บทที่ 6

การประมาณค่าอัตรามรณะโดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value Theory)

ในการประมาณค่าอัตรามรณะโดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value Theory) ส่วนมากจะนำไปใช้กับช่วงของข้อมูลที่มีค่าอยู่ในตำแหน่งที่ผิดปกติ หรือช่วงของลำดับของข้อมูลที่อยู่ในตำแหน่งที่สูงมากๆ โดยมีการกำหนดค่าเริ่มต้นสำหรับการพิจารณา แล้วนำการแจกแจงที่เหมาะสมในทฤษฎีค่าสุดขีดมาใช้ ซึ่งในที่นี้จากการศึกษาข้อมูล ได้เห็นว่าการแจกแจงที่มีค่าพารามิเตอร์ที่สอดคล้องกับข้อมูล คือ การแจกแจงทั่วไปของพาเรโต (Generalized Pareto Distribution) แล้วจึงนำค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ไปแทนค่าในการแจกแจง เพื่อนำไปประมาณหาอัตรามรณะต่อไป

6.1 วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของทฤษฎีค่าสุดขีด

ในที่นี้ค่าเริ่มต้นของอายุ หรือ threshold คือ u ปี โดยพิจารณาว่าตั้งแต่อายุ u ปีขึ้นไป อัตรามรณะจะมีรูปแบบการแจกแจงทั่วไปของพาเรโต และสามารถเขียนเป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นได้คือ

$$P(X \leq u + z | X > u) \approx \quad H_u(z) \quad = \quad 1 - \left(1 + \frac{\xi z}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

ซึ่งมีความหมาย คือ ความน่าจะเป็นที่คนอายุ x ปี จะมีอายุไม่มากกว่า $u + z$ ปี โดยที่คนๆนั้นมีอายุมากกว่า u ปี

จากสมการข้างต้นสัญลักษณ์ต่างๆ มีความหมาย คือ

u คือ อายุเริ่มต้น หรือ threshold

z คือ ส่วนของอายุที่เกินจาก u ปี

$H_u(z)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงทั่วไปของพาเรโต โดยมี threshold คือ u และแทนค่าฟังก์ชันโดยค่า z

ξ และ σ คือ พารามิเตอร์ของการแจกแจงทั่วไปของพาเรโต โดยที่ $\xi < 0$ และ $\sigma > 0$

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นข้างต้น เราสามารถหาฟังก์ชันที่จะใช้ใน log ของฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (Log-likelihood function: $l(\theta)$) ซึ่งมีสองส่วน คือ ส่วนแรก ความน่าจะเป็นที่คนจะตายในช่วงระหว่างอายุ x ถึง $x + 1$ โดยมีประชากรอายุ x อยู่ l_x และ ประชากรอายุ $x + 1$ อยู่ l_{x+1} คือ $H_u(x - u + 1) - H_u(x - u)$ โดยจะมีจำนวนคนที่อยู่

ในช่วงการตายทั้งหมด $l_x - l_{x+1}$ คน และส่วนที่สอง สำหรับผู้ที่อายุ h ปีขึ้นไป ซึ่งเป็นส่วนที่มีความไม่สมบูรณ์ของข้อมูล โดยถือว่าเป็นผู้ที่อยู่นอกขอบเขตที่พิจารณา หรือผู้ที่รอดชีวิต มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ $1 - H_u(h-u)$ และมีจำนวนคนทั้งหมดในช่วงอายุนี้ คือ l_h คน จากทั้งสองส่วนทำให้สามารถเขียน $l(\theta)$ ได้ว่า

$$l(\theta) = \sum_{x=u}^{h}(l_x - l_{x+1})\, log[H_u(x-u+1) - H_u(x-u)] + l_h\, log[1 - H_u(h-u)] \quad \text{... (6.1)}$$

การทำการประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบ ต้องหาค่าประมาณพารามิเตอร์ของตัวแบบก่อน

งานวิจัยนี้ใช้โปรแกรม R ในการคำนวนหาค่าพารามิเตอร์ที่ทำให้ $l(\theta)$ ใน (6.1) มีค่ามากที่สุด ซึ่งค่าของพารามิเตอร์ที่ทำให้ $l(\theta)$ มีค่ามากที่สุด คือค่าพารามิเตอร์ที่ต้องการ จากนั้นจึงนำค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้แทนค่าใน $\mu(x)$ ของตัวแบบ

จากบทที่ 4 การประมาณหาค่าพารามิเตอร์ในตัวแบบทั้งสามนั้น ต้องใช้ค่าไคว์สแควร์เพื่อตรวจสอบว่ามีความเหมาะสมในการนำข้อมูลมาแสดงในรูปของตัวแบบนั้นๆ ในช่วงอายุที่กำหนดได้หรือไม่ แต่จากข้อมูลอัตรามรณะของประชากรไทยในช่วงอายุสูงนั้นมีค่าที่ผิดปกติ และมีอัตราการเพิ่มของอัตรามรณะที่ลดลงเรื่อยๆ ตั้งแต่ช่วงอายุประมาณ 90 ปีขึ้นไป จึงไม่สามารถทำการทดสอบความสมนัยโดยใช้ค่าไคว์สแควร์ได้ ผู้ทำการวิจัยจึงกำหนดการศึกษาในช่วงอายุที่มีความเหมาะสมและเป็นไปได้ในการประมาณหาพารามิเตอร์ที่อายุสูงสุด คือ 88 ปี สำหรับเพศชาย และ 93 ปี สำหรับเพศหญิง และแบ่งเป็นช่วงต่างๆ ในการพิจารณาหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยไม่คำนึงถึงค่าไคว์สแควร์ ซึ่งในที่นี้คือ สำหรับเพศชายในช่วงอายุ 70 – 88 ปี และเพศหญิงในช่วงอายุ 70 – 93 ปี โดยจะแบ่งเป็น 3 ช่วงอายุ คือ 70 – 88 ปี 75 – 88 ปี และ 80 – 88 ปี สำหรับเพศชาย และอีก 3 ช่วงอายุ คือ 70 – 93 ปี 75 – 93 ปี และ 80 – 93 ปี สำหรับเพศหญิง ซึ่งสามารถประมาณหาค่าพารามิเตอร์โดยโปรแกรม R ได้ค่าพารามิเตอร์ดังตารางที่ 6.1 และ 6.2 ตามลำดับ

ตารางที่ 6.1 ค่าประมาณพารามิเตอร์ในแต่ละช่วงอายุ สำหรับการประมาณค่าอัตรามรณะ โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีดของเพศชายในช่วงปีพ.ศ. 2547 - 2551

ช่วงอายุ (ปี)	u	h	σ	ξ
70 – 88	70	88	24.228241	-1.002733
75 – 88	75	88	17.3222673	-0.8280642
80 – 88	80	88	12.0573225	-0.6461594

ตารางที่ 6.2 ค่าประมาณพารามิเตอร์ในแต่ละช่วงอายุ สำหรับการประมาณค่าอัตรามรณะ โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีดของเพศหญิงในช่วงปีพ.ศ. 2547 - 2551

ช่วงอายุ	u	h	σ	ξ
70 – 93	70	93	28.307779	-1.055052
75 – 93	75	93	20.4119894	-0.8939635
80 – 93	80	93	13.9486737	-0.7126719

หลังจากสามารถประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงทั่วไปของพาเรโตได้แล้วนั้น ในตอนต่อไปจะเป็นการประมาณค่าอัตรามรณะ ในแต่ละช่วงอายุของเพศชาย และเพศหญิง

6.2 การประมาณค่าอัตรามรณะ

สำหรับค่าอัตรามรณะ (q_x) จากทฤษฎีค่าสุดขีดซึ่งได้จากการแจกแจงทั่วไปของพาเรโตนั้น สามารถหารูปฟังก์ชัน q_x ได้ คือ

$$q_x = \frac{[H_u(x+1-u)-H_u(x-u)]}{1-H_u(x-u)}$$

ในที่นี้ขอยกตัวอย่างการประมาณค่าอัตรามรณะของคนอายุ 80 ปี ในช่วงอายุ 70 – 88 ปี ของเพศชายสำหรับช่วงปีพ.ศ. 2547 – 2551 โดยค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้ คือ σ = 24.228241 และ ξ = -1.002733 นำมาแทนค่าในสมการจะได้ว่า

$$q_{80} = \frac{[H_{70}(80-70+1)-H_{70}(80-70)]}{1-H_{70}(80-70)}$$

$$= \frac{[H_{70}(11)-H_{70}(10)]}{1-H_{70}(10)}$$

$$= \frac{1-\left(1+\frac{(-1.002733)(11)}{24.228241}\right)^{-\frac{1}{-1.002733}}-\left(1-\left(1+\frac{(-1.002733)(10)}{24.228241}\right)^{-\frac{1}{-1.002733}}\right)}{\left(1+\frac{(-1.002733)(10)}{24.228241}\right)^{-\frac{1}{-1.002733}}}$$

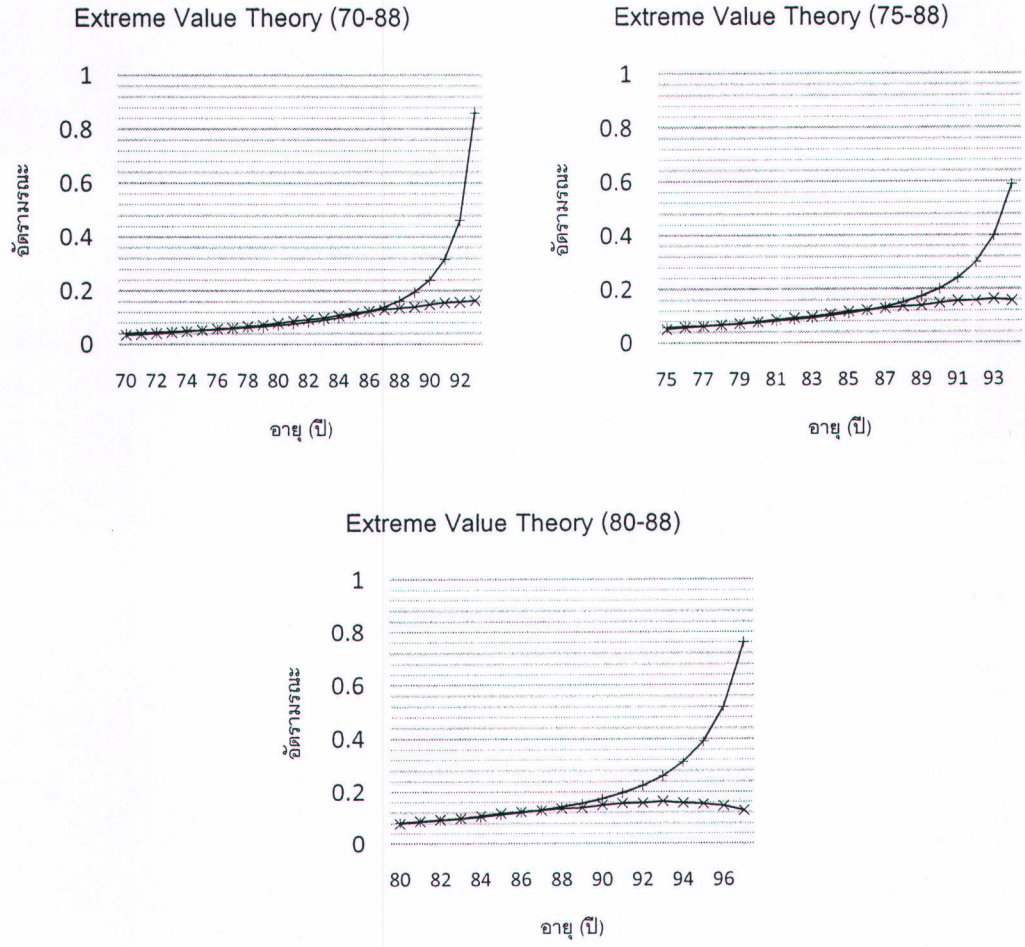
$$= 0.06984718$$

ตารางที่ 6.3 แสดงค่าประมาณอัตรามรณะของเพศชาย โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด ในช่วงอายุ 70 – 88 ปี 75 – 88 ปี และ 80 – 88 ปี

ตารางที่ 6.3 ค่าประมาณอัตรามรณะของเพศชายจากทฤษฎีค่าสุดขีด โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณในช่วงอายุ 70 – 88 ปี 75 – 88 ปี และ 80 – 88 ปี สำหรับช่วงปีพ.ศ. 2547 – 2551

อายุ (ปี)	อัตรามรณะจากทฤษฎีค่าสุดขีดสำหรับเพศชายในช่วงปีพ.ศ. 2547 - 2551		
	ตั้งแต่อายุ 70 - 88 ปี	ตั้งแต่อายุ 75 - 88 ปี	ตั้งแต่อายุ 80 - 88 ปี
70	0.041276510	-	-
71	0.043058680	-	-
72	0.045001690	-	-
73	0.047128340	-	-
74	0.049465970	-	-
75	0.052047590	0.057438970	-
76	0.054913520	0.060307080	-
77	0.058113460	0.063476650	-
78	0.061709420	0.066997820	-
79	0.065779750	0.070932520	-
80	0.070424960	0.075358140	0.081710160
81	0.075776090	0.080372650	0.086262960
82	0.082007280	0.086101920	0.091352790
83	0.089355100	0.092710460	0.097080590
84	0.098149240	0.100417450	0.103574230
85	0.108863360	0.109521460	0.110998200
86	0.122203270	0.120440010	0.119567660
87	0.139269070	0.133775250	0.129569600
88	0.161875160	0.150428710	0.141395450
89	0.193242330	0.171813360	0.155593300
90	0.239688030	0.200275670	0.172954770
91	0.315526150	0.240016420	0.194666660
92	0.461580430	0.299362730	0.222591550
93	0.859681790	0.397416480	0.259825050
94	-	0.588997700	0.311905710
95	-	-	0.389758940
96	-	-	0.517954010
97	-	-	0.760076210

แผนภาพที่ 6.1 แสดงค่าอัตรามรณะที่ได้จากทะเบียนราษฎร์ เปรียบเทียบกับค่าประมาณอัตรามรณะจากการใช้ทฤษฎีค่าสุดขีดของเพศชาย โดยประมาณค่าพารามิเตอร์จากช่วงอายุ 70 – 88 ปี, 75 – 88 ปี และ 80 – 88 ปี สำหรับช่วงปีพ.ศ. 2547 – 2551



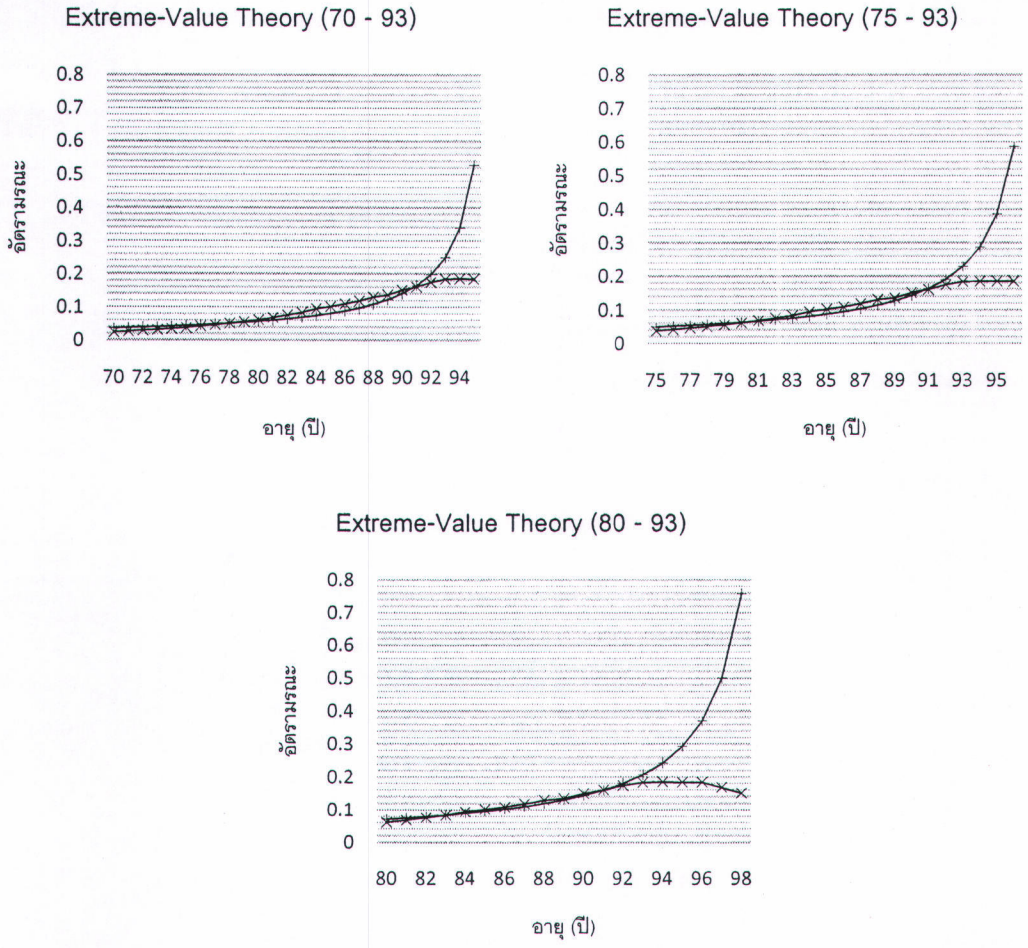
แผนภาพที่ 6.1 ค่าอัตรามรณะจากข้อมูลทะเบียนราษฎร์ (---x---) เปรียบเทียบกับค่าประมาณอัตรามรณะจากการใช้ทฤษฎีค่าสุดขีดของเพศชาย (---+---) โดยใช้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ประมาณจากข้อมูลในช่วงอายุต่างๆ

ตารางที่ 6.4 แสดงค่าประมาณอัตรามรณะของเพศหญิง โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด ในช่วงอายุ 70 – 93 ปี 75 – 93 ปี และ 80 – 93 ปี

ตารางที่ 6.4 ค่าประมาณอัตรามรณะของเพศหญิงจากทฤษฎีค่าสุดขีด โดยใช้ค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณในช่วงอายุ 70 – 93 ปี 75 – 93 ปี และ 80 – 93 ปี สำหรับช่วงปีพ.ศ. 2547 – 2551

อายุ (ปี)	อัตรามรณะจากทฤษฎีค่าสุดขีดสำหรับเพศหญิงในช่วงปีพ.ศ. 2547 - 2551		
	ตั้งแต่อายุ 70 - 93 ปี	ตั้งแต่อายุ 75 - 93 ปี	ตั้งแต่อายุ 80 - 93 ปี
70	0.035360790	-	-
71	0.036731150	-	-
72	0.038212010	-	-
73	0.039817300	-	-
74	0.041563370	-	-
75	0.043469620	0.048861890	-
76	0.045559120	0.051093600	-
77	0.047859650	0.053538920	-
78	0.050404880	0.056230050	-
79	0.053236030	0.059206020	-
80	0.056404170	0.062514570	0.070945360
81	0.059973260	0.066214760	0.074722500
82	0.064024560	0.070380480	0.078924330
83	0.068662900	0.075105490	0.083626710
84	0.074025820	0.080510500	0.088924710
85	0.080297520	0.086753660	0.094939100
86	0.087730410	0.094046290	0.101825640
87	0.096679910	0.102677220	0.109788740
88	0.107662980	0.113051970	0.119102050
89	0.121461750	0.125758220	0.130140460
90	0.139318460	0.141680980	0.143431610
91	0.163332460	0.162217810	0.159742400
92	0.197353880	0.189712130	0.180231600
93	0.249291920	0.228415030	0.206735960
94	0.338394160	0.286915960	0.242348440
95	0.527140200	0.385530220	0.292704230
96	-	0.586097360	0.369223880
97	-	-	0.498776790
98	-	-	0.757799290

แผนภาพที่ 6.2 เป็นค่าอัตรามรณะที่ได้จากข้อมูลจริง เปรียบเทียบกับค่าประมาณอัตรามรณะจากทฤษฎีค่าสุดขีดของเพศหญิง โดยประมาณค่าพารามิเตอร์จากช่วงอายุ 70 – 93 ปี 75 – 93 ปี และ 80 – 93 ปี สำหรับช่วงปีพ.ศ. 2547 – 2551



แผนภาพที่ 6.2 ค่าอัตรามรณะจากข้อมูลทะเบียนราษฎร์ (---x---) เปรียบเทียบกับค่าประมาณอัตรามรณะจากการใช้ทฤษฎีค่าสุดขีดของเพศหญิง (---+---) โดยใช้ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ประมาณจากข้อมูลในช่วงอายุต่างๆ

จากการประมาณค่าอัตรามรณะด้วยทฤษฎีค่าสุดขีด ค่าที่ได้จะมีอัตราการเพิ่มที่สูงมากในช่วงอายุ 90 ปีขึ้นไป ทั้งเพศชายและเพศหญิง ซึ่งเป็นค่าที่สอดคล้องกับอัตรามรณะของผู้สูงอายุไทยมากกว่าจากข้อมูลทะเบียนราษฎร์ ในที่นี้ช่วงอายุที่จะใช้ในการหาค่าประมาณอัตรามรณะ จะใช้ช่วงอายุที่มีค่ามาก คือ 80 – 88 ปี สำหรับเพศชาย และ 80 – 93 ปี สำหรับเพศหญิง เพื่อให้สอดคล้องกับการใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด โดยค่าประมาณอัตรามรณะที่ได้นั้น จะนำไปประยุกต์ใช้กับค่าประมาณอัตรามรณะที่ได้จากตัวแบบอินเวอร์สเมคแฮมในบทที่ 5 เพื่อประมาณค่าอัตรามรณะตั้งแต่อายุ 60 ปีขึ้นไปสำหรับเพศชายและเพศหญิง ในบทที่ 7