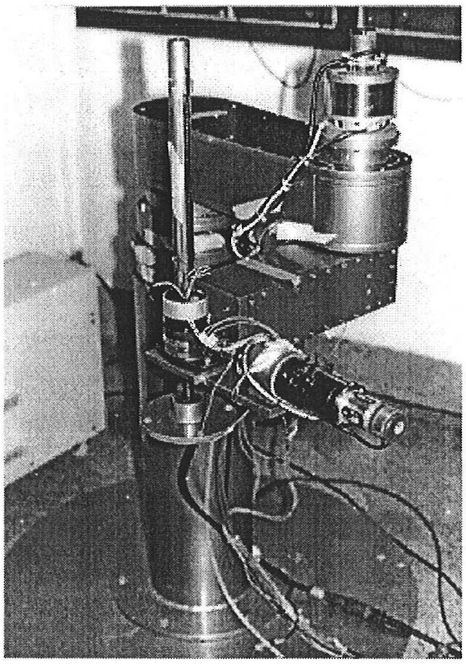
ส่วนในการวิเคาระห์หา Transfer function เราสมมติว่าสมการ Transfer function ของมอเตอร์ที่ต้องการประมาณค่ามีค่า poles อยู่ 3 ค่า โดยที่ 1 pole เป็นของ amplifier และอีก 2 poles จะเป็นของ motor ดังนั้นจึงทำให้การหาสมการ Transfer function นั้นมีการเบียงเบนไปบ้าง เมื่อเทียบกับการทดลอง

เมื่อเราทำการวิเคราะห์หา Transfer function เราพิจารณาเฉพาะ Armature-Tachometer resonance เท่านั้นโดยที่เราไม่ได้พิจารณา Armature-Load resonance. ดังนั้นในกรณีที่ได้จากการวิเคราะห์ เราจะเห็นเพียง 1 resonance peak ดังแสดงในรูปที่ 6 นอกจากนั้นค่าผิดพลาดที่เกิดจากค่าประมาณที่ได้จากการวัดค่า damping ratio (ξ) และค่า resonance frequency (ω_0) ถ้าเราสามารถว่าค่านี้ให้มีค่าใกล้เคียงกับความเป็นจริงที่สุด จะทำให้เราสามารถประมาณสมการ Transfer function ได้ดีขึ้น

3. ระบบพลศาสตร์ของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2



รูปที่ 3.1 หุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุฬา 2

รูปที่ 3.1 เป็นรูปแสดงแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุฬา 2 ที่ได้ทำการพัฒนาขึ้นมาที่ห้องปฏิบัติการควบคุมและหุ่นยนต์อุตสาหกรรม ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย สำหรับในหัวข้อนี้เราจะมาหาระบบทางคณิตศาสตร์ที่แทนการเคลื่อนที่จริงของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 เราจะทำการศึกษาทั้งระบบคิเนเมติก (kinematic) และระบบไคเนติก (kinetic) ในส่วนของระบบคิเนเมติก (kinematic) นั้นเราจะมาใช้ในการคำนวณหาลักษณะหรือวิถีทางการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์ไปในทิศทางที่ต้องการ และส่วนระบบไคเนติก (kinetic) นั้นเราจะนำมาใช้ในการออกแบบระบบควบคุมการเคลื่อนที่ของแขน

แขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุฬา 2 เป็นแขนหุ่นยนต์ที่มีข้อต่อทั้งหมด 5 ข้อต่อ แต่ในขั้นต้นนี้จะมีการพัฒนาข้อต่อการเคลื่อนที่อยู่ด้วยกัน 3 ข้อต่อหรือ 3 แกน ซึ่งจะต่อเข้าด้วยกันเป็นลักษณะแบบสกาลาร์ (Scalar type) กล่าวคือมีแกนหมุน (revolute joint) 2 แกนคือแกนที่หนึ่งและแกนที่สอง และมีแกนสไลด์ (prismatic joint) อยู่หนึ่งแกนเป็นแกนที่สาม แต่ละแกนมีขับเคลื่อนด้วยมอเตอร์กระแสตรงแบบเซอร์โว (DC. Servo Motor) สำหรับแกนที่หนึ่งและแกนที่สองใช้ระบบเกียร์ทดรอบแบบฮาร์มอนิก (Harmonic drive) โดยแกนที่หนึ่งจะใช้เป็นแบบถ้วย (cup type) และแกนที่สองจะใช้เป็นแบบแพนเค็ก (pankage type) ส่วนแกนที่สามใช้ระบบส่งกำลังเป็นแบบบอลสกูร (ball-screw) (ดูภาคผนวกสำหรับรายละเอียดของอุปกรณ์) ส่วนอีกสองแกนหมุนหรือข้อต่อที่ 4 และ 5 นั้นกำลังดำเนินการจัดสร้างอยู่และจะไม่รวมอยู่ในการวิจัยนี้ ซึ่งจะมีส่วนของระบบตรวจรู้แรง (Force sensor) ติดเข้าไปด้วยเพื่อใช้สำหรับศึกษาการควบคุมแบบผสมระหว่างการควบคุมตำแหน่งของการเคลื่อนที่และการควบคุมแรงที่ปลายแขนหุ่นยนต์จุฬา 2

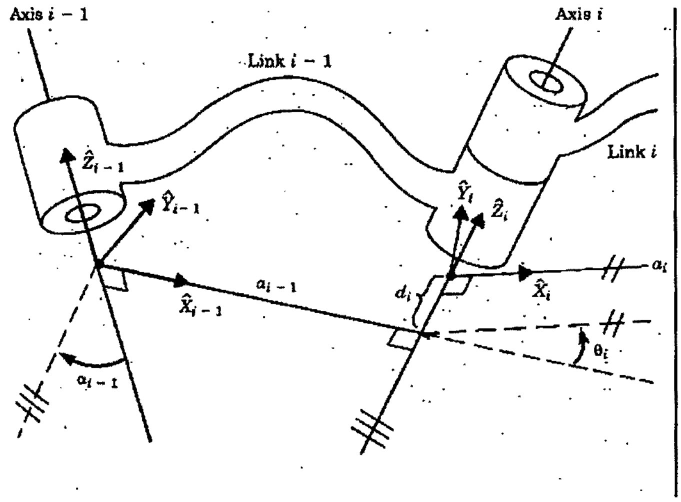
รูปแบบของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 ที่แสดงอยู่ในรูปที่ 3.1 จะมีขอบเขตหรืออาณาบริเวณในการทำงานดังนี้คือ อาณาบริเวณของพื้นที่ในแนวราบที่แขนหุ่นยนต์จุฬา 2 สามารถครอบคลุมมีค่าเท่ากับ 1.5 ตาราเมตร ซึ่งก็คืออาณาบริเวณที่แขนที่หนึ่งและแขนที่สองสามารถเคลื่อนที่ไปถึง โดยที่แขนที่หนึ่งนั้นสามารถกวาดเป็นมุม 270 องศา แขนที่สองก็สามารถกวาดเป็นมุม 180 องศา ส่วนแขนที่สามซึ่งเคลื่อนที่ขึ้นลงนั้นเราจะกำหนดระยะทางในการเคลื่อนที่ขึ้นลงไว้เป็นระยะทาง 0.5 เมตร ดั้งนั้นปริมาตรอาณาบริเวณการทำงาน (work volume) ของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 คือ 0.5 m^3 และมีรูปลักษณะเป็นทรงกระบอก (Cylindrical shape)

3.1 ระบบคิเนเมติก (Kinematic) ของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2

การหาระบบคิเนเมติก (kinematic) ของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุฬา 2 นั้นเราจะใช้สัญลักษณ์ตามวิธีการของดีนาวิต-ฮาร์เทนเบอร์จ (Denavit-Hartenberg) (ดูหนังสืออ้างอิง 9) โดยรูปที่ 3.2 เป็นรูปแสดงวิธีการตั้งแกนหมุนพร้อมทั้งแสดงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ และตัวแปรของระบบ โดยมีหลักในการตั้งแกนระบบพิกัด (coordinate) หรือเฟรม (frame) ดังนี้คือ แกน z_i ของแกน i จะชี้ไปในทิศทางเดียวกันกับแกนหมุนของแกน i (ถ้าแกนนั้นเป็นแกน revolute joint) ระยะ a_i จะเป็นระยะห่างระหว่างแกน z_i และ z_{i+1} หรือก็คือเส้น a_i จะต้องตั้งฉากกับทั้งแกน z_i และ z_{i+1} แกน x_i ของเฟรม (frame) i จะชี้ไปในทิศทาง a_i ในกรณีที่ a_i มีค่าเป็นศูนย์แล้ว แกน x_i จะชี้ไปในทิศทางที่ตั้งฉากกับทั้งระนาบของแกน z_i และแกน z_{i+1} มุม α_i คือมุมที่แกน z_i ทำกับแกน z_{i+1} ในทิศทาง x_i ส่วนแกน y_i นั้นจะเป็นไปตามกฎมือขวา

ส่วนเฟรม (frame) 0 (หรือเฟรมแรก) กับเฟรม n (หรือเฟรมสุดท้าย) เรามีอิสระในการกำหนดแต่ก็มีหลักการง่าย ๆ ดังนี้คือ สำหรับเฟรม 0 เราจะเลือกแกน z_0 ให้อยู่ในทิศทางเดียวกับ z_1 และพยายามเลือกให้ตำแหน่งกำเนิด (origin) ของทั้งสองเฟรมอยู่ที่เดียวกันและชี้ไปในทิศทางเดียวกันเมื่อตัวแปรการเคลื่อนที่ของข้อต่อที่ 1 เป็นศูนย์หรือ $\theta_1 = 0$ สำหรับกรณีที่ข้อต่อเป็นแกนหมุน (revolute joint) และ $d_1 = 0$ สำหรับกรณีที่ข้อต่อเป็นแกนสไลด์ (pristmatic joint)) ส่วนเฟรม n ถ้าข้อต่อเป็นแบบแกนหมุน (revolute joint) เราจะเลือกให้ทิศทางของ x_n ชี้ไปในทิศทางเดียวกับ x_{n-1} ดังนั้น $\theta_n = 0.0$

และตำแหน่งกำเนิด (origin) ของเฟรม (frame) n จะเลือกตรงตำแหน่งที่ทำให้ d_n = 0.0 แต่ถ้าข้อต่อเป็นแกนสไลด์ (pristmatic joint) เราจะเลือก x_n เพื่อทำให้ θ_n = 0.0 และตำแหน่งกำเนิด (origin) ของเฟรม n จะเลือกตรงตำแหน่งที่ตัดกันระหว่าง x_{n-1} และแกน z_n เพื่อทำให้ d_n = 0.0



รูปที่ 3.2 แสดงพารามิเตอร์และวิธีตั้งแกนพิกัดของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรม

โดยที่

a_i = ระยะจาก $\hat{z}_i$ ถึง $\hat{z}_{i+1}$ วัดตามแนวแกน $\hat{x}_i$

α_i = คือมุมระหว่าง $\hat{z}_i$ และ $\hat{z}_{i+1}$ วัดเทียบกับแกน $\hat{x}_i$

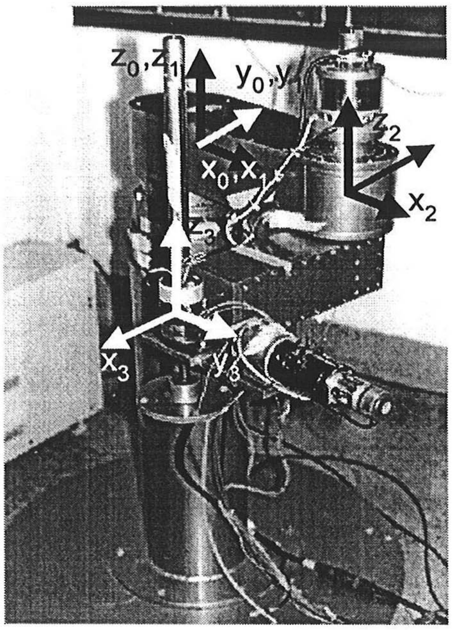
d_i = ระยะจาก $\hat{x}_{i-1}$ ถึง $\hat{x}_i$ วัดตามแนวแกน $\hat{z}_i$

θ_i = คือมุมระหว่าง $\hat{x}_{i-1}$ และ $\hat{x}_i$ วัดเทียบกับแกน $\hat{z}_i$

ซึ่งเราสามารถเขียนรูปโครงสร้างและการตั้งแกนพิกัดของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 ได้ดังแสดงในรูปที่ 3.3

เราจะกำหนดว่าข้อต่อ (joint) n คือแกนหมุนที่ต่อระหว่างแขนที่ n-1 และแขนที่ n เลขที่ประจำแขนจะเริ่มจากแขนที่ 0 ซึ่งจะเป็นฐานของแขนหุ่นยนต์และยึดแน่นกับพื้น ดังนั้นสำหรับแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 จะได้ว่า

ข้อต่อที่ 1 คือแกนหมุนในระนาบ x-y ที่ต่อระหว่างแขนที่ 0 หรือแขนที่ยึดติดกับพื้นและแขนที่ 1
ข้อต่อที่ 2 คือแกนหมุนในระนาบ x-y ที่ต่อระหว่างแขนที่ 1 และแขนที่ 2
ข้อต่อที่ 3 คือแกนสไลด์ขึ้นลงในแนว z ที่ต่อระหว่างแขนที่ 2 และแขนที่ 3



รูปที่ 3.3 เป็นรูปแสดงการตั้งแกนพิกัดของหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุฬา 2

การตั้งเฟรม (frame) หรือระบบพิกัด (coordinate system) ของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 นั้น แสดงไว้ในรูปที่ 3.3 โดยใช้วิธีการตั้งแกนจะตั้งแกนตามวิธีการของดีนาวิต-ฮาร์เทนเบอร์จ (Denavit-Hartenberg) ดังนี้คือ

เฟรมที่ 0 หรือเฟรมที่ยึดแน่นอยู่กับที่จะมีแกน x, y และ z ดังแสดงในรูป

เฟรมที่ 1 อยู่ที่แกนมอเตอร์ตัวที่หนึ่ง และอยู่ตรงตำแหน่งเดียวกันกับเฟรม 0 มีแกน x, y และ z ดังแสดงในรูป

เฟรม 2 อยู่ที่แกนมอเตอร์ตัวที่สองและมีแกน x, y และ z ดังแสดงในรูป

เฟรม 3 จะอยู่ตรงตำแหน่งจุดตัดระหว่างแกนมอเตอร์ตัวที่สามกับแกนบอลสกูร (ball-screw) ดังแสดงในรูป โดยแกน z ที่เป็นบวกจะมีทิศทางขึ้นลง

ซึ่งเราสามารถเขียนตำแหน่งของปลายแขนของแขน *i* หรือแกนหมุนที่ (joint) *i* โดยใช้ระบบพิกัดของแกนหมุนที่ (joint) *i-1* เพราะฉะนั้นมุมการเคลื่อนที่ที่วัดเทียบที่จุดกำเนิด (origin) ของเฟรมที่ 1 ที่หมุนรอบแกน *z* ของเฟรมที่ 0 จะสามารถแทนได้ด้วยมุม θ_1 และในทำนองเดียวกันมุมที่วัดเทียบที่จุดกำเนิดของเฟรมที่ 2 ที่หมุนรอบแกน *z* ของเฟรมที่ 1 ก็สามารถแทนได้ด้วยมุม θ_2 สำหรับแกนที่ 3 ซึ่งเป็นแกนที่มีการเคลื่อนที่แบบสไลด์หรือเลื่อนขนาน (translation) ระยะทางการเคลื่อนที่สามารถแทนด้วยระยะ *d* ในทิศทางตามแนวแกน *z* ของเฟรมที่ 2 ตารางที่ 1 เป็นตารางที่สรุปค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 พร้อมทั้งแสดงค่าตัวแปรของแต่ละแขนด้วย

ตารางที่ 3.1

link	*ตัวแปร (variable)*	a_{i-1} (เมตร)	α_{i-1}	d_i (เมตร)	θ_i
1	θ_1	0.0	0.0 degree	0.0	θ_1
2	θ_2	0.7	0.0 degree	0.0	θ_2
3	θ_3	0.4	0.0 degree	d_3	0.0 degree

เมตริกซ์การแปลงแบบเอกพันธุ์ (homogeneous transformation matrix) ระหว่างแกนหมุน *i-1* กับ *i* โดยที่เมตริกซ์ ${}^{i-1}A_i$ คือเมตริกซ์การแปลงแบบเอกพันธุ์จากเฟรม *i* ไปเทียบกับเฟรม *i-1* ตามสัญลักษณ์ของดีนาวิต-ฮาร์เทนเบอร์จ (Denavit-Hartenberg) เราสามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$
{}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} cos(\theta_i) & -sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ sin(\theta_i)cos(\alpha_{i-1}) & cos(\theta_i)cos(\alpha_{i-1}) & -sin(\alpha_{i-1}) & -sin(\alpha_{i-1})d_i \\ sin(\theta_i)sin(\alpha_{i-1}) & cos(\theta_i)sin(\alpha_{i-1}) & cos(\alpha_{i-1}) & cos(\alpha_{i-1})d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3.1.1
$$

ดังนั้นถ้านำค่าพารามิเตอร์จากตารางที่ 1 ลงไปแทนในเมตริกซ์การแปลงแบบเอกพันธุ์ (homogeneous transformation) ข้างต้นเราจะได้เมตริกซ์การแปลงในแต่ละแขนหรือแต่ละเฟรมดังนี้คือ

$$
{}^{0}A_1 = \begin{bmatrix} cos(\theta_1) & -sin(\theta_1) & 0 & 0 \\ sin(\theta_l) & cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3.1.2
$$

$$
{}^{1}A_2 = \begin{bmatrix} cos(\theta_2) & -sin(\theta_2) & 0 & 0.7 \\ sin(\theta_2) & cos(\theta_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 3.1.3
$$

$$^{2}A_{3}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0.4\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & d_{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad 3.1.4$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนเมตริกซ์ข้างต้นนี้โดยเทียบกับเฟรมที่ 0 ได้ดังนี้คือ

$$^{0}T_{1}={}^{0}A_{1} \qquad 3.1.5$$

$$^{0}T_{2}={}^{0}A_{1}{}^{1}A_{2}$$
$$=\begin{bmatrix}c_{12} & -s_{12} & 0 & 0.7c_{1}\\ s_{12} & c_{12} & 0 & 0.7s_{1}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad 3.1.6$$

$$^{0}T_{3}={}^{0}A_{1}{}^{1}A_{2}{}^{2}A_{3}$$
$$=\begin{bmatrix}c_{12} & -s_{12} & 0 & 0.4c_{12}+0.7c_{1}\\ s_{12} & c_{12} & 0 & 0.4s_{12}+0.7s_{1}\\ 0 & 0 & 1 & d_{3}\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad 3.1.7$$

โดยที่ $c_i = cos(\theta_i)$, $s_i = sin(\theta_i)$, $c_{ij} = cos(\theta_i + \theta_j)$, $s_{ij} = sin(\theta_i + \theta_j)$

3.2 ระบบระบบทางไคเนติก (kinetic) หรือระบบพลวัตของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 (manipulator dynamic)

การหาระบบพลศาสตร์หรือสมการการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุฬา 2 นั้น วิธีที่นิยมใช้กันนั้นสามารถหาได้สองวิธีด้วยกันคือใช้วิธีการใช้สูตรพลวัตของลากรองจ์ (Lagrange dynamic formulation) และวิธีการของนิวตัน-ออยเลอร์ (The Newton-Euler) ซึ่งแต่ละวิธีนั้นมีข้อดีข้อเสียกล่าวคือ วิธีการของลากรองจ์นั้นเป็นวิธีการ ที่ยุ่งยากสลับซับซ้อนและเมื่อเขียนเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์แล้วก็จะใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างสูง แต่ข้อดีก็คือเราสามารถวิเคราะห์รายละเอียดของผลกระทบต่าง ๆ ในขณะเคลื่อนที่ได้ค่อนข้างดี ส่วนวิธีการของนิวตัน-ออยเลอร์ (The Newtorn-Euler) นั้นเป็นวิธีการที่เหมาะสำหรับการเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์เพราะมีลักษณะเป็นสมการการทำแบบวนซ้ำ (re cursive equation) และใช้เวลาในการคำนวณด้วยคอมพิวเตอร์น้อยกว่า แต่ข้อเสียก็คือในการวิเคราะห์รายละเอียดถึงผลกระทบต่าง ๆ ของการเคลื่อนที่นั้นทำได้ค่อนข้างยากและไม่สะดวก

3.2.1 การหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์จุฬา 2 ด้วยวิธีการของลากรองจ์ (Lagrangian)

สมการลากรองจ์สามารถเขียนได้ดังนี้คือ

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \qquad 3.2.1$$

โดยที่

$\tau = generalized\ coordinate\ torque \quad n \times 1$

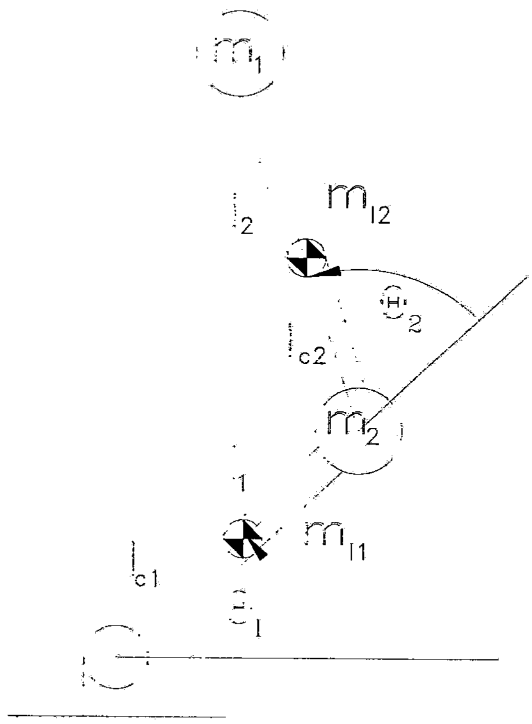
และ L หรือตัวลากรองจ์คือพลังงานไคเนติกลบด้วยพลังงานศักย์ดังนี้คือ

$$L(\theta, \dot{\theta}) = K(\theta, \dot{\theta}) - G(\theta) \qquad 3.2.2$$

โดยที่

$K(\theta, \dot{\theta}) = kinetic\ energy$

$G(\theta) = potential\ energy$



รูป 3.4 รูปจำลองแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 เฉพาะแขนที่ 1 และแขนที่ 2

รูปที่ 3.4 เป็นรูปจำลองการทำงานของแขนสองแขนแรกของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 โดยไม่คิดแขนที่สามทั้งนี้เนื่องจากว่าแขนที่สามนั้นเป็นอิสระกับแขนที่ 1 และแขนที่ 2 เราสามารถคำนวณหาพลังงานไคเนติก และพลังงานศักย์ของการเคลื่อนที่ของทั้งสองแขนดังวิธีการต่อไปนี้

ความเร็วที่จุดต่าง ๆ ของแต่ละแขน

$$|v_{c1}|^2 = l_{c1}^2\dot{\theta}^2$$

$$|v_1|^2 = l_1^2\dot{\theta}^2$$

$$|v_{c2}|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_{c2}^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + 2l_1 l_{c2}\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)cos(\theta_2)$$

$$|v_2|^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)cos(\theta_2)$$

$|v_{c1}|$ = ความเร็วของแขนที่หนึ่งตรงตำแหน่ง C.G. ของแขนที่หนึ่ง

$|v_1|$ = ความเร็วของแขนที่หนึ่งตรงตำแหน่งปลายแขน (กึ่งกลางมวล m_1)

$|v_{c2}|$ = ความเร็วของแขนที่สองตรงตำแหน่ง C.G. ของแขนที่สอง

$|v_2|$ = ความเร็วของแขนที่สองตรงตำแหน่งปลายแขน (กึ่งกลางมวล m_2)

m_1 = มวลที่ปลายแขนที่หนึ่ง (มอเตอร์ที่ใช้ขับแขนสอง)

m_2 = มวลที่ปลายแขนที่สอง (มอเตอร์ที่ใช้ขับแขนที่สองรวมทั้งตัวบอลสกรู)

m_{l1} = มวลของแขนที่หนึ่ง (ไม่รวมมอเตอร์ที่ปลายแขน)

m_{l2} = มวลของแขนที่สอง (ไม่รวมมอเตอร์ที่ปลายแขน)

l_1 = ความยาวของแขนที่หนึ่ง

l_2 = ความยาวของแขนที่สอง

l_{c1} = ความยาวระหว่างกึ่งกลางของแขนที่หนึ่งกับจุดหมุนของแขนที่หนึ่ง

l_{c2} = ความยาวระหว่างกึ่งกลางของแขนที่สองกับจุดหมุนของแขนที่สอง

I_1 = inertia ของแขนที่หนึ่งคิดเทียบที่จุด C.G. ของแขนที่หนึ่ง

I_2 = inertia ของแขนที่สองคิดเทียบที่จุด C.G. ของแขนที่สอง

หาสมการพลังงานไคเนติกของแขนที่ 1 (link 1)

$$kinetic\ energy = \frac{1}{2}m_1\left(l_1\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_{l1}|v_{c1}|^2 + \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 \qquad 3.2.3$$

$$potential\ energy = 0 \qquad 3.2.4$$

พลังงานศักย์ของแขนที่ 1 และแขนที่ 2 เป็น 0 เนื่องจากการเคลื่อนที่เป็นแบบระนาบ
สมการพลังงานไคเนติกของแขนที่ 2 (link 2)

$$kinetic\ energy = \frac{1}{2}m_2|v_2|^2 + \frac{1}{2}m_{l2}|v_{c2}|^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)^2 \qquad 3.2.5$$

potential energy = 0 3.2.6

ดังนั้นพลังงานไคเนติกรวมของทั้งสองแขนจะได้ว่า

$$\textit{kinetic energy} = \frac{1}{2}m\left(l\,\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m_l\left|v_c\right|^2 + \frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_2\left|v_2\right|^2 + \frac{1}{2}m_{l2}\left|v_{c2}\right|^2 + \frac{1}{2}I_2\left(\dot{\theta} + \dot{\theta}_2\right)^2 \qquad 3.2.7$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

3.2.8

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -m_2 l\, l_2\left(\dot{\theta} + \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}\,\sin\left(\theta_2\right) - m_{l2} l\, l_{c2}\left(\dot{\theta} + \dot{\theta}_2\right)\dot{\theta}\,\sin\left(\theta_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_{l1}l_{c1}^2\dot{\theta}_1 + I_1\dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_2^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 l_2\cos\left(\theta_2\right)\left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_{l2}l_1^2\dot{\theta}_1 + m_{l2}l_{c2}^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_{l2}l_1 l_{c2}\left(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)\cos\left(\theta_2\right) + I_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 l_2^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\cos\left(\theta_2\right) + m_{l2}l_{c2}^2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right) + m_{l2}l_1 l_{c2}\dot{\theta}_1\cos\left(\theta_2\right) + I_2\left(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2\right)$$

3.2.9

ดังนั้นจากสมการลากรองจ์ (lagrange equation) เราจะได้ว่า

$$\left[m_1 l_1^2 + m_{l1}l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2\cos\left(\theta_2\right) + m_{l2}l_1^2 + m_{l2}l_{c2}^2 + 2m_{l2}l_1 l_{c2}\cos\left(\theta_2\right) + I_2\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2\cos\left(\theta_2\right) + m_{l2}l_{c2}^2 + m_{l2}l_1 l_{c2}\cos\left(\theta_2\right) + I_2\right]\ddot{\theta}_2 - (2m_2 l_1 l_2 + 2m_{l2}l_1 l_{c2})\sin\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_2 l_1 l_2 + m_{l2}l_1 l_{c2})\sin\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 = \tau_1$$

$$\left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2\cos\left(\theta_2\right) + I_2 + m_{l2}l_{c2}^2 + m_{l2}l_1 l_{c2}\cos\left(\theta_2\right)\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_2^2 + I_2 + m_{l2}l_{c2}^2\right]\ddot{\theta}_2 + (m_2 l_1 l_2 + m_{l2}l_1 l_{c2})\sin\left(\theta_2\right)\dot{\theta}_2^2 = \tau_2$$

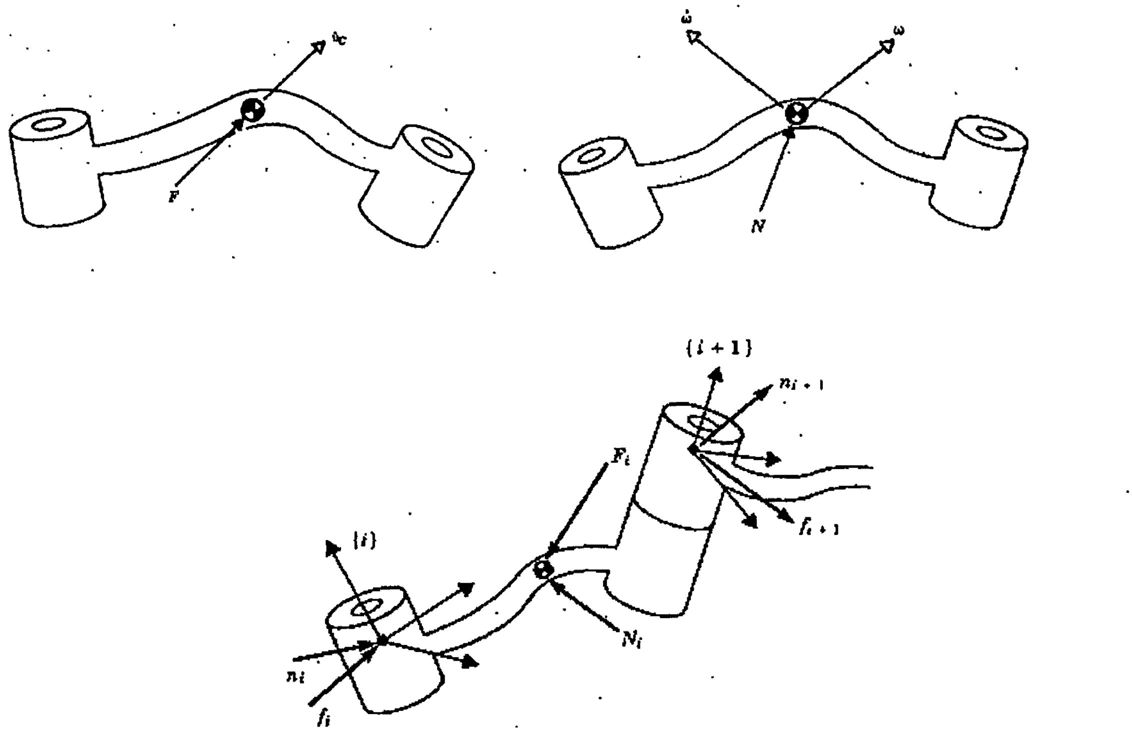
3.2.10

ส่วนแกนที่ 3 ซึ่งเป็นแกนอยู่ในแนวดิ่งเราจะได้สมการการเคลื่อนที่ดังนี้

$$f_3 = m_3\ddot{d}_3 - m_3 g \qquad 3.2.11$$

3.2.2 การหาสมการการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์จุฬา 2 ด้วยวิธีการนิวตัน-ออยเลอร์ (Newton-Euler)

สมการของนิวตัน-ออยเลอร์จะเป็นสมการแบบทำซ้ำ (iterative) ซึ่งสามารถเขียนได้ดังนี้ (ดูเอกสารอ้างอิง 12 ประกอบ)



รูปที่ 3.5 แสดงค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการนิวตัน-ออยเลอร์

การทำซ้ำจากในออกนอก (Outward iteration) $i: 0 \rightarrow 5$

$$
\begin{aligned}
{}^{i+1}\omega_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}z_{i+1} \\
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}z_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}z_{i+1} \\
{}^{i+1}\dot{v}_{i+1} &= {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\dot{\omega}_i \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \left({}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}\right) + {}^{i}\dot{v}_i\right) \\
{}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}} &= {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times \left({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{c_{i+1}}\right) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1} \\
{}^{i+1}F_{i+1} &= m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{v}_{c_{i+1}} \\
{}^{i+1}N_{i+1} &= {}^{c_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{c_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1}
\end{aligned}
\qquad (3.2.12)
$$

การทำซ้ำจากนอกเข้าหาใน (Inward iterations): $i: 6 \rightarrow 1$

$$
\begin{aligned}
&{}^{i}f_i={}_{i+1}^{i}R^{i+1}f_{i+1}+{}^{i}F_i \\
&{}^{i}n_i={}^{i}N_i+{}_{i+1}^{i}R^{i+1}n_{i+1}+{}^{i}P_{c_i}\times{}^{i}F_i+{}^{i}P_{i+1}\times{}_{i+1}^{i}R^{i+1}f_{i+1} \qquad 3.2.13\\
&\tau_i={}^{i}n_i^{T}\,{}^{i}z_i
\end{aligned}
$$

ค่าพารามิเตอร์ต่าง ๆ ที่ใช้ในสมการนิวตัน-ออยเลอร์นั้นได้แสดงไว้ในรูปที่ 3.5 และพอสรุปได้ดังนี้

f_i	=	แรงที่กระทำกับแขน i โดยแขน i-1
n_i	=	แรงบิดที่กระทำกับแขน i โดยแขน i-1
F_i	=	แรงเฉื่อยที่กระทำที่จุด C.G. ของแขน i
N_i	=	แรงบิดเฉื่อยที่กระทำที่จุด C.G. ของแขน i
${}^{i}P_{i+1}$	=	เวกเตอร์ตำแหน่งของข้อต่อ i+1 เทียบกับข้อต่อ i
${}^{i}P_{c\,i+1}$	=	เวกเตอร์ตำแหน่งของจุด C.G. ของข้อต่อ i+1 เทียบกับข้อต่อ i
${}^{i}R_i, {}^{i}R_{i+1}, {}^{i+1}R_{i+1}$	=	เมตริกซ์การหมุน (Rotation matrix)

สมการการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 โดยวิธีการนิวตัน-ออยเลอร์มีดังนี้

สำหรับแขนที่ 1 และแขนที่ 2

เวกเตอร์ของตำแหน่งของจุดกึ่งกลางของแขนแต่ละแขนคือ

$$
\begin{aligned}
{}^{1}P_{c_1} &= l_1 X_i \\
{}^{2}P_{c_2} &= l_2 X_2
\end{aligned} \qquad 3.2.14
$$

ค่าความเฉื่อยเทียบกับจุดกึ่งกลางแขน ของแขนที่ 1 และแขนที่ 2 สามารถเขียนได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
{}^{c_1}I_1 &= I_1 \\
{}^{c_2}I_2 &= I_2
\end{aligned} \qquad 3.2.15
$$

และจะเห็นว่าไม่มีแรงภายนอกมากกระทำที่ปลายแขนที่สอง ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f_3 &= 0 \\
n_3 &= 0
\end{aligned} \qquad 3.2.16
$$

และที่ฐานของแขนหุ่นยนต์จุฬา 2 นั้นยึดแน่นอยู่กับที่ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= 0 \\
\dot{\omega}_0 &= 0
\end{aligned} \qquad 3.2.17
$$

เราสามารถเขียนเมตริกซ์การหมุนของแขนที่ 1 และแขนที่ 2 ได้ดังนี้

$$ {}_{i+1}^{\;i}R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) & -\sin(\theta_{i+1}) & 0 \\ \sin(\theta_{i+1}) & \cos(\theta_{i+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{3.2.18} $$

$$ {}_{\;i}^{i+1}R = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i+1}) & \sin(\theta_{i+1}) & 0 \\ -\sin(\theta_{i+1}) & \cos(\theta_{i+1}) & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix} \tag{3.2.19} $$

แทนสมการข้างต้นนี้ลงในสมการทำซ้ำของนิวตัน-ออยเลอร์ (Newton-Euler iteration) จะได้ว่า

สำหรับแขนที่ 1   สมการการทำซ้ำจากในออกนอก (outward iteration)

$$ {}^{1}\omega_1 = \dot{\theta}_1 {}^{1}Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.2.20} $$

$$ {}^{1}\dot{\omega}_1 = \ddot{\theta}_1 {}^{1}Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.2.21} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{planar motion} \tag{3.2.22} $$

$$ {}^{1}\dot{v}_{c_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.23} $$

$$ {}^{1}F_1 = \begin{bmatrix} -m_1 l_1\dot{\theta}_1^2 + m_{l1} l_{c1}\dot{\theta}_1^2 \\ m_1 l_1\ddot{\theta}_1 + m_{l1} l_{c1}\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.24} $$

$$ {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_1\ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \tag{3.2.25} $$

สำหรับแขนที่ 2 สมการการทำซ้ำจากในออกนอก (outward iteration)

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$ 3.2.26

$$ {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$ 3.2.27

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & 0 \\ -\sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1\dot{\theta}_1^2 \\ l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \\ l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{planar motion} $$

3.2.28

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \\ l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} $$ ของมวล m_2

3.2.29

$$ {}^{2}\dot{v}_{c_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_{c_2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_{c_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) \\ l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) \\ 0 \end{bmatrix} $$ ของมวลแขน m_{l2}

3.2.30

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2 l_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) - m_2 l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_{l2} l_1\ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) \\ -m_{l2} l_1\dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) - m_{l2} l_{c_2}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) + m_2 l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_{l2} l_1\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) \\ +m_{l2} l_1\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) + m_{l2} l_{c_2}(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ \\ 0 \end{bmatrix} $$ 3.2.31

$$ {}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix} $$ 3.2.32

แขนที่ 2 สมการการทำซ้ำจากนอกเข้าหาใน (inward iteration)

$$ {}^{2}f_2 = {}^{2}F_2 $$ 3.2.33

$$ {}^{2}n_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) + I_2 + m_{l2} l_{c2}^2 + m_{l2} l_1 l_{c2} \cos(\theta_2)\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2 l_2^2 + I_2 + m_{l2} l_{c2}^2\right]\ddot{\theta}_2 \\ +(m_2 l_1 l_2 + m_{l2} l_1 l_{c2})\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} $$

3.2.34

แขนที่ 1 สมการทำซ้ำจากนอกเข้าหาใน (inward iteration)

$$ {}^{1}f_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_2) & -\sin(\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_2) & \cos(\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ + m_{l2} l_1 \ddot{\theta}_1 \sin(\theta_2) - m_{l2} l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_2) - m_{l2} l_{c_2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ + m_{l2} l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2) + m_{l2} l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_2) + m_{l2} l_{c_2} (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ + \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_{l1} l_{c1} \dot{\theta}_1^2 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_{l1} l_{c1} \ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

3.2.35

$$ {}^{1}n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + m_{l1} l_{c1}^2 + I_1 + m_2 l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) + m_{l2} l_1^2 + m_{l2} l_{c2}^2 \\ +2 m_{l2} l_1 l_{c2} \cos(\theta_2) + I_2 \end{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ + \left[m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(\theta_2) + m_{l2} l_{c2}^2 + m_{l2} l_1 l_{c2} \cos(\theta_2) + I_2\right]\ddot{\theta}_2 \\ -(2 m_2 l_1 l_2 + 2 m_{l2} l_1 l_{c2})\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_2 l_1 l_2 + m_{l2} l_1 l_{c2})\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 \end{bmatrix} $$

3.2.36

เพราะฉะนั้นสมการการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์จุจุพา 2 เฉพาะสองแขนบนคือแขนที่ 1 และแขนที่ 2 จึงสามารถหาได้ดังนี้

$$\left[m_1l_1^2 + m_{l1}l_{c1}^2 + I_1 + m_2l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2\cos(\theta_2) + m_{l2}l_1^2 + m_{l2}l_{c2}^2 + 2m_{l2}l_1l_{c2}\cos(\theta_2) + I_2\right]\ddot{\theta}_1$$
$$+\left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos(\theta_2) + m_{l2}l_{c2}^2 + m_{l2}l_1l_{c2}\cos(\theta_2) + I_2\right]\ddot{\theta}_2$$
$$-(2m_2l_1l_2 + 2m_{l2}l_1l_{c2})\sin(\theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 - (m_2l_1l_2 + m_{l2}l_1l_{c2})\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 = \tau_1$$

$$\left[m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos(\theta_2) + I_2 + m_{l2}l_{c2}^2 + m_{l2}l_1l_{c2}\cos(\theta_2)\right]\ddot{\theta}_1 + \left[m_2l_2^2 + I_2 + m_{l2}l_{c2}^2\right]\ddot{\theta}_2$$
$$+(m_2l_1l_2 + m_{l2}l_1l_{c2})\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 = \tau_2$$

3.2.37

สมการการเคลื่อนที่ของแขนหุ่นยนต์อุตสาหกรรมจุพา 2 ของแขนที่ 1 และแขนที่ 2 ข้างต้นนั้นจะเห็นว่าเป็นสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้น (non-linear equation) ของตัวแปร $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$, $\dot{\theta}_1(t)$, $\dot{\theta}_2(t)$ เราสามารถนำมาจัดรูปแบบให้เพื่อให้มีลักษณะเป็นสมการเชิงเส้นได้แต่เปลี่ยนรูปตัวแปรให้อยู่ในรูปแบบอื่นดังนี้

$$\left[\mathrm{A} + \mathrm{C} + 2\mathrm{B}\cos(\theta_2)\right]\ddot{\theta}_1 + \left[C + B\cos(\theta_2)\right]\ddot{\theta}_2 + \left[B\sin(\theta_2)\right]\left(2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2\right) = \tau_1$$
$$\left[C + B\cos(\theta_2)\right]\ddot{\theta}_1 + B\ddot{\theta}_2 + B\sin(\theta_2)\dot{\theta}_2^2 = \tau_2$$

$$A = m_1l_1^2 + m_{l1}l_{c1}^2 + I_1 + m_2l_1^2 + m_{l2}l_1^2$$
$$B = m_2l_1l_2 + m_{l2}l_1l_{c2}$$
$$C = m_2l_2^2 + I_2 + m_{l2}l_{c2}^2$$

3.2.38

หรืออาจจะเขียนอยู่ในรูปแบบของสมการการเคลื่อนที่ทั่วไป (general dynamic equation) ได้ดังนี้

$$\tau = \mathbf{D}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) \qquad 3.2.39$$

โดยที่

$\mathbf{D}(\mathbf{q})$ = เป็นเมตริกซ์มวล (mass matrix) ซึ่งมีขนาด nxn

$\mathbf{h}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ = เป็นเวกเตอร์แรงหรือแรงบิดที่เป็นซึ่งเกิดจากความเร่ง centripetal และความเร่ง colioris ซึ่งมีขนาด nx1

$\mathbf{g}(\mathbf{q})$ = เป็นเวกเตอร์ของแรงที่เกิดขึ้นเนื่องจากความเร่ง g ซึ่งมีขนาด nx1

$\mathbf{q}$ = เป็นเวกเตอร์ตัวแปรหรือ generalized coordinate ซึ่งมีขนาด nx1