

เนื้อหาโครงการโดยสรุป (Executive Summary)

ค่าคงที่เรขาคณิตและทฤษฎีบทจุดตรึงเชิงเมตริก (Geometric Constants and Metric Fixed Point Theory)

1. ความสำคัญและที่มาของปัญหา

ปัญหาต่างๆในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ และเศรษฐศาสตร์ สามารถแปลงให้อยู่ในรูปของตัวแบบ (model) ทางคณิตศาสตร์หรือระบบสมการต่างๆ สิ่งสำคัญที่เราต้องการทราบจากระบบสมการคือ การมีคำตอบของระบบสมการ (existence) และ การสร้างระเบียบวิธีเพื่อหาหรือเพื่อประมาณค่าคำตอบของระบบสมการ ทฤษฎีบทจุดตรึง (fixed point theory) เป็นเครื่องมือที่สำคัญและมีประสิทธิภาพในการศึกษาปัญหาดังกล่าวข้างต้น จากความสำคัญนี้ ได้มีการนำทฤษฎีบทจุดตรึงไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในศาสตร์ต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตัวอย่างเช่น Theory of Operators, Control Theory, Theory of Equations, Mathematical Economics เป็นต้น

ให้ (M, d) เป็นปริภูมิเมตริก (metric space) และ $T : M \rightarrow M$ เป็นการส่ง (mapping) เราเรียกสมาชิก $x \in M$ ที่ $x = T(x)$ ว่าจุดตรึง (fixed point) ของ T และสนใจเงื่อนไขของ T และเงื่อนไขของปริภูมิเมตริก (M, d) ที่ทำให้ T มีจุดตรึง

ทฤษฎีบทจุดตรึงที่สำคัญคือ Brouwer Fixed Point Theorem และ The Principle of Banach's Contraction Mappings ซึ่งถูกคิดค้นและพิสูจน์โดย J. Brouwer และ S. Banach ในปี ค.ศ. 1912 และ ค.ศ. 1922 ตามลำดับ ถึงแม้ว่าทฤษฎีบทที่สำคัญทั้งสองสามารถประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในวงวิชาการ แต่ผลสรุปของทฤษฎีบทดังกล่าวไม่ครอบคลุมถึงการส่งที่มีความทั่วไปกว่าการส่งแบบ contraction เช่น การส่งแบบไม่ขยาย (nonexpansive mapping)

ในปี ค.ศ. 1965 W. A. Kirk ได้พิสูจน์ว่า ทุกการส่งแบบไม่ขยายบนเซตย่อยปิด นูน และมีขอบเขต (closed convex and bounded subset) ของปริภูมิบานาคที่สะท้อน (reflexive Banach space) และมีสมบัติ normal structure จะมีจุดตรึงเสมอ จากทฤษฎีบทของ W. A. Kirk จะเห็นได้ว่าสมบัติ normal structure ซึ่งเป็นสมบัติทางเรขาคณิต (geometric property) เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอ (sufficient condition) ต่อการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย ตั้งแต่นั้นเป็นต้นมา ได้มีงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับสมบัติ normal structure และสมบัติการมีจุดตรึงของการส่งแบบไม่ขยาย (fixed point property) ที่เป็นผลงานพื้นฐานสำหรับการอ้างอิงที่มีคุณภาพ (valuable citation) และได้รับการตีพิมพ์ในวารสารระดับนานาชาติที่เป็นที่ยอมรับด้วยค่า impact factor ที่สูง (สำหรับสาขาคณิตศาสตร์) ตัวอย่างเช่น Journal of the American Mathematical Society, Journal of Functional Analysis, Journal of London Mathematical Society, Nonlinear Analysis, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Journal of Computer and Mathematics with Applications เป็นต้น

เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาทฤษฎีบทจุดตรึงในปริภูมิบานาคที่สำคัญคือ ค่าคงที่เรขาคณิต(geometric constant) ของปริภูมิบานาคที่มีความสัมพันธ์กับ normal structure และการมีจุดตรึงของการส่งบนปริภูมิบานาค ตัวอย่างค่าคงที่เรขาคณิตที่สำคัญและมีชื่อเสียงคือ

1. ค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant สร้างโดย Clarkson ในปี 1973
2. ค่าคงที่ James constant ของปริภูมิบานาค สร้างโดย Gao และ Lau ในปี ค.ศ. 1990

ค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant และ ค่าคงที่ James constant นักคณิตศาสตร์หลายท่านทั้งในต่างประเทศและในประเทศรวมทั้งผู้ดำเนินการวิจัยด้วย (นายอรรถพล แก้วขาว) ได้ให้ความสนใจและมีผลงานวิจัยออกมามากมายที่ศึกษาค่าคงที่ดังกล่าวบนปริภูมิบานาค

อย่างไรก็ตาม ยังไม่มีการสร้างค่าคงที่เรขาคณิตบนปริภูมิเมตริกเพื่อใช้ศึกษาการมีจุดตรึงของการส่งบนปริภูมิเมตริก ดังนั้นโครงการวิจัยนี้ผู้ดำเนินการวิจัยจะศึกษาและแก้ปัญหาเพื่อให้ได้ข้อสรุปซึ่งเป็นองค์ความรู้ใหม่ดังนี้

1. ค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริก
2. เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับปริภูมิเมตริกมี normal structure
3. เงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก
4. ค่าคงที่ James constant และค่าคงที่อื่นๆ ของปริภูมิเมตริก และเงื่อนไขที่เกี่ยวกับค่าคงที่ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับสมบัติ normal structure และเพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก

องค์ความรู้ใหม่ที่จะได้จากโครงการวิจัยนี้คือ ได้ค่าคงที่เรขาคณิตของปริภูมิเมตริกเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษา normal structure และเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิจัยทางทฤษฎีจุดตรึงเชิงเมตริก และได้เงื่อนไขทางเรขาคณิตบนปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับปริภูมิเมตริกมี normal structure และเพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก ซึ่งองค์ความรู้ใหม่นี้จะมีประโยชน์มากต่อการศึกษาวิจัยทางทฤษฎีบทจุดตรึงเชิงเมตริก

2. วัตถุประสงค์ของโครงการ

1. สร้างและศึกษาค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริก
2. สร้างเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับปริภูมิเมตริกมี normal structure
3. สร้างเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่าคงที่ Jordan von-Neumann constant ของปริภูมิเมตริกที่เพียงพอสำหรับการมีจุดตรึงของการส่งในปริภูมิเมตริก