\theta_h(t_h) = 0$ ดังนั้น $\hat{u}_h(t_h) = \{u_h(t_h)\}$

ถ้า $\theta_h(t_h) > 0$ ดังนั้น $\hat{u}_h(t_h) > \{u_h(t_h)\}$

$$= \{u_h(t_h)\} + C_h [|u_h|]$$

ถ้า $C_h = \frac{1}{2}$ จะทำให้ $\hat{u}_h(t_h) = \frac{1}{2} u_h(t_h^-) + u_h(t_h^+) + \frac{1}{2} u_h(t_h^-) - u_h(t_h^+) = u_h(t_h^-)$

ถ้า $C_h = 0$ จะทำให้ $\hat{u}_h(t_h) = \{u_h(t_h)\} = \frac{1}{2} u_h(t_h^-) + u_h(t_h^+)$

ถ้า $C_h = 0$ จะได้ $\theta_h(t_h) = 0$ และ $\hat{u}_h(t_h) = \frac{1}{2} u_h(t_h^-) + u_h(t_h^+)$

จะทำให้อันดับของวิธีนี้ที่ตำแหน่ง t^h เท่ากับ $2k + 2$

แต่ถ้ากำหนด $C_h = \frac{1}{2}$ จะทำให้ $\theta_h(t_h) = \sum_{n=1}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (u_h(t_h^-) - u_h(t_h^+)) [|u_h|] \right] (t_h)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} [|u_h(t_h)|]^2 \geq 0 \quad \text{เสมอ (11)}$$

และจะทำให้มีอันดับที่ตำแหน่ง t^h เท่ากับ $2k + 1$

ดังนั้นสรุปได้ว่าระเบียบวิธีกาลิเลอ์คินแบบไม่ต่อเนื่องจะมีความไม่ต่อเนื่องของคำตอบบริเวณรอยต่อของช่วงย่อย ๆ ซึ่งแทนได้ด้วยตัวแปรติดตามแบบประมาณ (\hat{u}_h) ที่จะมีค่าดังนี้ คือ

$$\hat{u}_h(t_h) = \begin{cases} u_0 & \text{เมื่อ } t_h = 0 \\ u_h(t_h^-) & \text{เมื่อ } 0 < t_h < T \\ u_h(T^-) & \text{เมื่อ } t_h = T \end{cases}$$

เพราะทำให้ $\theta_h(t) \geq 0$ และมีอันดับที่ตำแหน่ง t_h ทำกับ $2k+1$

ข้อสรุปนี้คือคุณสมบัติข้อแรกของระเบียบวิธีกาลิเลอ์คินแบบไม่ต่อเนื่อง (Discontinuous Galerkin Method)

คุณสมบัติข้อที่ 2 คือ มีคุณสมบัติการอนุรักษ์ในแต่ละเอลิเมนต์ด้วย (locally conservative)

พิจารณาสมการที่ (7) อีกครั้ง และกำหนดให้ $v(t) = 1$ จะได้ว่า

$$\hat{u}_h \Big|_{t_h^1} = \int f(t) u_h(t) dt$$

ซึ่งสมการที่ได้จะมีคุณสมบัติการอนุรักษ์ในแต่ละช่วงย่อย ๆ นั้นด้วย

คุณสมบัติข้อที่ 3 จะมีคุณสมบัติต้าน dissipativity

จากสมการ (7)

$$- \int u_h(t) \frac{dv(t)}{dt} dt + \hat{u}_h(t)v(t) \Big|_{t_h^1} = \int f(t) u_h(t)v(t) dt$$

อินทิเกรตที่ละส่วนในเทอมแรกของสมการ จะได้ว่า

$$\int \frac{d}{dt} u_h(t)v(t) dt + (\hat{u}_h(t) - u_h(t))v(t) \Big|_{t_h^1} = \int f(t) u_h(t)v(t) dt$$

เนื่องจาก $R = \frac{du(t)}{dt} - f(t)u(t)$ ดังนั้น

$$\int R(T)v(t) dt [0,1] = (u_h(t) - \hat{u}_h(t))v(t) \Big|_{t_h^1}$$

กำหนดให้ $v(t) = 1$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int R(t) dt &= (u_h(t) - \hat{u}_h(t))v(t) \Big|_{t_h^1} \\ &= u_h(t_{h1}) - \hat{u}_h(t_{h1}) - [u_h(t_h) - \hat{u}_h(t_h)] \end{aligned}$$

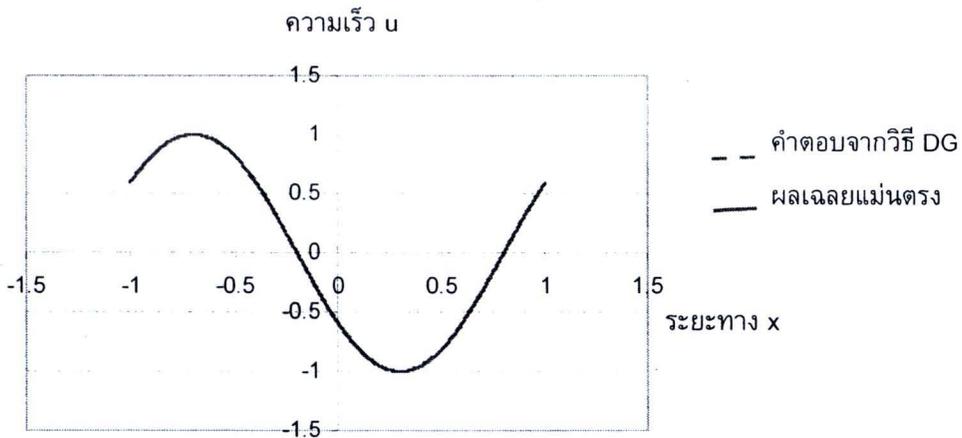
จากกรณี $t > 0$ จะได้ว่า $\hat{u}_h(t_h) = u_h(t_h^-)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int R(t) dt &= u_h(t_{h+1}^-) - \hat{u}_h(t_{h+1}^-) - [u_h(t_h^+) - \hat{u}_h(t_h^-)] \\ &= u_h(t_h^-) - u_h(t_h^+) \\ &= [|u_h|](t_h) \end{aligned} \quad (12ก)$$

และเมื่อแทนสมการ (11) ในสมการ (9) จะได้ว่า

$$\frac{1}{2}u_h^2(T^-) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} [|u_h(t_h)|]^2 - \frac{1}{2}u_0^2 = \int_0^T f(t)u_h^2(t) dt \quad (12ข)$$

จากนั้นได้ทำการประดิษฐ์โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่สอดคล้องกันและใช้วิเคราะห์ปัญหาใน 1 มิติ โดยได้เปรียบเทียบกับผลเฉลยแม่นยำ พบว่าได้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับผลเฉลยแม่นยำมาก ดังแสดงตัวอย่างในรูปที่ 1



รูปที่ 1 แสดงการเปรียบเทียบคำตอบที่ได้จากวิธีกาลอ์คินแบบไม่ต่อเนื่อง และผลเฉลยแม่นยำของปัญหา 1 มิติ

สำหรับการวิเคราะห์ปัญหาการไหลแบบอัดตัวไม่ได้ใน 2 มิติ [17] จะมีสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบอนุรักษ์ที่เกี่ยวข้องดังนี้

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial E_j(U)}{\partial x_j} + \frac{\partial F_j(U)}{\partial x_j} = 0 \quad (13)$$

โดย

$$U(x,t) = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad E(U) = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u \varepsilon + pu \end{Bmatrix}, \quad F(U) = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v \varepsilon + pv \end{Bmatrix} \quad (14)$$

ประยุกต์ Galerkin method จะได้ว่า

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} V_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) V_h \, d\Omega = 0 \quad (15)$$

โดย V_h คือ test function

Integrate by parts ที่เทอมที่สองของสมการ

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right) V_h \, d\Omega = \int_{\Gamma} (En_x + Fn_y) V_h \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left(E \frac{\partial V_h}{\partial x} + F \frac{\partial V_h}{\partial y} \right) d\Omega \quad (16)$$

เมื่อแทนสมการ 16 ในสมการ 15 จะได้ว่า

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} V_h \, d\Omega - \int_{\Omega} \left(E \frac{\partial V_h}{\partial x} + F \frac{\partial V_h}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (En_x + Fn_y) V_h \, d\Gamma = 0 \quad (17)$$

กำหนดคำตอบแบบประมาณและ test function ให้อยู่ในรูปแบบ ดังนี้

$$U_h = \sum_{m=1}^N U_m(t) B_m^p(x), \quad V_h = \sum_{m=1}^N V_m(t) B_m^p(x) \quad (18)$$

โดย $B_m^p(x)$ คือ basis function ของ polynomials of degree p

แทนสมการ 18 ในสมการ 17 และจัดรูปสมการใหม่จะได้ว่า

$$\int_{\Omega} B_m^p B_n^p d\Omega \frac{\partial U}{\partial t} - \int_{\Omega} \left(E \frac{\partial B_n^p}{\partial x} + F \frac{\partial B_n^p}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (E n_x + F n_y) B_n^p d\Gamma = 0 \quad (19)$$

หรือ

$$M \frac{\partial U}{\partial t} = R(U) \quad (20)$$

โดย $M = \int_{\Omega} B_m^p B_n^p d\Omega$

$$R(U) = - \int_{\Omega} \left(E \frac{\partial B_n^p}{\partial x} + F \frac{\partial B_n^p}{\partial y} \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (E n_x + F n_y) B_n^p d\Gamma$$

จากนั้นประยุกต์ explicit three-stage third-order TVD Runge-Kutta scheme จะได้ว่า

$$U^{(1)} = U^n + \Delta t M^{-1} R(U^n) \quad (21a)$$

$$U^{(2)} = \frac{3}{4} U^n + \frac{1}{4} [1 + \Delta t M^{-1} R] U^{(1)} \quad (21b)$$

$$U^{n+1} = \frac{1}{3} U^n + \frac{2}{3} [1 + \Delta t M^{-1} R] U^{(2)} \quad (21c)$$

สมการ (21a) – (21c) ได้ถูกนำไปประดิษฐ์โปรแกรมวิเคราะห์การไหลอัดตัวได้แบบไม่หนืด
ใน 2 มิติ ต่อไป

การประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติ

เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติอาศัยแนวความคิดที่กำหนดให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากผลเฉลยแม่นยำตรงมีค่าเท่ากันตลอดทั้งโดเมนการไหล [18] เช่น ถ้าสนใจค่าความหนาแน่นในโดเมนการไหลใน 1 มิติ ค่าความคลาดเคลื่อนที่ตำแหน่งใด ๆ จะมีค่าดังนี้

$$\text{ค่าความคลาดเคลื่อน} = h^2 \left| \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right| = \text{ค่าคงที่} \quad (22)$$

สำหรับการวิเคราะห์การไหลใน 2 มิติ จะมีเทอมอนุพันธ์อันดับ 2 จะมีดังนี้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (23)$$



ก่อนนำค่าอนุพันธ์อันดับ 2 มาใช้จะต้องปรับค่าดังกล่าว โดยอาศัยหลักการหาค่าความเค้นในแนวแกนหลักในวิชากลศาสตร์ของแข็ง [19]

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (24)$$

โดย σ_x คือความเค้นในแนวแกน x, σ_y คือความเค้นในแนวแกน y, τ_{xy} คือความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน y, τ_{yx} คือความเค้นเฉือนที่มีทิศทางในแนวแกน x, σ_x คือความเค้นในแนวแกนหลัก X, σ_y คือความเค้นในแนวแกนหลัก Y

และหากประยุกต์เข้ากับการไหลใน 2 มิติ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

โดย

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\right)^2} \quad (26a)$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\right)^2} \quad (26b)$$

และมุมระหว่างแนวแกนหลัก X-Y กับแนวแกน x-y หาได้จาก

$$\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}}{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)} \right) \quad (27)$$

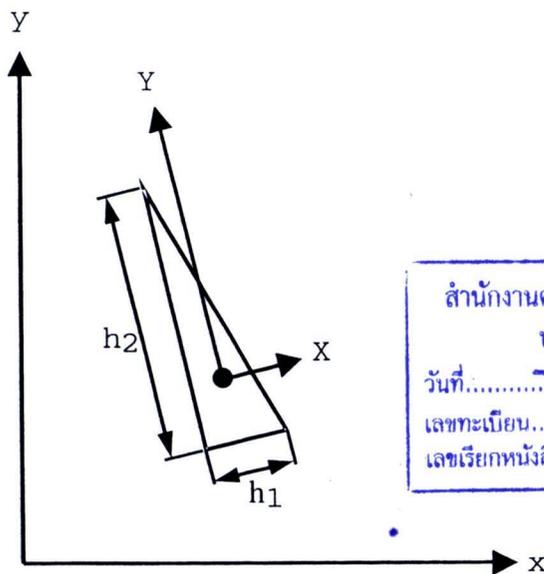
ดังนั้นค่าความคลาดเคลื่อนของการไหลใน 2 มิติ คือ

$$h_1^2 \lambda_1^2 = h_2^2 \lambda_2^2 = \text{ค่าคงที่} \quad (28)$$



โดย h_1 คือ ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก X, h_2 คือ ความยาวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลัก Y ดังแสดงในรูปที่ 2 และ

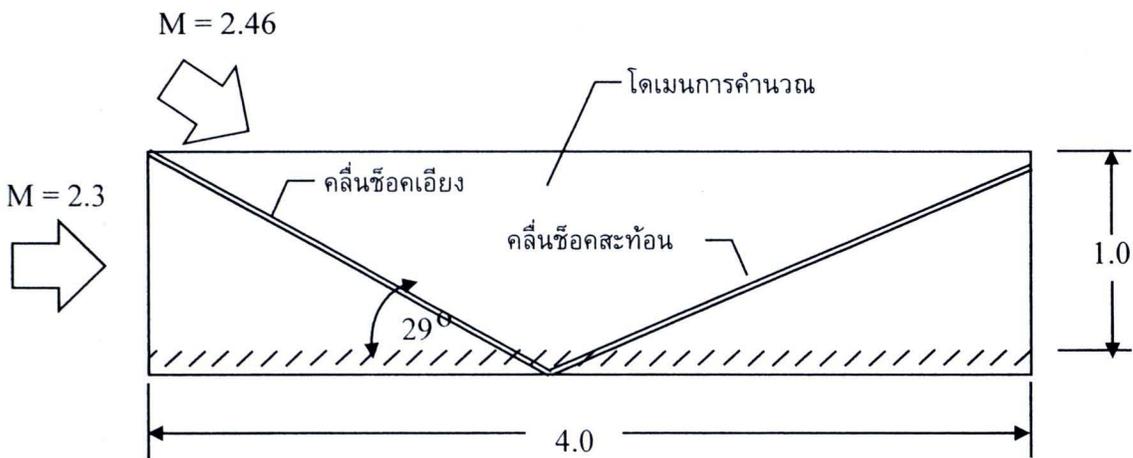
$$\lambda_1 = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad \lambda_2 = \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \quad (29)$$



รูปที่ 2 แสดงการวางตัวของเอลิเมนต์ในแนวแกนหลักทั้งสอง (X, Y)

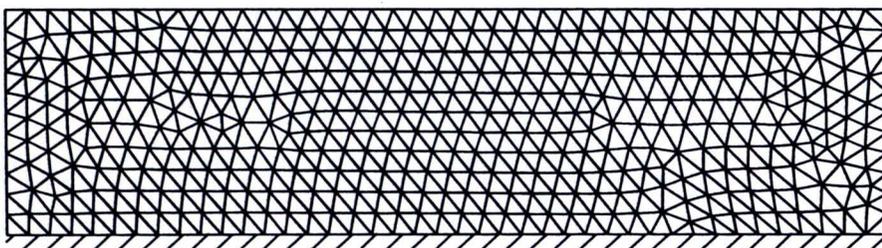
ตัวอย่างการประยุกต์ใช้กับปัญหาการไหลความเร็วสูง

ในหัวข้อนี้ขอยกตัวอย่างการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติกับปัญหาการไหล รูปที่ 3 แสดงปัญหาการไหลแบบไม่หนืดที่มีคลื่นช็อกเอียง (oblique shock) ที่เกิดขึ้นเนื่องจากการไหลที่มีค่ามัคคัมเบอร์ต่างกันและเริ่มจากมุมด้านซ้ายบนของโดเมนการไหล พุ่งกระทบลงพื้นราบด้วยมุมตกกระทบ 29° แล้วสะท้อนขึ้นไปทางด้านมุมขวาบนของโดเมนการไหล คุณสมบัติของของไหลด้านขาเข้าตลอดขอบด้านซ้ายของโดเมนการไหลคือ $\rho = 1.0$, $u = 2.9$, $v = 0$. และ $\mathcal{E} = 5.991$ ส่วนคุณสมบัติของของไหลตลอดขอบด้านบนคือ $\rho = 1.7$, $u = 2.6185$, $v = -0.5063$. และ $\mathcal{E} = 5.806$

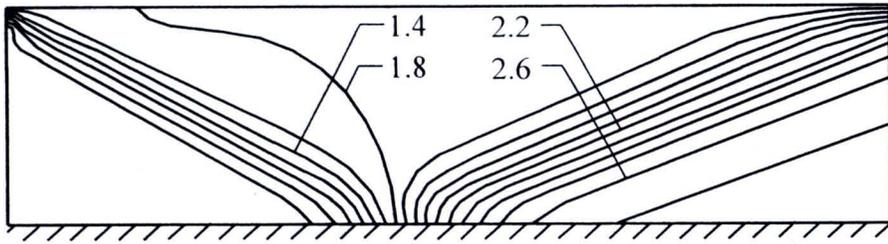


รูปที่ 4.3 ปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อกบนพื้นราบ

การวิเคราะห์จะเริ่มต้นจากการสร้างเอลิเมนต์ตลอดทั้งโดเมนการไหลในรูปที่ 3 ด้วยขนาดเอลิเมนต์เท่ากับ 0.0975 ทำให้ได้เอลิเมนต์สามเหลี่ยมจำนวน 844 เอลิเมนต์ และ 475 จุดต่อ ดังแสดงในรูปที่ 4 (ก) จากนั้นประยุกต์เงื่อนไขขอบเขตการไหลเข้าและออก รวมถึงขอบของเอลิเมนต์ที่อยู่ตลอดขอบผนัง แล้วจึงนำไปโปรแกรมกาลเลอร์คินแบบไม่ต่อเนื่องมาคำนวณหาพฤติกรรมของการไหลแบบไม่หนืดดังกล่าว และสามารถแสดงเส้นชั้นของความหนาแน่นในโดเมนการไหลดังแสดงในรูปที่ 4 (ข) ซึ่งบ่งบอกถึงลักษณะของคลื่นช็อกทั้งก่อนตกกระทบและหลังสะท้อนจากพื้นราบว่ามีความหนาแน่นมาก เนื่องจากเอลิเมนต์ที่ใช้ในบริเวณดังกล่าวมีขนาดใหญ่



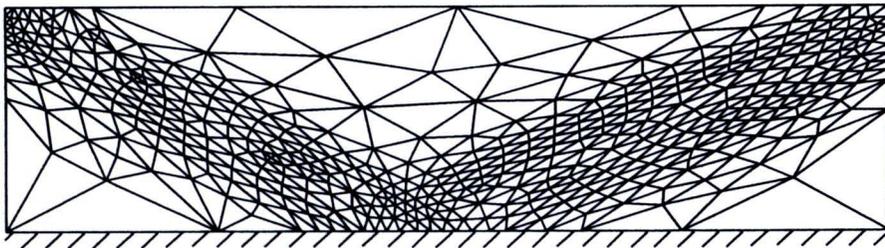
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์เริ่มต้น



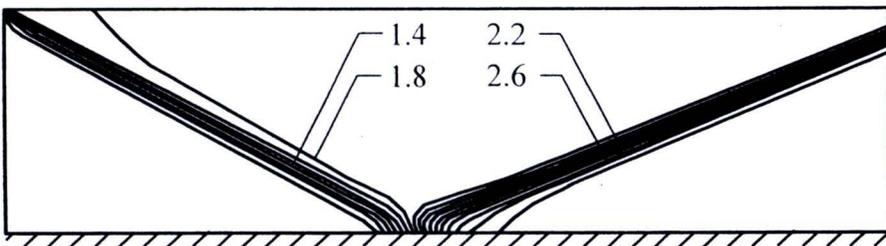
(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 4 รูปแบบเอลิเมนต์เริ่มต้นและการกระจายความหนาแน่น
สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

ค่าความหนาแน่นของของไหลที่คำนวณได้ตามจุดต่อต่าง ๆ ในรูป 4 (ข) ได้ถูกนำมาใช้คำนวณหาค่าขนาดและทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์ตามหลักการของการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติที่ได้อธิบายไว้ก่อนหน้านี้ จากนั้นทำการสร้างเอลิเมนต์ใหม่ดังแสดงในรูปที่ 5 (ก) ซึ่งประกอบด้วย 831 เอลิเมนต์ และ 445 จุดต่อ จะเห็นได้ว่าการสร้างเอลิเมนต์ขนาดเล็กวางตัวในแนวคลื่นช็อค ส่วนบริเวณอื่น ๆ จะได้เอลิเมนต์ที่มีขนาดใหญ่เนื่องจากค่าความหนาแน่นมีการเปลี่ยนแปลงน้อยมาก และเมื่อใช้โปรแกรมกาลูร์คินแบบไม่ต่อเนื่อง ทำการคำนวณหาสภาวะการไหล จะได้ลักษณะการกระจายของเส้นชั้นความหนาแน่นดังแสดงในรูปที่ 5 (ข) จะเห็นได้ว่าแนวคลื่นช็อคนั้นบางลงค่อนข้างมาก



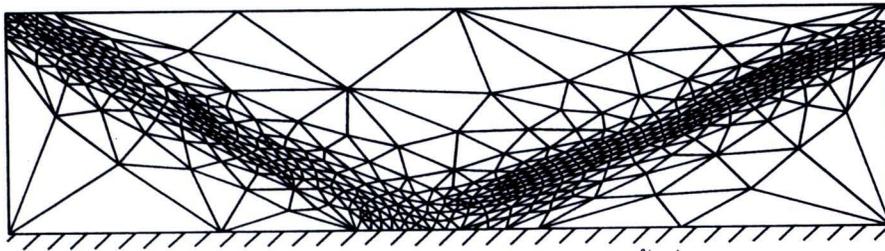
(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จัดใหม่ครั้งที่ 1



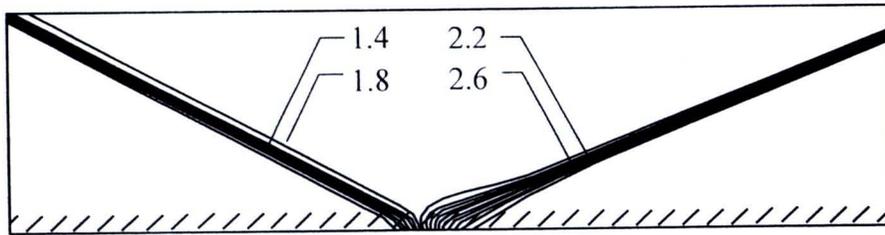
(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 5 รูปแบบเอลิเมนต์จัดใหม่ครั้งที่หนึ่งและการกระจายความหนาแน่น
สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

จากนั้นทำกระบวนการดังกล่าวซ้ำอีกครั้งหนึ่ง คำนวณหาขนาดและทิศทางการวางตัวของเอลิเมนต์ใหม่ โดยอาศัยค่าความหนาแน่นของแต่ละจุดต่อที่คำนวณได้ในรูปที่ 5 (ข) จากนั้นทำการสร้างเอลิเมนต์ใหม่อีกครั้ง ดังแสดงในรูปที่ 6 (ก) ประกอบด้วย 845 เอลิเมนต์และ 444 จุดต่อ ซึ่งจะเห็นได้ว่าเอลิเมนต์ยาวเรียวขนาดเล็กได้ถูกสร้างขึ้นอย่างหนาแน่นตลอดแนวของคลื่นช็อค จากนั้นใช้โปรแกรมกาลเลอร์คินแบบไม่ต่อเนื่อง คำนวณหาสภาวะการไหลของของไหลอีกครั้ง พบว่าผลลัพธ์ที่ได้มีความเที่ยงตรงมากยิ่งขึ้น ดังเช่นลักษณะการกระจายของค่าความหนาแน่นที่แสดงในรูปที่ 6 (ข)



(ก) รูปแบบไฟไนต์เอลิเมนต์จัดใหม่ครั้งที่ 2



(ข) เส้นชั้นแสดงความหนาแน่น

รูปที่ 6 รูปแบบเอลิเมนต์จัดใหม่ครั้งที่สองและการกระจายความหนาแน่น สำหรับปัญหาการตกกระทบและสะท้อนของคลื่นช็อคบนพื้นราบ

กระบวนการประยุกต์เทคนิคการปรับขนาดเอลิเมนต์โดยอัตโนมัติร่วมกับโปรแกรมกาลเลอร์คินแบบไม่ต่อเนื่อง และวนซ้ำกันหลายครั้ง ก่อให้เกิดผลการคำนวณที่ทำให้ทราบแนวการเกิดคลื่นช็อคภายในโดเมนการไหลได้อย่างชัดเจน โดยที่ก่อนหน้านี้ไม่ทราบตำแหน่งที่จะเกิดแนวช็อคล่วงหน้ามาก่อน จากประสิทธิภาพของการประยุกต์ร่วมกันดังกล่าว ทำให้สามารถนำไปใช้วิเคราะห์ปัญหาที่มีความซับซ้อนมากขึ้นต่อไป

จากนั้นทำการวิเคราะห์ปัญหา Blunt body ที่อากาศไหลเข้าด้วยความเร็วสูงกว่าเสียง 6.47 เท่า ผ่านทรงกระบอก ในรูปที่ 7 แสดงเส้นชั้นค้ำคัมเบอร์ของการไหลแบบไม่หนืดที่เกิดขึ้น