บทที่ 2

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 แนวคิดและทฤษฎี

ในปี ค.ศ. 1939 Greenwood M. และ Irwin J.O. เสนอบทความเกี่ยวกับอัตรามรณะของผู้สูงอายุ โดยกล่าวว่าอัตรามรณะของผู้สูงอายุมากๆ จะมีลักษณะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ช้าลง (Greenwood and Irwin, 1939) คำกล่าวนี้ได้รับการยืนยันจากนักวิจัยหลายท่านรวมถึง A.C.Economos ซึ่งได้แสดงให้เห็นว่าเป็นลักษณะที่พบในประชากรมนุษย์และสัตว์ทดลอง (A.C.Economos, 1980)

Greenwood และ Irwin ได้อธิบายถึงอัตราการเพิ่มขึ้นที่ช้าลงของอัตรามรณะของผู้สูงอายุมากๆ ว่าเนื่องจากการได้รับความกดดันและความรุนแรงจากสิ่งเร้าภายนอกน้อยกว่าและมีกิจกรรมในแต่ละวันจำกัด รวมไปถึงกิจกรรมในที่สาธารณชนน้อยลง ซึ่งมีการวิเคราะห์แล้วว่าอัตรามรณะของสัตว์ที่มีอายุมากนั้นมีลักษณะเหมือนของประชากรมนุษย์

นักคณิตศาสตร์ได้จำลองกฎของการตายในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ โดยแสดงอัตรามรณะในรูปฟังก์ชันอายุ เพื่อเป็นประโยชน์ในเชิงสถิติ ซึ่งแนวทางการสร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์เพื่อแทนรูปแบบอัตรามรณะนั้น อาจพิจารณาได้ 2 อย่างคือ ตัวแบบกึ่งพาราเมตริกซ์ (Semi-parametric Model) และตัวแบบพาราเมตริกซ์ (Parametric Model) ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงเฉพาะตัวแบบพาราเมตริกซ์ที่ใช้แทนรูปแบบการตายของประชากรผู้สูงอายุ

สัญลักษณ์ต่างๆ ที่ใช้ในงานวิจัย มีดังนี้

x คือ อายุต่างๆ ตั้งแต่แรกเกิดนับเป็นปี ตั้งแต่ 0, 1, 2, ...

L_x คือ จำนวนปีที่คาดหมายทั้งหมดที่คนจะมีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ x ปี ถึง $x+1$ ปี ของกลุ่มคนทั้งหมด

p_x คือ อัตรารอดชีพหรือความน่าจะเป็นของการอยู่รอดจากอายุ x ปี ถึง $x+1$ ปี

q_x คือ อัตรามรณะ หรือ ความน่าจะเป็นของการตายระหว่างอายุ x ปี ถึง $x+1$ ปี

d_x คือ จำนวนคนตายในช่วงอายุ x ปี ถึง $x+1$ ปี หาได้จาก $d_x = L_x \times q_x$

m_x คือ อัตราตายกลางปีรายกลุ่มอายุ หรืออัตราจำนวนคนตายในช่วงอายุ x ปี ถึง $x+1$ ปี ต่อ จำนวนคนที่มีชีวิตอยู่ระหว่างอายุ x ปี ถึง $x+1$ ปี หาได้จาก $m_x = \frac{d_x}{L_x}$

พลังมรณะ (Hazard function, force of mortality: $\mu(x)$) คือ ค่าของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของ X ที่อายุที่แน่นอน x ปี เมื่อกำหนดว่าอยู่รอดถึงอายุนั้น หรือเขียนในรูปทางคณิตศาสตร์ดังนี้

$$\mu(x) = lim_{\Delta x \to 0}(\frac{P(x \le X \le x+\Delta x | X \ge x)}{\Delta x})$$

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable) ซึ่งสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง p_x กับ $\mu(x)$ คือ

$$p_x = exp(-\int_x^{x+1} \mu(s)ds)$$

จึงสามารถเขียน q_x ได้ คือ

$$q_x = 1 - exp(-\int_x^{x+1} \mu(s)ds)$$

ในปี ค.ศ. 1729 De Moivre ได้กล่าวว่า ความน่าจะเป็นของเด็กแรกเกิดจะมีชีวิตอยู่รอดจนถึงอายุ x นั้นมีความสัมพันธ์เชิงเส้นกับอายุ ซึ่งสามารถเขียนในรูปพลังมรณะ (force of mortality: $\mu(x)$) ได้คือ

$$\mu(x) = \frac{1}{\omega - x} \quad ; \quad 0 \le x \le \omega$$

เมื่อ ω คืออายุสูงสุด และในเวลาต่อมา De Moivre ก็ได้พบว่าตัวแบบที่เขาเสนอนั้น ไม่สามารถใช้ได้ในทุกช่วงอายุ

ต่อมาในปี ค.ศ. 1825 นักคณิตศาสตร์ประกันภัยชาวอังกฤษ ชื่อ Benjamin Gompertz เสนอกฎอัตรามรณะ (law of mortality) หรือ กฎของกอมเปิร์ท (Gompertz law) เพื่ออธิบายถึงลักษณะอัตรามรณะของคนในวัยผู้ใหญ่ โดยได้ให้ข้อสังเกตของอัตราการเสียชีวิตในศตวรรษที่ 19 ของประชากรอังกฤษ สวีเดน และฝรั่งเศส ที่มีอายุระหว่าง 20 ถึง 60 ปีว่ามีลักษณะเพิ่มขึ้นแบบเรขาคณิต (geometric progression) เช่นการเพิ่มขึ้นแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล (exponential rise) กับอายุนั่นคือ

$$\mu(x) = Be^{\mu x}$$

เมื่อ B, μ คือพารามิเตอร์

แต่จากการศึกษาต่อมาพบว่า Gompertz law ใช้ได้ไม่ดีกับช่วงอายุมากกว่า 85 ปีขึ้นไป โดยค่าที่สังเกตได้นั้นมีค่าต่ำกว่าค่าของ Gompertz law

ในปี ค.ศ. 1860 Makeham ได้เสนอตัวแบบ ซึ่งแก้ไขจากตัวแบบของ Gompertz โดยที่เพิ่มพารามิเตอร์เข้ามาอีก 1 ตัวซึ่งเป็นพารามิเตอร์อันเนื่องจากปัจจัยของการเสียชีวิตที่ไม่ขึ้นกับอายุ แสดงเป็นตัวแบบได้คือ

$$\mu(x) = A + Be^{\mu x}$$

เมื่อ A, B, μ เป็นพารามิเตอร์

และในเวลาต่อมา Finch (1990) ได้พบว่าตัวแบบของ Makeham ใช้ได้ดีในช่วงอายุ 30 – 85 ปี (Makeham, 1860) ในขณะเดียวกัน Perk ได้ปรับตัวแบบของ Gompertz โดยให้อัตรามรณะในช่วงอายุมากๆ มีอัตราเพิ่มขึ้นที่น้อยลง ซึ่งก็คือตัวแบบโลจิสติก โดยมีตัวแบบคือ

$$\mu(x) = \frac{A+Be^{\mu x}}{1+Ce^{\mu x}}$$

เมื่อ A, B, C, μ เป็นพารามิเตอร์ (Perk, 1932)

Bread ได้สร้างตัวแบบของอัตรามรณะโดยให้เหตุผลของการเพิ่มขึ้นในอัตราที่ช้าลงของอัตรามรณะในช่วงอายุมากๆ ว่า อาจเนื่องมาจากกลุ่มประชากรที่ประกอบไปด้วยกลุ่มย่อยๆ ที่แต่ละกลุ่มมีความแตกต่างอันเนื่องจากกระบวนการคัดเลือก กล่าวคือกลุ่มที่มีความอ่อนแอกว่า จะเสียชีวิตไปก่อน นั่นคือในที่สุดประชากรทั้งหมดก็จะมารวมกันเป็นกลุ่มที่แข็งแรงในสัดส่วนที่เพิ่มขึ้น โดยมีตัวแบบคือ

$$\mu(x) = \frac{Be^{\mu x}}{1+Ce^{\mu x}}$$

เมื่อ B, C, μ เป็นพารามิเตอร์ (Bread, 1963)

Väinö Kannisto ได้เสนอตัวแบบที่ประกอบด้วย 2 พารามิเตอร์ คือ จากตัวแบบ Bread (1963) โดยให้ $B = C$ ดังนั้นตัวแบบคือ

$$\mu(x) = \frac{Be^{\mu x}}{1+Be^{\mu x}}$$

เมื่อ B, μ เป็นพารามิเตอร์ (Kannisto, 1992)

จากตัวแบบทั้งหมดที่กล่าวมา ล้วนเป็นกรณีเฉพาะของตัวแบบโลจิสติก (Logistic model) อันได้แก่ Gompertz ($A = 0, C = 0$) Makeham ($C = 0$) Bread ($A = 0$) และ Kannisto ($A = 0, B = C$)

นอกจากนี้ยังมีตัวแบบอื่นๆ อีกเช่น ตัวแบบไวบูลล์ (Weibull Model) ที่ระบุสมการของ $\mu(x)$ เป็น

$$\mu(x) = kx^n$$

เมื่อ k, n เป็นพารามิเตอร์ (Weibull, 1951)

Heligman & Pollard (1980) เสนอตัวแบบที่แสดงรูปแบบของอัตรามรณะของทุกอายุ x ดังนี้

$$q_x = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + \frac{GH^x}{1+GH^x}$$

เมื่อ A, B, C, D, E, F, G, H เป็นพารามิเตอร์ และยังได้พิจารณาถึงอัตราส่วนของ $\frac{p_x}{q_x}$ คือ

$$\frac{p_x}{q_x} = A^{(x+B)^C} + De^{-E(\ln x - \ln F)^2} + GH^x$$

โดยที่แต่ละเทอมสามารถแยกพิจารณาเป็นแต่ละช่วงอายุได้ดังนี้

$$\frac{p_x}{q_x} = \textit{Neonatal Component} + \textit{Hump Component} + \textit{Aging Component}$$

เมื่อ Neonatal Component คือ ช่วงอายุวัยแรกเกิด

Hump Component คือ ช่วงอายุที่เป็นผู้ใหญ่

Aging Component คือ ช่วงอายุที่เป็นผู้สูงอายุ

ในปี ค.ศ. 1998 Thatcher ได้นำตัวแบบ 5 ประเภท ได้แก่ ตัวแบบของกอมเปิร์ท (Gompertz Model) ตัวแบบโลจิสติก (Logistic Model) ตัวแบบของคานนิสโต (Kannisto Model) ตัวแบบของไวบูลล์ (Weibull Model) และตัวแบบของเฮลิคมานกับพอลลาร์ด (Heligman & Pollard Model) ทดสอบกับข้อมูลอัตรามรณะในกลุ่มประเทศอุตสาหกรรม 13 ประเทศ (Austria, Denmark, England and Wales, Finland, France, West Germany, Iceland, Italy, Japan, The Netherlands, Norway, Sweden และ Switzerland)ในช่วงข้อมูลปี ค.ศ. 1960-1970, 1970-1980, 1980-1990 โดยเป็นโคฮอทของผู้ที่เกิดในปี ค.ศ. 1871-1880 พบว่าในช่วงอายุ 95 ปีขึ้นไป พลังมรณะ (force of mortality) ที่ได้จากการประมาณโดยตัวแบบ Gompertz และ Makeham จะเพิ่มขึ้นแบบเอกซ์โพเนนเชียลกับอายุ ซึ่งทำให้ค่าประมาณอัตรามรณะที่ได้สูงกว่าอัตรามรณะที่สังเกตได้ ส่วนตัวแบบอื่นๆ ให้ค่าประมาณอัตรามรณะ หรือสามารถใช้แทนรูปแบบอัตรามรณะของประชากรในช่วงของอายุที่มากได้ดี

ทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value Theory: EVT)

ทฤษฎีค่าสุดขีด คือสาขาหนึ่งของวิชาสถิติ เกิดจากการที่มีข้อมูลบางค่าแตกต่างไปจากค่ากึ่งกลางมาก โดยทฤษฎีทั่วไปจะนำข้อมูลมากำหนดชนิดของการแจกแจงความน่าจะเป็นทั้งหมด แต่สำหรับทฤษฎีค่าสุดขีดนั้น จะใช้เพียงข้อมูลที่มีค่าเกินกว่า หรือน้อยกว่าค่ากึ่งกลางใหม่ที่กำหนดขึ้นมาเท่านั้น

จุดมุ่งหมายสำหรับ EVT คือการพัฒนาการคำนวณทางสถิติและวิธีเกี่ยวกับความน่าจะเป็นสำหรับค่าสุดขีด แล้วนำไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา การศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับวิธีการประกอบด้วย ทฤษฎีจำกัดทั่วไปสำหรับค่าสูงสุด การรวมกันของข้อมูลแบบสุ่มในกลุ่มตัวอย่าง

การแจกแจงทั่วไปของพาเรโต (Generalized Pareto Distribution: GPD)

การแจกแจงทั่วไปของพาเรโต คือ การแจกแจงแบบจำกัดของข้อมูลในช่วงที่มีค่าสูงมากและมีจุดเริ่มต้นที่สูง

โดยทั่วไปจะไม่สนใจเฉพาะค่าสูงสุดของข้อมูลที่ได้จากการสังเกต แต่จะสนใจลักษณะของข้อมูลที่มีค่าสูงมากกว่าจุดเริ่มต้นค่าสูงด้วย โดยจุดเริ่มต้นค่าสูง คือ u การแจกแจงของข้อมูล x ที่มีค่าสูงกว่าจุดเริ่มต้น u ซึ่งนิยามโดย

$$F_u(y) = Pr(X - u \leq y | X > u) = \frac{F(y+u)-F(u)}{1-F(u)}$$

โดยที่ $F_u(y)$ คือความน่าจะเป็นของค่า x ที่มีค่ามากกว่าจุดเริ่มต้น u โดยมีค่ามากกว่าอยู่ y ทฤษฎีของ Balkema และ de Haan (1974) และ Pickinds (1975) แสดงให้เห็นสำหรับจุดเริ่มต้น u ที่มีค่าสูงเพียงพอ ฟังก์ชันการแจกแจงของจำนวนที่มากเกินไปนี้ สามารถประมาณได้โดย GPD ดังนั้นเมื่อจุดเริ่มต้นมีค่ามากและมีการแจกแจงของข้อมูลที่มีค่ามาก การแจกแจง $F_u(y)$ จึงลู่เข้าสู่ GPD ซึ่งคือ

$$H(y) \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi \dfrac{y}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}} & ; \quad \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\beta}} & ; \quad \xi = 0 \end{cases}$$

โดยที่ ξ คือ พารามิเตอร์ที่บอกลักษณะ เมื่อ $\xi > 0$ จะสอดคล้องกับรูปแบบการแจกแจงพาเรโตปกติ (Generalized Pareto Distribution) เมื่อ $\xi = 0$ GPD จะสอดคล้องกับการแจกแจงเอ็กซ์โพเนนเชียล และเมื่อ $\xi < 0$ จะเป็นการแจกแจงพาเรโต type II (Pareto Type II Distribution, Lomax Distribution)

ความสำคัญของทฤษฎีของ Balkema และ de Haan (1974) และ Pickinds (1975) คือการแจกแจงของค่าที่สูงมากจะประมาณได้โดย GPD ด้วยการเลือก ξ และ β รวมทั้งกำหนดค่าจุดเริ่มต้น u ที่มีค่าสูง การแจกแจงแบบ GPD สามารถประมาณได้หลายวิธี เช่น วิธีความน่าจะเป็นแบบถ่วงน้ำหนัก หรือวิธีประมาณค่าความควรจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimation: MLE)

2.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการประมาณค่าอัตรามรณะสำหรับผู้สูงอายุนั้น ได้มีการศึกษาหาตัวแบบที่เหมาะสมเพื่อทำการประมาณตั้งแต่ในอดีต ทั้งในประเทศไทยและ ต่างประเทศ และได้พยายามศึกษาวิจัยในกลุ่มประชากรที่ต่างๆกัน เพื่อให้ได้ตัวแบบที่เหมาะสมกับกลุ่มที่ศึกษา และค่าอัตรามรณะที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้

2.2.1 งานวิจัยต่างประเทศ

Louis G. Doray (2002) ได้ใช้ตัวแบบคานนิสโต ในการหาค่าพารามิเตอร์ และประมาณอัตรามรณะของผู้สูงอายุทั้งชายและหญิง ตั้งแต่อายุ 80 – 99 ปีขึ้นไป ของชาวแคนนาดา โดยแบ่งเป็นช่วง (Cohort) ของคนที่เกิดเป็น 5 ช่วง คือช่วง ค.ศ. 1869 – 1872 ,ค.ศ. 1873 – 1877 , ค.ศ. 1878 – 1882 ,ค.ศ. 1883 – 1887 ,ค.ศ. 1888 – 1892 ,ค.ศ. 1893 – 1897 ,ค.ศ. 1898 – 1902 และยังสามารถหาอายุขัยเฉลี่ยที่สามารถอยู่ต่อได้ของชายและหญิงในแต่ละรายอายุ

Robert Bourbeau (2002) ได้ทำการเปรียบเทียบรูปแบบของอัตรามรณะของชาวแคนนาดา ชาวอเมริกัน และกลุ่มประเทศที่พัฒนาแล้ว โดยมีกล่าวถึงสาเหตุการตายต่างๆ ในแต่ละช่วงอายุ ไม่ว่าจะเป็นการป่วยตาย การฆ่าตัวตาย เป็นต้น ซึ่งจากการศึกษาจากข้อมูลประชากร พบว่าข้อมูลประชากรของชาวแคนนาดา และชาวอเมริกันมีความคล้ายคลึงกัน และเมื่อนำข้อมูลประชากรชาวแคนนาดาเปรียบเทียบกับกลุ่มประเทศที่พัฒนาแล้ว พบว่ามีอัตรามรณะที่คล้ายคลึงในช่วงก่อนอายุ 65 ปี และต่างกันในช่วงอายุมากกว่า 80 ปีขึ้นไป

Zeng Yi และ James W. Vaupel (2003) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับอัตรามรณะของผู้สูงอายุกลุ่มประชากรชาวฮั่นในประเทศจีน ซึ่งได้พบว่าการประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบคานนิสโต และตัวแบบโลจิสติก ให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับข้อมูลจริงกว่าตัวแบบอื่นๆที่ร่วมศึกษา คือ ตัวแบบไวร์บูล พหุนามกำลังสอง ตัวแบบกอมเปิร์ท และตัวแบบเฮลิคมานกับพอลหลาด และจากการศึกษาในกลุ่มประชากร ในช่วงอายุที่มากกว่า 97 ปี ตัวแบบคานนิสโตได้ให้

ผลสรุปที่ว่า สำหรับประชากรชาวฮั่นในประเทศจีนในปี 1990 มีค่าอัตรามรณะสูงกว่าประชากรประเทศสวีเดนช่วงปี ค.ศ. 1985 – 1994 และประเทศญี่ปุ่นช่วงปี ค.ศ. 1981 – 1990

Edwin C. Hustead (2005) ได้ศึกษาถึงอัตรามรณะสำหรับช่วงอายุที่สูงมากของประชากรจากหลายๆ ประเทศ ตั้งแต่อายุประมาณ 90 ปีขึ้นไป เพื่อที่จะประมาณหาค่าอัตรามรณะซึ่งมีรูปแบบจากการใช้ทฤษฎี หรือจากตัวแบบ โดยจากการศึกษาตัวแบบหนึ่งที่ได้นำมาใช้ คือ ตัวแบบคานนิสโต รวมไปถึงการบอกวิธีสร้างรูปแบบค่าอัตรามรณะที่จะต้องเข้าใกล้ค่า 1 โดยใช้ทฤษฎีต่างๆ เช่น The Forced Method, The Blended Method, The Pattern Method, The Least–Than-One Method

Kathryn A. Watts, Debbie J. Dupuis, และ Bruce L. Jones (2005) นำเอาข้อมูลการตายในปี ค.ศ. 1949 – 1997 ของชาวแคนนาดา และ ข้อมูลการตายในปีค.ศ. 1980 – 2000 ของชาวญี่ปุ่นทั้งชายและหญิง นำมาทำการประมาณหาอัตรามรณะ และพารามิเตอร์ โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value theory) โดยสำหรับข้อมูลจากประชากรประเทศแคนนาดา สามารถสร้างตัวแบบ ซึ่งสามารถประมาณในแต่ละค่าเริ่มต้น (Threshold) คือ 80 ปี, 85 ปี, 90 ปี และ 95 ปี เป็นกลุ่ม (Cohort) 5 กลุ่ม โดยจำแนกเพศ และได้ค่าเริ่มต้น (Threshold) ที่เหมาะสมสำหรับเพศชายคือ 92 ปี และเพศหญิงคือ 94 ปี และสำหรับข้อมูลจากประชากรประเทศญี่ปุ่น สามารถคำนวณหาตารางพลังมรณะ (forces of mortality :μ_x) และอัตรามรณะ (mortality rates :q_x) โดยจำแนกเพศตั้งแต่อายุ 114 – 136 ปีได้

Marie Redina L. Mumpar-Victoria, Augusto Y. Hermosilla และ Ronnie M. irandilla (2005) ได้ศึกษาถึงตัวแบบอินเวอร์สเมคแฮม (Inverse-Makeham Model) ซึ่งมีอัตรามรณะ (μ_x) คือ

$$\mu(x) \;=\; \frac{\frac{1}{\sigma}exp\left\{-\frac{x-m}{\sigma}\right\}}{exp\left\{e^{-\frac{x-m}{\sigma}}\right\}-1} + exp\left\{-\frac{D}{\sigma}\right\}$$

เมื่อ σ, m, D คือพารามิเตอร์ โดยใช้ข้อมูลประชากรของประเทศฟิลิปปินส์ สรุปได้ว่าสำหรับตัวแบบอินเวอร์สเมคแฮม (Inverse-Makeham Model) สอดคล้องกับอัตรามรณะของประชากรฟิลิปปินส์ในปี ค.ศ. 1993 ในช่วงอายุตั้งแต่ 6 – 92 ปี

Thomas P. Edwalds (2005) ได้ทำการเปรียบเทียบรูปแบบของเมคแฮม (Makeham-Type) กับ ทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value theory) โดยใช้ข้อมูลประชากรของประเทศสหรัฐอเมริกา ซึ่งพบว่า สำหรับตัวแบบของเมคแฮม (Makeham Model) มีรูปแบบคล้ายกับรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงของพาเรโต (Generalized Pareto Distribution) เมื่อ $\xi = 0$ และสำหรับตัวแบบอินเวอร์สเมคแฮม (Inverse-Makeham Model) มีรูปแบบคล้ายกับรูปแบบหนึ่งของการแจกแจงของพาเรโต (Generalized Pareto Distribution) เมื่อ $\xi > 0$

Louis G. Doray (2008) ได้ศึกษาถึงตัวแบบในกลุ่มโลจิสติก (Logistic model) ซึ่งตัวแบบหนึ่งที่ศึกษาคือ ตัวแบบคานนิสโต (Kannisto model) ได้เห็นว่า เพื่อการคำนวณหาพารามิเตอร์ในตัวแบบ การใช้ตัวประมาณค่าความน่าจะเป็นสูงสุด (Maximum Likelihood Estimator: MLE) นั้นยากแก่การคำนวณหาได้ หลังจากการศึกษางานวิจัย ได้พบว่าการประมาณพารามิเตอร์ของตัวแบบ ด้วยตัวประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก (Weighted Least-squares estimator: WLS estimator) เป็นอีกวิธีหนึ่งที่ดีในการใช้ประมาณหาพารามิเตอร์ของตัวแบบ

Giulia Roli (2008) ได้กล่าวถึงวิธีการนำข้อมูลประชากรมาปรับเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการนำไปคำนวณหาค่าอัตรามรณะของผู้สูงอายุ โดยใช้ข้อมูลประชากรชาวอิตาลี ที่ Emilia-Romagna บริเวณทางตอนเหนือของประเทศอิตาลี ซึ่งเป็นข้อมูลตั้งแต่ปีค.ศ. 1871 – 2001 ซึ่งจากการศึกษา ได้แสดงการสร้างตารางชีพ และทำการเปรียบเทียบทั้งในเรื่องของเพศ และในแต่ละช่วงเวลาปีค.ศ. ทำให้เห็นได้ว่าในตอนแรกค่าอัตรามรณะของเพศชาย และเพศหญิงมีค่าเท่ากัน พอเวลาผ่านไปค่าอัตรามรณะของทั้งสองเพศจะลดลง และค่าอัตรามรณะเพศชายจะสูงกว่าเพศหญิงเรื่อยๆ ซึ่งในงานวิจัยนี้ยังกล่าวถึงวิธีการนำตัวแบบต่างๆ มาใช้ในการประมาณค่าอัตรามรณะ โดยหนึ่งในตัวแบบที่ใช้คือ ตัวแบบคานนิสโต และได้แสดงทั้งค่าพารามิเตอร์ที่ประมาณได้และค่าอัตรามรณะที่หาได้ ระหว่างเพศชายและเพศหญิง

Li, J.S.H., A.C.Y. Ng, และ W.S. Chan (2009) ได้ทำการศึกษากลุ่มประชากรของประเทศออสเตรเลีย และประเทศนิวซีแลนด์ เพื่อหารูปแบบอัตรามรณะของผู้สูงอายุ โดยใช้ทฤษฎีบทค่าสุดขีดหรือ Extreme-Value Theory โดยใช้รูปแบบการแจกแจงทั่วไปของพาเรโต จากการศึกษาพบว่าสามารถใช้ในการประมาณค่าอัตรามรณะได้ดี ในช่วงอายุที่มากๆ ซึ่งสามารถประมาณหาค่าอายุที่ถือว่าเป็นช่วงที่สูงอายุหรือ threshold ได้ โดยประเทศออสเตรเลียมีค่าอายุเท่ากับ 112.2 ปี และประเทศนิวซีแลนด์อยู่ที่อายุเท่ากับ 109.43 ปี

จากงานวิจัยต่างประเทศที่เกี่ยวข้องที่ได้อธิบายมาแล้วนั้นสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.1 งานวิจัยต่างประเทศ

ลำดับที่	ชื่อผู้วิจัย /ปีที่ทำการวิจัย	ชื่อบทความ	เนื้อความสำคัญ
1	Louis G. Doray /2002	Living to age 100 in Canada in 2000	ใช้ตัวแบบคานนิสโต ในการหาค่าพารามิเตอร์ และประมาณอัตรามรณะของผู้สูงอายุทั้งชายและหญิง ตั้งแต่อายุ 80 – 99 ปี ขึ้นไป ของชาวแคนนาดา
2	Robert Bourbeau /2002	Canadian Mortality in Perspective: A Comparison with the United States and other Developed Countries	ทำการเปรียบเทียบรูปแบบของอัตรามรณะของชาวแคนนาดา ชาวอเมริกัน และกลุ่มประเทศที่พัฒนาแล้ว โดยนำเอาสาเหตุการตายในรูปแบบต่างๆ มาใช้ร่วมกับการศึกษา
3	Zeng Yi and James W. Vaupel /2003	Oldest-Old Mortality in China	ทำการศึกษาเกี่ยวกับอัตรามรณะของผู้สูงอายุกลุ่มประชากรชาวฮั่นในประเทศจีน ซึ่งได้พบว่าการประมาณค่าอัตรามรณะด้วยตัวแบบคานนิสโต และตัวแบบโลจิสติก ให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับข้อมูลจริงกว่าตัวแบบอื่นๆ
4	Edwin C. Hustead /2005	Ending the Mortality Table	ศึกษาถึงอัตรามรณะสำหรับช่วงอายุที่สูงมากของประชากรจากหลายๆ ประเทศ ตั้งแต่อายุประมาณ 90 ปีขึ้นไป เพื่อที่จะประมาณหาค่าอัตรามรณะ ซึ่งมีรูปแบบจากการใช้ทฤษฎี หรือจากตัวแบบ

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ลำดับที่	ชื่อผู้วิจัย /ปีที่ทำการวิจัย	ชื่อบทความ	เนื้อความสำคัญ
5	Kathryn A. Watts, Debbie J. Dupuis, and Bruce L. Jones /2005	An Extreme Value Analysis of Advanced Age Mortality Data	ศึกษาข้อมูลการตายของชาวแคนนาดา และ ข้อมูลการตายของชาวญี่ปุ่นทั้งชายและหญิง เพื่อนำมาทำการประมาณหาอัตรามรณะ และพารามิเตอร์ โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value theory)
6	Marie Redina L. Mumpar-Victoria, Augusto Y. Hermosilla and Ronnie M. irandilla /2005	"Makeham-Type" Mortality Models	ได้ศึกษาถึงตัวแบบอินเวอร์สเมคแฮม (Inverse-Makeham Model) และตัวแบบโมดิฟายด์เมคแฮม (Modified-Makeham Model) เพื่อประมาณหาค่าพารามิเตอร์ และค่าอัตรามรณะจากข้อมูลประชากรชาวฟิลิปปินส์
7	Thomas P. Edwalds /2005	A Discussion of Three Papers on Mortality "Laws" and Models	ทำการเปรียบเทียบรูปแบบของเมคแฮม (Makeham-Type) กับทฤษฎีค่าสุดขีด (Extreme-Value theory) โดยใช้ข้อมูลประชากรของประเทศสหรัฐอเมริกา
8	Louis G. Doray /2008	Inference for Logistic-type Models for the Force of Mortality Louis G. Doray, PhD, ASA	ศึกษาถึงตัวแบบในกลุ่มโลจิสติก (Logistic model) ซึ่งตัวแบบหนึ่งที่ศึกษาคือ ตัวแบบคานนิสโต (Kannisto model) โดยการคำนวณหาพารามิเตอร์ในตัวแบบ จะหาได้ด้วยตัวประมาณค่ากำลังสองน้อยที่สุดแบบถ่วงน้ำหนัก

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ลำดับที่	ชื่อผู้วิจัย /ปีที่ทำการวิจัย	ชื่อบทความ	เนื้อความสำคัญ
9	Giulia Roli /2008	An adaptive procedure for estimating and comparing the old-age mortality in a long historical perspective: Emilia-Romagna, 1871-2001	ศึกษาการนำข้อมูลประชากรมาปรับเพื่อให้เกิดประสิทธิภาพในการนำไปคำนวณหาค่าอัตรามรณะของผู้สูงอายุ โดยใช้ข้อมูลประชากรชาวอิตาลี ที่ Emilia-Romagna บริเวณทางตอนเหนือของประเทศอิตาลี
10	Li, J.S.H., A.C.Y. Ng, and W.S. Chan /2009 และ W.S. Chan (2009)	Modeling old-age mortality risk for the populations of Australia and New Zealand: an extreme value approach	ทำการศึกษากลุ่มประชากรของประเทศออสเตรเลีย และประเทศนิวซีแลนด์ เพื่อหารูปแบบอัตรามรณะของผู้สูงอายุ โดยใช้ทฤษฎีบทค่าสุดขีด

2.2.2 งานวิจัยในประเทศไทย

สำหรับการศึกษาในประเทศไทยนั้น ในปี พ.ศ. 2546 รัชนีกร เขาเรียง นำเอาตัวแบบคานนิสโต มาใช้ในการประมาณหาอัตรามรณะของผู้สูงอายุไทยตั้งแต่ปี พ.ศ. 2542 - 2544 พบว่าอัตรามรณะของผู้สูงอายุมีลักษณะเพิ่มขึ้นตามอายุ ซึ่งสอดคล้องกับกฎอัตรามรณะและเมื่อเปรียบเทียบค่าประมาณอัตรามรณะระหว่างผู้สูงอายุชายกับหญิง พบว่าค่าประมาณอัตรามรณะของผู้สูงอายุชายมากกว่าผู้หญิงทุกช่วงอายุ และมีค่าเข้าใกล้กันที่อายุมากๆ หรืออายุประมาณ 90 ปีขึ้นไป (รัชนีพร เขาเรียง, 2546)

ต่อมาในปี พ.ศ. 2550 เกศินี สาเทศ ได้ทำการประมาณอัตรามรณะสำหรับผู้สูงอายุไทยในปี พ.ศ. 2541 - 2549 โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด พบว่าค่าประมาณของอัตรามรณะ ใกล้เคียงกับข้อมูลประชากรจริงในช่วงอายุประมาณ 65 – 80 ปี โดยค่าที่ประมาณได้จากทฤษฎีค่าสุดขีดจะมีค่ามากกว่าเล็กน้อย และพบว่าในช่วงอายุ 60 – 75 ปี ค่าประมาณอัตรามรณะผู้สูงอายุชายและหญิงจะใกล้เคียงกัน โดยค่าประมาณอัตรามรณะผู้สูงอายุชายจะสูงกว่าผู้สูงอายุหญิง

จากงานวิจัยภายในประเทศที่เกี่ยวข้องที่ได้อธิบายมาแล้วนั้นสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 2.2 งานวิจัยภายในประเทศ

ลำดับที่	ชื่อผู้วิจัย /ปีที่ทำการวิจัย	ชื่อบทความ	เนื้อความสำคัญ
1	รัชนีกร เขาเรียง /2546	การประมาณอัตรามรณะของผู้สูงอายุไทย	ศึกษาการนำเอาตัวแบบคานนิสโต มาใช้ในการประมาณหาอัตรามรณะของผู้สูงอายุไทย ตั้งแต่ปี พ.ศ. 2542 - 2544
2	เกศินี สาเทศ /2550	การประมาณอัตรามรณะของผู้สูงอายุไทยโดยทฤษฎีค่าสุดขีด	ศึกษาการทำการประมาณอัตรามรณะสำหรับผู้สูงอายุไทยในปี พ.ศ. 2541 - 2549 โดยใช้ทฤษฎีค่าสุดขีด