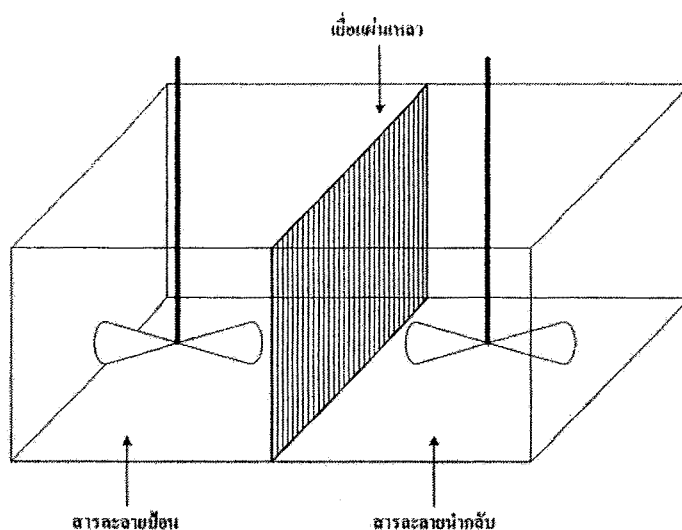


การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับมุมมองของแต่ละกลุ่มนักวิจัย ในหนังสือนี้จะพยายามอธิบายถึงการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่จะนำไปสู่การคำนวณหาค่าเปอร์เซ็นต์การสกัดและเปอร์เซ็นต์การนำกลับเริ่มต้นด้วยการใช้มอดูลประเภทเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวพองชนิดราบ (flat supported liquid membrane หรือ supported liquid membrane, SLM) ซึ่ง Huang และคณะจากประเทศจีนได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ ต่อมา Pancharoen และคณะจากประเทศไทยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ด้วยการใช้มอดูลของระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พองด้วยเส้นใยกลวง (hollow fiber supported liquid membrane, HFSLM)

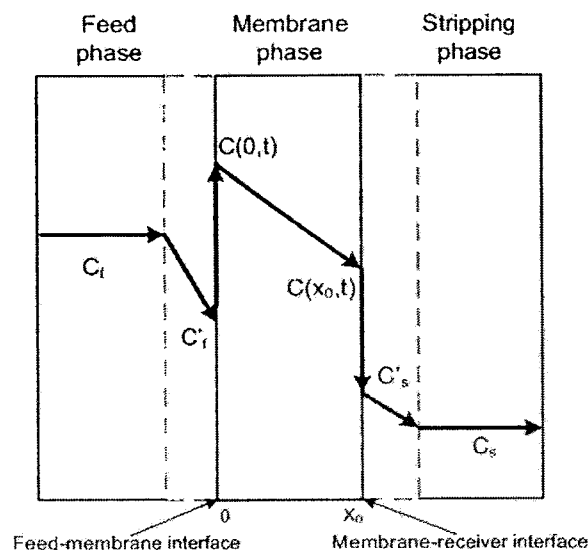
5.1 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวพองชนิดราบ

สำหรับวิธีการแยกไอออนโลหะหรือโลหะผสมผ่านระบบเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวพองด้วยชนิดราบ การทำงานจะประกอบไปด้วยถังบรรจุของเหลวซึ่งมีผนังกั้นแบ่งออกเป็นสองส่วนสำหรับของเหลวเพื่อไม่ให้ปะปนกัน ส่วนที่เป็นผนังกั้นคือเยื่อแผ่นชนิดราบ ในแต่ละส่วนจะมีตัวกวนดังแสดงรายละเอียดไว้ในรูปที่ 5.1 เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจของระบบการทำงาน



รูปที่ 5.1 ถังอุปกรณ์ที่ใช้ในการสกัด/แยกไอออนโลหะผ่านเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวรองรับชนิดราบ

โดยทั่วไปของเหลวที่เป็นสารละลายป้อนและสารละลายนำกลับรวมทั้งเยื่อแผ่นเหลวชนิดราบสามารถแสดงรายละเอียด เพื่อใช้ในการคำนวณดังรูปที่ 5.2 ซึ่งกำหนดให้วัฏภาคทั้ง 3 ของระบบประกอบด้วย วัฏภาคสารละลายป้อน (feed phase) วัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว (membrane phase) และวัฏภาคสารละลายนำกลับ (strip phase) ซึ่งไม่ปะปนกัน วางเรียงกันจากซ้ายไปขวาดังรูป นอกจากนี้ยังกำหนดให้มีเส้นประทางฝั่งของวัฏภาคสารละลายป้อน และฝั่งของวัฏภาคสารละลายนำกลับ โดยที่ระยะห่างระหว่างเส้นปะของแต่ละฝั่ง ถึงขอบวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวหมายถึงชั้นบาง (film) ซึ่งต่างก็มีค่าความเข้มข้นของไอออนโลหะหรือ โลหะผสมในแต่ละวัฏภาคเปลี่ยนแปลง (ไม่คงที่) กำหนดให้ระยะบนแกนอนหมายถึง ความหนาของวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว ซึ่งเริ่มต้นจากค่า 0 จนถึง X_0



รูปที่ 5.2 แสดงผังการกระจายเชิงเส้นของความเข้มข้นของไอออนโลหะผสมในวัฏภาคสารละลายป้อนในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว และในวัฏภาคสารละลายนำกลับ

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของระบบในรูปที่ 5.2 นั้นตั้งอยู่บนสมมติฐานดังนี้

- (ก) ระบบที่จำลองมาคำนวณนี้สารละลายในแต่ละวัฏภาคผสมเป็นเนื้อเดียวกันและมีความเข้มข้นสม่ำเสมอในทุกทิศทางของแต่ละวัฏภาคขณะปฏิบัติการภายใต้อุณหภูมิคงที่
- (ข) สมบัติทางกายภาพและทางเคมีถ่ายเทมวลมีค่าคงที่
- (ค) วัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวแยกส่วนโดยสมบูรณ์ไม่ผสมเป็นเนื้อเดียวกันกับวัฏภาคสารละลายทั้งสอง

- (ง) ปริมาตรของวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับปริมาตรของทั้งวัฏภาคสารละลายป้อนและวัฏภาคสารละลายนำกลับ
- (จ) กำหนดให้อัตราการเกิดปฏิกิริยาการสกักที่ทำให้เกิดสารประกอบเชิงซ้อนในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวมีความรวดเร็วมากพอที่จะไม่ต้องนำเอาอิทธิพลของปฏิกิริยาความต้านทานที่เกิดขึ้นของระบบมาคิดคำนวณ
- (ฉ) กำหนดให้ไอออนโลหะผสมคือ โลหะ D และโลหะ L

กลไกการแพร่ของความเข้มข้นของไอออนโลหะผสมที่ต้องการสกัดแสดงไว้ในรูปที่ 5.2 มีลำดับขั้นตอนของการตั้งสมการต่างๆ ดังนี้

ขั้นที่ 1 การถ่ายเทมวลสารจากวัฏภาคสารละลายป้อนที่จะผ่านจากชั้นบาง (film) ไปยังผิวสัมผัสระหว่างวัฏภาคสารละลายป้อนและวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวค่าของฟลักซ์ (flux) สามารถเขียนได้ว่า

$$J_f = k_f(C_f - C'_f) \quad (5.1)$$

ขั้นที่ 2 การเกิดสารประกอบเชิงซ้อนที่ผิวสัมผัสสามารถเขียนสมการเพื่อหาค่าของฟลักซ์ได้ คือ

$$J_{r1} = k_1 C'_f - k_{-1} C(0, t) \quad (5.2)$$

ขั้นที่ 3 การที่สารประกอบเชิงซ้อนแพร่ซึมผ่านชั้นของวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวจากผิวสัมผัสด้านหนึ่ง (ด้านที่ติดกับวัฏภาคสารละลายป้อน) ไปสู่ผิวสัมผัสอีกด้านหนึ่ง (ด้านที่ติดกับวัฏภาคสารละลายนำกลับ) สามารถเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$J_{m1} = -De \left[\frac{\partial C(0, t)}{\partial x} \right] \quad (5.3)$$

$$J_{m2} = -De \left[\frac{\partial C(x_0, t)}{\partial x} \right] \quad (5.4)$$

ขั้นที่ 4 เป็นการคืนตัวจากสารประกอบเชิงซ้อน ณ ผิวสัมผัสระหว่างวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว และวัฏภาคสารละลายนำกลับ จากปฏิกิริยาการนำกลับ สามารถเขียนสมการของฟลักซ์ได้เป็น

$$J_{r1} = k_{-2}C(x_0, t) - k_2C'_s \quad (5.5)$$

ขั้นที่ 5 การถ่ายเทมวลของไอออนโลหะจากผิวสัมผัสผ่านชั้นบาง (film) ไปสู่วัฏภาคสารละลายนำกลับ สมการของฟลักซ์เขียนได้ว่า

$$J_s = k_s(C'_s - C_s) \quad (5.6)$$

ทั้งนี้	x_0	คือ ค่าความหนาของวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว (cm)
	x	คือ ระยะความหนาใดๆ ของวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว (cm)
	t	คือ เวลา (sec)
	C	คือ ค่าความเข้มข้นของไอออนโลหะ (g/L)
	$k_{ij} (k_{2j})$ และ $k_{-ij} (k_{-2j})$	คือ ค่าคงที่อัตราการเกิดปฏิกิริยาไปข้างหน้าและย้อนกลับตามลำดับ
	k_f และ k_s	คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล (mass transfer coefficient) ในชั้นขอบเขตของการสักรัดและชั้นขอบเขตของการนำกลับตามลำดับมีค่าเป็น

$$k_f = \frac{1.25D_f}{d_0} \left(\text{Re} \frac{d_0}{L} \right)^{0.93} \text{Sc}^{0.33} \quad (5.7)$$

$$k_s = 1.165 \frac{D_s}{d_i} \left(\text{ReSc} \frac{d_i}{L} \right)^{1/3} \quad (5.8)$$

โดยที่	d	คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของท่อกลวง (cm)
	L	คือ ความยาวของเส้นใยกลวง (cm)
	D	คือ free bulk diffusion coefficient ซึ่งคำนวณได้โดยสมการของ Wilke-Chang
	D_e	คือ ค่า effective diffusivity ในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว หาได้ดังสมการ

$$D_e = D \cdot \epsilon' / \tau' \quad (5.9)$$

$$D = 7.4 \times 10^{-8} (\varphi M_B)^{0.5} T / (\mu_B V_A^{0.6}) \quad (5.10)$$

โดยที่ ε' คือค่า porosity ของเยื่อแผ่นเหลว

จากนั้นจะอาศัยกฎของสมดุลสาร (mass balance หรือ conservation of mass) จะสามารถหาความสัมพันธ์ของมวลสารได้ดังนี้

$$V_f C_{f0} + V_s C_{s0} = V_f C_f + V_s C_s + V_m C_m \quad (5.11)$$

และ $C_m = C_f K_{e1} = C_s K_{e2} \quad (5.12)$

ทั้งนี้ ค่า K_{e1} เป็นค่าสมดุลคงที่อันเนื่องมาจากปฏิกิริยาการสกัดระหว่างวัฏภาคสารละลายป้อนและวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว

และค่า K_{e2} เป็นค่าสมดุลคงที่อันเนื่องมาจากปฏิกิริยาการนำกลับระหว่างวัฏภาคสารละลายนำกลับและวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว

จากสมมติฐานที่กำหนดให้ V_m มีค่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับ V_f และ V_s ดังนั้นจากสมการที่ (5.11) และ (5.12) สามารถคำนวณหาค่า

$$C_m = \frac{V_f C_{f0} + V_s C_{s0}}{V_f / K_{e1} + V_s / K_{e2}} \quad (5.13)$$

$$C_f = \frac{V_f C_{f0} + V_s C_{s0}}{V_f + V_s K_{e1} / K_{e2}} \quad (5.14)$$

$$C_s = \frac{V_f C_{f0} + V_s C_{s0}}{V_s + V_f K_{e2} / K_{e1}} \quad (5.15)$$

ในสภาวะ transition สมการที่จะแสดงความเข้มข้นของไอออนโลหะสามารถเขียนได้ในแต่ละช่วงโดยแจกแจงได้ดังนี้

ในช่วงของวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว:

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} = D_e \frac{\partial^2 C_j}{\partial x^2} \quad (0 < x < x_0) \quad (5.16)$$

โดยมีขอบเขตที่จะกำหนดได้ว่า ณ ตำแหน่งที่

$$t = 0, C_j = 0 \quad (0 < x < x_0) \quad (5.16a)$$

และ

$$t \rightarrow \infty C_j = \frac{V_f C_{f0j} + V_s C_{s0j}}{V_f/K_{e1j} + V_s/K_{e2j}} \quad (0 < x < x_0) \quad (5.16b)$$

โดยที่

$$x = 0 \quad D_e \frac{\partial C_j(0,t)}{\partial x} = k_f [C_j(0,t) \left(\frac{k_{-1j}}{k_{1j}} \right) - C_{fj}] \quad (t > 0) \quad (5.16c)$$

และ

$$x = x_0 \quad D_e \frac{\partial C_j(x_0,t)}{\partial x} = k_s [C_{sj} - C_j(x_0,t) \left(\frac{k_{-2j}}{k_{2j}} \right)] \quad (t > 0) \quad (5.16d)$$

ในช่วงของวัฏภาคสารละลายป้อน:

$$V_f \frac{dC_{fj}}{dt} = A \cdot D_e \frac{\partial C_j(0,t)}{\partial x} \quad (5.17)$$

ณ ตำแหน่งที่

$$t = 0, C_{fj} = C_{f0j} \quad (5.17a)$$

และ

$$t \rightarrow \infty C_{fj} = \frac{V_f C_{f0j} + V_s C_{s0j}}{V_f + V_s K_{e1j}/K_{e2j}} \quad (5.17b)$$

ในช่วงของวัฏภาคสารละลายนำกลับ:

$$V_s \frac{dC_{sj}}{dt} = -A \cdot D_e \frac{\partial C_j(x_0,t)}{\partial x} \quad (5.18)$$

ณ ตำแหน่งที่

$$t = 0, C_{sj} = C_{s0j} \quad (5.18a)$$

และ

$$t \rightarrow \infty C_{sj} = \frac{V_f C_{f0j} + V_s C_{s0j}}{V_s + V_f K_{e2j}/K_{e1j}} \quad (5.18b)$$

ค่า A ในสมการที่ (5.17) และ (5.18) คือพื้นที่ (เฉลี่ย) ของวัฏภาคเชื่อมต่อแผ่นเหลว

จากนี้จะแปลงค่าตัวแปรต่างๆ ไปสู่ระบบไร้หน่วย (dimensionless) โดยกำหนดให้

$y = \frac{x}{x_0}$ คือ ความหนาของวัฏภาคเชื่อมต่อแผ่นเหลว ณ เวลาใดๆ

$\tau = D_e \cdot \frac{t}{x_0^2}$ คือ เวลา ณ เวลาใดๆ

$E_{fj} = \frac{C_{fj}}{C_{foj}}$ คือ ความเข้มข้นของไอออนโลหะในสารละลายป้อน ณ เวลาใดๆ

$E_{sj} = \frac{C_{sj}}{C_{foj}}$ คือ ความเข้มข้นของไอออนโลหะในสารละลายนำกลับ ณ เวลาใดๆ

$E_{mj} = \frac{C_j}{C_{foj}}$ คือ ความเข้มข้นของไอออนโลหะในเชื่อมต่อแผ่นเหลว ณ เวลาใดๆ

$\beta = \frac{C_{soj}}{C_{foj}}$ คือ ความเข้มข้นของไอออนโลหะในสารละลายนำกลับ ณ เวลาเริ่มต้น
ของไอออนโลหะในสารละลายนำกลับ ณ เวลาเริ่มต้น

กำหนดให้ $K_{e1j} = \frac{k_{1j}}{k_{-1j}}$ และ $K_{e2j} = \frac{k_{2j}}{k_{-2j}}$ ซึ่งหมายถึงอัตราส่วนระหว่าง “อัตราคงที่ของปฏิกิริยาไปข้างหน้า” ต่อ “อัตราคงที่ของปฏิกิริยาย้อนกลับ” ในวัฏภาคสารละลายป้อน และวัฏภาคสารละลายนำกลับตามลำดับ

นอกจากนี้ $K_f = k_f \cdot \frac{x_0}{D_e}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลในชั้นฟิล์มสารละลายป้อน

$K_s = k_s \cdot \frac{x_0}{D_e}$ เป็นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลในชั้นฟิล์มสารละลายนำกลับ

$\gamma_f = A \cdot \frac{x_0}{V_f}$ เป็นพื้นที่ผิวสัมผัสวัฏภาคเชื่อมต่อแผ่นเหลวภายในท่อ

$\gamma_s = A \cdot \frac{x_0}{V_s}$ เป็นพื้นที่ผิวสัมผัสวัฏภาคเชื่อมต่อแผ่นเหลวที่ชั้นเปลือก

และจะได้ความสัมพันธ์ที่สามารถกำหนดค่าได้ง่าย คือ $\frac{Y_f}{Y_s} = \frac{V_s}{V_f}$

จากนั้นหากจะนำค่าตัวแปรต่างๆ ซึ่งผ่านการแปลงเป็นตัวแปรที่ไร้หน่วยลงแทนค่าในสมการต่างๆ ของแต่ละภูมิภาค จะสามารถเขียนสมการและข้อแม้ต่างๆ ที่กำหนดขอบเขตของสมการ ได้ดังนี้

ภูมิภาคเยื่อแผ่นเหลว:

$$\frac{\partial E_{mj}}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 E_{mj}}{\partial y^2} \quad (5.19)$$

$$\tau = 0, E_{mj} = 0 \quad (5.19a)$$

$$\tau \rightarrow \infty \quad E_{mj} = \frac{K_{e1j} \cdot K_{e2j} (\gamma_s + \beta \gamma_f)}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} \quad (5.19b)$$

$$y = 0, \frac{\partial E_{mj}(0, \tau)}{\partial y} = \frac{E_{mj}(0, \tau) - E_{fj} K_{e1j}}{K_{e1j} / K_f} \quad (5.19c)$$

$$y = 1, \frac{\partial E_{mj}(1, \tau)}{\partial y} = \frac{E_{sj} K_{e2j} - E_{mj}(1, \tau)}{K_{e2j} / K_s} \quad (5.19d)$$

ภูมิภาคสารละลายป้อน:

$$\frac{dE_{fj}}{d\tau} = \gamma_f \frac{\partial E_{mj}(0, \tau)}{\partial y} \quad (5.20)$$

$$\tau = 0, E_{fj} = 1 \quad (5.20a)$$

$$\tau \rightarrow \infty \quad E_{fj} = \frac{K_{e2j} (\gamma_s + \beta \gamma_f)}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} \quad (5.20b)$$

วิฤภาคสารละลายนำกลับ:

$$\frac{dE_{sj}}{d\tau} = \gamma_s \frac{\partial E_{mj}(1, \tau)}{\partial y} \quad (5.21)$$

$$\tau = 0, E_{sj} = \beta \quad (5.21a)$$

$$\tau \rightarrow \infty \quad E_{sj} = \frac{K_{e1j}(\gamma_s + \beta\gamma_f)}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} \quad (5.21b)$$

จากสมการที่มีตัวแปรไร้หน่วยในแต่ละช่วงที่หาได้คือสมการที่ (5.19), (5.20), (5.21) หากนำเทคนิคของการแปลงสมการที่มีตัวแปรเป็นฟังก์ชัน (function) ของ “เวลา” ให้อยู่ในรูปของลาปลาซ (laplace transform) และแก้สมการเพื่อหาค่าความเข้มข้นของไอออนโลหะไร้หน่วย (dimensionless) ที่เวลาใดๆ ณ ตำแหน่งต่างๆ ในวิฤภาคสารละลายป้อน วิฤภาคเชื่อมแผ่นเหลว และวิฤภาคสารละลายนำกลับจะได้ค่าต่างๆดังต่อไปนี้

$$E_{fj} = \frac{K_{e2j}(\gamma_s + \beta\gamma_f)}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} + \frac{\gamma_f(K_{e1j} + \beta K_{e2j})}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} \exp(-\lambda_j \tau) \quad (5.22)$$

$$E_{sj} = \frac{K_{e1j}(\gamma_s + \beta\gamma_f)}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} - \frac{\gamma_s(K_{e1j} + \beta K_{e2j})}{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}} \exp(-\lambda_j \tau) \quad (5.23)$$

ทั้งนี้ ได้ให้ค่านิยามของ “ λ_j ” ไว้ว่า

$$\lambda_j = \frac{\gamma_f K_{e1j} + \gamma_s K_{e2j}}{1 + \frac{K_{e1j}}{K_f} + \frac{K_{e2j}}{K_s}} \quad (5.24)$$

และหากว่าในการสกัดนี้มีค่าการเลือกสกัด (selectivity) ร่วมอยู่ด้วย ก็หมายถึงการสกัดที่มีไอออนโลหะมากกว่า 1 ชนิดละลายอยู่ในสารละลายป้อน สมมติเช่น ไอออน D และไอออน L ดังนั้นจะสามารถคำนวณหาค่า “การแยกองค์ประกอบ (separation factor)” หรือ “ α ” ได้ดังนี้ตามต่อไปนี้

$$\alpha = \frac{j_D}{j_L} = \frac{E_{sD} - E_{sD0}}{E_{sL} - E_{sL0}} \quad (5.25)$$

และหากนำสมการนี้ไปแทนค่าในสมการที่ (5.21) จากการคำนวณจะได้ค่า

$$\alpha = \frac{\left(\frac{[K_{e1D}(Y_s + \beta Y_f) - Y_s(K_{e1D} - \beta K_{e2D}) \exp(-\lambda_D \tau)]}{(Y_f K_{e1D} - Y_s K_{e2D})} - E_{sD0} \right)}{\left(\frac{[K_{e1L}(Y_s + \beta Y_f) - Y_s(K_{e1L} - \beta K_{e2L}) \exp(-\lambda_L \tau)]}{(Y_f K_{e1L} - Y_s K_{e2L})} - E_{sL0} \right)} \quad (5.26)$$

ด้วยเหตุที่ในสารละลายทั้งในวัฏภาคสารละลายป้อนและสารละลายนำกลับของระบบที่ต้องการแยกไอออนโลหะผสม (D และ L) ดังนั้นจากสมการ (5.23), (5.24), และ (5.25) สามารถแปลงรูปและเขียนได้ใหม่ในรูปแบบที่ดูได้ง่ายดังสมการต่อไปนี้

$$\lambda_j = \frac{Y_f + Y_s}{\frac{1}{K_{e1j}} + \frac{1}{K_f} + \frac{1}{K_s}} \quad (5.27)$$

$$E_{sj} = \frac{Y_s}{Y_f + Y_s} - \frac{Y_s}{Y_f + Y_s} \exp(-\lambda_j \tau) \quad (5.28)$$

$$\alpha = [1 - \exp(-\lambda_D \tau)] / [1 - \exp(-\lambda_L \tau)] \quad (5.29)$$

จากสมการต่างๆ ที่หาได้สามารถสร้างกราฟระหว่าง (ก) “ความเข้มข้นไร้หน่วย (dimensionless concentration)” เทียบกับ “เวลา” (ข) “องค์ประกอบการแยก (separation factor)” เทียบกับ “เวลา” ซึ่งค่าที่ได้จากการคำนวณนี้สามารถเปรียบเทียบกับผลการทดลอง

ตัวอย่างกรณีศึกษาที่ 5.1: เรื่องการนำกลับไอออนเพรซีโอดิเมียม (Praseodymium) ไอออนจากสารละลายผสมของกลุ่มธาตุหายากผ่านระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยชนิดราบ

โจทย์ ในการนำกลับเพรซีโอดิเมียม (Praseodymium) ไอออนจากสารละลายผสมของกลุ่มธาตุหายากผ่านระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยชนิดราบ โดยใช้ Cyanex 272 เป็นสารสกัดและมีเคโรซีนเป็นตัวทำละลาย สารละลายป้อน (มีธาตุที่ต้องการแยกและนำกลับ) ละลายอยู่ในกรดไนตริกขณะที่สารละลายนำกลับเป็นกรดเกลือ การทำงานของระบบเป็นการทำงานแบบต่อเนื่องผ่านเส้นใยชนิดราบ โดยมีข้อมูลเกี่ยวกับผลการทดลองดังนี้

ตารางที่ 5.1 ความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 ที่ 10 %(v/v) ต่อการสกัดไอออน
เพอร์ซีโอติเมียม

เวลาในการเก็บตัวอย่าง (นาที)	[Pr ³⁺] ขาออก (ppm)
0	0
10	138
20	96.6
30	87.4
40	46

ตารางที่ 5.2 ความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 ที่ความเข้มข้นต่าง ๆ กันต่อการสกัดไอออน
เพอร์ซีโอติเมียม

ความเข้มข้น Cyanex 272 %(v/v)	ความเข้มข้น สารละลายน้ำกลับ HCl (โมลต่อลิตร)	[Pr ³⁺] ขาออก (ppm)
1	0.6	144.4
5	0.6	100.74
7	0.6	77.51
10	0.6	43.24

ความเข้มข้นของ Pr³⁺ ขาเข้า (คงที่) ที่ 230 ppm

ตารางที่ 5.3 ความเข้มข้นสารละลายน้ำกลับ HCl ที่ 0.6 โมลต่อลิตรต่อการนำกลับไอออน
เพอร์ซีโอติเมียม

เวลาในการเก็บตัวอย่าง (นาที)	[Pr ³⁺] ขาออก (ppm)
0	0
10	92
20	105.8
30	142.6
40	161

ความเข้มข้นของ Pr³⁺ ขาเข้าในสารละลายน้ำกลับ (คงที่) ที่ 0 ppm

ตารางที่ 5.4 ความเข้มข้นสารละลายน้ำกลั่น HCl ต่อการนำกลับไอออนเพรซีโอดีเมียม

ความเข้มข้นของ สารละลายน้ำกลั่น HCl (โมลต่อลิตร)	ความเข้มข้นของ สารสกัด Cyanex 272 %(v/v)	[Pr ³⁺] ขาออก (ppm)
0.1	10	144.4
0.2	10	100.74
0.4	10	77.51
0.6	10	63.94
0.8	10	67.39

ความเข้มข้นของ Pr³⁺ ขาเข้าในสารละลายน้ำกลั่น (คงที่) ที่ 0 ppm

จงคำนวณหา

- เปอร์เซ็นต์การสกัดและเปอร์เซ็นต์การนำกลับของไอออนเพรซีโอดีเมียม
- สัมประสิทธิ์การกระจาย (distribution coefficient) ของไอออนเพรซีโอดีเมียม
- สัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (permeability coefficient) ของไอออนเพรซีโอดีเมียม
- สัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล (mass transfer coefficient) ในวัฏภาคสารละลาย (k_f) และในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว (k_m)

วิธีทำ ก) การคำนวณหาเปอร์เซ็นต์การสกัดและเปอร์เซ็นต์การนำกลับของไอออนเพรซีโอดีเมียมทำได้ดังนี้

$$\text{จากสมการที่ (3.4) เปอร์เซ็นต์การสกัด} = \frac{C_{fo} - C_f}{C_f} \times 100$$

$$\text{และจากสมการที่ (3.5) เปอร์เซ็นต์การนำกลับ} = \frac{C_s}{C_{fo}} \times 100$$

นำข้อมูลที่โจทย์ให้มาจากตารางที่ 5.1 และตารางที่ 5.3 สามารถคำนวณได้ดังนี้

ตารางที่ 5.5 สรุปผลการคำนวณหาค่าเปอร์เซ็นต์การสกัดและเปอร์เซ็นต์การนำกลับ

เวลาในการเก็บตัวอย่าง (นาที)	เปอร์เซ็นต์การสกัด $\frac{C_{fo} - C_f}{C_f} \times 100$	เปอร์เซ็นต์การนำกลับ $\frac{C_s}{C_{fo}} \times 100$
0	0	0
10	40	40
20	58	46
30	62	62
40	80	70

ข) ในการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย (distribution coefficient)

การคำนวณต้องแบ่งเป็นขั้นตอนย่อยๆ หลายขั้นตอน กล่าวคือจะเริ่มค้นหาค่าคงที่สมดุลของปฏิกิริยา (K_{ex}) ก่อน จากนั้นจึงจะคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย (D) ได้โดยดำเนินการตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1: ในการคำนวณหาค่า K_{ex} จะอาศัยสมการที่ (3.46) เามาประยุกต์โดยเขียนสมการ จากปฏิกิริยาการสกัด Pr ได้ดังนี้



ดังนั้น

$$K_{ex} = \frac{[\text{PrR}_3] \cdot [\text{H}^+]^3}{[\text{Pr}^{3+}] \cdot [\text{HR}]^3} \quad (5.31)$$

นั่นคือ K_{ex} จะเป็นค่าความชัน (slope) ที่ได้จากการพล็อตระหว่าง $[\text{Pr}^{3+}][\text{HR}]^3$ บนแกน x กับ $[\text{PrR}_3][\text{H}^+]^3$ บนแกน y

ตัวอย่างการคำนวณหาค่า $[\text{Pr}^{3+}]$, $[\text{HR}]^3$, $[\text{PrR}_3]$, $[\text{H}^+]^3$ ณ ความเข้มข้นของ Cyanex 272 ที่ 10 % (v/v) จากข้อมูลในตารางที่ 5.2 ซึ่งแสดงรายละเอียดการคำนวณได้ดังนี้

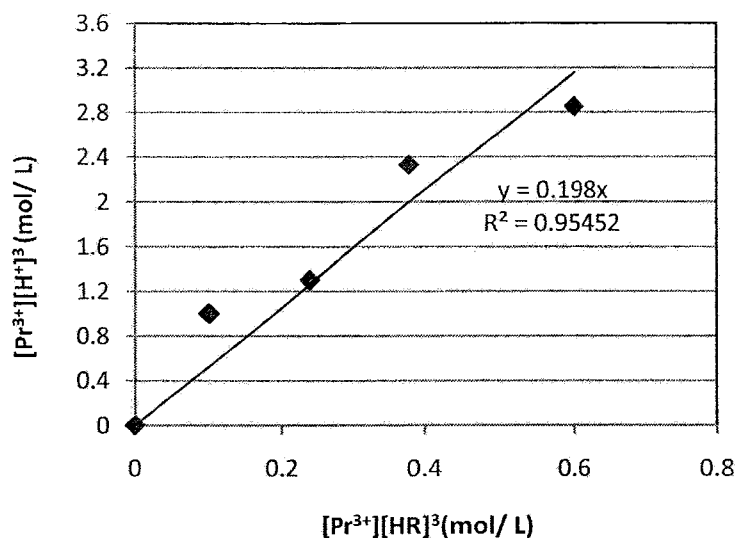
$[\text{Pr}^{3+}]$ คือ ค่าความเข้มข้นของสารละลายป้อนเข้าซึ่งคงที่ ที่ 230 ppm ซึ่งแปลงหน่วยเป็น โมลต่อลิตร 1.63×10^{-3}

- [PrR₃] คือ ค่าความเข้มข้นของสารประกอบเชิงซ้อนซึ่งมีค่าเท่ากับผลต่างระหว่างสารละลายป้อนเข้ากับสารละลายป้อนขาออก = 230-43.24 = 186.76 ซึ่งแปลงหน่วยเป็นโมลต่อลิตรมีค่าเท่ากับ 1.32×10^{-3}
- [HR] คือ ค่าความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 ซึ่งเท่ากับ 10 % โดยปริมาตรซึ่งแปลงหน่วยเป็น โมลต่อลิตร มีค่าเท่ากับ 0.172
- [H⁺] คือ ความเข้มข้นของสารละลายกรด HCl ในสารละลายน้ำกลับเท่ากับ 0.6 โมลต่อลิตร

ตารางที่ 5.6 สรุปผลการคำนวณหาค่าความเข้มข้นตามที่กำหนดในสมการที่ (5.31) เพื่อนำไปพล็อตหาค่าความชัน K_{cx}

ความเข้มข้น Cyanex 272 %(v/v)	[Pr ³⁺][HR] ³	[PrR ₃][H ⁺] ³
1	6.68×10^{-9}	1.31×10^{-4}
5	8.98×10^{-7}	1.98×10^{-4}
7	2.61×10^{-6}	2.33×10^{-4}
10	8.3×10^{-6}	2.85×10^{-4}

ขั้นตอนที่ 2: นำผลจากตารางที่ 5.6 มาสร้างกราฟดังรูปที่ 5.3 เพื่อคำนวณหาค่าความชัน ซึ่งค่าความชัน (K_{cx}) ที่หาได้มีค่าเท่ากับ 0.198



รูปที่ 5.3 การสร้างกราฟระหว่างค่า $[Pr^{3+}][HR]^3$ กับ $[PrR_3][H^+]^3$

ขั้นตอนที่ 3: จากสมการที่ (5.31) และสมการที่ (3.48) สามารถนำมาประยุกต์ได้ดังนี้

$$\text{เพราะว่า} \quad K_{\text{ex}} = \frac{[\text{PrR}_3] \cdot [\text{H}^+]^3}{[\text{Pr}^{3+}] \cdot [\text{HR}]^3}$$

$$\text{และ} \quad D = \frac{[\text{PrR}_3]}{[\text{Pr}^{3+}]}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad D = \frac{K_{\text{ex}}[\text{HR}]^3}{[\text{H}^+]^3}$$

เมื่อนำค่า K_{ex} ที่ได้จากกราฟมาแทนค่าในสมการก็จะสามารถคำนวณค่า D ได้ดังตารางที่ 5.7

ตารางที่ 5.7 สรุปค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย (D) ที่ความเข้มข้น Cyanex 272 มีค่าอยู่ระหว่าง 1.0-10.0 % (v/v)

Cyanex 272 % (v/v)	1.0	5.0	7.0	10.0
$D (\times 10^2)$	0.04	0.05	0.14	0.46

ก) การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (permeability coefficient) ของเพอร์ซีโอติเมียม จากสมการที่ (3.13) และ (3.14)

$$-V_f \ln \left(\frac{C_f}{C_{f0}} \right) = AP \frac{\beta}{\beta+1} t \quad (3.13)$$

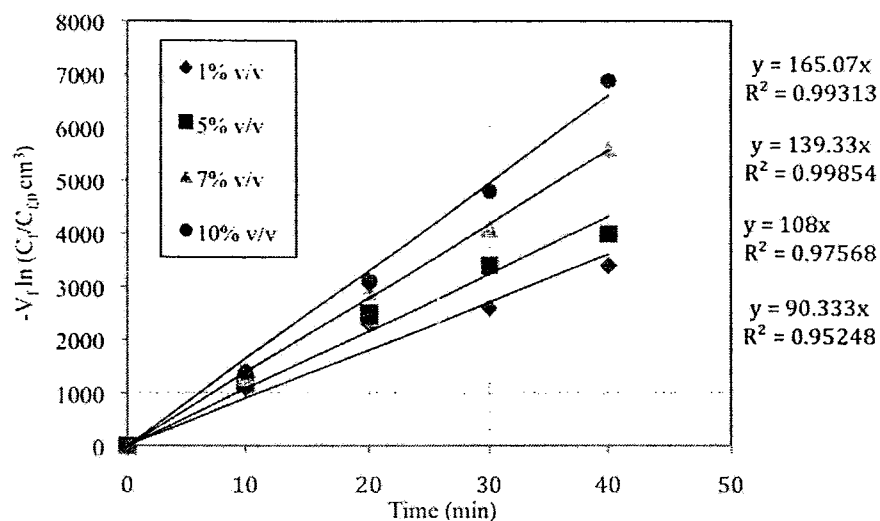
$$\beta = \frac{Q_f}{PL\epsilon\pi N r_i} \quad (3.14)$$

โดยที่

P	คือ	ค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (เซนติเมตรต่อวินาที)
C_{f0}	คือ	ความเข้มข้นของไอออนเพอร์ซีโอติเมียมที่เวลาเริ่มต้น (โมลต่อลิตร)
C_f	คือ	ความเข้มข้นของไอออนเพอร์ซีโอติเมียมที่เวลา t (โมลต่อลิตร)
A	คือ	พื้นที่การถ่ายเทมวล (ตารางเซนติเมตร)
V_f	คือ	ปริมาตรของสารละลายป้อน (ลูกบาศก์เซนติเมตร)
Q_f	คือ	อัตราการไหลของสารละลายป้อน (ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที)
L	คือ	ความยาวของเส้นใยกลาง (เซนติเมตร)
N	คือ	จำนวนเส้นใยกลางในมอดูล (เส้น)

r_i	คือ	รัศมีภายในของเส้นใยกลวง (เซนติเมตร)
ε	คือ	ความพรุนของเส้นใยกลวง
π	คือ	3.1416

จากข้อมูลในตารางที่ 5.1- ตารางที่ 5.3 นำมาพล็อตกราฟ ระหว่าง t บนแกน x กับ $-V_f \ln \frac{C_f}{C_{f,0}}$ บนแกน y จะได้ $AP \frac{\beta}{\beta+1}$ จะเป็นค่าความชัน (slope) ซึ่งแสดงไว้ในรูป 5.4



รูปที่ 5.4 การพล็อตกราฟระหว่าง $-V_f \ln \frac{C_f}{C_{f,0}}$ กับ t

ที่ความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 10 % (v/v) มีค่าความชันเท่ากับ 165.07 ซึ่งก็คือเทอม $AP \frac{\beta}{\beta+1}$ และแทนค่าตัวแปรต่างๆ ลงในสมการที่ 3.14 และนำค่า β ที่ได้แทนลงในเทอม $AP \frac{\beta}{\beta+1} = 165.07$ ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านของไอออนเพอร์ซีโอดีเมียม (P) ที่ความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 10 % (v/v) มีค่าเท่ากับ 6.365×10^{-2} เซนติเมตรต่อวินาทีจากค่าความชันที่หาได้และสมการที่ 3.14 คำนวณ P ได้ค่าดังแสดงไว้ในตารางที่ 5.8

ตารางที่ 5.8 สรุปผลการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (P) ที่ความเข้มข้นของ Cyanex 272 ระหว่างช่วง 1.0-10.0% (v/v)

Cyanex 272 % (v/v)	1.0	5.0	7.0	10.0
P (cm/s $\times 10^2$)	2.699	3.812	5.189	6.365

- ง) การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล (mass transfer coefficient) ในวิทยาศาสตร์ละลายป้อน (k_p) และในวิทยาศาสตร์เยื่อแผ่นเหลว (k_m)

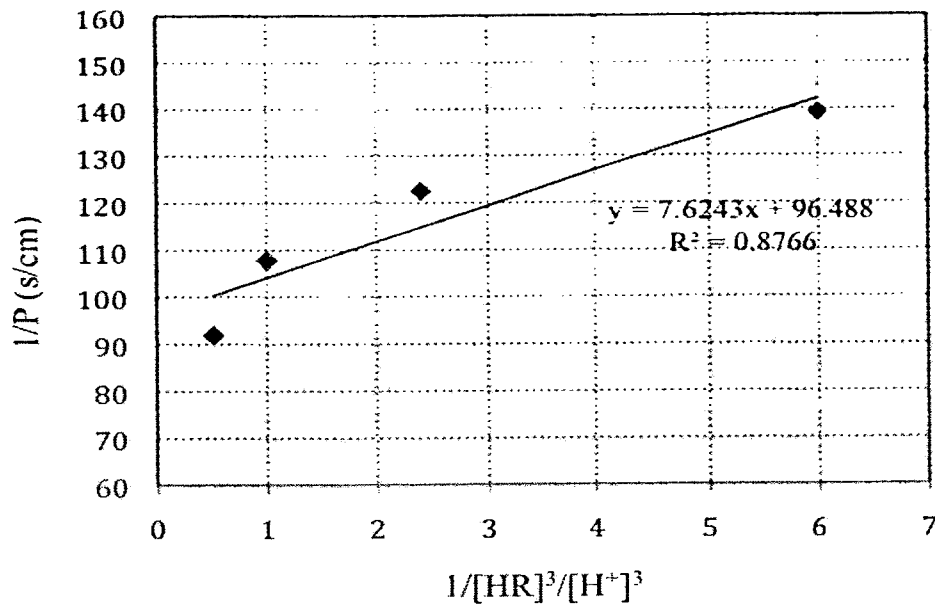
จากสมการ (3.7) นำมาประยุกต์ได้เป็น

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{k_i} + \frac{r_i}{r_{lm}} \cdot \frac{1}{K_{ex} k_m [HR]^3 / [H^+]^3} \quad (5.32)$$

โดยที่เทอมที่ 3 ซึ่งเป็นค่าความต้านทานการถ่ายเทมวลในวิทยาศาสตร์ละลายป้อนกลับมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับความต้านทานการถ่ายเทมวลของอีกสองเทอม จึงตัดเทอมที่ 3 ทิ้ง และกำหนดให้สัญลักษณ์ต่างๆ ในสมการที่ (5.32) แทนความหมายดังนี้

P	คือ ค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (เซนติเมตรต่อวินาที)
k_i	คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของสารละลายป้อน (เซนติเมตรต่อวินาที)
k_m	คือ ค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของเยื่อแผ่นเหลว (เซนติเมตรต่อวินาที)
r_i	คือ รัศมีภายในของเส้นใยกลวง (เซนติเมตร)
r_{lm}	คือ รัศมี log-mean ของเส้นใยกลวง (เซนติเมตร)
K_{ex}	คือ 0.103 (ลิตรต่อโมล) ⁴
$[HR]$	คือ ความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 (โมลต่อลิตร)
$[H^+]$	คือ ความเข้มข้นของสารละลายกรดไฮโดรคลอริกในสารละลายป้อน (โมลต่อลิตร)

จากผลการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่านของไอออนเพอร์ซีโอดีเมียม เมื่อเปลี่ยนแปลงค่าความเข้มข้นของสารสกัด Cyanex 272 ในสารละลายเยื่อแผ่นเหลวในมอดูลของเส้นใยกลวง สร้างกราฟระหว่าง $1/P$ กับ $1/[HR]^3/[H^+]^3$ แสดงดังรูปที่ 5.5 สามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของเยื่อแผ่นเหลว (k_m) ได้จากความชันของกราฟ ซึ่งคือเทอม $\frac{r_i}{r_{lm}} \cdot \frac{1}{K_{ex} k_m}$ และคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของสารละลายป้อน (k_p) ได้จากจุดตัดแกน $1/P$



รูปที่ 5.5 การสร้างกราฟระหว่าง $1/P$ กับ $1/[HR]^3/[H^+]^3$

ในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของเยื่อแผ่นเหลว (k_m)

จากรูปที่ 5.5 จะได้ค่าความชันของกราฟมีค่าเท่ากับ $7.6 \times 10^{-16} \frac{\text{s/cm}}{\text{cm}^3/\text{mol}}$ เพราะว่า $\frac{r_i}{r_{lm}} \cdot \frac{1}{K_{ex}k_m}$ มีค่าเท่ากับความชัน ซึ่งคือ $7.6 \times 10^{-16} \frac{\text{s/cm}}{\text{cm}^3/\text{mol}}$ และจากสมการ

$$r_{lm} = \frac{r_o - r_i}{\ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)}$$

โดยที่

r_o คือ รัศมีภายนอกของเส้นใยกลวง = 150×10^{-4} เซนติเมตร

r_i คือ รัศมีภายในของเส้นใยกลวง = 120×10^{-4} เซนติเมตร

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad r_{lm} &= \frac{150 \times 10^{-4} - 120 \times 10^{-4}}{\ln\left(\frac{150 \times 10^{-4}}{120 \times 10^{-4}}\right)} \\ &= 1.34 \times 10^{-2} \quad \text{เซนติเมตร} \end{aligned}$$

เมื่อแทนค่าต่างๆ ในเทอม
$$\frac{r_i}{r_{lm}} \cdot \frac{1}{K_{ex} k_m} = 7.6 \times 10^{-16} \frac{s/cm}{(cm^3/mol)}$$

จะได้ $k_m = 0.788 \text{ cm/s}$

นั่นคือค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของเยื่อแผ่นเหลว (k_m) มีค่าเท่ากับ 0.788 เซนติเมตรต่อวินาที

ในการคำนวณค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของสารละลายป้อน (k_i)

จากรูปที่ 5.5 คำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของสารละลายป้อน (k_i) ได้จากจุดตัดแกนโดยที่จุดตัดแกน $1/P$ มีค่าเท่ากับ 97.3 ซึ่งคือเทอม $1/k_i$ จะได้ว่า

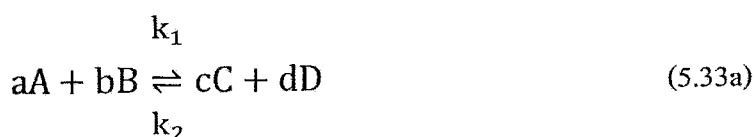
$$\frac{1}{k_i} = 97.3 \text{ s/cm}$$

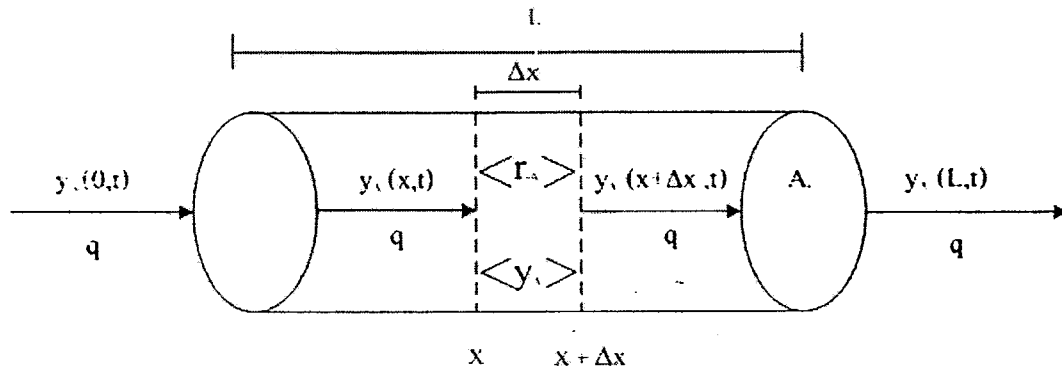
$$k_i = 0.0103 \text{ cm/s}$$

ดังนั้นค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของสารละลายป้อนที่มีไอออนเพอร์ซีโอติเมียม (k_i) มีค่าเท่ากับ 0.0103 เซนติเมตรต่อวินาที

5.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวที่พองด้วยเส้นใยกลาง

การทำงานของระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พองด้วยเส้นใยกลางเครื่องมือมีของระบบแสดงไว้ในรูปที่ 2.11 ทั้งนี้ทางเข้าและออกตามแนวแกนจะเป็นทางเข้าออกของสารละลายป้อน ส่วนทางเข้าออกที่ชั้นเปลือกจะเป็นทางเข้าออกของสารละลายนำกลับ ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สามารถชี้แจงได้ดังรูปที่ 5.6





รูปที่ 5.6 รูปท่อไหลกลวงที่มีพื้นที่หน้าตัด “A_c” พร้อมรายละเอียดเพื่อใช้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในส่วนของการสกัด

ในกรณีที่ $k_1 > k_2$ สมการ (5.33a) สามารถเขียนได้ใหม่เป็น



และจะได้ $r_{-A}(x, t) = ky_A^n(x, t) \quad (5.34)$

5.2.1 แบบจำลองการสกัด

ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของการสกัดของระบบซึ่งแสดงในรูปที่ 5.6 นั้น ตั้งอยู่บนสมมติฐานดังนี้

- 1) กำหนดให้เส้นผ่านศูนย์กลางภายในและภายนอกของเส้นไหลกลวงมีค่าน้อยมาก ดังนั้นความหนาของผนังท่อเยื่อแผ่นเหลวจึงมีค่าน้อยมาก
- 2) กำหนดให้ความเข้มข้นของสารละลายภายในเส้นไหลกลวงตามแนวรัศมีมีค่าคงที่
- 3) กำหนดให้ในภูมิภาคเยื่อแผ่นเหลวจะมีเฉพาะสารประกอบเชิงซ้อนของโลหะเท่านั้นที่จะแพร่ซึมภายในภูมิภาคเยื่อแผ่นเหลวจากผนังด้านที่ติดกับภูมิภาคสารละลายป้อนไปยังผนังอีกด้านที่ติดกับภูมิภาคสารละลายนำกลับ
- 4) กำหนดให้ผลรวมของปฏิกิริยาเป็นปฏิกิริยาไปข้างหน้า

5) เนื่องจากวิฤภาคของเยื่อแผ่นเหลวบางมาก จึงกำหนดให้ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นในทิศทางตามแนวแกนเท่านั้น และพร้อมกันนั้น มวลฟลักซ์ของไอออนโลหะเกิดขึ้นในทิศทางตามแนวแกน ด้วยอาศัยหลักการของการอนุรักษ์มวลสาร (conservation of mass) จะสามารถสร้างสมการจากส่วนเล็กๆ (increment) ของเส้นใยกลาง ที่แสดงไว้ในรูปที่ 5.6 โดยมีรายละเอียดได้ดังนี้

$$\left(\begin{array}{c} \text{อัตราการไหลของมวล} \\ \text{เข้าสู่ระบบ} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{อัตราการไหลของมวล} \\ \text{ออกจากระบบ} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{อัตราของมวล} \\ \text{ที่หายไปจากระบบ} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{อัตราของมวล} \\ \text{ที่สะสมอยู่ในระบบ} \end{array} \right)$$

$$q_{y_A}(x, t) - q_{y_A}(x + \Delta x, t) - \langle r_{-A} \rangle \cdot \Delta x \cdot A_c = \frac{d\langle y_A \rangle}{dt} \cdot \Delta x \cdot A_c \quad (5.35)$$

โดยที่ y_A	คือ	ความเข้มข้นของสารละลายในท่อใยกลาง
q	คือ	อัตราการไหล
A_c	คือ	พื้นที่หน้าตัด
x	คือ	ตำแหน่งตามแนวแกนท่อ
n	คือ	อันดับของปฏิกิริยา
$\langle \rangle$	คือ	ค่าเฉลี่ย

จากสมการที่ 5.35 จัดรูปและแปลงสมการได้ใหม่ในรูป

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial y_A(x, t)}{\partial x} \right] - r_{-A}(x, t) = \frac{\partial y_A(x, t)}{\partial t} \quad (5.36)$$

ที่สภาวะคงตัว ณ ตำแหน่งเริ่มต้น ($t = 0$) สมการที่ (5.36) จึงลดรูปเป็น

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial y_A(x, 0)}{\partial x} \right] - r_{-A}(x, 0) = 0 \quad (5.37)$$

กรณีที่ 1, $n = 0$ นำสมการที่ (5.34) ลงแทนค่าในสมการที่ (5.37)

$$\text{จะคำนวณหาค่า} \quad y_A(x, 0) = y_A(0, 0) - \frac{kA_c}{q} \cdot x \quad (5.38)$$

กรณีที่ 2, $n = 1$ ในทำนองเดียวกันเมื่อแทนค่าสมการที่ (5.34) ลงในสมการที่ (5.37)

$$y_A(x, 0) = y_A(0,0) e^{\frac{-kA_c}{q}x} \quad (5.39)$$

กรณีที่ 3, $n \geq 2$ เช่นเดียวกันกับกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 เมื่อแทนค่าสมการที่ (5.34) ลงในสมการที่ (5.37)

จะคำนวณหาค่า $y_A(x, 0) = \left[\frac{(n-1)kA_c}{q} \cdot x + y_A^{1-n}(0,0) \right]^{\frac{1}{1-n}}$ (5.40)

หรือ $y_A(x, 0) = [\beta x + \alpha]^{\frac{1}{1-n}}$ (5.41a)

โดยที่ $\beta = \frac{(n-1)kA_c}{q}$ (5.41b)

และ $\alpha = y_A^{1-n}(0,0)$ (5.41c)

ถ้านำสมการที่ (5.36) ตั้งและลบออกด้วยสมการ (5.37) พร้อมทั้งกำหนดค่าให้

$$\bar{y}_A(x, t) = y_A(x, t) - y_A(x, 0) \quad (5.42a)$$

และ $\bar{r}_{-A}(x, t) = r_{-A}(x, t) - r_{-A}(x, 0)$ (5.42b)

จะได้สมการในรูปแบบใหม่ดังนี้

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial \bar{y}_A(x, t)}{\partial x} \right] - \bar{r}_{-A}(x, t) = \frac{\partial \bar{y}_A(x, t)}{\partial t} \quad (5.43)$$

ในการแก้สมการ (5.43) จะอาศัยวิธีการของ Laplace Transform ซึ่งจะต้องแยกการคำนวณออกเป็น 3 กรณีด้วยกัน ทั้งนี้เพราะอันดับของปฏิกิริยาซึ่งได้แจกแจงรายละเอียดไว้ มีด้วยกัน 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 $n = 0$ จากสมการที่ (5.34) แทนค่าลงในสมการที่ (5.43) และเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial \bar{y}_A(x, t)}{\partial x} \right] - k = \frac{\partial \bar{y}_A(x, t)}{\partial t} \quad (5.44)$$

ดังนั้นเมื่อแก้สมการที่ (5.44) ด้วยวิธีการของ Laplace Transform และนำสมการ (5.38) แทนค่าลงไปจะได้

$$\bar{y}_A(L, t) = \bar{y}_A(0, t - \tau_0) - kt \cdot u(t) - k(t - \tau_0) \cdot u(t - \tau_0) \quad (5.45)$$

โดยที่ $\tau_0 = \frac{A_c L}{q}$ นอกจากนี้ ทั้ง $u(t)$ และ $u(t - \tau_0)$ ต่างก็เป็น unit function ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1 เมื่อ $t = 0$ และ $t = \tau_0$ ตามลำดับ

กรณีที่ 2 $n = 1$ จากสมการที่ (5.34) แทนค่าลงในสมการที่ (5.43) และเขียนใหม่ได้เป็น

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial \bar{y}_A(x, t)}{\partial x} \right] - k \bar{y}_A(x, t) = \frac{\partial \bar{y}_A(x, t)}{\partial t} \quad (5.46)$$

และเมื่อแก้สมการที่ (5.46) ด้วยวิธีการของ Laplace Transform และนำสมการ (5.39) แทนค่าลงไปจะได้

$$\bar{y}_A(x, t) = e^{-\tau_0 k} \cdot \bar{y}_A(0, t - \tau_0) \quad (5.47)$$

กรณีที่ 3 $n \geq 2$ ในทำนองเดียวกันเมื่อนำสมการที่ (5.34) แทนค่าลงในสมการที่ (5.43) พจน์กลางคือ

$$\bar{r}_A(x, t) = ky_A^n(x, t) - ky_A^n(x, 0) \quad (5.48)$$

มีค่าเป็นพจน์ที่ไม่เชิงเส้น (non linear term) ดังนั้นก่อนการแก้สมการด้วยวิธีการของ Laplace Transform จึงต้องแปลงพจน์ที่ไม่เชิงเส้นนี้ด้วยวิธีการทำให้เป็นเชิงเส้น (linearization) โดยอาศัยการกระจายอนุกรม Taylor

$$f(x) = f(a_0) + \frac{df}{dx} \Big|_{a=0} (x - a_0) + \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{a_0} \frac{(x-a_0)^2}{2!} + \dots \quad (5.49a)$$

ดังนั้น

$$r_A(y_A \Big|_{(x,t)}) = r(y_A \Big|_{x=0}) + \frac{dr}{dy_A} \Big|_{y_A(x,0)} [y_A \Big|_{x,t} - y_A \Big|_{x,0}] \quad (5.49b)$$

ซึ่งค่าที่ได้จะเป็นค่าประมาณการคือ

$$\bar{r}_A(x, t) = ky_A^{n-1}(x, 0) \cdot \bar{y}_A(x, t) \quad (5.50a)$$

เมื่อนำสมการ (5.14a) ลงแทนค่าในสมการ (5.49) จะได้

$$\bar{r}_A(x,t) = \left(\frac{kn}{\beta x + \alpha}\right) \bar{y}_A(x,t) \quad (5.50b)$$

เมื่อนำสมการ (5.50b) ลงแทนค่าในสมการ (5.43) จะได้

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial \bar{y}_A(x,t)}{\partial x} \right] - \left(\frac{kn}{\beta x + \alpha} \right) \bar{y}_A(x,t) = \frac{\partial \bar{y}_A(x,t)}{\partial t} \quad (5.51)$$

การแก้สมการ (5.51) จะอาศัยวิธีการของ Laplace Transform จะได้

$$\bar{y}_A(L,t) = e^{-\Omega} \cdot \bar{y}_A(0,t - \tau_0) \quad (5.52)$$

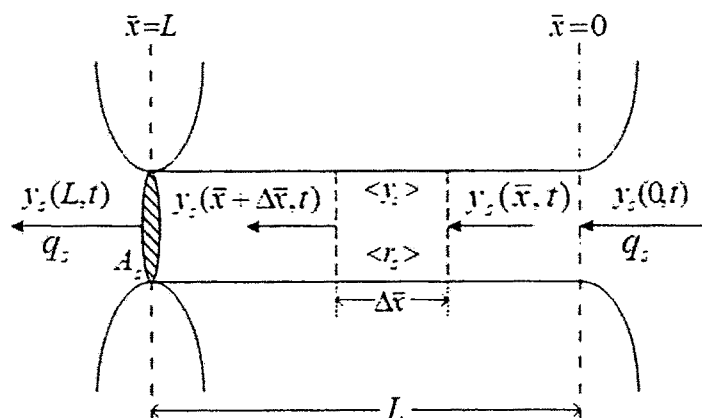
$$\text{โดยที่ } \tau_0 = \frac{A_c L}{q}$$

$$\text{และ } \Omega = \frac{A_c}{q} \cdot \frac{kn}{\beta} \cdot \ln \left[\frac{\beta L + \alpha}{\alpha} \right]$$

ทั้งนี้ค่า β และ α ได้หาไว้แล้วในสมการที่ (5.41b) และ (5.41c) ตามลำดับ

5.2.2 แบบจำลองการนำกลับ

ในการสร้างแบบจำลองการนำกลับจำเป็นต้องเข้าใจระบบการทำงานของเชื้อแผ่นเหลวที่พวยด้วยเส้นใยกลวงอย่างชัดเจน เพราะในหนังสือเล่มนี้จะอธิบายถึงระบบการไหลระหว่างสารละลายป้อนและสารละลายนำกลับที่สวนทิศทางการไหลซึ่งกันและกัน ซึ่งก่อนข้างจะซับซ้อน ด้วยเหตุที่สารละลายนำกลับจะไหลผ่านชั้นเปลือกของท่อใยกลวง ดังนั้นปฏิกิริยาการนำกลับจึงจะเกิดจากชั้นเปลือกของท่อขณะที่สารประกอบเชิงซ้อนของไอออนโลหะในวัฏภาคเชื้อแผ่นเหลวสัมผัสกับสารละลายนำกลับ



รูปที่ 5.7 ช่องว่างระหว่างชั้นเปลือกที่มีพื้นที่หน้าตัด “ A_s ” พร้อมรายละเอียดเพื่อใช้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในส่วนของการนำกลับ

กำหนดให้

y_s คือ เข้มข้นของสารละลายในท่อไขกลาง

$\bar{X}$ คือ ระยะทางบนแนวแกนและมีความสัมพันธ์กับ X (ในส่วนของการสกัด) โดยมีค่าเท่ากับ $L - X$

จากรูปที่ 5.7 สามารถจินตนาการได้ว่าช่องว่างระหว่างชั้นเปลือกของท่อมีขนาดเล็กมาก ดังนั้นในการสร้างสมมติฐานจะกำหนดให้ชั้นฟิล์มที่เปลือกของท่อมีขนาดบางมากๆ จนไม่ต้องนำมาคิดคำนวณการกำหนดทิศทางการไหลไปตามแนวแกนของท่อโดยใช้สัญลักษณ์ ($\bar{x}$)

การตั้งสมมติฐานเพื่อใช้ในการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับการนำกลับก็คล้ายคลึงกับสมมติฐานของการสกัดกล่าวคือ

- 1) กำหนดให้ระยะห่างระหว่างชั้นเปลือกจากท่อหนึ่งไปยังท่อถัดไปมีค่าน้อยมาก
- 2) กำหนดให้ความเข้มข้นของสารละลายในชั้นเปลือกตามแนวรัศมีของท่อไขกลางมีค่าคงที่
- 3) กำหนดให้ปฏิบัติการนำกลับไปทั้งข้างหน้าและย้อนกลับ แต่ผลรวมของปฏิบัติการเป็นปฏิบัติการไปข้างหน้า
- 4) กำหนดให้สารประกอบเชิงซ้อนของโลหะในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวไม่สามารถไหลซึมออกมาสู่กระแสของสารละลายนำกลับได้ แต่ไอออนโลหะที่อยู่ในรูปสารประกอบเชิงซ้อนจะหลุดออกมาได้ด้วยการทำปฏิกิริยาเท่านั้น

- 5) เนื่องจากช่องว่างระหว่างชั้นเปลือกบางมาก จึงกำหนดให้ปฏิกิริยาที่เกิดขึ้นในทิศทางตามแนวแกนเท่านั้น และพร้อมกันนั้น มวลฟลักซ์ของไอออนโลหะเกิดขึ้นในทิศทางตามแนวแกนด้วย

ในการสร้างสมการก็ใช้หลักการเดียวกันกับแบบจำลองการสกัด กล่าวคือ สามารถเขียนสมการได้ในรูป

$$\frac{-q}{A_c} \left[\frac{\partial y_s(\bar{x}, t)}{\partial \bar{x}} \right] - r_{-A}(\bar{x}, t) = \frac{\partial y_s(\bar{x}, t)}{\partial t} \quad (5.53)$$

ทั้งนี้สามารถกำหนดค่าความสัมพันธ์จากการแปลงสมการ (5.36) ด้วย

$$\bar{x} = L - x \quad (5.54)$$

อัตราของการทำปฏิกิริยาสามารถเขียนได้เป็น

$$r_{-s}(\bar{x}, t) = k_s y_s^m(\bar{x}, t) \quad (5.55)$$

ในการหาความเข้มข้นของสารละลายนำกลับ ณ เวลาเริ่มต้น ($t=0$) และ ณ เวลาใดๆ ($t=t$) ในแต่ละตำแหน่งของชั้นเปลือก ยังคงต้องแบ่งเป็น 3 กรณีด้วยกันคือ

กรณีที่ 1 $m=0$ จะได้

$$y_s(\bar{x}, 0) = y_s(0, 0) - \frac{k_s A_s}{q_s} \cdot \bar{x} \quad (5.56)$$

$$\text{และ } \bar{y}_s(L, t) = \bar{y}_s(0, t - \bar{\tau}_0) - k_s t \cdot u(t) - k_s(t - \bar{\tau}_0) \cdot u(t - \bar{\tau}_0) \quad (5.57)$$

กรณีที่ 2 $m = 1$ จะได้

$$y_s(\bar{x}, 0) = y_s(0,0) \cdot e^{\frac{-k_s A_s \cdot \bar{x}}{q_s}} \quad (5.58)$$

$$\bar{y}_s(\bar{x}, t) = e^{-\tau_0 k_s} \cdot \bar{y}_s(0, t - \bar{\tau}_0) \quad (5.59)$$

กรณีที่ 3, $m \geq 2$

จะคำนวณหาค่า $y_s(\bar{x}, 0) = \left[\frac{(m-1)k_s A_s}{q_s} \cdot \bar{x} + y_s^{1-m}(0,0) \right]^{\frac{1}{1-m}}$ (5.60)

$$\bar{y}_s(L, t) = e^{-\bar{\Omega}} \cdot \bar{y}_s(0, t - \bar{\tau}_0) \quad (5.61)$$

ทั้งนี้ $\bar{\tau}_0 = \frac{A_s L}{q_s}$ (5.62a)

$$\bar{\Omega} = \frac{A_s}{q_s} \cdot \frac{k_s m}{\bar{\beta}} \cdot \ln \left[\frac{\bar{\beta} L + \bar{\alpha}}{\bar{\alpha}} \right] \quad (5.62b)$$

โดยที่ $\bar{\beta} = \frac{(m-1)k_s A_s}{q_s}$ (5.62c)

และ $\bar{\alpha} = y_s^{1-m}(0,0)$ (5.62d)

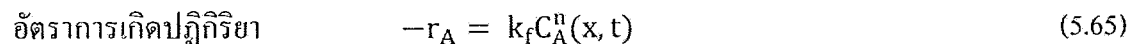
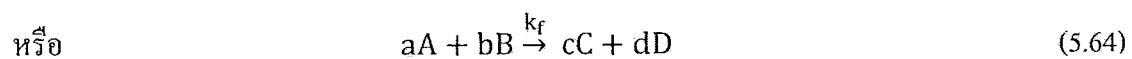
ตัวอย่างกรณีศึกษาที่ 5.2: เรื่องการสกัดไอออนทองแดงด้วยสารสกัด LIX 84I ในระบบเยื่อ-แผ่นเหลวพองด้วยเส้นใยกลวงโดยนำผลที่ได้เปรียบเทียบกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

โจทย์ ในอุตสาหกรรมการพิมพ์ลายผ้าด้วยลูกกลิ้งซึ่งเป็นแท่งทองแดงและเคลือบผิวด้วยนิกเกิล ในระบบของการทำความสะอาดและการเชาร่องเพื่อให้เกิดลายด้วยกรด จึงมีไอออนของทองแดงติดออกมาด้วยกับน้ำทิ้ง ดังนั้นระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พองด้วยเส้นใยกลวงที่เหมาะสมต่อการสกัดไอออนทองแดงที่มีความเข้มข้นต่ำจึงได้นำมาใช้งานโดยอาศัย LIX 84I เป็นสารสกัด และ

น้ำมันก๊าดเป็นตัวทำละลายสารสกัด สำหรับสารละลายนำกลับใช้เป็นกรดซัลฟูริก จากนั้นทำการทดลองเพื่อหาค่าของปัจจัยต่างๆที่มีผลต่อการสกัดไอออนทองแดง ได้แก่ ความเข้มข้นของไอออนทองแดงในสารละลายป้อน และอัตราการไหลของสารละลายป้อน พร้อมทั้งประยุกต์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ทำการเปรียบเทียบผลของการทำงานของระบบเชื้อแผ่นเหลวที่เกิดขึ้นจริง

วิธีทำ ขั้นตอนที่: การหาอันดับปฏิกิริยาและค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยา

สำหรับอันดับปฏิกิริยาหาจากการนำเอาค่าความเข้มข้นของไอออนทองแดงที่วัดได้จากการทดลองผ่านระบบเชื้อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงมาวิเคราะห์เพื่อหา อัตราการเกิดปฏิกิริยา และอันดับของปฏิกิริยา ซึ่งในที่นี้จะพิจารณาอันดับปฏิกิริยาซึ่งเท่ากับ 1 และ 2 เท่านั้นเนื่องจากมีกลุ่มนักวิจัยซึ่งนำโดย Pancharoen เคยเสนอแนะไว้ จากนั้นจะเปรียบเทียบผลที่ได้จากอันดับทั้ง 2 ดังที่ได้กล่าวมาแล้วโดยนำค่าที่ได้จากอันดับที่ดีที่สุด (ดูจากค่า R-squared) นำไปใช้ในการคำนวณหาผลส่วนอื่นๆ ต่อไป ในการพิจารณาอันดับปฏิกิริยาของการสกัดไอออนทองแดง แสดงได้ดังด้านล่างนี้



กรณี อันดับของปฏิกิริยาเท่ากับ 1:

$$\frac{dC_A(x, t)}{dt} = -k_f C_A(x, t) \quad (5.66)$$

และหากอันดับของปฏิกิริยาเท่ากับ 2:

$$\frac{dC_A(x, t)}{dt} = -k_f C_A^2(x, t) \quad (5.67)$$

เมื่อแก้สมการที่ (5.66) และ (5.67) จะได้สมการที่ (5.68) และ (5.69) ตามลำดับ

$$\ln \frac{C_{A0}}{C_A} = k_f t \quad (5.68)$$

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_{A0}} + k_f t \quad (5.69)$$

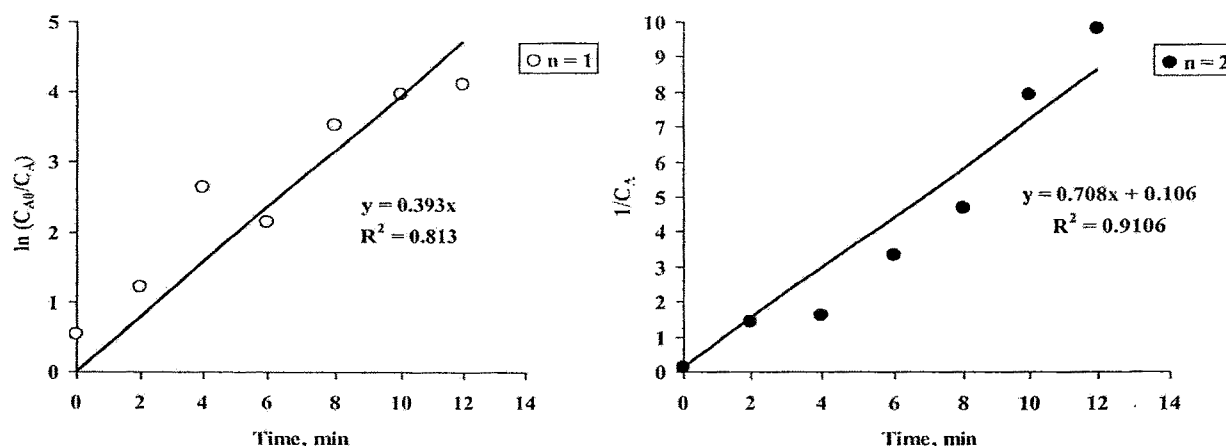
สำหรับอันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 1 เมื่อนำเอาเทอม $\ln C_{A0}/C_A$ จากสมการที่ (5.68) มาพล็อตกราฟเทียบกับ t ส่วนอันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 2 ให้นำเอา $1/C_A$ จากสมการที่ (5.69) มาพล็อตกราฟเทียบกับ t โดยอาศัยข้อมูลที่ได้จากการทำงานผ่านระบบเชื่อมแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงมาพล็อตกราฟของอันดับปฏิกิริยาทั้งสอง โดยแสดงไว้ในตารางที่ 5.4

ตารางที่ 5.9 ค่าความเข้มข้นของไอออนทองแดงที่วัดได้จากการทดลอง และค่าความเข้มข้นที่อินทิเกรตแล้วของอันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 1 และ 2

เวลา	C_A (มิลลิกรัมต่อลิตร)	อันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 1	อันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 2
		$\ln \frac{C_{A0}}{C_A}$	$\frac{1}{C_A}$
0	9.433	0	0.106
2	0.753	1.214	1.459
4	0.600	2.755	1.667
6	0.316	2.131	3.165
8	0.220	3.758	4.546
10	0.126	4.116	7.961
12	0.102	4.327	9.804

สถานะที่ศึกษา: ความเข้มข้นของสารสกัดเท่ากับ 5 เปอร์เซ็นต์โดยปริมาตร; ความเข้มข้นของสารละลายนำกลับเท่ากับ 1 โมลาร์; และอัตราการไหลของสารละลายป้อนเท่ากับ 100 มิลลิลิตรต่อนาที

จากข้อมูลในตารางที่ 1 นำมาพล็อตกราฟของอันดับปฏิกิริยาทั้งสองได้ดังรูปที่ 5.8



รูปที่ 5.8 ความเข้มข้นของไอออนทองแดงที่อินทิเกรตแล้วเทียบกับเวลาการสกัด

สำหรับค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยาสามารถหาได้จากความชันของเส้นกราฟ โดยจากกราฟที่อันดับของปฏิกิริยาเท่ากับ 1 และ 2 มีค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยาเท่ากับ 0.393 หนึ่งส่วนนาที่ และ 0.708 ลิตรต่อนาที่ตามลำดับ จากรูปที่ 5.8 สามารถสรุปได้จากค่า R-squared และค่าเปอร์เซ็นต์การเบี่ยงเบนซึ่งคำนวณได้จากสมการที่ (5.70) ของกราฟซึ่งแสดงอันดับปฏิกิริยาทั้งสองไว้ดังตารางที่ 5.10

$$\% \text{ deviation} = \frac{\sum_{i=1}^j \left(\frac{C_{\text{Expt.}} - C_{\text{Theo}}}{C_{\text{Expt.}}} \right)_t}{j} \times 100 \quad (5.70)$$

ตารางที่ 5.10 ค่า R-squared และค่าเปอร์เซ็นต์การเบี่ยงเบนของกราฟอันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 1 และ 2

อันดับปฏิกิริยา	ค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยา	R-squared	เปอร์เซ็นต์การเบี่ยงเบน
1	0.393 หนึ่งส่วนนาที่	0.813	61.233
2	0.708 ลิตรต่อนาที่	0.911	1.453

จากการพิจารณาหาอันดับปฏิกิริยาและค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยาสำหรับการสกัดไออนทองแดงที่ศึกษาในงานวิจัยนี้ พบว่าอันดับปฏิกิริยาเท่ากับ 2 และค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยาเท่ากับ 0.708 ลิตรต่อนาที่ ซึ่งค่าทั้งสองนี้จะถูกนำมาใช้เป็นค่าคงที่ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ขั้นตอนที่2: แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกนำมาประยุกต์ใช้ในแก้ปัญหาโจทย์ข้อนี้เป็นกลุ่มสมการในกรณีที่ 3 ($n \geq 2$) แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่สภาวะเวลาใดๆ สมการ(5.40) นำมาประยุกต์และเขียนใหม่ได้เป็น

ที่สภาวะเวลาเริ่มต้น ($t = 0$):

$$C_{A(L,0)} = \left[C_{A(0,0)}^{1-n} + \frac{(1-n)k_f A_c}{Q} L \right]^{\frac{1}{1-n}} \quad (5.71)$$

และที่สภาวะเวลาใดๆ สมการที่ (5.55) เมื่อนำมาประยุกต์ก็สามารถเขียนใหม่ได้เป็น:

$$\bar{C}_{A(L,t)} = e^{\beta} \bar{C}_{A(0,t-t_0)} \quad (5.72)$$

โดยที่ $C_A(L,t) = C_A(L,t) - C_A(L,0)$

$$\text{ขณะที่} \quad \beta = \left(\frac{A_c k_f n}{Q_Y} \right) \ln \left(\frac{Y_L + \lambda}{\lambda} \right)$$

$$\text{และ} \quad \gamma = \frac{(1-n) k_f A_c}{Q}$$

$$\text{ทั้งนี้} \quad \lambda = C_{A(0,0)}^{1-n}$$

$$\text{โดยกำหนดให้} \quad \tau_0 = \frac{A_c L}{Q}$$

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์นี้ค่าความเข้มข้นของไอออนทองแดงตรงทางออกของระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงสามารถคำนวณได้ และเมื่อคำนวณหาค่าเปอร์เซ็นต์การสกัดจากสมการ (5.73)

$$\% \text{ extraction} = \frac{C_{f,\text{in}} - C_{f,\text{out}}}{C_{f,\text{in}}} \times 100 \quad (5.73)$$

ทั้งนี้ค่าคงที่ต่างๆ ที่คำนวณได้แสดงไว้ในตารางที่ 5.11

ตารางที่ 5.11 ค่าคงที่ต่างๆ สำหรับใช้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์

ค่าคงที่	ค่า
อันดับปฏิกิริยา (n)	2
ความยาวของเส้นใยกลวง (L, เซนติเมตร)	1.5
λ (ลิตรต่อมิลลิกรัม)	0.1
ค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยา (k_f , ลิตรต่อมิลลิกรัมต่อนาที)	0.708
พื้นที่หน้าตัดภายในของเส้นใยกลวง (A_c , ตารางเซนติเมตร)	4.5×10^{-6}
β	1.246×10^{-2}
τ_0 (นาที)	8.755×10^{-4}
γ (ตารางเซนติเมตรต่อมิลลิกรัม)	-3.186×10^{-5}

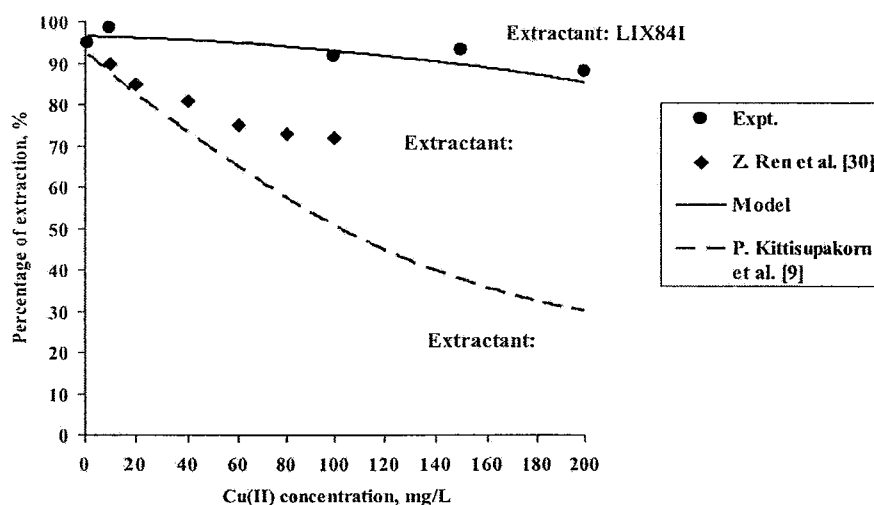
ส่วนผลของการคำนวณค่าความเข้มข้นของไอออนทองแดงจากการประยุกต์แบบจำลองทางคณิตศาสตร์สรุปผลรวมไว้ในตารางที่ 5.12

ตารางที่ 5.12 ความเข้มข้นที่ทางออกและเปอร์เซ็นต์การสกัดของไอออนทองแดงที่คำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และจากผลการทดลอง ในกรณีปรับค่าความเข้มข้นเริ่มต้นของไอออนทองแดง

ความเข้มข้นเริ่มต้น (mg/L)	ประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์				คำนวณจากผลการทดลอง	
	$\bar{C}_{A(0,t-t_0)}$	e^β	$\bar{C}_{A(L,t)}$	% การสกัด	$C_{A(L,0)}$	% การสกัด
1	0.055	1.013	0.056	94.44	0.053	94.66
10	0.156	1.013	0.158	98.42	0.156	98.44
100	5.568	1.013	5.640	94.36	8.330	91.67
150	18.820	1.013	19.065	87.29	10.350	93.1
200	27.088	1.013	27.44	86.28	23.820	88.09

สภาวะที่ศึกษา: ความเข้มข้นของสารสกัดเท่ากับ 3 เปอร์เซ็นต์โดยปริมาตร; ความเข้มข้นของสารละลายนำกลับเท่ากับ 0.1 โมลาร์; และอัตราการไหลของสารละลายป้อนเท่ากับ 100 มิลลิลิตรต่อนาที

ขั้นตอนที่ 3: ในกรณีที่อัตราการไหลคงที่แต่ความเข้มข้นเริ่มต้นของสารละลายป้อนแปรไป ผลที่หามาได้จากตารางที่ 5.13 นำมาพล็อตกราฟเพื่อเปรียบเทียบให้เห็นความชัดของการทดลองจริงกับการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์รวมทั้งเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของนักวิจัยอื่นด้วย



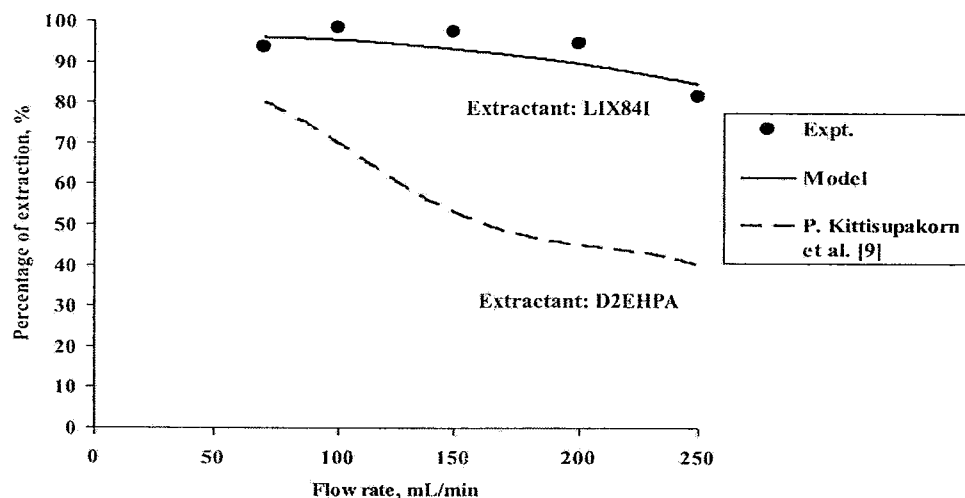
รูปที่ 5.9 ผลการสกัดไอออนทองแดงที่คำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และคำนวณได้จากผลการทดลองในกรณีแปรค่าความเข้มข้นเริ่มต้นของไอออนทองแดง รวมทั้งการเปรียบเทียบผลกับงานของคนอื่นๆ

ขั้นตอนที่ 4: หากกำหนดให้ความเข้มข้นเริ่มต้นของสารละลายป้อนคงที่ แต่แปรค่าอัตราการไหล การคำนวณก็แปรเปลี่ยนไปด้วย ซึ่งสรุปผลการคำนวณไว้ในตารางที่ 5.13

ตารางที่ 5.13 ความเข้มข้นที่ทางออกและเปอร์เซ็นต์การสกัดของไอออนทองแดงที่ประมาณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และคำนวณได้จากผลการทดลอง ในกรณีปรับค่าอัตราการไหลของสารละลายป้อน

อัตราการไหล (mL/min)	ประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์				คำนวณจากผลการทดลอง	
	$\bar{C}_{A(0,t-\tau_0)}$	e^β	$\bar{C}_{A(L,t)}$	% การสกัด	$C_{A(L,0)}$	% การสกัด
70	0.556	1.013	0.563	94.37	0.629	93.71
100	0.156	1.013	0.158	98.42	0.156	98.44
150	0.805	1.013	0.815	91.85	0.263	97.37
200	1.082	1.013	1.096	89.04	0.546	94.54
250	1.477	1.013	1.496	85.04	1.843	81.57

สภาวะที่ศึกษา: ความเข้มข้นของสารละลายป้อนเท่ากับ 10 มิลลิกรัมต่อลิตร; ความเข้มข้นของสารสกัดเท่ากับ 3 เปอร์เซ็นต์โดยปริมาตร; และความเข้มข้นของสารละลายนำกลับเท่ากับ 0.1 โมลาร์



รูปที่ 5.10 ผลการสกัดไอออนทองแดงที่คำนวณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และคำนวณได้จากผลการทดลอง ในกรณีปรับค่าอัตราการไหลของสารละลายป้อน รวมทั้งการเปรียบเทียบกับงานของคนอื่นๆ

เมื่อนำผลที่หามาได้จากตารางที่ 5.13 นำมาพล็อตกราฟเพื่อเปรียบเทียบให้เห็นความชัดของการทดลองจริงกับการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์รวมทั้งเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของนักวิจัยอื่นด้วย ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ (5.10)

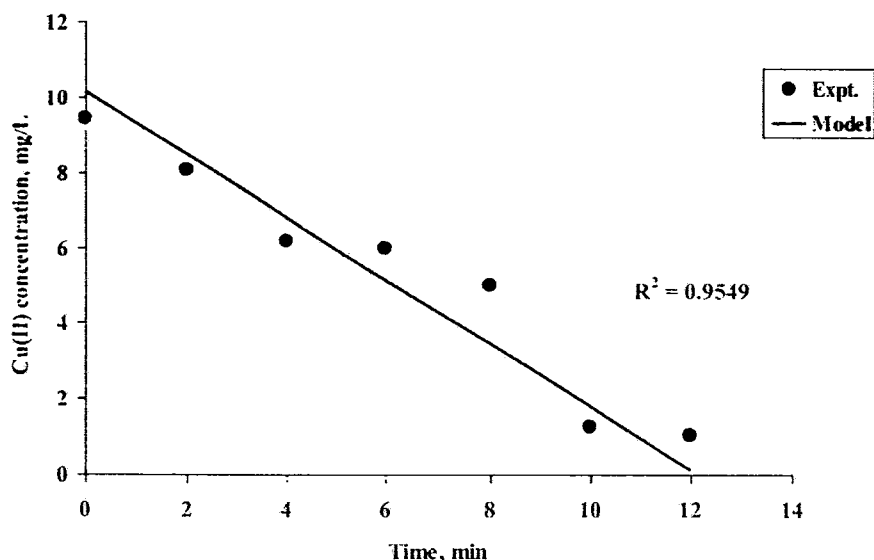
ขั้นตอนที่ 5: หากกำหนดให้ความเข้มข้นเริ่มต้นของสารละลายป้อนลงที่ และอัตราการไหลก็คงที่ แต่จะแปรเวลาหรือจำนวนรอบของการสักระการคำนวณก็แปรเปลี่ยนไปด้วย ซึ่งสรุปผลการคำนวณไว้ในตารางที่ 5.14

ตารางที่ 5.14 ความเข้มข้นที่ทางออกของไอออนทองแดงที่ประมาณได้จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และคำนวณได้จากผลการทดลอง

เวลา (นาท)	ประมาณจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์					คำนวณจากผลการทดลอง
	$C_{A(0,0)}$	$C_{A(L,0)}$	$\bar{C}_{A(0,t-t_0)}$	e^{β}	$\bar{C}_{A(L,t)}$	$C_{A(L,t)}$
0	10.000	9.867	-	-	-	9.433
2	-	-	9.099	1.013	9.217	8.104
4	-	-	6.229	1.013	6.310	6.207
6	-	-	5.735	1.013	5.810	6.058
8	-	-	3.962	1.013	4.013	5.734
10	-	-	1.706	1.013	1.728	1.651
12	-	-	0.156	1.013	0.158	0.156

สถานะที่ศึกษา: ความเข้มข้นของสารละลายป้อนเท่ากับ 10 มิลลิกรัมต่อลิตร; ความเข้มข้นของสารสกัดเท่ากับ 3 เปอร์เซ็นต์โดยปริมาตร; ความเข้มข้นของสารละลายนำกลับเท่ากับ 0.1 โมลาร์; และอัตราการไหลของสารละลายป้อนเท่ากับ 100 มิลลิลิตรต่อนาที

เมื่อนำผลที่หามาได้จากตารางที่ 5.14 นำมาพล็อตกราฟเพื่อเปรียบเทียบให้เห็นความชัดของการทดลองจริงกับการใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ (5.11)



รูปที่ 5.11 ความเข้มข้นของไอออนทองแดงเทียบกับเวลาการสกัด

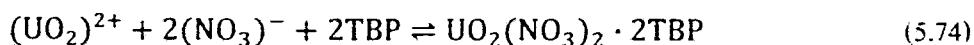
5.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าฟลักซ์ในระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวง

ในการอธิบายแบบจำลองนี้หากนำเสนอในรูปแบบของโลหะสมมุติ ผู้อ่านก็อาจมองเห็นภาพโดยรวมที่ไม่ชัดเจนนัก ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ผู้เขียนจะขอใช้ตัวอย่างของกรณีศึกษาซึ่งมีไอออนยูเรเนียมเป็นตัวนำเรื่อง

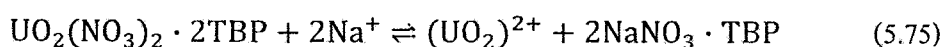
ตัวอย่างกรณีศึกษาที่ 5.3: เรื่องการสกัดแยกไอออนยูเรเนียมและธอเรียมออกจากกันด้วยระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวง โดยเปรียบเทียบผลของการสกัดที่เกิดขึ้นจริงกับแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับฟลักซ์ของปฏิกิริยาการสกัดไอออน

โจทย์ ในการสกัดและนำกลับไอออนของยูเรเนียมออกจากสารละลายในเตรตที่มีไอออนของยูเรเนียมและธอเรียมรวมอยู่ด้วยกันด้วยระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวง โดยมีไตรบิวทิลฟอสเฟต (TBP) เป็นสารสกัดและละลายอยู่ในน้ำมันก๊าดซึ่งทำหน้าที่เป็นตัวทำละลาย จงสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าฟลักซ์ของ ไอออนยูเรเนียม และนำไปสู่การคำนวณหาค่าความเข้มข้นของยูเรเนียมที่แยกออกมาได้ กำหนดให้ $(\text{NH}_4)_2\text{U}_2\text{O}_7$, $\text{Th}(\text{OH})_4$ และ HNO_3 เป็นสารละลายป้อน และ NaOH เป็นสารละลายนำกลับ

วิธีทำ ขั้นตอนที่ 1: การสกัดและนำกลับเกิดขึ้นจากปฏิกิริยา ดังนั้นจึงมีสมการ 2 สมการด้วยกัน ที่เกี่ยวข้องกับ สมการแรกคือสมการของปฏิกิริยาการสกัด ไอออนยูเรเนียม ซึ่งจะเกิดเป็นสารประกอบเชิงซ้อนอยู่ในวัฏภาคเอื้อแผ่นเหลว โดยเขียนได้เป็น



จากสมการที่ (5.74) ทราบได้ว่ายูเรเนียมที่ไม่ได้ทำปฏิกิริยาเพื่อแปลงไปอยู่ในรูปสารประกอบเชิงซ้อน จะไหลออกมาจากท่อซึ่งก็คือปริมาณของยูเรเนียมที่สกัดออกนั่นเอง กล่าวคือไอออนยูเรเนียมในรูป $(\text{NH}_4)_2\text{U}_2\text{O}_7$ ที่ถูกสกัดออกมาได้และละลายอยู่ในกรดไนตริกและสมการที่ 2 เกิดจากปฏิกิริยานำกลับไอออนยูเรเนียมซึ่งอาศัย NaOH ทำปฏิกิริยากับสารประกอบเชิงซ้อน $\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 2\text{TBP}$ ซึ่งอยู่ในวัฏภาคเอื้อแผ่นเหลว ณ ผิวน้ำสัมผัสเพื่อให้ไอออนยูเรเนียมหลุดออกไปสู่วัฏภาคของสารละลายนำกลับ สมการของปฏิกิริยาเขียนได้ดังนี้



ขั้นตอนที่ 2: จากปฏิกิริยาการสกัด ในสมการ (5.74) สามารถเขียนสมการของสมดุลการสกัด “ K_{ex} ” (extraction equilibrium or equilibrium constant) ได้ดังนี้

$$K_{\text{ex}} = \frac{[\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 2\text{TBP}]}{[(\text{UO}_2)^{2+}][(\text{NO}_3)^-]^2[\text{TBP}]^2} \quad (5.76)$$

พร้อมกันนั้น ยังสามารถคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การกระจาย “D” (distribution coefficient or distribution ratio) ได้จาก

$$D = \frac{[\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2 \cdot 2\text{TBP}]}{[(\text{UO}_2)^{2+}]} = K_{\text{ex}}[(\text{NO}_3)^-]^2[\text{TBP}]^2 \quad (5.77)$$

ขั้นตอนที่ 3: พิจารณาจากสมการ (5.75) หากกำหนดให้ $[U]_{org}$ เป็นความเข้มข้นของไอออนยูเรเนียมในสารประกอบเชิงซ้อน (หรือในวัฏภาคเอื้อแผ่นเหลว) $[U]_i$ เป็นความเข้มข้นของไอออนยูเรเนียมที่ผิวสัมผัสระหว่างวัฏภาคสารละลายป้อนกับวัฏภาคเอื้อแผ่นเหลว

$$\text{ดังนั้น} \quad [U]_{org} = [UO_2(NO_3)_2 \cdot 2TBP] \quad (5.78)$$

และจากสมการ (5.77) ในรูปของ K_{ex} จะได้

$$[U]_{org,i} = K_{ex}[(NO_3)^-]^2[TBP]^2[(UO_2)^{2+}]_{f,i} \quad (5.79)$$

จากสมการของฟลักซ์ เขียนได้ว่า

$$J_m R_m = [U]_i - [U]_s \quad (5.80)$$

และถ้าความเข้มข้นของไอออนยูเรเนียมในสารละลายนำกลับน้อยมากจนตัดเทอม $[U]_s$ ที่tingได้สมการ (5.80) จะเหลือเพียง

$$J_m R_m \approx [U]_i \quad (5.80)$$

และในทำนองเดียวกันจะเขียนสมการของฟลักซ์ที่ผิวสัมผัสได้ว่า

$$J_i R_i = [(UO_2)^{2+}]_f - [(UO_2)^{2+}]_{f,i} \quad (5.81)$$

ขณะที่ $R_m = 1 / k_m$ คือค่าความต้านทานการถ่ายเทมวล(mass transfer resistance)ในวัฏภาคเอื้อแผ่นเหลวและ $R_i = 1 / k_i$ คือค่าความต้านทานการถ่ายเทมวล(mass transfer resistance)ที่ผิวสัมผัส ในวัฏภาคสารละลายป้อนโดยมี $[(UO_2)^{2+}]_f$ เป็นความเข้มข้นของไอออนยูเรเนียมในวัฏภาคสารละลายป้อนแล $[(UO_2)^{2+}]_{f,i}$ เป็นความเข้มข้นของสารประกอบเชิงซ้อนของไอออนยูเรเนียมที่ผิวสัมผัสของวัฏภาคเอื้อแผ่นเหลววัฏภาคสารละลายป้อน

ขั้นตอนที่ 4: นำ $[U]_{org,i}$ จากสมการที่ (5.79) แทนลงในสมการ (5.80) จะได้

$$[(UO_2)^{2+}]_{f,i} = \frac{J_m R_m}{K_{ex}[(NO_3)^-]^2 [TBP]^2} \quad (5.82)$$

จากนั้นนำค่า $[(UO_2)^{2+}]_{f,i}$ ที่หาได้จากสมการ (5.82) แทนลงในสมการ (5.81) พร้อมกันนั้น ที่สภาวะคงตัว (steady state condition) ค่าฟลักซ์ต้องเท่ากันตลอด ดังนั้น “ $J_m = J_i = J$ ” และออกมาได้ดังสมการ (5.83)

$$J = \frac{\{K_{ex}[(NO_3)^-]^2 [TBP]^2\} \cdot [(UO_2)^{2+}]_f}{\{R_m + R_i K_{ex} [TBP]^2 [(NO_3)^-]^2\}} \quad (5.83)$$

จากนั้นหากจะหาสมการโดยใช้ดุลมวลสาร (mass balance) สำหรับกรดไนตริก จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$[(NO_3)^-]_0 = [(NO_3)^-]_{free} + 2[U]_{org,i} \quad (5.84)$$

โดยที่ $[(NO_3)^-]_0$ เป็นความเข้มข้นเริ่มต้นของกรดไนตริกในสารละลายป้อน และหากว่าปริมาณที่ใช้ค่อนข้างต่ำ ดังนั้นจึงมีข้อสมมุติฐานว่าไอออน $[NO_3^-]$ ทั้งหมด ทำปฏิกิริยาหมดกับไอออนยูเรเนียม ดังนั้นจึงไม่มีไอออน $[NO_3^-]$ เหลือ หรืออาจกล่าวได้ว่า $[(NO_3)^-]_{free}$ มีค่าเป็นศูนย์ สมการ (5.84) จึงลดลงเหลือ

$$[(NO_3)^-]_0 = 2[U]_{org,i} \quad (5.85)$$

จับสมการ (5.79) รวมกับสมการ (5.85) จากนั้นจัดสมการใหม่จะได้

$$[(NO_3)^-]^2 [TBP]^2 = \frac{[(NO_3)^-]_0}{2K_{ex} \cdot [(UO_2)^{2+}]_{f,i}} \quad (5.86)$$

นำสมการ (5.86) แทนลงในสมการ (5.83) จะได้

$$J = \frac{\{[(NO_3)^-]_0 \cdot [(UO_2)^{2+}]_f\}}{\{2R_m [(UO_2)^{2+}]_{f,i} + R_i [(NO_3)^-]_0\}} \quad (5.87)$$

ขั้นตอนที่ 5: เมื่อพิจารณาสมการ (5.87) พบว่าเทอม $[(\text{UO}_2)^{2+}]_f$ เป็นความเข้มข้นของไอออนยูเรเนียมที่ผิวสัมผัส ซึ่งวัดไม่ได้ ดังนั้นจึงต้องนำเอาสมการ (5.81) มาแทนลงในสมการ (5.87) เกิดเป็นสมการกำลังสอง (quadratic equation) ดังนี้

$$2J^2 R_m R_i - \{2R_m [(\text{UO}_2)^{2+}]_f + R_i [(\text{NO}_3)^-]_0\} J + \{[(\text{NO}_3)^-]_0 \cdot [(\text{UO}_2)^{2+}]_f\} = 0 \quad (5.88)$$

ดังนั้นจึงแก้สมการของฟลักซ์โดยอาศัยวิธีการกำลังสองสมบูรณ์ (completing the square) จะได้

$$J = \frac{2R_m [(\text{UO}_2)^{2+}]_f + R_i [(\text{NO}_3)^-]_0 + \sqrt{\{2R_m [(\text{UO}_2)^{2+}]_f + R_i [(\text{NO}_3)^-]_0\}^2 - 8R_m R_i [(\text{NO}_3)^-]_0 [(\text{UO}_2)^{2+}]_f}}{4R_m R_i} \quad (5.89)$$

แต่เนื่องจากเทอมที่อยู่ในเครื่องหมายรากที่สองมีค่าน้อยกว่าเทอมที่อยู่นอกเครื่องหมายรากที่สองมาก ๆ ดังนั้นจึงสามารถตัดทิ้งได้ และสมการ (5.89) จึงกลายเป็น

$$J = \frac{[(\text{UO}_2)^{2+}]_f}{2R_i} + \frac{[(\text{NO}_3)^-]_0}{4R_m} \quad (5.90)$$

แต่จากคำจำกัดความที่ว่า “ฟลักซ์ มีค่าเท่ากับอัตราการแพร่ของมวลที่หายไปต่อพื้นที่” ซึ่งมีหน่วยเป็น “น้ำหนักมวลสารต่อหน่วยพื้นที่ ต่อหน่วยเวลา” ซึ่งสามารถเขียนสมการได้ว่า

$$J = - \left(\frac{V}{A} \right) \cdot \frac{d[(\text{UO}_2)^+]_f}{dt} \quad (5.91)$$

ดังนั้นเมื่อรวมสมการ (5.90) และ สมการ (5.91) เข้าด้วยกัน จะได้สมการอนุพันธ์ใหม่เป็น

$$- \left(\frac{V}{A} \right) \cdot \frac{d[(\text{UO}_2)^+]_f}{dt} = \frac{[(\text{UO}_2)^{2+}]_f}{2R_i} + \frac{[(\text{NO}_3)^-]_0}{4R_m} \quad (5.92a)$$

จากสมการ (5.92a) เมื่อจัดเทอมให้อยู่ในรูปที่สามารถอินทิเกรต (integrate) ได้โดยกำหนดข้อแม้ ณ จุดเริ่มต้น ที่ว่า $t = 0$, $[(\text{UO}_2)^{2+}]_f = [(\text{UO}_2)^{2+}]_{f,0}$ ดังนั้นสมการสุดท้ายที่ใช้คำนวณหาความเข้มข้นของไอออนยูเรเนียมจึงเขียนได้เป็น

$$[(\text{UO}_2)^+]_f = \frac{R_i[(\text{NO}_3)^-]_0}{2R_m} + \frac{[(\text{UO}_2)^{2+}]_{f,0} R_i[(\text{NO}_3)^-]_0}{2R_m} \cdot e^{\frac{-At}{2VR_i}} \quad (5.92b)$$

ตัวอย่างกรณีศึกษาที่ 5.4: การสกัดแยกไอออนแทนทาลัม (Tantalum) และไอออนไนโอเบียม (Niobium) ออกจากกันผ่านระบบเยื่อแผ่นเหลวที่พองด้วยเส้นใยกลวง

โจทย์ จากข้อมูลการสกัดที่เขียนไว้ในกรณีศึกษาที่ 4.2 จงคำนวณหา

- ก) สัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (permeability coefficient, P) ของไอออนแทนทาลัม
- ข) สัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล (mass transfer coefficient) ในวิทยาศาสตร์ละลายป้อน (k_i) และในวิทยาศาสตร์เยื่อแผ่นเหลว (k_m) ของไอออนแทนทาลัม

วิธีทำ ก) การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (permeability coefficient) ของไอออนแทนทาลัมจากสมการที่ (3.13) และ (3.14)

$$-V_f \ln \left(\frac{C_f}{C_{f0}} \right) = AP \frac{\beta}{\beta+1} t \quad (3.13)$$

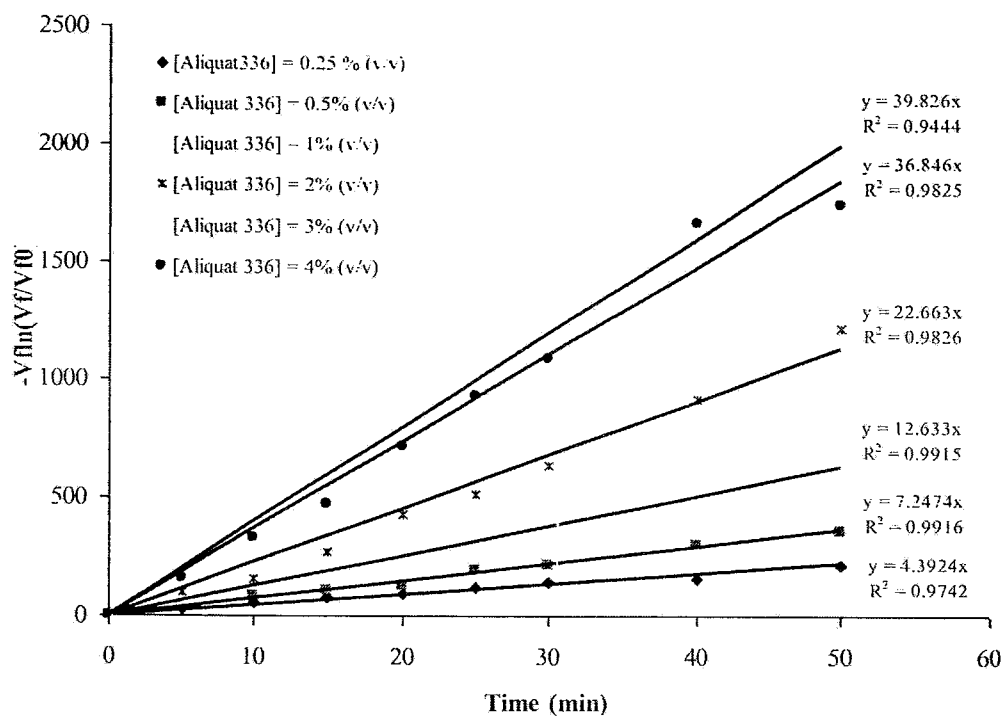
$$\text{เมื่อ} \quad \beta = \frac{Q_f}{PL\epsilon\pi N r_i} \quad (3.14)$$

โดยที่

P	คือ	ค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (เซนติเมตรต่อวินาที)
C_{f0}	คือ	ความเข้มข้นของไอออนเพอร์ซีโอติเมียมที่เวลาเริ่มต้น (โมลต่อลิตร)
C_f	คือ	ความเข้มข้นของไอออนเพอร์ซีโอติเมียมที่เวลา t (โมลต่อลิตร)
A	คือ	พื้นที่การถ่ายเทมวล (ตารางเซนติเมตร)
V_f	คือ	ปริมาตรของสารละลายป้อน (ลูกบาศก์เซนติเมตร)
Q_f	คือ	อัตราการไหลของสารละลายป้อน (ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที)
L	คือ	ความยาวของเส้นใยกลวง (เซนติเมตร)

- N = จำนวนเส้นใยกลวงในมอดูล (เส้น)
 r_i = รัศมีภายในของเส้นใยกลวง (เซนติเมตร)
 ϵ = ความพรุนของเส้นใยกลวง
 π = 3.1416

จากข้อมูลใน ตารางที่ 4.5 นำมาพล็อตกราฟ ระหว่าง t บนแกน x กับ $-V_f \ln \frac{C_f}{C_{f,0}}$ บนแกน y จะได้ $AP \frac{\beta}{\beta+1}$ จะเป็นค่าความชัน (slope) ซึ่งแสดงไว้ในรูปที่ 5.12 จากค่าความชันที่หามา และเมื่อแทนค่าคงที่ ซึ่งคำนวณได้จากสมการ (3.14) แล้ว การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (P) ได้ผลสรุปรวมไว้ในตารางที่ 5.15



รูปที่ 5.12 การพล็อตกราฟระหว่าง $-V_f \ln \frac{C_f}{C_{f,0}}$ กับ t

ตารางที่ 5.15 สรุปผลการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (P) ที่ความเข้มข้นของ Aliquat 336 ระหว่างช่วง 0.25-4% (v/v)

Aliquat 336 (%(v/v))	$P \times 10^3 (\text{cm}^2/\text{s})$
0.25	1.082
0.5	1.800
1	3.374
2	6.540
3	13.681
4	12.082

ข) การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวล (mass transfer coefficient) ในวัฏภาคสารละลาย (k_p) และในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลว (k_m)

จากค่าคงที่ต่างๆที่รู้จักกันแพร่หลาย คือ

$$\text{Graetz number } GZ = \frac{d_i^2 v}{L D_{aq}} \quad (5.93)$$

$$\text{Sherwood number } Sh = m GZ^n \quad (5.94)$$

หรืออยู่ในรูป
$$Sh = \frac{k_i d_i}{D_{aq}} \quad (5.95)$$

โดยที่

d_i	คือ	เส้นผ่านศูนย์กลางภายในของเส้นใยกลวง เท่ากับ 2.4×10^{-2} เซนติเมตร
v	คือ	ความเร็วภายในเส้นใยกลวง เท่ากับ 15.381 เซนติเมตรต่อวินาที
L	คือ	ความยาวของเส้นใยกลวง เท่ากับ 20.3 เซนติเมตร
m	คือ	1.62
n	คือ	0.33
D_{aq}	คือ	สัมประสิทธิ์การแพร่ในสารละลายป้อน (diffusion coefficient)

เพราะว่า $D_{aq} = 3.74 \times 10^{-9}$ ตารางเซนติเมตรต่อวินาที และเมื่อแทนค่าคงที่ต่างๆในสมการ (5.93) ถึง (5.95) แล้วสามารถคำนวณค่า k_p ได้ มีค่าเท่ากับ 1.19×10^{-5} เซนติเมตรต่อวินาที

การคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลของเยื่อแผ่นเหลว (k_m) สามารถคำนวณได้จากสมการ (3.8)

$$k_m = \frac{\varepsilon D_m}{\tau r_i \ln\left(\frac{r_o}{r_i}\right)} \quad (3.8)$$

โดยที่

- τ คือ tortuosity of the fiber membrane เท่ากับ 2.6
- ε คือ porosity of the fiber membrane เท่ากับ 0.3
- D_m คือ ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ผ่านเมมเบรน เท่ากับ 3.22×10^{-9} ตารางเซนติเมตรต่อวินาที
- r_i คือ รัศมีภายในของเส้นใยกลวง เท่ากับ 1.2×10^{-2} เซนติเมตร
- r_o คือ รัศมีภายนอกของเส้นใยกลวง เท่ากับ 1.5×10^{-2} เซนติเมตร

เมื่อแทนค่าต่างๆ ลงในสมการ (3.8) แล้วสามารถคำนวณค่า k_m ซึ่งมีค่าเท่ากับ 1.39×10^{-7} เซนติเมตรต่อวินาที

บทสรุป

แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ถูกสร้างขึ้นจากมุมมองของแต่ละกลุ่มนักวิจัย เพื่อใช้อธิบายกลไกการถ่ายเทมวลของไอออนโลหะที่ต้องการสกัด โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์สำหรับเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวรองรับสามารถแบ่งออกได้ตามชนิดของเยื่อแผ่น ซึ่งชนิดแรกเป็นเยื่อแผ่นชนิดราบ และชนิดที่สองเป็นเยื่อแผ่นชนิดเส้นใยกลวง ในส่วนของเยื่อแผ่นชนิดราบนั้นกลุ่มนักวิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่อธิบายขั้นตอนการแพร่ผ่านของไอออนโลหะในแต่ละวัฏภาคจากสมการฟลักซ์ แล้วแก้สมการเพื่อหาค่าความเข้มข้นของไอออนโลหะของทั้งสามวัฏภาค โดยการสกัดด้วยเยื่อแผ่นชนิดราบพบว่าความเข้มข้นของสารละลายป้อนจะมีค่าเท่ากันตลอดในทุกทิศทางขณะที่ปฏิกิริยาการสกัดจะเกิดขึ้นได้เร็วมากและพร้อมกันในทุกทิศทางของเยื่อแผ่นราบ ทั้งนี้เป็นเพราะมีการปั่นกววนสารละลายอยู่ตลอดเวลา นอกจากนี้จากกรณีศึกษาการสกัดเพอร์โซดิมด้วยเยื่อแผ่นชนิดราบได้นำเอาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์หาค่าเปอร์เซ็นต์การสกัดเปอร์เซ็นต์การนำกลับ สัมประสิทธิ์การกระจาย สัมประสิทธิ์การซึมผ่าน และสัมประสิทธิ์การ

ถ่ายเทมวลในวัฏภาคสารละลายป้อน และในวัฏภาคเชื้อแผ่นเหลว สำหรับเชื้อแผ่นชนิดเส้นใยกลวง สารละลายป้อนจะไหลเข้าไปตามท่อ ซึ่งทำให้ความเข้มข้นเปลี่ยนแปลงไปตามแนวแกนของท่อ ดังนั้นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์จึงแตกต่างกันโดยสิ้นเชิง โดยนักวิจัยได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่ออธิบายการถ่ายเทมวลของไอออนโลหะที่ผ่านวัฏภาคต่างๆ ด้วยอิทธิพลของปฏิกิริยาการสกัดและปฏิกิริยานำกลับ พร้อมทั้งได้ยกตัวอย่างกรณีศึกษาการสกัดไอออนทองแดง นอกจากนี้ นักวิจัยยังได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเชื้อแผ่นชนิดเส้นใยกลวงเพื่อหาค่าฟลักซ์ แล้วยกตัวอย่างกรณีศึกษาการสกัดไอออนยูเรเนียม แทนทาลัม และในโอเบียม

คำถามท้ายบท

1. ระบบเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวพุงด้วยชนิดราบประกอบด้วยอะไรบ้าง
2. กลไกการแพร่ของไอออนโลหะมีกี่ขั้นตอน อะไรบ้าง
3. กลไกการแพร่ของไอออนโลหะถูกอธิบายด้วยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ใด
4. ค่าพารามิเตอร์ที่สร้างจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในกรณีศึกษาการสกัดไอออนเพอร์ซิโอติเนียมด้วยเยื่อแผ่นชนิดราบมีค่าใดบ้าง
5. สัมประสิทธิ์การถ่ายเทมวลในวัฏภาคสารละลายป้อนและในวัฏภาคเยื่อแผ่นเหลวสามารถหาค่าได้อย่างไร
6. แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงประกอบด้วยแบบจำลองใดบ้าง
7. ค่าความเข้มข้นที่สร้างจากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงมีหลักการอย่างไร
8. หลักการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวพุงด้วยชนิดราบต่างจากของเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงอย่างไร
9. ฟลักซ์คืออะไร
10. การสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวที่พุงด้วยเส้นใยกลวงใช้วิธีใด
11. การหาค่าอันดับปฏิกิริยาและค่าคงที่ของอัตราการเกิดปฏิกิริยาทำได้อย่างไร
12. ที่สภาวะคงตัวค่าฟลักซ์เป็นอย่างไร
13. พารามิเตอร์ใดบ้างที่สามารถหาค่าได้จากกราฟ
14. เหตุใดความเข้มข้นของสารละลายป้อนในระบบเยื่อแผ่นเหลวที่มีตัวพุงด้วยชนิดราบจึงมีค่าเท่ากันทุกทิศทาง
15. การที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของเยื่อแผ่นเหลวสองชนิดต่างกันเป็นเพราะเหตุใด