

บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้มีดังนี้

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ในงานวิจัยนี้มีทฤษฎีที่เกี่ยวข้องดังนี้ ทอพอโลยี ทฤษฎีมอร์ส เรบกราฟ ระยะเวลาจ็อบเดลิท อัลกอริทึมของดิเจคส์ตรา และ ระยะเวลาแฮสส์ดอร์ฟ

2.1.1 ทอพอโลยี

ทอพอโลยี [1] เป็นความสัมพันธ์ที่ว่าด้วยการเชื่อมต่อกันระหว่างข้อมูลของวัตถุ ข้อมูลเชิงทอพอโลยีไม่เพียงแต่จะเก็บการเชื่อมต่อกันระหว่างข้อมูลเท่านั้น แต่ยังเกี่ยวข้องกับความสัมพันธ์ต่าง ๆ บนวัตถุอีกด้วย โดยที่ทอพอโลยีบนเซต X คือซับเซต $T \subseteq 2^X$ และเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

1. ถ้า $S_1, S_2 \in Y$ แล้ว $S_1 \cap S_2 \in Y$
2. ถ้า $S_1, S_2 \in Y$ แล้ว $S_1 \cup S_2 \in Y$
3. $\emptyset, X \in Y$

ปริภูมิเชิงทอพอโลยี (Topological space) เป็นเซตของข้อมูล (X, Y) โดยที่ X เป็นเซตข้อมูล และ Y เป็นข้อมูลเชิงทอพอโลยีของเซต X

2.1.2 ทฤษฎีมอร์ส

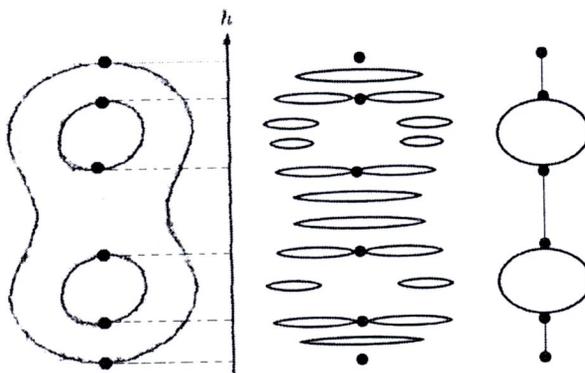
ทฤษฎีมอร์ส [2] จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ของจุดวิกฤตบนฟังก์ชันจำนวนจริงต่อเนื่อง กับข้อมูลเชิงทอพอโลยีของพื้นผิวนั้น ซึ่งจุดวิกฤตบนฟังก์ชันจำนวนจริงต่อเนื่องจะเป็นจุดที่ความชันมีค่าเท่ากับศูนย์ โดยฟังก์ชันจำนวนจริงต่อเนื่องนี้จะเรียกว่าฟังก์ชันมอร์ส (Morse function) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ฟังก์ชัน f ที่ทำให้เมตริกซ์เฮสเซียน H ของ f นั้น สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ได้ จะเรียกฟังก์ชันนั้นว่าฟังก์ชันมอร์ส สมมติให้ f เป็นฟังก์ชัน n ตัวแปร $f = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ เมตริกซ์เฮสเซียน H จะมีค่าเป็น

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

บทนิยามพื้นฐานของทฤษฎีมอร์สว่าด้วย ให้ฟังก์ชัน $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ คือฟังก์ชันมอร์สที่อธิบายความสัมพันธ์เชิงทอพอโลยีของแมนิโฟลด์ M โดยที่แมนิโฟลด์ M คือกลุ่มของข้อมูลที่อยู่ในปริภูมิเชิงทอพอโลยี และจุดวิกฤตทุกๆจุดบนฟังก์ชัน f จะเป็นจุดที่สามารถนำมาใช้อธิบายข้อมูลเชิงทอพอโลยีได้

2.1.3 เรบกราฟ

เรบกราฟเป็นวิธีในการแทนข้อมูลเชิงทอพอโลยีในรูปแบบของกราฟ โดยระบุตำแหน่งบนกราฟด้วยจุด (Node) และเส้นเชื่อม (Edge) โดยจุดที่อยู่บนวัตถุจะต้องมีจุดวิกฤตที่ได้จากฟังก์ชันมอร์สที่ใช้แทนข้อมูลเชิงทอพอโลยีนั้นๆ ซึ่งข้อดีของเรบกราฟคือสามารถรักษาข้อมูลเชิงทอพอโลยีไว้ได้ถึงแม้จะมีการเปลี่ยนแปลงขนาดของวัตถุก็ตาม ตัวอย่างการแทนค่าด้วยเรบกราฟโดยใช้ฟังก์ชันความสูงเป็นฟังก์ชันมอร์สของวัตถุรูปเลขแปดแสดงดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 การแทนค่าด้วยเรบกราฟโดยใช้ฟังก์ชันความสูง

บทนิยามของเรบกราฟ [3] กำหนดให้ฟังก์ชัน $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันจำนวนจริงที่อยู่บนแมนิโฟลด์ M ซึ่งแมนิโฟลด์เป็นข้อมูลเชิงทอพอโลยีที่สนใจ เรบกราฟของแมนิโฟลด์

M นี้ จะขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน f ที่สามารถนิยามได้ว่าเป็นปริภูมิผลหารของ $M \times R$ และจะกำหนดใช้สัญลักษณ์ “ \sim ” แทนความสัมพันธ์ของการสมมูลกัน เมื่อ

$$(X_1, f(X_1)) \sim (X_2, f(X_2))$$

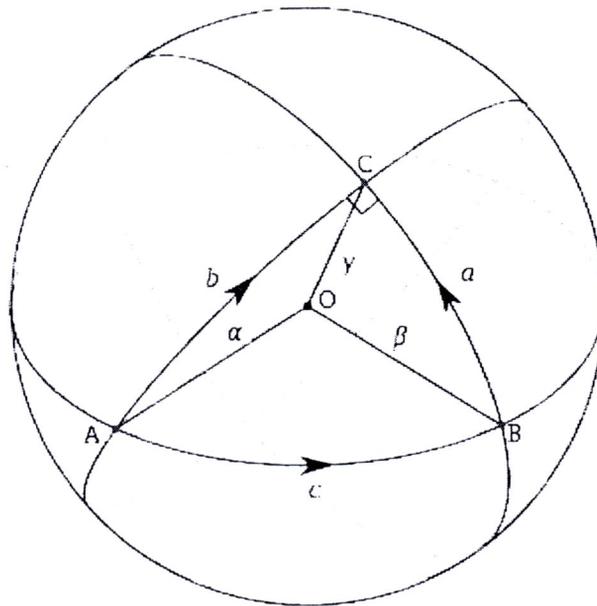
โดยที่

$$f(X_1) = f(X_2)$$

X_1, X_2 เป็นส่วนประกอบของการเชื่อมต่อเดียวกันของ $f^{-1}(f(X_1))$ และเรขาคณิตสามารถแทนค่าของข้อมูล $(X_1, f(X_1))$ และ $(X_2, f(X_2))$ ด้วยจุด ๆ เดียวเมื่อ $f(X_1) = f(X_2)$ และ X_1, X_2 เป็นส่วนประกอบของการเชื่อมต่อเดียวกัน (Contour เดียวกัน)

2.1.4 ระยะทางจีโอเดสิก

ระยะทางจีโอเดสิก คือ ระยะตามพื้นผิวของวัตถุจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง ดังรูปที่ 2.2 แสดงระยะทางจีโอเดสิกจากจุด A ไปยังจุด B คือความยาวของส่วนของเส้นโค้ง c ระยะทางจีโอเดสิกสามารถประมาณได้ด้วยระยะทางสั้นที่สุดจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งซึ่งหาได้โดยอัลกอริทึมของดิเจคัสตรา



รูปที่ 2.2 ระยะทางจีโอเดสิก

2.1.5 อัลกอริทึมของดิเจคัสตรา

อัลกอริทึมของดิเจคัสตราเป็นอัลกอริทึมสำหรับหาระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดยอดที่กำหนดไปยังจุดยอดอื่นบนกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมที่มีค่าเป็นลบ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดให้ค่าระยะทางของจุดเริ่มต้นเป็นศูนย์ ส่วนจุดอื่นทั้งหมดเป็นอนันต์
2. กำหนดให้จุดเริ่มต้นเป็นจุดปัจจุบัน
3. พิจารณาระยะทางของจุดรอบข้างของจุดปัจจุบันกับระยะทางของจุดปัจจุบันบวกด้วยระยะทางจากจุดปัจจุบันไปยังจุดรอบข้าง ถ้าระยะทางของจุดปัจจุบันบวกด้วยระยะทางจากจุดปัจจุบันไปยังจุดรอบข้างมีค่าน้อยกว่านำจุดรอบข้างไปใส่ในแถวคอย
4. กำหนดจุดในแถวคอยที่มีค่าระยะทางน้อยที่สุดเป็นจุดปัจจุบันแล้วทำซ้ำข้อ 3

เมื่อทำซ้ำจนไม่มีจุดในแถวคอย จะได้ระยะทางที่สั้นที่สุดจากจุดยอดที่กำหนดไปยังจุดยอดอื่นบนกราฟ

2.1.6 ระยะทางเฮาส์ดอร์ฟ

ระยะทางเฮาส์ดอร์ฟเป็นการวัดระยะห่างระหว่างชุดข้อมูลสองชุด โดยระยะทางเฮาส์ดอร์ฟหาได้จากสมการนี้

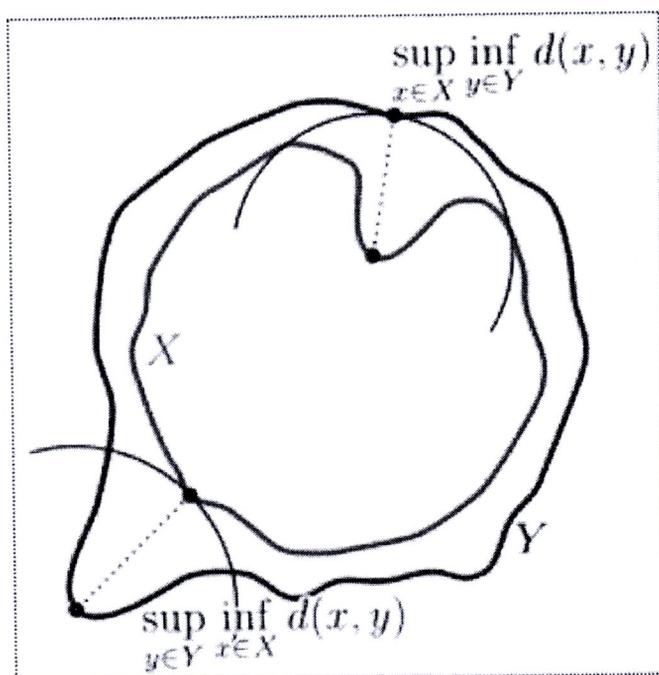
$$d_H(X, Y) = \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} d(x, y), \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} d(x, y) \right\},$$

$d_H(X, Y)$ คือระยะทางเฮาส์ดอร์ฟ

sup คือค่าที่มากที่สุดในการหา

inf คือค่าที่น้อยที่สุดในการหา

ตัวอย่างการหาระยะทางเฮาส์ดอร์ฟของชุดข้อมูล X และ Y แสดงดังรูปที่ 2.3 เส้นสีเขียวแทนชุดข้อมูล X เส้นสีน้ำเงินแทนชุดข้อมูล Y เส้นประแสดงระยะที่น้อยที่สุดของชุดข้อมูล X ไป Y และชุดข้อมูล Y ไป X



รูปที่ 2.3 ระยะทางเฮาส์ดอร์ฟระหว่างชุดข้อมูล X กับชุดข้อมูล Y

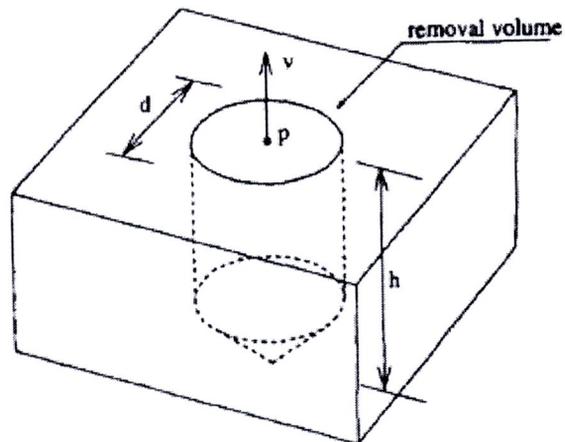
2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัยนี้ได้แก่ การจับคู่รูปร่าง และการแทนวัตถุด้วยเรขาคณิต

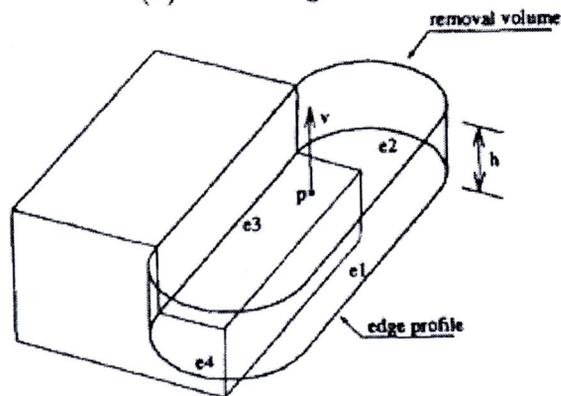
2.2.1 การจับคู่รูปร่าง

คุณฮิลากะและคณะ [4] ได้สรุปวิธีการต่างๆ ในการจับคู่รูปร่างเพื่อที่จะบอกว่าวัตถุสามมิติเหมือนกันหรือคล้ายกันหรือไม่ ดังนี้

ในงานวิจัย [5-8] ได้ใช้ การสกัดลักษณะในแคด/แคม(CAD/CAM) ซึ่งวิธีดังกล่าวเน้นเฉพาะเจาะจงและไม่พอเพียงสำหรับวัตถุสามมิติทั่วไป ตัวอย่างการสกัดลักษณะในแคด/แคม(CAD/CAM) จากงานวิจัย [6] ซึ่งหาลักษณะของการเจาะ และลักษณะของการสีของวัตถุสามมิติแสดงดังรูปที่ 2.4 โดยที่รูปบนแสดงลักษณะการเจาะ และรูปล่างแสดงลักษณะการสี



(a): a drilling feature



(b): a milling feature

Figure 1: Examples of machining features.

รูปที่ 2.4 การสกัดลักษณะในแคด/แคม(CAD/CAM) จากงานวิจัย [6]

ในงานวิจัย [9,10] ได้ใช้ รูปภาพของวัตถุสามมิติในการจับคู่รูปร่าง ซึ่งวิธีนี้ไม่พอเพียงสำหรับวัตถุสามมิติทั่วไป ตัวอย่างการใช้รูปภาพในการจับคู่รูปร่างของวัตถุสามมิติจากงานวิจัย [9] ซึ่งผลลัพธ์เป็นรูปภาพลักษณะของวัตถุสามมิติจากการใช้เส้นเชื่อมจุดภาพในมุมมองต่างๆ แสดงดังรูปที่ 2.5

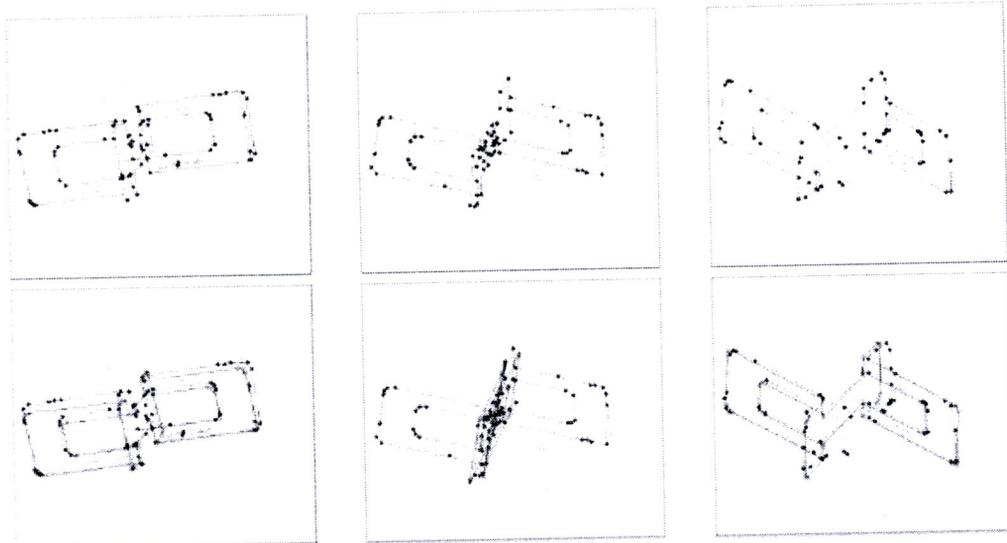


Fig. 4. Experiments with real images of full 3D objects. The modeled object was two standard sheet metal bookends taped together. For each image pair in the figure, on top are the data features connected by edge pixels. On the bottom is the best model transformation, shown by overlaying the model over the data features. The uncertainty allowed was five pixels, a 10×10 region. The images are approximately 256 pixels across. The pair (length ratio, relative angle) for the two rows of 3 for each image pair left to right are: (1.11, 90.54), (0.28, 28.5), (0.96, 92.19). These provide a measure of nonrigidity in the transformation found. Ideally this is (1, 90).

รูปที่ 2.5 การใช้รูปภาพในการจับคู่รูปร่างของวัตถุสามมิติจากงานวิจัย [9]

ส่วนงานวิจัย [7,11-14] ใช้ความโค้งเพื่อหารูปร่างของวัตถุสามมิติ วิธีนี้ถึงแม้ว่าจะทนทานต่อการเคลื่อนที่ การหมุน และย่อส่วน แต่ไม่ทนทานต่อลักษณะแบบลูกคลื่นและสิ่งรบกวน เนื่องจากวัตถุที่มีลักษณะเป็นลูกคลื่นหรือมีสิ่งรบกวนเพียงนิดเดียวก็จะได้ความโค้งที่แทนรูปร่างของวัตถุที่แตกต่างจากวัตถุที่ไม่มีสิ่งรบกวนอย่างมาก ตัวอย่างการใช้ความโค้งเพื่อหารูปร่างของวัตถุสามมิติจากงานวิจัย [12] แสดงดังรูปที่ 2.6 ด้านบนแสดงวัตถุสามมิติที่ถูกเคลื่อนที่ หมุน และย่อส่วนและความโค้งที่ใช้แทนรูปร่าง ด้านล่างแสดงวัตถุสามมิติต้นฉบับและความโค้งที่ใช้แทนรูปร่าง จะเห็นว่าความโค้งที่ใช้แทนรูปร่างมีลักษณะเหมือนกัน

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
 ห้องสมุดงานวิจัย
 วันที่... 23 ก.ค. 2555 ...
 เลขทะเบียน... 247130 ...
 เลขเรียกหนังสือ.....

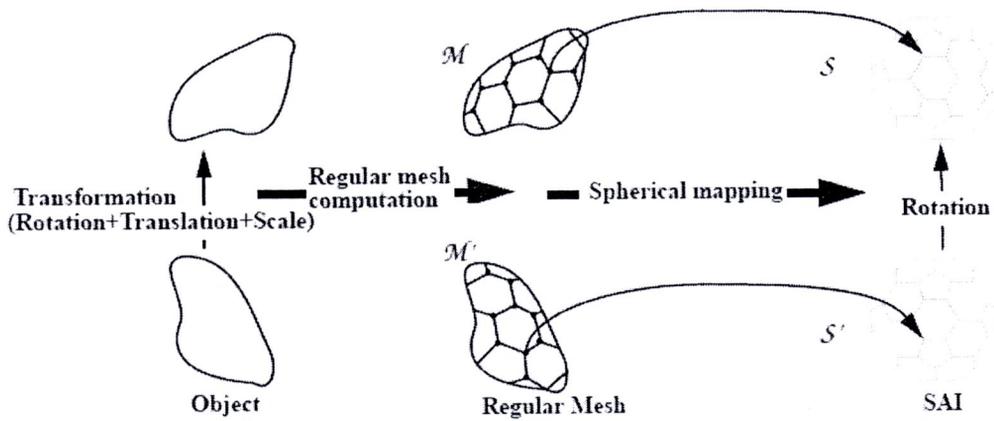


Figure 1: Object recognition using SAIs.

รูปที่ 2.6 การใช้ความโค้งเพื่อหารูปร่างของวัตถุสามมิติจากงานวิจัย [12]

งานวิจัย [15,16] ใช้ฮิสโทแกรมในการจับคู่รูปร่างของวัตถุสามมิติ ซึ่งวิธีนี้สามารถแสดงรูปร่างของวัตถุสามมิติได้แบบหยาบๆแต่ไม่บอกลักษณะเฉพาะที่ได้ ตัวอย่างการจับคู่วัตถุสามมิติโดยใช้ฮิสโทแกรมในงานวิจัย [16] แสดงดังรูปที่ 2.7 ฮิสโทแกรมของวัตถุสามมิติรูปแบบต่างๆ ซึ่งวัตถุประเภทเดียวกันมีลักษณะเหมือนกัน

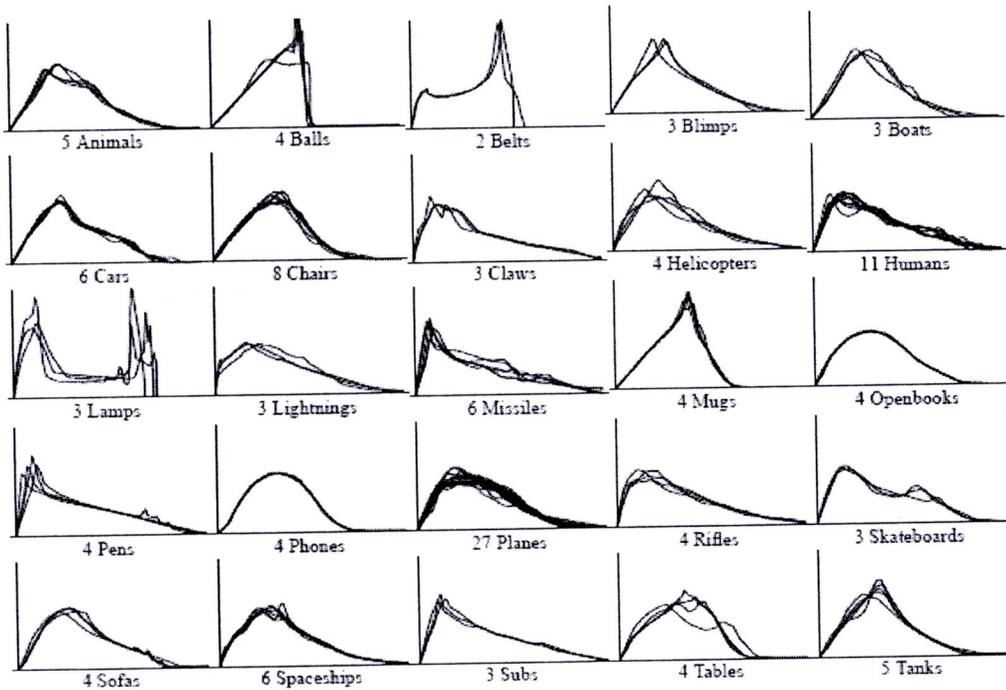


Figure 9. D2 shape distributions for 133 models grouped into 25 classes. Each plot represents a probability distribution of distance.

รูปที่ 2.7 การจับคู่วัตถุสามมิติโดยใช้ฮิสโทแกรมในงานวิจัย [16]

และมีงานวิจัยต่างๆได้ใช้กระดูกของวัตถุสามมิติในการแทนรูปร่างซึ่งการหากระดูกของวัตถุสามมิตินั้นสามารถทำได้สองวิธีดังนี้

งานวิจัย [17-21] ได้ใช้แกนกลางในการหากระดูกซึ่งวิธีนี้ไม่ทนทานต่อพื้นผิวที่มีลักษณะแบบลูกคลื่นเพราะจะทำให้กระดูกที่ได้มีลักษณะเป็นลูกคลื่นไปด้วย ตัวอย่างการหากระดูกโดยใช้แกนกลางในงานวิจัย [20] ดังรูปที่ 2.8 แสดงวัตถุสามมิติรูปกล่องและกระดูก (บน) วัตถุสามมิติรูปตัวแอลและกระดูก (ล่าง)

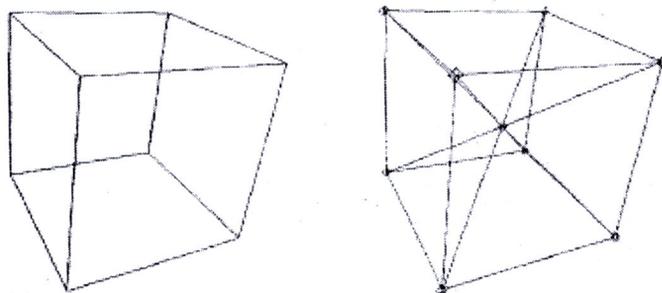


Fig. 9. A cube and its MA.

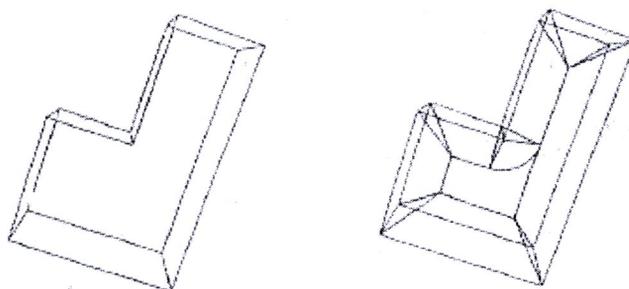


Fig. 10. An L-shaped box and its MA.

รูปที่ 2.8 การหากระดูกโดยใช้แกนกลางในงานวิจัย [20]

ดังนั้นคุณฮิลากะและคณะ [4] จึงได้ใช้เรบกราฟที่สามารถแทนกระดูกของวัตถุสามมิติได้ดีกว่าเพราะทนทานต่อลักษณะแบบลูกคลื่นของพื้นผิว จากงานวิจัย [3] ตัวอย่างการใช้เรบกราฟแทนวัตถุสามมิติ ดังรูปที่ 2.9 แสดงวัตถุสามมิติทรงห่วงยางและเรบกราฟที่ใช้ฟังก์ชันความสูงเป็นฟังก์ชันมอร์ส

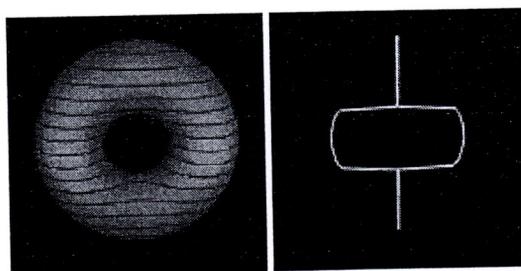


Figure 1: Torus and its Reeb graph using a height function

รูปที่ 2.9 การใช้เรบกราฟแทนวัตถุสามมิติจากงานวิจัย [4]

2.2.2 การแทนวัตถุด้วยเรบกราฟ

เรขกราฟ [22] เป็นวิธีในการแทนข้อมูลเชิงทอพอโลยีในรูปแบบของกราฟ โดยแทนจุดวิกฤตบนฟังก์ชันมอร์สในทฤษฎีมอร์ส [2] ด้วยจุดยอดและเชื่อมจุดยอดที่ติดกันด้วยเส้นเชื่อม ถูกนำมาใช้ในการแทนวัตถุสามมิติในงานคอมพิวเตอร์กราฟฟิกครั้งแรกโดยคุณชินากาว่า และคณะ [3] และได้ถูกใช้ในด้านต่างๆ เช่น การทำให้เคลื่อนไหว [23] การแบ่งส่วน [24] โดยที่คุณชินากาว่าและคณะได้ใช้ฟังก์ชันความสูงเป็นมอร์สฟังก์ชัน ซึ่งการใช้ฟังก์ชันความสูงนั้นไม่ทนทานต่อการหมุนของวัตถุสามมิติ ดังนั้นคุณฮิลาเกะและคณะ [4] จึงได้เปลี่ยนมอร์สฟังก์ชันเป็นระยะทางจีโอเดสิกเฉลี่ยเพื่อแก้ไขปัญหาความไม่ทนทานต่อการหมุน