บทที่ 2

แนวคิดและทฤษฎีพื้นฐาน

2.1 ต้นกำเนิดกัมมันตรังสีที่ปราศจากการดูแล

ต้นกำเนิดกัมมันตรังสีที่ปราศจากการดูแล จากการนิยามของ U.S.NRC (United States Nuclear Regulatory Commission) หมายถึง ต้นกำเนิดรังสีชนิดปิดผนึก (Sealed Source) ขนาดเล็กที่ไม่ได้ปนเปื้อนกับดินหรือสิ่งแวดล้อม ซึ่งเป็นวัสดุกัมมันตรังสีที่ถูกควบคุมหรือไม่ถูกควบคุมก็ตามแต่ไม่มีผู้รับผิดชอบหรือผู้รับผิดชอบไม่มีความสามารถในการควบคุมได้ จำเป็นจะต้องจัดเก็บไว้ในที่ปลอดภัย

2.2 ความแรงรังสี

ความแรงรังสี (radioactivity) หมายถึง อัตราการสลายตัวของไอโซโทปรังสีในสารกัมมันตรังสี มีหน่วยวัดเป็น คูรี (Curie,Ci) อ้างอิงจากอัตราการสลายตัวของ เรเดียม-226 (Ra-226) บริสุทธิ์จำนวน 1 กรัม

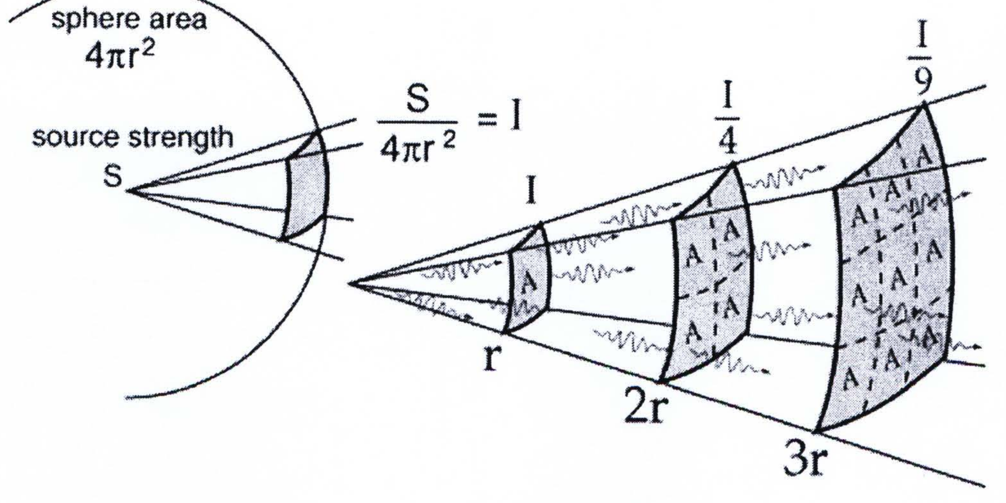
$$1 \text{ Ci} = 3.7 \times 10^{10} \text{ disintegration/second (dsp)} \tag{2.1}$$

สำหรับหน่วย SI จะใช้หน่วยวัดความแรงรังสีเป็น เบคเคอเรล (Becquerel,Bq) โดยนิยามว่า การสลายตัว 1 ครั้งต่อวินาทีเท่ากับ 1 Bq ดังนั้น

$$1 \text{ Bq} = 1/3.7 \times 10^{10} = 2.703 \times 10^{-11} \text{ Ci} \tag{2.2}$$

การวัดความแรงรังสี นั้น หากระยะที่วัดความแรงรังสีมีระยะห่างจากต้นกำเนิดรังสีมากเพียงพอ จะพิจารณาว่า ต้นกำเนิดรังสีเป็นแบบจุด (point source) มีการแผ่รังสีออกมาทุกทิศทาง รอบด้านอย่างสมดุลและความแรงรังสีที่ระยะ r จากต้นกำเนิดรังสีที่มีความแรงรังสี S_0 จะเท่ากับ

$$I = \frac{S_0}{4\pi r^2} \tag{2.3}$$



รูปที่ 2.1 ความแรงรังสีในระยะ r,2r และ 3r

การวัดความแรงรังสีในแต่ละจุดที่วัดจะมีความแรงรังสีลดลงเมื่อระยะที่วัดความแรงรังสีห่างจากต้นกำเนิดมากขึ้น โดยความแรงที่วัดได้จะเป็นค่าผกผันกับ ระยะทาง^2

2.3 ตำแหน่งของต้นกำเนิดกัมมันตรังสี

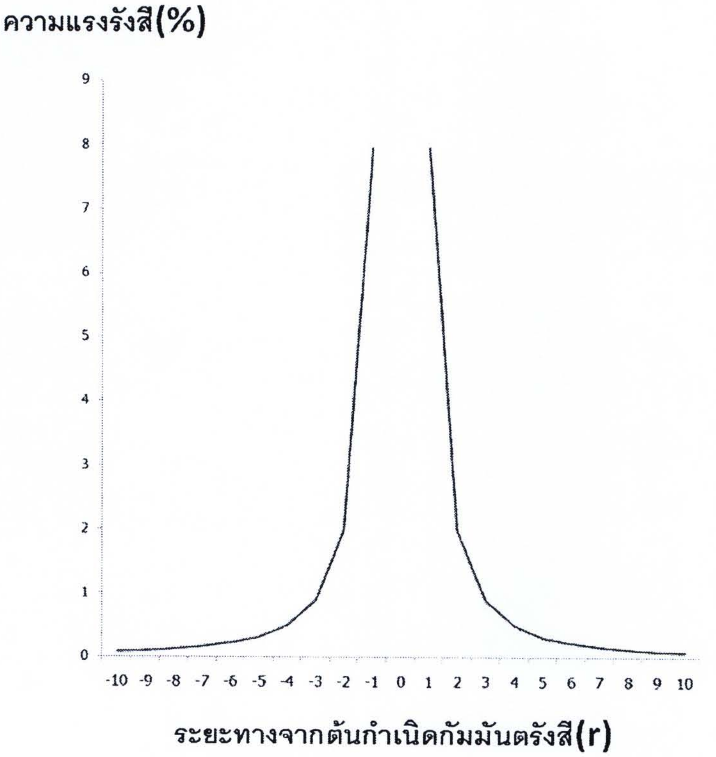
ในการหาตำแหน่งของต้นกำเนิดกัมมันตรังสี เมื่อพิจารณาเป็นต้นกำเนิดรังสีแบบจุด การแผ่รังสีจะมีการแผ่รังสีจะออกมาทุกทิศทางเป็นลักษณะทรงกลม เมื่อกำหนดให้ความแรงรังสีของต้นกำเนิดกัมมันตรังสีเท่ากับ 100% จะได้ความแรงรังสีเมื่อเทียบกับระยะทางจากต้นกำเนิดกัมมันตรังสีที่ระยะต่างๆแสดงดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 ความสัมพันธ์ระหว่างร้อยละของความแรงรังสีและระยะทางที่ห่างจากต้นกำเนิดกัมมันตรังสี

ระยะห่างจากต้นกำเนิดกัมมันตรังสี (r)	ความแรงรังสี (%)
0	Infinity
1	7.957747155
2	1.989436789
3	0.884194128
4	0.497359197

5	0.318309886
6	0.221048532
7	0.162403003
8	0.124339799
9	0.098243792
10	0.079577472

จากตารางที่ 2.1 ตำแหน่งของต้นกำเนิดกัมมันตรังสีคือตำแหน่งที่วัดความแรงรังสีได้สูงสุด ซึ่งในทางทฤษฎี มีค่าเท่ากับอนันต์ ความแรงรังสีจะเริ่มลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อระยะทางห่างจากต้นกำเนิดกัมมันตรังสีมากขึ้น ในทางปฏิบัติแล้วจะไม่สามารถวัดค่าความแรงรังสีของต้นกำเนิดกัมมันตรังสีในตำแหน่งได้ เนื่องจากข้อจำกัดของขนาดหัววัดรังสีและการจัดรูปทรงของการวัดรังสี กราฟเปอร์เซ็นต์ของความแรงรังสีของต้นกำเนิดกัมมันตรังสีที่มีความแรงรังสี 100% แสดงในรูปที่ 2.2 จะเห็นได้ว่าความแรงรังสีลดลงอย่างรวดเร็วเมื่อระยะห่างเพิ่มขึ้น ที่ระยะ r=1ความแรงรังสีเป็น 7.96% เมื่อระยะ r=10 ความแรงจะลดลงเหลือเพียง 0.0796%



รูปที่ 2.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความแรงรังสีและระยะทางจากต้นกำเนิดกัมมันตรังสี

2.4 การวัดความแรงรังสี

เนื่องจากการสลายตัวของไอโซโทปรังสีในต้นกำเนิดกัมมันตรังสี เป็นการสลายตัวที่เกิดขึ้นเองไม่ขึ้นกับสภาวะแวดล้อมของนิวเคลียส เช่น อุณหภูมิ ความดัน และสนามแม่เหล็ก เป็นต้น ดังนั้นจึงเป็นกระบวนการแบบสุ่มทางสถิติ โดยทุกๆ นิวเคลียสมีโอกาสสลายตัวเท่ากัน เมื่อทำการวัดความแรงรังสีแล้ว ผลการวัดความแรงรังสีจึงมีค่าเบี่ยงเบนเชิงสถิติของการนับรังสี ในการวัดจะต้องวัดหลายครั้งและหาค่าเฉลี่ยที่มีโอกาสเป็นไปได้มากที่สุด

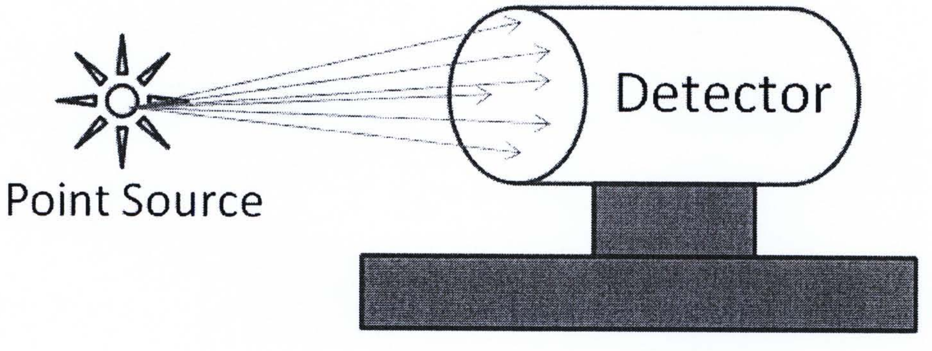
ความแรงรังสีในการวัดรังสีจริงนั้นแม้ว่าต้นกำเนิดรังสีจะแผ่รังสีรอบตัว แต่การวัดรังสีนั้นหัววัดรังสีจะรับรังสีได้เฉพาะส่วนที่รังสีเข้าไปทำอันตรกิริยาในตัวกลางของหัววัดรังสีเท่านั้น ดังในรูปที่ 2.3 รังสีในทิศทางอื่นและรังสีที่เล็ดลอดจากการทำอันตรกิริยาถ่ายโอนพลังงานในหัววัดรังสีจะสูญเสียปริมาณนับรังสีไป การแปรผลการวัดรังสีจึงต้องพิจารณาตัวประกอบประสิทธิภาพของการวัดรังสีด้วย ดังสมการ 2.4

$$r = f_1 f_2 f_3 \ldots\ldots f_n S \tag{2.4}$$

โดยที่ r = อัตรานับรังสีซึ่งบันทึกจากเครื่องวัดรังสี

S = อัตรานับรังสีที่ปลดปล่อยจากต้นกำเนิดรังสี

f =ตัวประกอบประสิทธิภาพที่มีผลต่อการวัดรังสี



รูปที่ 2.3 การแผ่รังสีและการวัดความแรงรังสี

2.5 การหาตำแหน่งของต้นกำเนิดกัมมันตรังสีจากสมการความแรงรังสี

จากสมการที่ 2.3 เมื่อ S_0 คือความแรงรังสีของต้นกำเนิดกัมมันตรังสี และ I คือความแรงรังสีที่วัดได้ ถ้ากำหนดให้ต้นกำเนิดรังสีมีพิกัดอยู่ที่ a,b จุดที่วัดความแรงรังสีคือจุด x_i, y_i ระยะห่างระหว่างต้นกำเนิดรังสีกับจุดที่วัดความแรงจะมีค่าเท่ากับ

$$r = \sqrt{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2} \tag{2.5}$$

ดังนั้น ความแรงรังสีที่วัดได้ ณ จุด ใดๆ กรณีมี 1 ต้นกำเนิดกัมมันตรังสีเท่ากับ

$$I_i = \frac{S_0}{4\pi[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]} \tag{2.6}$$

สมการนี้มีตัวแปรที่ไม่ทราบค่า จำนวน 3 ตัวแปร คือ S_0, a, b ดังนั้นจึงต้องการสมการ 3 สมการ เพื่อหาคำตอบ โดยใช้เทคนิคกำลังสองน้อยสุด ให้ I_m เป็นค่าจริงจากการวัดความแรงรังสีที่จุด x_i, y_i จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนของสมการกับค่าจริงในแต่ละจุดคือ

$$\varepsilon_i = I_i - I_m \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_i = \frac{S_0}{4\pi[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]} - I_m \tag{2.8}$$

ให้ ε^2 เป็นผลรวมของความคลาดเคลื่อนทุกจุดยกกำลังสองจะได้ว่า

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{S_0}{4\pi[(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2]} - I_m \right]^2 \tag{2.9}$$

ค่า ε^2 จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial S_0}\varepsilon^2 = 0 \text{ , } \frac{\partial}{\partial a}\varepsilon^2 = 0 \text{ , } \frac{\partial}{\partial b}\varepsilon^2 = 0$$

หาค่าของ $$\frac{\partial}{\partial S_0}\varepsilon^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial S_0}\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial S_0}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}2[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m]\frac{\partial}{\partial S_0}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m][\frac{1}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{8\pi^2[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2} - \frac{I_m}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}] = 0 \qquad (2.10)$$

หาค่าของ $$\frac{\partial}{\partial a}\varepsilon^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial a}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}2[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m]\frac{\partial}{\partial a}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]} - I_m][\frac{(x_i-a)S_0}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{(x_i-a)S_0{}^2}{4\pi^2[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^3} - \frac{(x_i-a)S_0 I_m}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}] = 0 \qquad (2.11)$$

หาค่าของ $\frac{\partial}{\partial b}\varepsilon^2 = 0$

$$\frac{\partial}{\partial b}\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}-I_m]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial b}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}-I_m]^2 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}2[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}-I_m]\frac{\partial}{\partial b}[\frac{S_0}{4\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{S_0}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}-I_m][\frac{(y_i-b)S_0}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}] = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}[\frac{(y_i-b){S_0}^2}{4\pi^2[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^3}-\frac{(y_i-b)S_0I_m}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}] = 0 \qquad (2.12)$$

ดังนั้นจากสมการที่ 2.10,2.11 และ 2.12 จะได้สมการ Least Square Fit จำนวน 3 สมการ คือ

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{S_0}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}-\frac{I_m}{[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]}\right] = 0 \qquad (2.13)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i-a)S_0^2}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^3}-\frac{(x_i-a)S_0I_m}{[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}\right] = 0 \qquad (2.14)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(y_i-b)S_0^2}{2\pi[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^3}-\frac{(y_i-b)S_0I_m}{[(x_i-a)^2+(y_i-b)^2]^2}\right] = 0 \qquad (2.15)$$

เนื่องจากสมการที่ 2.13,2.14 และ 2.15 ไม่เป็นเชิงเส้นดังนั้นจึงแปลงสมการ 2.13,2.14 และ 2.15 ให้เป็นสมการเชิงเส้นในรูปของอนุกรมเทเลอร์ โดยให้สมการทั้ง 3 เป็นฟังก์ชันของ $f(x,y,S_0,a,b)$ กำหนดให้

S_0,a,b เป็นค่าจริง

S_0^*,a^*,b^* เป็นค่าที่คาดหมาย

ดังนั้น

$$\Delta S_0 = S_0 - S_0^* \tag{2.16}$$

$$\Delta a = a - a^* \tag{2.17}$$

$$\Delta b = b - b^* \tag{2.18}$$

เขียนในรูปของอนุกรมเทเลอร์ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f(x,y,S_0,a,b) &= f(x,y,S_0^*,a^*,b^*) + \frac{\partial}{\partial S_0} f(x,y,S_0^*,a^*,b^*)(\Delta S_0) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial a} f(x,y,S_0^*,a^*,b^*)(\Delta a) + \frac{\partial}{\partial b} f(x,y,S_0^*,a^*,b^*)(\Delta b) \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial S_0} f(x,y,S_0^*,a^*,b^*)(\Delta S_0) + \frac{\partial}{\partial a} f(x,y,S_0^*,a^*,b^*)(\Delta a) \\ &+ \frac{\partial}{\partial b} f(x,y,S_0^*,a^*,b^*)(\Delta b) = f(x,y,S_0,a,b) - f(x,y,S_0^*,a^*,b^*) \end{aligned} \tag{2.20}$$

และสามารถเขียนเมตริกซ์ขนาด 3×3 เพื่อหาคำตอบของสมการได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_0 \\ \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

โดยที่

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} [I_i - I_m] \frac{\partial^2}{\partial S_0^2} I_i + \frac{\partial}{\partial S_0} I_i \frac{\partial}{\partial S_0} I_i \tag{2.22}$$

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} [I_i - I_m] \frac{\partial}{\partial a} \frac{\partial}{\partial S_0} I_i + \frac{\partial}{\partial a} I_i \frac{\partial}{\partial S_0} I_i \tag{2.23}$$

$$A_{13} = \sum_{i=1}^{n} [I_i - I_m] \frac{\partial}{\partial b} \frac{\partial}{\partial S_0} I_i + \frac{\partial}{\partial b} I_i \frac{\partial}{\partial S_0} I_i \tag{2.24}$$

$$A_{21} = \sum_{i=1}^{n} [I_i - I_m] \frac{\partial}{\partial S_0} \frac{\partial}{\partial a} I_i + \frac{\partial}{\partial S_0} \frac{\partial}{\partial a} I_i \tag{2.25}$$

$$A_{22} = \sum_{i=1}^{n}[I_i - I_m]\frac{\partial^2}{\partial a^2}I_i + \frac{\partial^2}{\partial a}I_i\frac{\partial^2}{\partial a}I_i \tag{2.26}$$

$$A_{23} = \sum_{i=1}^{n}[I_i - I_m]\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}I_i + \frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}I_i \tag{2.27}$$

$$A_{31} = \sum_{i=1}^{n}[I_i - I_m]\frac{\partial}{\partial S_0}\frac{\partial}{\partial b}I_i + \frac{\partial}{\partial S_0}\frac{\partial}{\partial b}I_i \tag{2.28}$$

$$A_{32} = \sum_{i=1}^{n}[I_i - I_m]\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}I_i + \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}I_i \tag{2.29}$$

$$A_{33} = \sum_{i=1}^{n}[I_i - I_m]\frac{\partial^2}{\partial b^2}I_i + \frac{\partial}{\partial b}I_i\frac{\partial}{\partial b}I_i \tag{2.30}$$

$$B_1 = \sum_{i=1}^{n}[I_m - I_i]\frac{\partial}{\partial S_0}I_i \tag{2.31}$$

$$B_2 = \sum_{i=1}^{n}[I_m - I_i]\frac{\partial}{\partial a}I_i \tag{2.32}$$

$$B_3 = \sum_{i=1}^{n}[I_m - I_i]\frac{\partial}{\partial b}I_i \tag{2.33}$$

การหาคำตอบจากสมการที่ 2.22-2.33 เป็นการหาคำตอบเมื่อมีต้นกำเนิดกัมมันตรังสี 1 ต้นกำเนิดกัมมันตรังสี หากมีต้นกำเนิดกัมมันตรังสีมากกว่า 1 ต้นกำเนิด จะสามารถหาตำแหน่งและความแรงของต้นกำเนิดกัมมันตรังสีได้เช่นกัน โดยในกรณีมี ต้นกำเนิดกัมมันตรังสีจำนวน 3 จุด จากสมการความแรงรังสี

$$I = \frac{S}{4\pi[(x-a)^2 + (y-b)^2]}$$

ความแรงรังสีที่วัดได้ ณ จุด ใดๆ กรณีมี 3 ต้นกำเนิดรังสีเท่ากับ

$$I_{tot} = \sum_{i=1}^{n} I_n$$

$$I_{tot} = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_{tot} = \frac{S_1}{4\pi[(x_i - a_1)^2 + (y_i - b_1)^2]} + \frac{S_2}{4\pi[(x_i - a_2)^2 + (y_i - b_2)^2]} + \frac{S_3}{4\pi[(x_i - a_3)^2 + (y_i - b_3)^2]}$$

โดยที่

S_1 คือ ความแรงรังสีของต้นกำเนิดรังสี ที่ตำแหน่ง a_1, b_1

S_2 คือ ความแรงรังสีของต้นกำเนิดรังสี ที่ตำแหน่ง a_2, b_2

S_3 คือ ความแรงรังสีของต้นกำเนิดรังสี ที่ตำแหน่ง a_3, b_3

ใช้เทคนิคกำลังสองน้อยสุด ให้ I_m เป็นค่าจริงจากการวัดความแรงรังสีที่จุด x_i, y_i จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนของสมการกับค่าจริงในแต่ละจุดคือ

$$\varepsilon_i = I_i - I_m$$

$$\varepsilon_i = \frac{S_1}{4\pi[(x_i - a_1)^2 + (y_i - b_1)^2]} + \frac{S_2}{4\pi[(x_i - a_2)^2 + (y_i - b_2)^2]} + \frac{S_3}{4\pi[(x_i - a_3)^2 + (y_i - b_3)^2]} - I_m$$

ให้ ε^2 เป็นผลรวมของความคลาดเคลื่อนทุกจุดยกกำลังสองจะได้ว่า

$$\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{S_1}{4\pi[(x_i - a_1)^2 + (y_i - b_1)^2]} + \frac{S_2}{4\pi[(x_i - a_2)^2 + (y_i - b_2)^2]} + \frac{S_3}{4\pi[(x_i - a_3)^2 + (y_i - b_3)^2]} - I_m \right]^2$$

ค่า ε^2 จะมีค่าน้อยที่สุดเมื่อ

$$\frac{\partial}{\partial S_n}\varepsilon^2 = 0 \quad , \frac{\partial}{\partial a_n}\varepsilon^2 = 0 \quad , \frac{\partial}{\partial b_n}\varepsilon^2 = 0$$ โดยที่ $n = 1,2,3$

ดังนั้นจะได้สมการจาก Least Square Fit จำนวน 9 สมการ คือ

$$\frac{\partial}{\partial S_1} \Sigma [I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b_3}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2 = 0$$

เพื่อหาคำตอบของสมการจะต้องแปลงสมการให้อยู่เป็นเชิงเส้นในรูปของอนุกรมเทเลอร์ โดยสมมติว่า $f(x, y, S_1, a_1, b_1, S_2, a_2, b_2, S_3, a_3, b_3) = 0$ แทนสมการทั้ง 9

ให้ $S_1, a_1, b_1, S_2, a_2, b_2, S_3, a_3, b_3$ เป็นค่าจริง

ให้ $S_1^*, a_1^*, b_1^*, S_2^*, a_2^*, b_2^*, S_3^*, a_3^*, b_3^*$ เป็นค่าที่คาดหมาย

$$\Delta S_1 = S_1 - S_1^*$$

$$\Delta a_1 = a_1 - a_1^*$$

$$\Delta b_1 = b_1 - b_1^*$$

$$\Delta S_2 = S_2 - S_2^*$$

$$\Delta a_2 = a_2 - a_2^*$$

$$\Delta b_2 = b_2 - b_2^*$$

$$\Delta S_3 = S_3 - S_3^*$$

$$\Delta a_3 = a_3 - a_3^*$$

$$\Delta b_3 = b_3 - b_3^*$$

ให้ $f = f(x, y, S_1, a_1, b_1, S_2, a_2, b_2, S_3, a_3, b_3)$

และ $f^* = f(x, y, S_1^*, a_1^*, b_1^*, S_2^*, a_2^*, b_2^*, S_3^*, a_3^*, b_3^*)$

กระจายสมการเป็น Tayler Series

$$f = f^* + \frac{\partial}{\partial S_1} f^* \cdot \Delta S_1 + \frac{\partial}{\partial a_1} f^* \cdot \Delta a_1 + \frac{\partial}{\partial b_1} f^* \cdot \Delta b_1 + \frac{\partial}{\partial S_2} f^* \cdot \Delta S_2 + \frac{\partial}{\partial a_2} f^* \cdot \Delta a_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial b_2} f^* \cdot b_2 + \frac{\partial}{\partial S_3} f^* \cdot \Delta S_3 + \frac{\partial}{\partial a_3} f^* \cdot \Delta a_3 + \frac{\partial}{\partial b_3} f^* \cdot \Delta b_3$$

หรือ

$$\frac{\partial}{\partial S_1} f^* \cdot \Delta S_1 + \frac{\partial}{\partial a_1} f^* \cdot \Delta a_1 + \frac{\partial}{\partial b_1} f^* \cdot \Delta b_1 + \frac{\partial}{\partial S_2} f^* \cdot \Delta S_2 + \frac{\partial}{\partial a_2} f^* \cdot \Delta a_2 + \frac{\partial}{\partial b_2} f^* \cdot b_2$$

$$+ \frac{\partial}{\partial S_3} f^* \cdot \Delta S_3 + \frac{\partial}{\partial a_3} f^* \cdot \Delta a_3 + \frac{\partial}{\partial b_3} f^* \cdot \Delta b_3 = f - f^*$$

จากสมการ แทนค่าเป็น $f = 0$

ดังนั้น จะสามารถเขียนเมตริกซ์ ขนาด 9x9 ได้ดังนี้.-

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} & a_{38} & a_{39} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} & a_{48} & a_{49} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & a_{58} & a_{59} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} & a_{78} & a_{79} \\ a_{81} & a_{82} & a_{83} & a_{84} & a_{85} & a_{86} & a_{87} & a_{88} & a_{89} \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta S_1 \\ \Delta a_1 \\ \Delta b_1 \\ \Delta S_2 \\ \Delta a_2 \\ \Delta b_2 \\ \Delta S_3 \\ \Delta a_3 \\ \Delta b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \end{bmatrix}$$

โดยที่

$$a_{11} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{12} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{13} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{14} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{15} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{16} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{17} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{18} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{19} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{21} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{22} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{23} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{24} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{25} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{26} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{27} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{28} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{29} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{31} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{32} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{33} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{34} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{35} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{36} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{37} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{38} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{39} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{41} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{42} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{43} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{44} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{45} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{46} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{47} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{48} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{49} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{51} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{52} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{53} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{54} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{55} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{56} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{57} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{58} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{59} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{61} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{62} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{63} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{64} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{65} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{66} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{67} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{68} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{69} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_2}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{71} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{72} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{73} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{74} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{75} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{76} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{77} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma[I_1 + I_2 + I_3 - I_m]^2\right)$$

$$a_{78} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{79} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial S_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{81} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{82} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{83} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{84} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{85} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{86} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{87} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{88} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{89} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial a_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{91} = \frac{\partial}{\partial S_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{92} = \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{93} = \frac{\partial}{\partial b_1}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{94} = \frac{\partial}{\partial S_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{95} = \frac{\partial}{\partial a_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{96} = \frac{\partial}{\partial b_2}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{97} = \frac{\partial}{\partial S_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{98} = \frac{\partial}{\partial a_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$a_{99} = \frac{\partial}{\partial b_3}\left(\frac{\partial}{\partial b_3}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2\right)$$

$$b_1 = -\frac{\partial}{\partial S_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_2 = -\frac{\partial}{\partial a_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_3 = -\frac{\partial}{\partial b_1}\Sigma\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_4 = -\frac{\partial}{\partial S_2}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_5 = -\frac{\partial}{\partial a_2}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_6 = -\frac{\partial}{\partial b_2}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_7 = -\frac{\partial}{\partial S_3}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_8 = -\frac{\partial}{\partial a_3}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

$$b_9 = -\frac{\partial}{\partial b_3}\sum\left[I_1 + I_2 + I_3 - I_m\right]^2$$

จะเห็นได้ว่าวิธีการหาคำตอบของสมการโดยตรงสามารถกระทำได้ ซึ่งพบว่าเมื่อจำนวนต้นกำเนิดกัมมันตรังสีมีมากขึ้น จะใช้สมการในการหาคำตอบมากขึ้นเช่นกัน กรณีมี 1 ต้นกำเนิดกัมมันตรังสี จะต้องใช้เมตริกซ์ขนาด 3×3 ในการหาคำตอบ ในกรณีมี 3 ต้นกำเนิดกัมมันตรังสี จำนวนเมตริกซ์ที่ใช้เพื่อแก้สมการเป็นขนาด 9×9 การหาคำตอบของเมตริกซ์ทำได้โดยการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ ซึ่งในการพัฒนาเทคนิคในการระบุตำแหน่งและความแรงรังสีของต้นกำเนิดกัมมันตรังในการศึกษานี้จะใช้โปรแกรม MATLAB ในการหาคำตอบ

2.6 **การแก้สมการโดยใช้โปรแกรม** MATLAB

เนื่องจาก MATLAB เป็นโปรแกรมการคำนวณเชิงตัวเลขสำเร็จรูปที่ได้รับความนิยมเพื่อใช้ในการคำนวณงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรม มีสิ่งแวดล้อมในการคำนวณของตัวเอง (Numerical Computing Environment) มีฟังก์ชันสำหรับการหาคำตอบของเมตริกซ์โดยเฉพาะ ตลอดจนมีส่วนต่อประสานกราฟิกกับผู้ใช้ (Graphical User Interface,GUI) ทำให้มีความสะดวกในการใช้งานมากขึ้น ดังนั้นสำหรับงานศึกษานี้ จะใช้โปรแกรม MATLAB สำหรับการคำนวณหาตำแหน่ง,ความแรงและจำนวนของต้นกำเนิดกัมมันตรังสี