บทที่ 4
ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ ผู้วิจัยขอเสนอผลการวิจัยดังนี้

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียนสนมวิทยาคาร
2. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย
3. การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้
   - 3.1 กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 ไปสู่ระดับ 2
   - 3.2 กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3
   - 3.3 กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 ไปสู่ระดับ 4
4. ผลการวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้
5. การอภิปรายผล

1. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับโรงเรียนสนมวิทยาคาร

โรงเรียนสนมวิทยาคาร เป็นโรงเรียนมัธยมศึกษา สังกัดเขตพื้นที่การศึกษาสุรินทร์ เขต 2 ตั้งอยู่บ้านเลขที่ 190 หมู่ 1 บ้านสนม ตำบลสนม อำเภอสนม จังหวัดสุรินทร์ 32160 จัดการศึกษาแบบสหศึกษา มีพื้นที่ 98 ไร่ 2 งาน 50 ตารางวา

คติธรรม ปญฺญา โลกสฺมึ ปชฺโชโต หมายถึง ปัญญาเป็นแสงสว่างแห่งโลก

คำขวัญ เรียนดี มีวินัย พลานามัยสมบูรณ์ เกื้อกูลชุมชน

สีประจำโรงเรียน : แสด-ขาว แสด คือ สีของดวงอาทิตย์เมื่อตอนรุ่งอรุณ เป็นสัญลักษณ์ของความรุ่งโรจน์ แผ่รัศมี และให้แสงสว่างเพื่อขจัดความมืดมัวทั้งปวง ขาว คือ สีของพระพุทธศาสนา สีของความบริสุทธิ์ แจ่มใส

อักษรย่อ คือ ส.น.ว.

2. ข้อมูลทั่วไปเกี่ยวกับนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายในการทำการศึกษาครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 6 คน โดยเลือกจากความสมัครใจและได้รับอนุญาตจากผู้ปกครองและผู้อำนวยการโรงเรียน เพื่อให้การศึกษาเป็นไปด้วยความราบรื่น ผลจากการทำแบบทดสอบวัดระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายของนักเรียน 6 คน ผลปรากฏดังตารางที่ 1 ดังนี้

ตารางที่ 1 ผลการทดสอบของนักเรียนที่เป็นกรณีศึกษาเรียงตามลำดับ

ชื่อนักเรียน	ระดับที่ 1	ระดับที่ 2	ระดับที่ 3	ระดับที่ 4	คะแนนรวม	ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต
กล้า	5	3	4	1	13	3
ก้อย	4	3	3	1	11	3
แอ้ม	5	3	2	1	11	2
แก่น	5	2	3	1	11	1
ก้อง	4	2	2	1	9	1
กิ่ง	2	1	2	1	6	1

จากผลการจากการทำแบบทดสอบวัดระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย ผู้วิจัยได้แบ่งกลุ่มตามผลการทดสอบโดยคละความสามารถและความสมัครใจของนักเรียน ดังนี้ กลุ่มที่ 1 ได้แก่ ก้อย แก่น และกิ่ง และกลุ่มที่ 2 ได้แก่ กล้า ก้อง และแอ้ม จากการสังเกตพฤติกรรมของนักเรียนในการทำวิจัยครั้งนี้ พบว่านักเรียนทุกคนให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมดีมาก และการวิจัยครั้งนี้ใช้นามสมมติของนักเรียนในการเขียนพรรณนาพฤติกรรม ซึ่งแต่ละคนมีพฤติกรรมในขณะทำกิจกรรมดังนี้

กลุ่มที่ 1 AGK[3] (กล้า ก้อง และแอ้ม)

กล้า เป็นนักเรียนชาย อายุ 15 ปี 3 เดือน มีบุคลิกร่าเริง พูดเก่ง กล้าแสดงความคิดเห็น กล้าแสดงออก ชอบคิด และกระตือรือร้นในการเรียน

ก้อง เป็นนักเรียนชาย อายุ 15 ปี 5 เดือน มีบุคลิกร่าเริง สนุกสนาน พูดเก่ง กล้าแสดงความคิดเห็น กล้าแสดงออก ชอบคิดและกระตือรือร้นในการเรียน

แอ้ม เป็นนักเรียนหญิง อายุ 15 ปี 5 เดือน มีบุคลิกร่าเริง พูดน้อย แสดงความคิดเห็นเป็นบางครั้ง ไม่ค่อยกล้าแสดงออก

กลุ่มที่ 2 Korean Fever (ก้อย แก่น กิ่ง)

ก้อย เป็นนักเรียนหญิง อายุ 15 ปี 11 เดือน มีบุคลิกร่าเริง กล้าแสดงความคิดเห็น แต่ไม่ค่อยกล้าแสดงออก

แก่น เป็นนักเรียนชาย อายุ 15 ปี 9 เดือน มีบุคลิกร่าเริง กล้าแสดงความคิดเห็น แต่ไม่ค่อยกล้าแสดงออก ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์

กิ่ง เป็นนักเรียนหญิง อายุ 15 ปี 9 เดือน มีบุคลิก พูดน้อย ไม่กล้าแสดงความคิดเห็น ไม่กล้าแสดงออก

3. การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง วงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้

การศึกษาครั้งนี้ผู้วิจัยได้จัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele 4 ระดับ คือ ระดับ 1: การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) ระดับ 2: การวิเคราะห์ (Analysis) ระดับ 3: การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) ระดับ 4: การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) และวิเคราะห์การคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนในขณะที่ทำกิจกรรมการเรียนรู้ ตามกรอบทฤษฎีของ Warner, Coppolo & Davis (2002) ซึ่งได้ให้นิยามลักษณะของการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น (Flexible mathematical thought) ในฐานะของความสามารถในการใช้หน่วยความรู้ระยะยาวของตนเองในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย ซึ่งสรุปลักษณะสำคัญของความยืดหยุ่นเกี่ยวกับการคิดแบบยืดหยุ่นได้ดังนี้

1) การใช้ยุทธวิธีที่แปลกใหม่หรือไม่คุ้นเคยในการแก้ปัญหา (Use of novel strategies to solve problem)

2) ความสามารถในการสร้างความความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ (Ability to establish both direct and reverse association) เป็นการให้นิยามเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นของ Kruteskii (1969b อ้างถึงใน Warner, Coppolo & Davis, 2002) และ Shapiro (1992 อ้างถึงใน Warner, Coppolo & Davis, 2002) เช่น การหาค่าของฟังก์ชัน $y = 3x + 1$ เมื่อกำหนดค่า x นักเรียนสามารถหาค่า y ได้ และเมื่อกำหนดค่า y นักเรียนสามารถหาค่าของ x ได้ เป็นต้น

3) การใช้เครื่องหมายที่กำกวม (Ambiguous use of notation) เป็นการให้นิยามเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นของ Gray & Tall (1994 อ้างถึงใน Warner, Coppolo &

Davis, 2002) ซึ่งได้ยกตัวอย่างเกี่ยวกับการปรับเปลี่ยนการใช้เครื่องหมายการหาร (Division sign) ไปสู่แท่งเศษส่วน (Fraction bar)

Erh-Tsung Chin (2003) ได้ขยายแนวคิดของ "Procept" (ในความเข้าใจของ Gray & Tall, 1994)ไปสู่คณิตศาสตร์ขั้นสูงโดยการพิจารณาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในฐานะของ "Formal Procept" โดยพิจารณาสถานะของทฤษฎี (Theorem) หมายถึง สัญลักษณ์ (Symbol) ที่อาจเกิดขึ้นตามหลักทฤษฎี ส่วนการอนุมานพิสูจน์ ถือเป็นกระบวนการ (Process) ที่อาจจะประกอบด้วยขั้นตอน (Procedure) ที่ต่อเนื่องและอาจมีการการสังเคราะห์ของหน่วยเชิงการรู้ที่แตกต่างกัน และกรอบแนวคิดทั่วไปของทฤษฎี(Theorem) ถือเป็นวัตถุ (Object) เสมือนเป็นเอกลักษณ์ที่โยกย้ายได้ เพื่อนำไปใช้ในฐานะของข้อมูลนำเข้าสำหรับการสร้างทฤษฎีใหม่ ดังนั้นทฤษฎีจึงทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) (วิธีการเกี่ยวกับการพิสูจน์) และกรอบแนวคิด (Concept) (แนวคิดในรูปทั่วไปของทฤษฎี)

4) ความสามารถในการตีความความคิดของคนอื่น (Capacity to interpret someone else's thinking) นักเรียนอาจจะอธิบายการคิดของนักเรียนคนอื่นๆ และใช้แนวคิดของคนอื่นๆสร้างแนวคิดใหม่เพื่อพิสูจน์ว่าแนวคิดนั้นใช้ไม่ได้ หรือถามเกี่ยวกับแนวคิดของเพื่อน

5) การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่ (Using an idea or strategy across different contexts or changing an existing strategy to fit a new context)

6) การใช้การนำเสนอที่หลากหลายสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์เดียวกัน หรือเพื่อแสดงแนวคิดเดียวกัน (Using multiple representations for the same mathematical problem or using multiple representations to express the same idea) การนำเสนอที่หลากหลายเป็นแนวคิดที่สำคัญของความคิดยืดหยุ่นทางคณิตศาสตร์

7) การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่ (Raising hypothetical problem situations based on existing problem) พฤติกรรมนี้จะมีคำถาม "ถ้า...อะไร (What if)" เป็นองค์ประกอบสำคัญ เพื่อพิจารณาความคล้ายคลึงกันกับปัญหาที่มีอยู่ ซึ่งจะโยงไปถึงการคิดแผนดำเนินการ

การวิเคราะห์ข้อมูลผู้วิจัยได้นำเสนอการวิเคราะห์ 9 กิจกรรม ดังนี้

1. กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 ไปสู่ระดับ 2 ได้แก่ กิจกรรมที่ 6 เรื่องรูปอะไรเอ่ย, กิจกรรมที่ 8 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง และกิจกรรมที่ 15 เรื่อง คอร์ด

2. กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3 ได้แก่ กิจกรรมที่ 9 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง, กิจกรรมที่ 11 เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลม และกิจกรรมที่ 18 เรื่อง คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

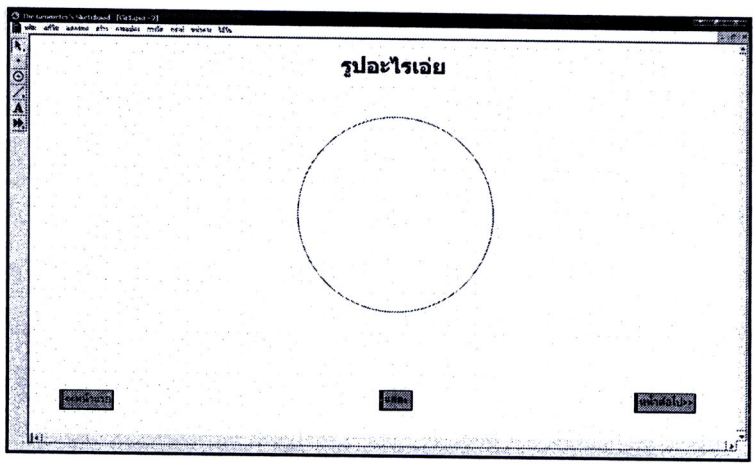
3. กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 ไปสู่ระดับ 4 ได้แก่ กิจกรรมที่ 10 เรื่อง การพิสูจน์และให้เหตุผล มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม, กิจกรรมที่ 12 เรื่อง การพิสูจน์และการให้เหตุผล มุมในส่วนโค้งของวงกลม และกิจกรรมที่ 19 เรื่อง การพิสูจน์และการให้เหตุผล คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

3.1 กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 ไปสู่ระดับ 2

3.1.1 กิจกรรมที่ 6 เรื่อง รูปอะไรเอ่ย วัตถุประสงค์ของกิจกรรมสามารถพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) คือ นักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปเรขาคณิตที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ คือ รูปวงกลม และสามารถระบุส่วนต่างๆ ที่กำหนดให้เกี่ยวกับวงกลมได้ ไปสู่การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis) คือ นักเรียนสามารถบอกสมบัติเกี่ยวกับรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมได้ เช่น นักเรียนสามารถบอกได้ว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับสองเท่าของความยาวของรัศมี และเส้นผ่านศูนย์กลางแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน ผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกิจกรรมดังนี้

<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนเปิดไฟล์Cir1.gsp จากนั้นเลือกปุ่ม รูปอะไรเอ่ย แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้ แล้วตอบคำถาม

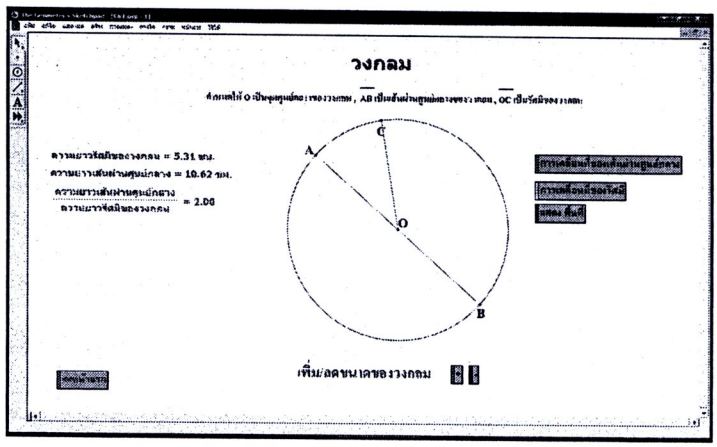
<u>หน้าที่ 1</u> มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 นักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปเรขาคณิตที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ คือ รูปวงกลม และสามารถระบุส่วนต่างๆ ที่กำหนดให้เกี่ยวกับวงกลมได้



ภาพที่ 4 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 6 รูปอะไรเอ๋ย หน้าที่ 1

1. รูปที่ปรากฏบนหน้าจอ เรียกว่า รูปอะไร
2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม แสดง จากนั้นให้นักเรียนเขียนสิ่งที่ปรากฏขึ้น พร้อมเรียกชื่อส่วนประกอบของวงกลมที่นักเรียน
3. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม หน้าต่อไป>>

<u>หน้าที่ 2</u> มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 นักเรียนสามารถบอกสมบัติเกี่ยวกับรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมได้ เช่น นักเรียนสามารถบอกได้ว่าความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางเท่ากับสองเท่าของความยาวของรัศมี และเส้นผ่านศูนย์กลางแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน



ภาพที่ 5 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 6 รูปอะไรเอ๋ย หน้าที่ 2

4. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง , การเคลื่อนที่ของรัศมี เพื่อสังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี และคลิกปุ่ม + - เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตพร้อมทั้งบันทึกสิ่งที่นักเรียนสังเกตได้ให้ได้มากที่สุด

5. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม แสดง พื้นที่ , การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง และ คลิกปุ่ม + - เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตพร้อมทั้งบันทึกสิ่งที่นักเรียนสังเกตได้ให้ได้มากที่สุด

6. จากการทำกิจกรรมข้อ 4. และข้อ 5. นักเรียนได้ข้อสรุปอะไรบ้าง

3.1.1.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 6 เรื่อง รูปอะไรเอ่ย ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

โปรโตคอลที่ 1 บรรทัดที่ 2 – 50 แสดงการทำกิจกรรมข้อ 1-2 ซึ่งเป็นกิจกรรมการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 ในระหว่างที่นักเรียนร่วมทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปรายถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังนี้

บรรทัดที่ 2	ก้อง	:	ให้นักเรียนคลิกปุ่มแสดง
บรรทัดที่ 3	กล้า	:	บ่เดี๋ยว ตอบยังว่าวงกลม
บรรทัดที่ 4	ก้อง	:	ให้นักเรียนคลิกปุ่มแสดง จากนั้นเขียนสิ่งที่ปรากฏขึ้นพร้อมทั้งตอบคำถามต่อไปนี้ สิ่งที่ปรากฏขึ้นหลังจากคลิกปุ่มแสดง คือ... O คือรัศมี
บรรทัดที่ 5	กล้า	:	มีจุดกึ่งกลาง
บรรทัดที่ 6	ก้อง	:	O คือจุดกึ่งกลาง
บรรทัดที่ 7	กล้า	:	เส้นตรง OC คือรัศมี แล้วก็ BA คือ เส้นผ่า...อืม
บรรทัดที่ 8	ก้อง	:	เส้นผ่านศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 9	กล้า	:	เส้นตัด... อย่าเถียง
บรรทัดที่ 10	ก้อง	:	เส้นผ่านศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 11	กล้า	:	2.1 เรียกว่าอะไร ใส 2.1
	...		
บรรทัดที่ 17	ครู	:	คลิกปุ่มแสดง มีอะไรขึ้น จุดนี้เห็นไหม สัญลักษณ์นี้เรียกว่าอะไร
บรรทัดที่ 18	ก้อง	:	จุด O รัศ.. โอ๊ะ จุดกึ่งกลาง
บรรทัดที่ 19	ครู	:	เขียนลงไปนะคะ นักเรียนก็เขียนสิ่งที่มันปรากฏขึ้นนะคะ OC

บรรทัดที่ 20 แอ้ม : O เรียกว่า จุดกึ่งกลาง

...

บรรทัดที่ 37 กล้า : A B C... จุด O เรียกว่า จุดศูนย์กลาง OC เรียกว่า รัศมี แล้วก็ AB เรียกว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง ... เส้นผ่าหรือเส้นผ่านศูนย์กลาง

บรรทัดที่ 38 ก้อง : เส้นผ่านศูนย์กลาง

...

บรรทัดที่ 42 กล้า : ขีดอย่างนี้ (กล้าชี้ให้ดูที่ใบกิจกรรมของตนเอง) จุดบนวงกลม

บรรทัดที่ 43 ก้อง : เรียกว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง (พูดกับตัวเอง) เขาว่ามันน่าจะมีอีกนะ จุด O จุด B OB รัศมี

บรรทัดที่ 44 กล้า : เอาแค่ OC เขาก็ฮู้แล้วล่ะ ก้อง เอ้ย

บรรทัดที่ 45 ก้อง : เอามากกว่านั้นก็ได้นะ เช่น จุด B จุด A จุด C คืออะไร จุดนอกขอบที่เราสร้างวงกลมวันนั้นหนะเรียกว่าอะไร (ก้อง ถาม แอ้ม)

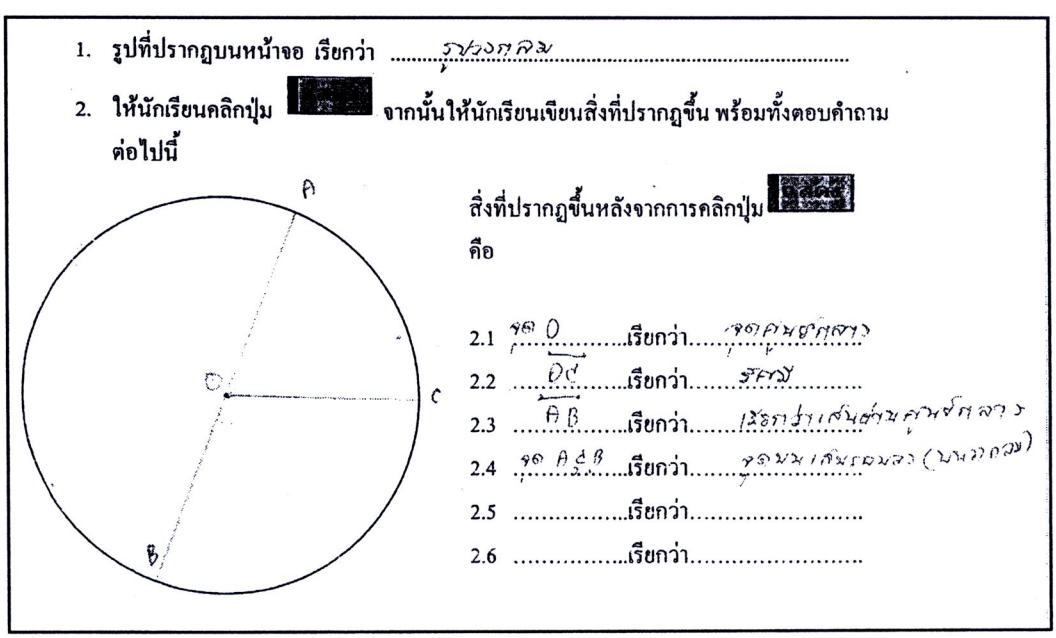
บรรทัดที่ 46 กล้า : จุดบนเส้นรอบวง จุดที่มันอยู่บนเส้นรอบวง

บรรทัดที่ 47 ก้อง : นั่นแหละเขาเรียกว่าจุด

บรรทัดที่ 48 กล้า : เดี๋ยวเห็ดลงมากะได่

บรรทัดที่ 49 ก้อง : จุดที่มัน เขาเรียกว่าจุดอะไร จำไม่ได้ กล้าคือจุดอะไร อย่างเช่นจุด A จุด B จุด C คือจุดอะไร

บรรทัดที่ 50 กล้า : มันเรียกว่าจุดบนเส้นรอบวงหละก้อง



ภาพที่ 6 งานเขียนกิจกรรมที่ 6 ข้อ 1 และข้อ 2 กลุ่ม AGK[3]

จากโปรโตคอล บรรทัดที่ 2 - 50 และภาพแสดงงานเขียนของนักเรียน แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)** คือ นักเรียนเห็นรูปแล้วสามารถบอกได้ว่ารูปเรขาคณิตที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ คือ รูปวงกลม และสามารถระบุชื่อและสร้างส่วนประกอบต่างๆ ของวงกลมได้ ดังโปรโตคอลบรรทัดที่ 3 กล้า พูดว่า "ตอบยังวงกลม" และหลังจากที่นักเรียนคลิก แสดง บรรทัดที่ 6 ก้องพูดว่า "O เป็นจุดกึ่งกลาง" นักเรียนสามารถตอบได้ว่าจุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม, ส่วนของเส้นตรง OC คือ รัศมีของวงกลมและส่วนของเส้นตรง AB คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ดังการสนทนาของ ก้อง และ กล้า ในบรรทัดที่ 7 - 10 ที่กล้า พูดว่า "เส้นตรง OC คือรัศมี แล้วก็ BA คือ เส้นผ่า...อืม" กล้านั่งคิด ก้องตอบว่า "เส้นผ่านศูนย์กลาง" แล้วกล้า ตอบว่า "เส้นตัด อย่าเถียง" แต่ก้องก็ยังยืนยันว่าเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และในบรรทัดที่ 37 - 38 กล้าพูดว่า "A B C... จุด O เรียกว่า จุดศูนย์กลาง OC เรียกว่า รัศมี แล้วก็ AB เรียกว่าเส้นผ่านศูนย์กลาง ... เส้นผ่าหรือเส้นผ่านศูนย์กลาง" และก้องตอบว่า "เส้นผ่านศูนย์กลาง" นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถบอกได้ว่าจุดA , B , และ C เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ดังการสนทนาของ ก้องและกล้าในบรรทัดที่ 48 – 49 ที่ก้องพูดว่า "เอามากกว่านั้นก็ได้นะ เช่นจุด B จุด A จุด C คืออะไร จุดนอกขอบที่เราสร้างวงกลมวันนั้นหนะเรียกว่าอะไร" (ก้อง ถาม แอ้ม) แล้วกล้า พูดว่า "จุดบนเส้นรอบวง จุดที่มันอยู่บนเส้นรอบวง"

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมี**การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น** ดังนี้ จากการสนทนาของก้อง และ กล้า ในบรรทัดที่ 7 - 10 ที่กล้า พูดว่า "เส้นตรง OC คือรัศมี แล้วก็ BA คือ เส้นผ่า...อืม กล้านั่งคิด" ก้องตอบว่า "เส้นผ่านศูนย์กลาง" แล้วกล้า ตอบว่า "เส้นตัด อย่าเถียง" แต่ก้องก็ยังยืนยันว่าเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง แสดงให้เห็นว่าก้องสามารถ**ที่ตีความหมายแนวคิด**ของกล้าได้ว่ากล้ากำลังพูดถึงเส้นผ่านศูนย์กลาง และสามารถที่จะบอกได้ว่าที่กล้าบอกว่า BAคือเส้นตัดนั้นไม่ถูกต้อง ที่ถูกคือเส้นผ่านศูนย์กลาง บรรทัดที่ 43 ก้องพูดว่า "เขาว่ามันน่าจะมีอีกนะ จุด O จุด B OB รัศมี" จากคำพูดที่ว่า "เขาว่าน่าจะมีอีกนะ" แสดงว่าก้องมี**สมมติฐานเกิดขึ้น**ว่าจะต้องหาคำตอบให้ได้มากกว่านี้ และจากคำพูดที่ว่า "จุด O จุด B OB รัศมี " แสดงให้เห็นว่าก้องรู้ว่ารัศมีของวงกลมนอกจากส่วนของเส้นตรง OC แล้วยังมีส่วนของเส้นตรง OB นั่นคือ ก้องมีความสามารถ**นำเสนอสัญลักษณ์แทนรัศมีได้หลากหลาย** และจากคำพูดของกล้า ในบรรทัดที่ 44 ที่ว่า "เอาแค่ OC เขาก็สู้แล้วหล่ะ ก้องเอ้ย" แสดงให้เห็นว่า กล้า**สามารถที่ตีความหมายแนวคิด**ของก้องได้ว่าส่วนของเส้นตรง OB เป็นรัศมีนั้นถูก แต่ว่าให้เขียนเฉพาะส่วนของเส้นตรง OC ก็ได้

โปรโตคอล บรรทัดที่ 51- 139 (ในภาคผนวก) แสดงการทำกิจกรรมข้อ 3 -5 ซึ่งเป็นกิจกรรมการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 ในระหว่างที่นักเรียนร่วมทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)** ดังรายละเอียดต่อไปนี้

หลังจากที่นักเรียนคลิกปุ่ม

,

และ เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม นักเรียนสามารถบอกได้ว่า ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางจะเป็นสองเท่าของรัศมี ดังในโปรโตคอล บรรทัดที่ 81 ก้องพูดว่า “รัศมีก็จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง เมื่อนำเส้นผ่านศูนย์กลางส่วนด้วยรัศมีของวงกลมจะเท่ากับสอง ทฤษฎีฉันถูกไหม” และหลังจากนักเรียนคลิกปุ่ม

,

และปุ่ม เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เส้นผ่านศูนย์กลางจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน ดังโปรโตคอล บรรทัดที่ 126 ก้อง พูดว่า “เขาเขียนได้ว่าเส้นผ่านศูนย์กลางจะแบ่งครึ่งวงกลมออกเป็นสองส่วน ก็จะได้เป็นครึ่งวงกลม” และจากคำพูดของกล้าในโปรโตคอลบรรทัดที่ 93 ที่กล้าพูดว่า “รัศมีก็คือเส้นรอบวงกับจุดศูนย์กลางเด้ แม่นบ่หล่ะ ลากมาก็รัศมี” จากคำพูดของกล้าแสดงให้เห็นว่ากล้าสามารถบอกสมบัติของรัศมีว่าเป็นระยะจากเส้นรอบวงกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และ หลังจากทำกิจกรรมในข้อที่ 5 กล้า ย้อนกลับมาดูกิจกรรมในข้อ 2 เพื่อหาคำตอบคำพูดครู ในโปรโตคอลบรรทัดที่ 83 ที่ว่า “นักเรียนดูการเคลื่อนที่ของรัศมี มันจะเคลื่อนที่ไป มันจะมีรอยเกิดขึ้นเรื่อยๆ มันบ่งบอกถึงอะไร” ซึ่งกล้า ค้นพบว่า รัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมมีได้หลายเส้น ดังโปรโตคอลบรรทัดที่ 137 กล้า พูดว่า “ลองดูรูปแรก ถ้าเคลื่อนที่อันนี้ เห็นไหม เส้นทุกเส้นที่รอย คุณครูพยายามจะบอกอะไรเรา ก็คือว่า เส้นผ่านศูนย์กลางลากจากอันนี้ผ่านอันนี้ เส้นทุกเส้นถือเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางหมดและเส้นที่ลากจากนี้ถึงนี้เป็นรัศมีหมด มันใช่แล้ว” ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 81	ก้อง	:	รัศมีก็จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง เมื่อนำเส้นผ่านศูนย์กลางส่วนด้วยรัศมีของวงกลมจะเท่ากับสอง ทฤษฎีฉันถูกไหม
	...		
บรรทัดที่ 83	ครู	:	นักเรียนดูการเคลื่อนที่ของรัศมี มันจะเคลื่อนที่ไป มันจะมีรอยเกิดขึ้นเรื่อยๆ มันบ่งบอกถึงอะไร
	...		

บรรทัดที่ 92 ก้อง : รัศมีมีได้เส้นเดียว ถ้ามีหลายเส้นจะเรียกว่ารัศมีอยู่เป๊าะ

บรรทัดที่ 93 กล้า : รัศมีก็คือเส้นรอบวงกับจุดกึ่งกลางเด่ แม่นบ่หล่ะ ลากมาก็รัศมี

...

บรรทัดที่ 126 ก้อง : เขาเขียนได้ว่าเส้นผ่านศูนย์กลางจะแบ่งครึ่งวงกลมออกเป็นสองส่วน ก็จะได้เป็นครึ่งวงกลม

...

บรรทัดที่ 137 กล้า : ลองดูรูปแรก ถ้าเคลื่อนที่อันนี้ เห็นไหม เส้นทุกเส้นที่รอย คุณครูพยายามจะบอกอะไรเรา ก็คือว่าเส้นผ่านศูนย์กลางลากจากอันนี้ผ่านอันนี้ เส้นทุกเส้นถือเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางหมด และเส้นที่ลากจากนี้ถึงนี้เป็นรัศมีหมด มันใช่แล้ว

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมี**การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น** ดังนี้ จากโปรโตคอล บรรทัดที่ 55 กล้าพูดว่า" อ้อ แล้วชี้ไปที่หน้าจอคอมพิวเตอร์ตรงตำแหน่ง ข้อความ ความยาวรัศมีของวงกลม = 5.31 ซม. ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง = 10.62 ซม." แสดงให้เห็นว่ากล้า**มีสมมติฐานเกิดขึ้น**ว่าจะต้องสังเกตตำแหน่งนี้ และโปรโตคอลบรรทัดที่ 75 ก้องพูดว่า "อ๋อ เส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมีจะมีความสัมพันธ์กัน" แสดงให้เห็นว่าที่ก้อง**มีสมมติฐานเกิดขึ้น**ว่าเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมีมีความสัมพันธ์กัน และในที่สุดก้องก็ค้นพบความสัมพันธ์ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี ดังโปรโตคอลบรรทัดที่ 81ที่ก้องพูดว่า"รัศมีก็จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง เมื่อนำเส้นผ่านศูนย์กลางส่วนด้วยรัศมีของวงกลมจะเท่ากับสอง ทฤษฎีฉันถูกไหม" ส่วนโปรโตคอลบรรทัดที่ 137 แสดงให้เห็นว่ากล้าสามารถ**ตีความหมายคำพูดของครู**ในโปรโตคอลบรรทัดที่ 83 ที่ครูพูดว่า "นักเรียนดูการเคลื่อนที่ของรัศมี มันจะเคลื่อนที่ไป มันจะมีรอยเกิดขึ้นเรื่อยๆ มันบ่งบอกถึงอะไร" ซึ่งกล้าสามารถตีความหมายสิ่งที่ครูพูดได้ ดังในโปรโตคอลบรรทัดที่ 137 ที่กล้าพูดว่า "ลองดูรูปแรก ถ้าเคลื่อนที่อันนี้ เห็นไหม เส้นทุกเส้นที่รอย คุณครูพยายามจะบอกอะไรเรา ก็คือว่าเส้นผ่านศูนย์กลางลากจากอันนี้ผ่านอันนี้ เส้นทุกเส้นถือเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางหมด และเส้นที่ลากจากนี้ถึงนี้เป็นรัศมีหมด มันใช่แล้ว" ดังโปรโตคอลข้างล่าง

บรรทัดที่ 54 กล้า : การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง (กล้า คลิกเมาส์)

บรรทัดที่ 55 กล้า : อ้อ (กล้า ชี้ไปที่หน้าจอคอมพิวเตอร์ ตรงตำแหน่งข้อความ

ความยาวรัศมีของวงกลม = 5.31 ซม.
ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง = 10.62 ซม.

$$\frac{\text{ความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง}}{\text{ความยาวรัศมีของวงกลม}} = 2.00$$

)

บรรทัดที่ 56 ก้อง : แล้วคลิกการเคลื่อนที่ของรัศมี เพื่อสังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี คลิกปุ่มบวก ลบ เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกต (ก้อง อ่านต่อ)

บรรทัดที่ 57 กล้า : คลิกเมาส์ตามที่ ก้อง อ่าน
กล้า อ่านคำสั่งแล้วมองที่หน้าจอคอมพิวเตอร์อีกครั้ง
อ้อก็คือความยาวรัศมี เห็ดจังได๋ฮึ ให้เฮ้าเขียนบอกคือหวางเส้าฮึจังได๋ ฮึก้อง ถามคุณครูซิ

...

บรรทัดที่ 72 ครู : เห็นอะไรก็เขียน ตอนนี้ครูให้เราดูการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง แล้วก็รัศมีใช่ไหม เราดูแล้วเราเจออะไร

บรรทัดที่ 73 ก้อง : มันมีความสัมพันธ์กันนี่ไง

บรรทัดที่ 74 ครู : มันมีความสัมพันธ์กัน เพื่อนบอกว่ามันมีความสัมพันธ์กัน สัมพันธ์กันยังไง

บรรทัดที่ 75 ก้อง : อ๋อ เส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมีจะมีความสัมพันธ์กัน

...

บรรทัดที่ 81 ก้อง : รัศมีก็จะเท่ากับครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง เมื่อนำเส้นผ่านศูนย์กลางส่วนด้วยรัศมีของวงกลมจะเท่ากับสอง ทฤษฎีฉันถูกไหม

...

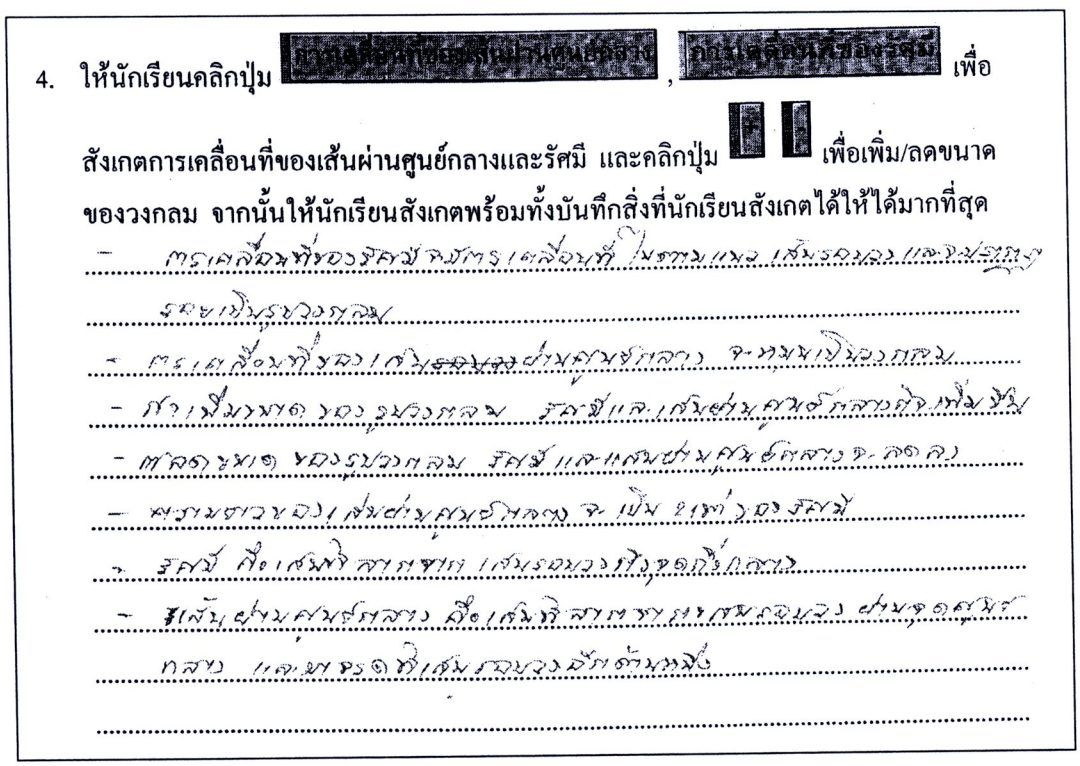
บรรทัดที่ 83 ครู : นักเรียนดูการเคลื่อนที่ของรัศมี มันจะเคลื่อนที่ไป มันจะมีรอยเกิดขึ้นเรื่อยๆ มันบ่งบอกถึงอะไร

...

บรรทัดที่ 137 กล้า : ลองดูรูปแรก ถ้าเคลื่อนที่อันนี้ เห็นไหม เส้นทุกเส้นที่รอย คุณครูพยายามจะบอกอะไรเรา ก็คือว่าเส้นผ่านศูนย์กลางลากจากอันนี้ผ่านอันนี้ เส้นทุกเส้นถือเป็นเส้นผ่านศูนย์กลางหมด และเส้นที่ลากจากนี้ถึงนี้เป็นรัศมีหมด มันใช่แล้ว

บรรทัดที่ 138 แอ้ม : เอ้าเฮาสิเอิ้นจังได๋ดีวะ ที่เผิ่นบอกว่า มันทุกเส้นเลย

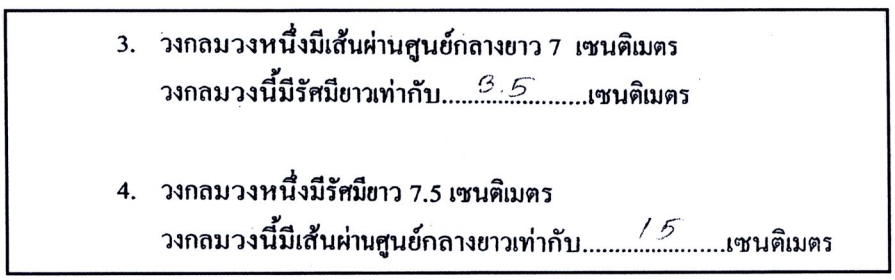
บรรทัดที่ 139 กล้า : กะบอกว่า... บ่ต้องบอกดอก


4. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง] , [การเคลื่อนที่ของรัศมี] เพื่อสังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี และคลิกปุ่ม [+] [-] เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตพร้อมทั้งบันทึกสิ่งที่นักเรียนสังเกตได้ให้ได้มากที่สุด

- การเคลื่อนที่ของรัศมีจะการเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นรอบวง และจะปรากฏรอยเป็นวงกลม
- การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง จะเหมือนเป็นวงกลม
- ถ้าเพิ่มขนาดของวงกลม รัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางก็จะเพิ่มขึ้น
- ถ้าลดขนาดของวงกลม รัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางจะลดลง
- ความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง จะเป็น 2 เท่าของรัศมี
- รัศมี คือเส้นที่ลากจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวง
- เส้นผ่านศูนย์กลาง คือเส้นที่ลากจากเส้นรอบวงผ่านจุดศูนย์กลาง และมาจรดอีกเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่ง

ภาพที่ 7 งานเขียนกิจกรรมที่ 6 ข้อ 4 กลุ่ม AGK[3]

จากภาพที่ 7 แสดงการบันทึกสิ่งที่ได้การสังเกตเกี่ยวกับรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม นักเรียนสามารถ**นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมได้หลากหลาย** เช่น แนวคิดเกี่ยวกับรัศมีได้แก่ การเคลื่อนที่ของรัศมีจะมีการเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นรอบวง และจะปรากฏรอยเป็นวงกลม, รัศมี คือ เส้นที่ลากจากเส้นรอบวงถึงจุดกึ่งกลาง และแนวคิดเกี่ยวกับเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมได้แก่ การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางจะหมุนเป็นวงกลม, เส้นผ่านศูนย์กลางคือ เส้นที่ลากจากเส้นรอบวงผ่านจุดศูนย์กลางและมาจรดเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่ง เป็นต้น และ จากการทำแบบฝึกหัดเมื่อกำหนดความยาวของรัศมีมาให้นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์ได้ และเมื่อกำหนดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางให้นักเรียนสามารถหาความยาวของรัศมีได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถสร้างความสัมพันธ์ของรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางทั้งทางตรงและย้อนกลับได้** ดังภาพที่ 8


3. วงกลมวงหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 7 เซนติเมตร
วงกลมวงนี้มีรัศมียาวเท่ากับ.....3.5.....เซนติเมตร

4. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว 7.5 เซนติเมตร
วงกลมวงนี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับ.....15.....เซนติเมตร

ภาพที่ 8 งานเขียนกิจกรรมที่ 6 ข้อ 5 กลุ่ม AGK[3]

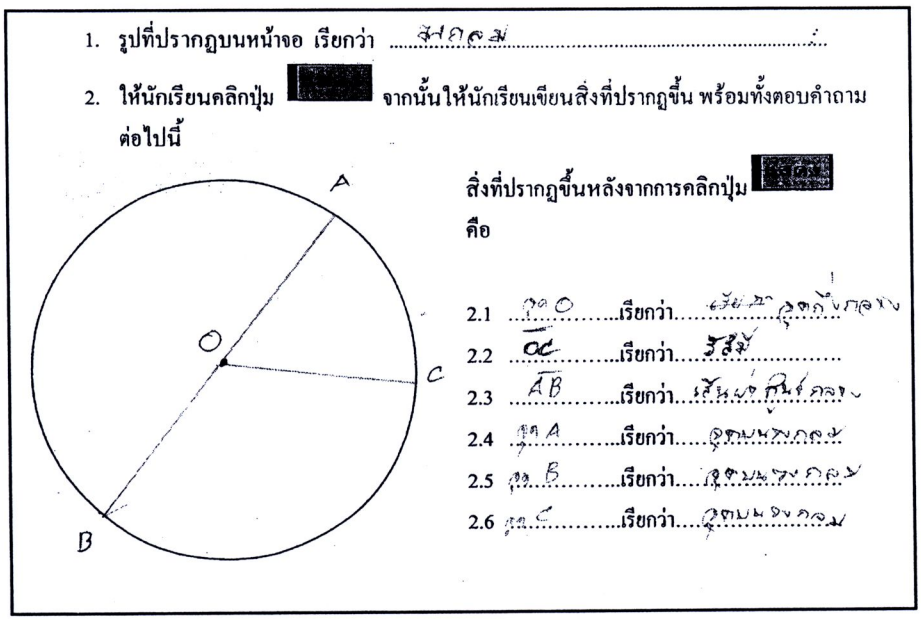
3.1.1.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 6 เรื่อง รูปอะไรเอ่ย ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

โปรโตคอล บรรทัดที่ 2 – 25 แสดงการทำกิจกรรมข้อ 1-2 ซึ่งเป็นกิจกรรมการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 ในระหว่างที่นักเรียนร่วมทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปรายถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังนี้

บรรทัดที่ 2	กิ่ง	:	รูปบนหน้าจอเรียกว่าวงกลม
บรรทัดที่ 3	ก้อย	:	วงกลมจังได๋ ทรงกลม
บรรทัดที่ 4	แก่น	:	ทรงกลมจังได๋เป็นจังซี้ ทรงกลมกะมีแรงนำหวะ
บรรทัดที่ 5	กิ่ง	:	วงกลมก็วงกลม
บรรทัดที่ 6	ก้อย	:	เขาเขียนกันหมดแล้ว เหลือแต่เผินผู้เดียว
บรรทัดที่ 8	ก้อย	:	อ้อ ให้เฮ็ดว่า 2.1 คือ อีหยัง
บรรทัดที่ 9	แก่น	:	รัศมี เรียกว่า รัศมี เส้นผ่านศูนย์กลางเรียกว่า เส้นผ่านศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 10	ครู	:	คลิกปุ่มแสดง มีอะไรขึ้น จุดนี้เห็นไหม สัญลักษณ์นี้เรียกว่าอะไร
บรรทัดที่ 11	ก้อย	:	จุดกึ่งกลาง เรียกว่า เขียน O เลยเหบาะ จุดกึ่งกลาง
บรรทัดที่ 18	แก่น	:	กะหนึ่ง สอง สาม พอดีเลยจุดบนวงกลม จุด A
บรรทัดที่ 19	ก้อย	:	OB เหรอ
บรรทัดที่ 20	แก่น	:	จุดบนวงกลมดิ แม่นบ่ เขียนให้มันเต็ม
บรรทัดที่ 21	ก้อย	:	จุดB คือหยัง บนวงกลมดิ
บรรทัดที่ 22	แก่น	:	จุด B จุดบนวงกลมจริงๆ
บรรทัดที่ 23	กิ่ง	:	จุด B จุดบนวงกลม

บรรทัดที่ 24 แก่น : เส้นผ่านศูนย์กลาง

บรรทัดที่ 25 ก้อย : เอาไปแล้วหละ



ภาพที่ 9 งานเขียนกิจกรรมที่ 6 ข้อ 1-2 กลุ่ม Korean Fever

จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 2 - 50 และภาพที่ 9 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี **การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)**คือ เห็นรูปแล้วสามารถบอกได้ว่ารูปเรขาคณิตที่ปรากฏบนหน้าจอคอมพิวเตอร์ คือ รูปวงกลม ดังปรากฏในโปรโตคอล บรรทัดที่ 2 ที่กิ่งพูดว่า “รูปบนหน้าจอเรียกว่าวงกลม” และบรรทัดที่ 6 ก้อย พูดว่า “ เขียนกันหมดแล้วเหลือแต่เผินผู้เดียว” และสามารถระบุได้ว่า จุด O คือจุดศูนย์กลางของวงกลม ส่วนของเส้นตรง OC คือรัศมี ส่วนของเส้นตรง AB คือ เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และจุด A, B และC คือจุดบนวงกลม ดังปรากฏในภาพที่ 9 และโปรโตคอล บรรทัดที่ 8 – 11, 18 – 25

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมี**การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น** ดังนี้ โปรโตคอลบรรทัดที่ 2 - 5 กิ่งพูดว่า รูปบนหน้าจอ เรียกว่า วงกลม ก้อยพูดว่า “วงกลมจังได๋ ทรงกลม” แก่นพูดว่า “ทรงกลมจังได๋เป็นจังซี้ ทรงกลมกะมีแรเงานำหวะ” แสดงให้เห็นว่า แก่นสามารถ**ตีอธิบายแนวคิดของก้อยได้ว่าแนวคิดของก้อยไม่ถูก**

บรรทัดที่ 2	กิ่ง	:	รูปบนหน้าจอเรียกว่าวงกลม
บรรทัดที่ 3	ก้อย	:	วงกลมจังได๋ ทรงกลม
บรรทัดที่ 4	แก่น	:	ทรงกลมจังได๋เป็นจังซี้ ทรงกลมกะมีแรงเงานำหวะ

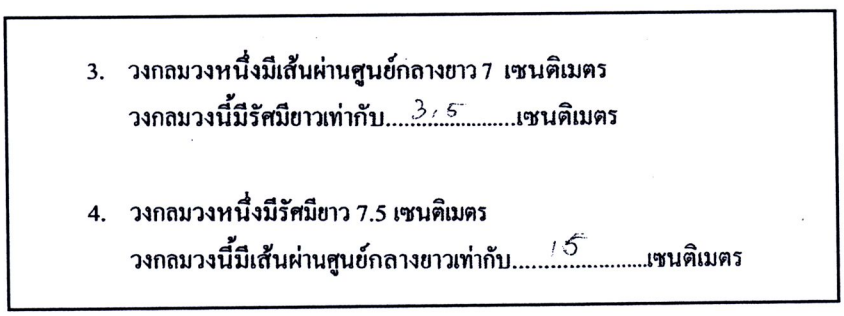
โปรโตคอลบรรทัดที่ 49- 139 แสดงการทำกิจกรรมข้อ 3 -5 ซึ่งเป็นกิจกรรมการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 และในระหว่างที่นักเรียนร่วมทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังนี้

บรรทัดที่ 49	แก่น	:	ความยาวของรัศมีวงกลม
บรรทัดที่ 50	ก้อย	:	แล้ว
บรรทัดที่ 51	แก่น	:	มันจะครึ่งกัน 7.17 7.33 12.4 10.1 10.24 แล้วเอามาบวก ลบ เบิ่ง
บรรทัดที่ 52	ก้อย	:	แล้ว
บรรทัดที่ 53	แก่น	:	สังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี รัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลางเอาไปถัวะ
	...		
บรรทัดที่ 84	แก่น	:	เส้นผ่านศูนย์กลางจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วน
บรรทัดที่ 85	ก้อย	:	แสดงพื้นที่ สังเกตอีกแล้ว
บรรทัดที่ 86	แก่น	:	พื้นที่สีเหลืองกับสีเขียวเท่ากัน ไม่ว่าจะเพิ่มหรือลดขนาด
บรรทัดที่ 87	ก้อย	:	อือ

จากโปรโตคอล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับ**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)** ดังรายละเอียดต่อไปนี้ หลังจากที่นักเรียนคลิกปุ่ม การเคลื่อนที่ของรัศมี, การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง และ เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม นักเรียนสามารถบอกได้ว่า ความยาวของรัศมีจะเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังโปรโตคอลบรรทัดที่ 53 แก่นพูดว่า “สังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี รัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลางเอาไปถัวะ” และหลังจากนักเรียนคลิกปุ่ม แสดง พื้นที่, การเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลาง และปุ่ม เพื่อเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม นักเรียนสามารถบอกได้ว่า เส้นผ่านศูนย์กลางจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน ดังโปรโตคอลบรรทัดที่ 84 ที่แก่นพูดว่า “เส้นผ่านศูนย์กลางจะแบ่งวงกลมออกเป็นสองส่วน”

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมี**การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น** ดังนี้ จากการสังเกตการเพิ่มขึ้นและลดลงของความยาวของรัศมีของวงกลม โปรโตคอลบรรทัดที่ 49 แก่น พูดว่า "ความยาวของรัศมีวงกลม" และโปรโตคอลบรรทัดที่ 51 "และมันจะครึ่งกัน 7.17 7.33 12.4 10.1 10.24 แล้วเอามาบวก ลบ เบิ่ง" แสดงให้เห็นว่า แก่น **กำลังมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐาน**เกิดขึ้น ว่า ความยาวรัศมีของวงกลม และความยาวเส้นผ่านศูนย์กลางน่าจะมีความสัมพันธ์กัน แล้วในที่สุดแก่นก็ได้คำตอบดังโปรโตคอลที่ 53 แก่นพูดว่า "สังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี รัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลางเอาไปถัวะ"

บรรทัดที่ 49	แก่น	:	ความยาวของรัศมีวงกลม
บรรทัดที่ 50	ก้อย	:	แล้ว
บรรทัดที่ 51	แก่น	:	มันจะครึ่งกัน 7.17 7.33 12.4 10.1 10.24 แล้วเอามาบวก ลบ เบิ่ง
บรรทัดที่ 52	ก้อย	:	แล้ว
บรรทัดที่ 53	แก่น	:	สังเกตการเคลื่อนที่ของเส้นผ่านศูนย์กลางและรัศมี รัศมีเป็นครึ่งหนึ่งของเส้นผ่านศูนย์กลางเอาไปถัวะ


3. วงกลมวงหนึ่งมีเส้นผ่านศูนย์กลางยาว 7 เซนติเมตร
วงกลมวงนี้มีรัศมียาวเท่ากับ 3.5 เซนติเมตร

4. วงกลมวงหนึ่งมีรัศมียาว 7.5 เซนติเมตร
วงกลมวงนี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางยาวเท่ากับ 15 เซนติเมตร

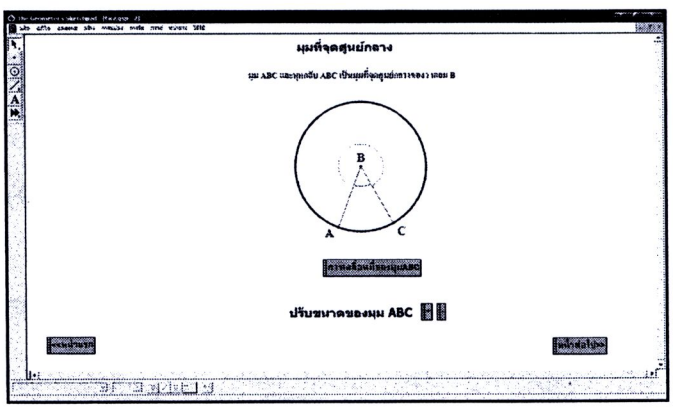
ภาพที่ 10 เขียนแบบฝึกหัดที่ 6 ข้อ 3-4 กลุ่ม Korean Fever

จากภาพที่ 10 เป็นภาพแสดงการทำแบบฝึกหัดเมื่อกำหนดความยาวของรัศมีมาให้นักเรียนสามารถหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์ได้ และเมื่อกำหนดความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางให้นักเรียนสามารถหาความยาวของรัศมีได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถสร้างความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับได้**

3.1.2 กิจกรรมที่ 8 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) นักเรียนสามารถระบุชื่อมุมและสร้างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลมได้ ไปสู่การการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 (Analysis) คือ นักเรียนสามารถบอกลักษณะและสมบัติของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลม และสามารถระบุชื่อมุมและบอกลักษณะของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้ ผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกิจกรรมดังต่อไปนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนเปิดไฟล์ Cir2.gsp เลือกปุ่ม ลักษณะมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง แล้วปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

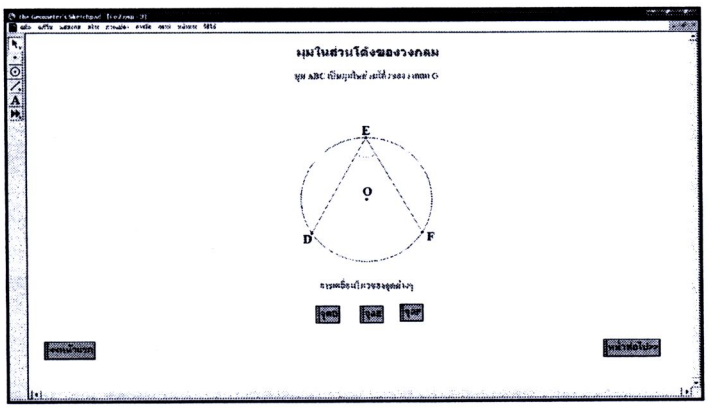
หน้าที่ 1 มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 – 2 เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม โดยนักเรียนสามารถนักเรียนสามารถระบุชื่อมุมและสร้างมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม สามารถบอกลักษณะและสมบัติของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม



ภาพที่ 11 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 8 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม หน้าที่ 1

1. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม การเคลื่อนที่ของมุมABC พิจารณาการเคลื่อนที่ของมุม ABC และปุ่ม + - เพื่อปรับขนาดของมุม ABC จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด
2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม หน้าต่อไป>>

หน้าที่ 2 มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 – 2 เกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม โดยนักเรียนสามารถนักเรียนสามารถระบุชื่อมุมและสร้างมุมในส่วนโค้งของวงกลม สามารถบอกลักษณะและสมบัติของมุมในส่วนโค้งของวงกลม

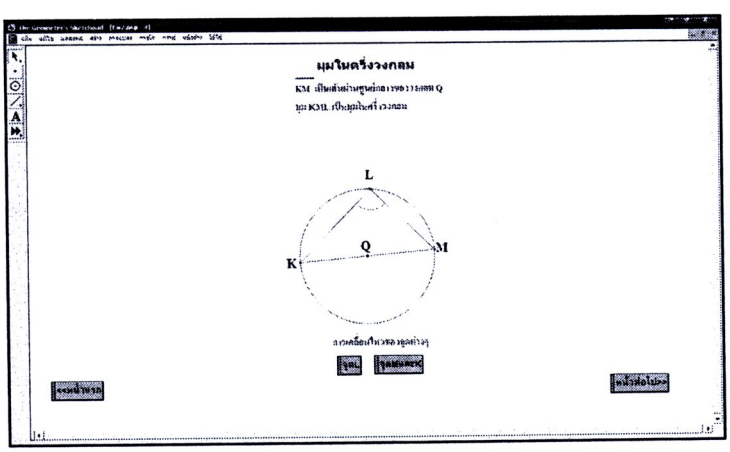


ภาพที่ 12 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 8 มุมในส่วนโค้งของวงกลม หน้าที่ 2

3. ให้นักเรียนคลิกที่การเคลื่อนไหวของจุดต่างๆ เพื่อดูการเคลื่อนที่และลักษณะของมุมในส่วนโค้งของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

4. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม

หน้าที่ 3 มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 – 2 เกี่ยวกับมุมในครึ่งวงกลม โดยนักเรียนสามารถนักเรียนสามารถระบุชื่อมุมและสร้างมุมในครึ่งวงกลม สามารถบอกลักษณะและสมบัติของมุมในครึ่งวงกลมวงกลม

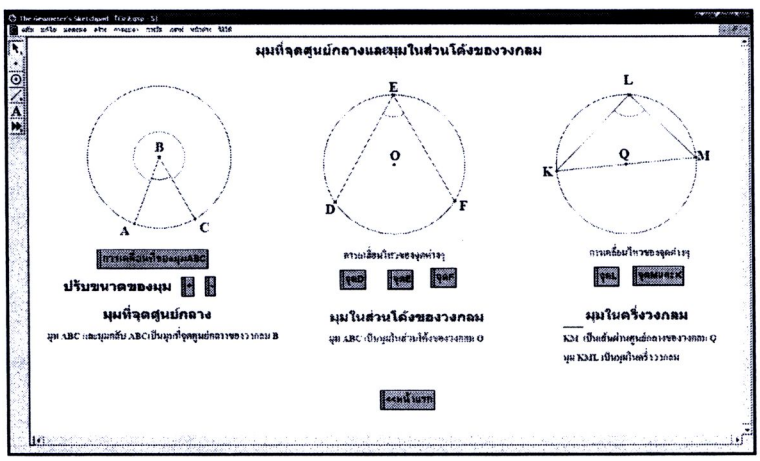


ภาพที่ 13 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 8 มุมในครึ่งวงกลม หน้าที่ 3

5. ให้นักเรียนคลิกที่การเคลื่อนไหวของจุดต่างๆ เพื่อดูการเคลื่อนที่และลักษณะของมุมในครึ่งวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

6. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม หน้าต่อไป>>

<u>หน้าที่ 4</u> มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 – 2 เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลม โดยนักเรียนสามารถบอกได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมเกิดจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมกาง 180 องศา และมุมในส่วนโค้งของวงกลม



ภาพที่ 14 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 8 มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมและมุมในส่วนโค้งของวงกลม หน้าที่ 4

7. นักเรียนคิดว่ามุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลม และมุมในครึ่งวงกลม มีความสัมพันธ์กันหรือไม่อย่างไร

3.1.2.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 8 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 24	กล้า	:	มุมที่จุดศูนย์กลางเขาให้เราหา
บรรทัดที่ 25	ครู	:	ยังไงถึงจะเรียกว่ามุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 26	กล้า	:	นี่แหละ มุม ABC และมุม ABC
บรรทัดที่ 27	ก้อง,แอ้ม	:	มุม ABC และมุมกลับ ABC
บรรทัดที่ 28	กล้า	:	OK sorry sorry อ๋อ มุมกลับ ABC นี้ใช่ไหม มุม ABC และมุมกลับ ABC นี่คือมุมกลับของตัวนี้
บรรทัดที่ 29	ก้อง	:	มันก็จะรวมกันได้ 360 องศา
บรรทัดที่ 30	กล้า	:	เอ้อ เอาไหมหละ เอาเลย เอาง่ายๆ ก่อน เราก็เขียนลงไป เขียนว่ามุม
บรรทัดที่ 31	ก้อง,แอ้ม	:	มุม ABC และมุมกลับ ABC รวมกันได้
บรรทัดที่ 32	กล้า	:	นี่คือมุมที่จุดศูนย์กลาง แหลมนี่คือมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 33	กล้า,ก้อง	:	นี่คือมุมกลับ
บรรทัดที่ 34	ก้อง	:	แล้วก็บอกว่า
บรรทัดที่ 35	กล้า	:	แล้วก็บอกง่ายๆว่า มุมที่จุดศูนย์กลางของรูปวงกลม
บรรทัดที่ 36	กล้า,ก้อง	:	รวมกับมุมกลับของรูปวงกลมรูปนั้นจะได้ 360 องศา
	....		
บรรทัดที่ 50	ครู	:	นักเรียนสังเกตนะคะ มุมที่จุดศูนย์กลางตำแหน่งจุดยอดจะอยู่ตรงไหน
บรรทัดที่ 51	กล้า	:	ตำแหน่งไหนหล่ะ จุดศูนย์กลางของวงกลม
บรรทัดที่ 52	ครู	:	แขนของมุมเป็นยังไง
บรรทัดที่ 53	กล้า	:	แขนของมุมคือรัศมีของรูปวงกลม
บรรทัดที่ 54	ก้อง	:	เกิดจากรัศมีสองเส้น
	...		
บรรทัดที่ 71	ก้อง	:	มุมที่จุดศูนย์กลางเกิดจากอะไร จุดศูนย์กลางกับรัศมีสองเส้นที่มาจรดกัน ซึ่งมีรัศมี
	...		
บรรทัดที่ 137	ครู	:	ลักษณะของมุมในส่วนโค้ง ให้นักเรียนอธิบายซิว่ามุมในส่วนโค้งยังไงถึงจะเรียกว่ามุมในส่วนโค้ง ลักษณะสำคัญของมันจุดยอดอยู่ตรงไหน แขนของมุมเป็นยังไง
บรรทัดที่ 138	แอ้ม	:	จุดยอดอยู่บนเส้นวงกลม

บรรทัดที่ 139 ... :

บรรทัดที่ 140 กล้า,แอ้ม : จุดยอดของมุมในส่วนโค้งจะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

บรรทัดที่ 141 แอ้ม เขียนไปก้อง

บรรทัดที่ 142 กล้า : จุดยอดของมุมในส่วนโค้งจะอยู่บนเส้นรอบวง โดยแขนทั้งสองข้างของมุมจะโยง จะว่าจั่งได๋ดี เรียบเรียบคำพูดแน แอ้ม

บรรทัดที่ 143 แอ้ม : จะเห็ดจั่งได๋

บรรทัดที่ 144 กล้า : จุดยอดของมุมในส่วนโค้งจะอยู่บนเส้นรอบวงใช่ไหม ก็คือ

บรรทัดที่ 145 แอ้ม : แขนของมันก็อยู่บนเส้นรอบวงคือกัน

บรรทัดที่ 146 กล้า : และแขน และแขนของมุมภายในส่วนโค้งเกิดจากจุดยอดโยงมาหาจุดสองจุดเนี่ยนะ

บรรทัดที่ 147 แอ้ม : ที่อยู่บน

บรรทัดที่ 148 กล้า : เส้นรอบวงด้านตรงข้าม

บรรทัดที่ 149 แอ้ม : อือ เฮาสิเขียนว่าจั่งได๋กร

บรรทัดที่ 150 กล้า : เดี๋ยวๆเรียบเรียงก่อน จุดยอดของมุมในส่วนโค้งจะอยู่บนเส้นรอบวง และเขียนลงไปว่าแขนของส่วนโค้ง ข้อใหม่เด้เนาะ แขนของส่วนโค้งเกิดจากเส้นที่ลากจากจุดยอดมายังจุดอีกสองจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงเนาะ ก้อง แขนของมุมภายในส่วนโค้งเกิดจาก

บรรทัดที่ 151 แอ้ม : เกิดจาก เส้นที่ลากจากจุดยอด แล้วก็อะไร

บรรทัดที่ 152 กล้า : มายังจุดสองจุดบนเส้นรอบวง มันก็ส่วนโค้งนั่นแหละ

บรรทัดที่ 153 แอ้ม : เอาอันได๋อีก

บรรทัดที่ 154 กล้า : เฮ้ย เดี๋ยวนะ แอ้ม แต่คือจุดที่มันลากจากจุดยอดใช่ไหม คือเส้นที่ลากจากจุดยอดมายังจุด จุดอะไรนะเขาเรียกอะไรนะ จุดที่เป็นอะไรกับส่วนโค้ง มันเป็นจุดอีหยัง ก้อง จุดสองจุดนี้ มายังจุดสองจุดบนเส้นรอบวง นั่นแหละ ซึ่งระหว่างจุดสองจุดนั้นก็คือส่วนโค้งนั่นเอง ใช่ไหมล่ะ เนาะเขียนต่อไปอีกนิดหนึ่ง ซึ่งบริเวณระหว่างจุดสองจุดนั้นคือส่วนโค้ง เอ้อ จบ แค่นี้เอง

...

บรรทัดที่ 160 กล้า : มุมในครึ่งวงกลม

บรรทัดที่ 161 แอ้ม : คลิกที่การเคลื่อนไหว

บรรทัดที่ 167 กล้า : ให้นักเรียนคลิกที่การเคลื่อนไหว อย่าเพิ่งๆ เพื่อดูการเคลื่อนไหว

ของมุมในครึ่งวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จาก

บรรทัดที่ 168 ครู : มุมในครึ่งวงกลมเป็นไง

.....

บรรทัดที่ 173 ก้อง : เกิดจากเส้นผ่านศูนย์กลาง

บรรทัดที่ 174 กล้า : นั่นแหละ เกิดจาก ตรงนี้กับตรงนี้หนะ

บรรทัดที่ 175 ก้อง : จุดสองจุดที่เส้นผ่านศูนย์กลาง

บรรทัดที่ 176 กล้า : เขาเอิ้นจุดหยังของเส้นผ่านศูนย์กลาง

บรรทัดที่ 177 ก้อง : ฮือ

บรรทัดที่ 178 กล้า : ตรงนี้กับตรงนี้ เขาเรียกจุดอะไร ของเส้นผ่านศูนย์กลางนี่

บรรทัดที่ 179 ก้อง : อาจารย์

บรรทัดที่ 180 กล้า : มันก็เกิดจาก จุดสองจุดที่อยู่บน

บรรทัดที่ 181 ก้อง : จุดตรงนี้กับจุดตรงนี้ของเส้นผ่านศูนย์กลางเรียกว่าอะไร จุดของเส้นผ่านศูนย์กลาง

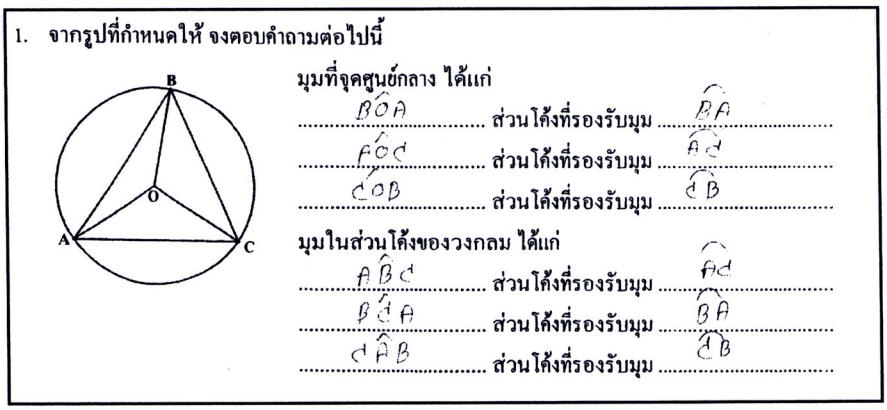
บรรทัดที่ 182 ครู : จุดปลาย

บรรทัดที่ 183 ก้อง : จุดปลาย

บรรทัดที่ 184 กล้า : เอ้อ เกิดจากจุดปลายสองจุดของเส้นผ่านศูนย์กลางมาจรดกับบนเส้นยอดมุมเกิดเป็นมุมในครึ่งวงกลม เอาใหม่

บรรทัดที่ 185 ก้อง : ก็เกิดเป็นสามเหลี่ยม

บรรทัดที่ 186 กล้า : ก็คือเกิดจาก มุมในครึ่งวงกลมเกิดจากเส้นที่ลากจากจุดๆหนึ่งมายังจุดปลายของเส้นครึ่งวงกลมใช่ไหม เอ๊ย เส้นผ่านศูนย์กลาง อ้า ก็เลยเกิดเป็นมุมในครึ่งวงกลมเนาะ เดี๋ยวเรียบเรียงคำพูดดีๆ ก็คือ มุมในครึ่งวงกลมเกิดจากเส้นที่ลากจากจุดๆหนึ่งเนาะใช่ไหม จุดๆหนึ่งมายังจุดปลายทั้งสองข้างของเส้นผ่านศูนย์กลาง ... (กำลังเขียน) ครึ่งวงกลมเขียนผิด มุมในครึ่งวงกลมเกิดจากเส้นที่ลากจากจุดๆหนึ่งมายังจุดปลายทั้งสองข้างของเส้นผ่านศูนย์กลาง (พูดพร้อมทั้งเขียน) เอาแค่ง่ายๆ แล้วก็จุดยอดมุมในครึ่งวงกลมจะอยู่บนเส้นรอบวงอย่างนี้ไหม เพราะบางที่มันอาจอยู่ที่จุดศูนย์กลางใช่ไหมเนาะ



ภาพที่ 15 งานเขียน แบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 1 กลุ่ม AGK[3]

จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 24 ที่กล้า พูดว่า "มุมที่จุดศูนย์กลางเขาให้เราหา" บรรทัดที่ 26 กล้าพูดว่า "นี่แหละ มุม ABC และมุม ABC", บรรทัดที่ 27 ก้องและแอ้มพูดว่า "มุม ABC และมุมกลับ ABC" แสดงให้เห็นว่านักเรียนรู้จักมุมที่จุดศูนย์กลาง และจากภาพที่ 15 แสดงให้เห็นว่านักเรียนรูจักมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง นั่นคือ นักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)** และจากโปรโตคอล (ในภาคผนวก) โปรโตคอลบรรทัดที่1-96 เป็นการทำกิจกรรมการสำรวจลักษณะมุมที่จุดศูนย์กลาง บรรทัดที่ 71 ก้อง "พูดว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเกิดจากอะไร จุดศูนย์กลางกับรัศมีสองเส้นที่มาจรดกันซึ่งมีรัศมี" และโปรโตคอลในบรรทัดที่ 72 กล้าพูดว่า "อ้อ เอ้อ เกิดจากการเชื่อมต่อระหว่างจุดกึ่งกลางของวงกลมกับรัศมีสองเส้น" จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 71-27 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกสมบัติของมุมที่จุดศูนย์กลางได้ว่า จุดยอดมุมต้องอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ส่วนโปโตคอลบรรทัดที่ 97 – 159 เป็นการทำกิจกรรมการสำรวจลักษณะมุมในส่วนโค้ง บรรทัดที่ 138 แอ้มพูดว่า "จุดยอดอยู่บนเส้นวงกลม " , บรรทัดที่ 140 กล้าและแอ้มพูดพร้อมกันว่า "จุดยอดของมุมในส่วนโค้งจะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม" และในบรรทัดที่ 145 แอ้มพูดว่า "แขนของมันก็อยู่บนเส้นรอบวงคือกัน" แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกสมบัติของมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้ว่า จุดยอดมุมต้องบนเส้นรอบวง และแขนของมุมตัดกับเส้นรอบของวงกลม และ บรรทัดที่ 173 - 186 เป็นการทำกิจกรรมการสำรวจลักษณะมุมในครึ่งวงกลม บรรทัดที่ 173 "เกิดจากเส้นผ่านศูนย์กลาง", บรรทัดที่ 175 ก้องพูดว่า "จุดสองจุดที่เส้นผ่านศูนย์กลาง" แต่ก้องไม่รู้เป็นจุดอะไรจึงถามครูและได้คำตอบจากครูว่าคือจุดปลาย และในบรรทัดที่ 184 กล้าพูดว่า "เอ้อ เกิดจากจุดปลายสองจุดของเส้นผ่านศูนย์กลางมาจรดกับบนเส้นยอดมุมเกิดเป็นมุมในครึ่งวงกลม เอาใหม่" แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกสมบัติของมุมในครึ่งวงกลมได้ว่า จุดยอดมุมต้องบนเส้นรอบวงและแขนของมุมตัดกับจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม จากการวิเคราะห์ข้างต้นแสดง

ให้เห็นว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิต เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งอยู่ในระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมี**การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น** ดังนี้ โปรโตคอลบรรทัดที่ 24 ที่กล้า พูดว่า "มุมที่จุดศูนย์กลางเขาให้เราหา", บรรทัดที่ 26 กล้าพูดว่า "นี่แหละ มุม ABC และมุม ABC"และบรรทัดที่ 27 ก้องและแอ้มพูดว่า "มุม ABC และมุมกลับ ABC" จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 27 แสดงให้เห็นว่าก้องและแอ้ม**บอกได้ว่าที่กล้าพูดว่า "นี่แหละ มุม ABC และมุม ABC"ไม่ถูกต้อง** แต่ที่ถูกควรพูดว่า "มุม ABC และมุมกลับ ABC" โปรโตคอลบรรทัดที่ 29 ก้องพูดว่า "มันก็รวมกันได้ 360 องศา" และบรรทัดที่ กล้าพูดว่า "เอ้อ เอาไหมหละ เอาเลย เอาง่ายๆ ก่อน เราก็เขียนลงไป เขียนว่ามุม" และบรรทัดที่ 31 ก้องและแอ้มพูดว่า "มุม ABC และมุมกลับ ABC รวมกันได้" แสดงให้เห็นว่า กล้า และ แอ้ม **สามารถตีความหมายความคิดของ ก้อง และยอมรับแนวคิดของ ก้อง** ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาดมุมรวมกันได้ 360 องศา จากการสำรวจลักษณะมุมในส่วนโค้ง จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 130 กล้าพูดถึงมุมในส่วนโค้งว่า "ก็คือเกิดจากจุดสามจุดที่อยู่รอบวงกลม ลากเส้นสองเส้นจากจุดที่นึ่งมายังจุดที่สอง จากจุดที่สามมายังจุดที่สอง อ้าวลองหมุนดู พอ จบ หมุน D หมุน D หมุน F เฉยเลย พอ ดูดีๆ ", ในบรรทัดที่ 131 ก้องพูดว่า "จุดสามจุดอาจเป็นรัศมีก็ได้" และบรรทัดที่ 134 กล้าพูดว่า "ไม่มีอันไหนเป็นรัศมีเลย เพราะว่ามันไม่ได้มาจากจุดศูนย์กลางไง" แสดงให้เห็นว่ากล้า**สามารถบอกว่าที่ก้องพูดว่า "จุดสามจุดอาจเป็นรัศมีก็ได้" ไม่ถูก**เพราะมุมในส่วนโค้งไม่มีส่วนใดเกิดจากรัศมีวงกลม บรรทัดที่ 154 กล้าพูดว่า "เฮ้ เดี๋ยวนะ แอ้ม แต่คือจุดที่มันลากจากจุดยอดใช่ไหม คือเส้นที่ลากจากจุดยอดมายังจุด จุดอะไรนะเขาเรียกอะไรนะ จุดที่เป็นอะไรกับส่วนโค้ง มันเป็นจุดอีหยัง ก้อง จุดสองจุดนี้ มายังจุดสองจุดบนเส้นรอบวง นั่นแหละ ซึ่งระหว่างจุดสองจุดนั้นก็คือส่วนโค้งนั่นเอง ใช่ไหมล่ะ เนาะเขียนต่อไปอีกนิดหนึ่ง ซึ่งบริเวณระหว่างจุดสองจุดนั้นคือส่วนโค้ง เอ้อ จบ แค่นี้เอง" จากคำพูดของกล้า "เฮ้ เดี๋ยวนะ แอ้ม" แสดงให้เห็นว่ากล้า**กำลังมีสมมติฐานเกิดขึ้น**ว่าจะเรียบเรียงคำพูดอย่างไรในการอธิบายลักษณะของมุมในส่วนโค้ง และจากภาพที่ 16 เป็นการบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกต เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม แสดงให้เห็นว่า นักเรียน**สามารถนำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมได้หลากหลาย** ภาพที่ 17 เป็นการบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกต เรื่อง มุมในส่วนโค้ง แสดงให้เห็นว่า นักเรียน**สามารถนำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติของมุมในส่วนโค้งของวงกลมได้หลากหลาย** ภาพที่ 18 เป็นการบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกต เรื่อง มุมในครึ่งวงกลม แสดงให้เห็นว่า นักเรียน**สามารถนำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับสมบัติของมุมในครึ่งวงกลมได้หลากหลาย** และภาพที่

19 เป็นภาพงานเขียนของนักเรียนจากการทำแบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 3 แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถนำเสนอเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้อย่างหลากหลาย**

บรรทัดที่ 25	ครู	:	ยังไงถึงจะเรียกว่ามุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 26	กล้า	:	แค่นี้แหละ มุม ABC และมุม ABC
บรรทัดที่ 27	ก้อง,แอ้ม	:	มุม ABC และมุมกลับ ABC
บรรทัดที่ 28	กล้า	:	OK sorry sorry อ๋อ มุมกลับ ABC นี้ใช่ไหม มุม ABC และมุมกลับ ABC นี่คือมุมกลับของตัวนี้
บรรทัดที่ 29	ก้อง	:	มันก็จะรวมกันได้ 360 องศา
บรรทัดที่ 30	กล้า	:	เอ้อ เอาไหมหละ เอาเลย เอาง่ายๆ ก่อน เราก็เขียนลงไป เขียนว่ามุม
บรรทัดที่ 31	ก้อง,แอ้ม	:	มุม ABC และมุมกลับ ABC รวมกันได้
บรรทัดที่ 32	กล้า	:	นี่คือมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 33	กล้า,ก้อง	:	นี่คือมุมกลับ
บรรทัดที่ 130	กล้า	:	ก็คือเกิดจากจุดสามจุดที่อยู่รอบวงกลม ลากเส้นสองเส้นจากจุดที่นึ่งมายังจุดที่สอง จากจุดที่สามมายังจุดที่สอง อ้าวลองหมุนดู พอ จบ หมุนD หมุนD หมุนF เฉยเลย พอ ดูดีๆ
บรรทัดที่ 133	ก้อง	:	จุดสามจุดอาจเป็นรัศมีก็ได้
บรรทัดที่ 134	กล้า	:	ไม่มีอันไหนเป็นรัศมีเลย เพราะว่ามันไม่ได้มาจากจุดศูนย์กลางไง เอาให้มันได้สักข้อก่อน บอกไปเลยว่า ถ้าความกว้างของส่วนโค้งตรงนี้เพิ่มขึ้นมุมก็จะมีขนาดเพิ่มขึ้นใช่ไหม หรือจะว่ายังไงดี ถ้าเกิด เออมันก็ความกว้างของส่วนโค้งใช่ไหมล่ะ แม่นบ่ อ้าวขยายส่วนโค้งแอน หยุด จ๊บ จบ จบ D ฟับ หมุน E พอ จบ โอ้ ซางมัน พอๆ

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

1. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] พิจารณาการเคลื่อนที่ของมุม ABC และปุ่ม [redacted] เพื่อปรับขนาดของมุม ABC จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

- มุมที่จุดศูนย์กลาง ของวงกลม รวมกัน มุมกลับของวงกลมเท่ากับ 360°
- เราปรับขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง เพิ่มขึ้น มุมกลับจะเล็กลง แต่ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลาง ลดลง มุมกลับจะมีขนาดเพิ่มขึ้น
- มุมที่จุดศูนย์กลาง เกิดจาก การเชื่อมต่อของจุดศูนย์กลาง กับรอยต่อของเส้นสัมผัสของเส้นรอบวง

ภาพที่ 16 งานเขียนกิจกรรมที่ 8 ข้อ 1 ของกลุ่ม AGK[3]

3. ให้นักเรียนคลิกที่การเคลื่อนไหวของจุดต่างๆ เพื่อดูการเคลื่อนที่และลักษณะของมุมในส่วนโค้งของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

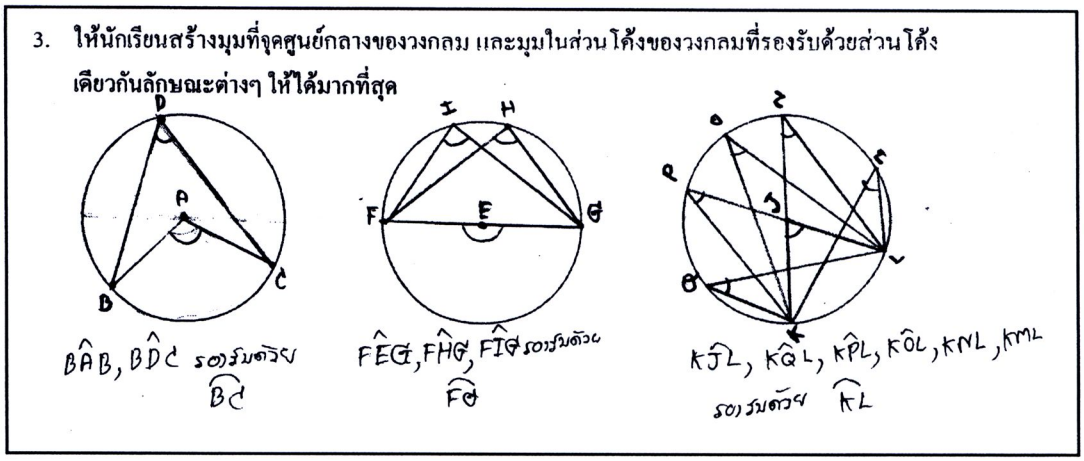
- ที่ส่วนโค้ง ความยาวโค้งของส่วนโค้ง เพิ่มขึ้น มุมในส่วนโค้งก็จะมากขึ้นด้วย
- จุดยอดของมุมในส่วนโค้ง จะอยู่บนเส้นรอบวง
- เส้นรอบวง ในส่วนโค้ง เกิดจาก เส้นสัมผัสกับจุดยอด และจุดสิ้นสุดของเส้นรอบวง ที่มุมจากการสังเกตจุดยอดของมุมที่ส่วนโค้ง

ภาพที่ 17 งานเขียนกิจกรรมที่ 8 ข้อ 3 ของกลุ่ม AGK[3]

5. ให้นักเรียนคลิกที่การเคลื่อนไหวของจุดต่างๆ เพื่อดูการเคลื่อนที่และลักษณะของมุมในครึ่งวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

- มุมในครึ่งวงกลม เกิดจาก เส้นสัมผัสกับจุดยอดมุม และจุดสิ้นสุดของเส้นรอบวง
- จุดยอดมุมในครึ่งวงกลม อยู่บนเส้นรอบวง
- ขนาดของมุมจะไม่เปลี่ยนแปลง ถึงแม้จะมีการเคลื่อนที่

ภาพที่ 18 งานเขียนกิจกรรมที่ 8 ข้อ 4 ของกลุ่ม AGK[3]



ภาพที่ 19 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 3 กลุ่ม AGK[3]

3.1.2.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 8 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

...

บรรทัดที่ 28	แก่น	:	เริ่มเคลื่อนที่จากมุมแหลม มุมฉาก มุมป้าน มุมตรง มุมแหลม มุมฉาก มุมป้าน มุมตรง และมุมกลับ เอาซีหนะ
บรรทัดที่ 29	ก้อย	:	เอาไปเถอะหนะดีกว่าบ่มี
บรรทัดที่ 30	แก่น	:	มุมฉาก มุมป้าน มุมตรงว้าเคยเรียนมาหยุ และมุมกลับ
บรรทัดที่ 31	ก้อย	:	มุมฉากหวา
บรรทัดที่ 32	แก่น	:	หยุดหมุน นาฬิกาใสไปเลย
บรรทัดที่ 33	กิ่ง	:	มุมแหลม มุมฉาก มุมป้าน มุมตรง และมุมกลับ ซำนี่แม่นบ่
บรรทัดที่ 34	ก้อย	:	ไสมุมฉาก บ่เห็นมีมุมฉากเลย
บรรทัดที่ 35	แก่น	:	มุมฉาก มุมป้าน มุมตรง และมุมกลับ
บรรทัดที่ 36	ก้อย	:	หยังต่อ แล้วไง
บรรทัดที่ 37	แก่น	:	แล้วแขนของมุมคือรัศมีของวงกลม แมนบ่
บรรทัดที่ 38	ก้อย	:	อือ แล้ว
บรรทัดที่ 39	แก่น	:	แมนบ่
บรรทัดที่ 40	ก้อย	:	อือ

บรรทัดที่ 41 ...

บรรทัดที่ 42 ก้อย : แก่น หยังนะ แขนของมุมคือรัศมีของวงกลม และจุดศูนย์กลางคือจุดยอดมุม เฮาเขียนไปแล้ว

บรรทัดที่ 43 กิ่ง : จุดศูนย์กลางหยังเกาะ

บรรทัดที่ 44 แก่น : จุดศูนย์กลางของวงกลมดีกว่า

บรรทัดที่ 61 แก่น : ลักษณะของมุมในส่วนโค้งของวงกลม ให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้

บรรทัดที่ 62 ก้อย : แล้วไง

บรรทัดที่ 63 แก่น : ลองดิ๊ เอาใหม่ เอาใหม่ ออกไปเรื่อยๆ จุดเดิม จุดเดิมซิ จุด E หละ เออ จุด E ไปเรื่อยๆ

บรรทัดที่ 64 ก้อย : แล้ว

บรรทัดที่ 65 แก่น : มันเท่าเดิม มุมมันเท่าเดิมบ่ บ่เด้เนาะ

บรรทัดที่ 66 ก้อย : บ่ บ่เท่าเดิม

...

บรรทัดที่ 74 แก่น : ลักษณะของส่วนโค้ง

บรรทัดที่ 75 ก้อย : อยู่ระหว่างส่วนโค้งใช่ไหม

บรรทัดที่ 76 แก่น : ส่วนโค้งDF

บรรทัดที่ 77 ก้อย : อยู่ระหว่างส่วนโค้งเหรอ

...

บรรทัดที่ 111 แก่น : ลักษณะมุม สิเว้าว่าจั๋งได่ เป็นมุมฉากตลอดบ่ เท่าเดิมบ่นี่

บรรทัดที่ 112 ก้อย : เท่าเดิม

บรรทัดที่ 113 แก่น : ลักษณะมุมเท่าเดิมบ่นี่ เหรอ สามเหลี่ยมในวงกลม เคยได้ยิน เคยอ่าน พ้ออยู่นะ สามเหลี่ยมในวงกลม

บรรทัดที่ 114 แก่น : สามเหลี่ยมในวงกลมเด๋นี่ ดูจากมุมแล้วมุมบ่เปลี่ยนเลย

บรรทัดที่ 115 ก้อย : เอาอีหลีบ่นี่ เอาเด้เนาะ

บรรทัดที่ 116 แก่น : ขนาดของมุม MLK เท่าเดิม

บรรทัดที่ 117 ก้อย : บ่เอาสิหาอันใหม่

บรรทัดที่ 118 แก่น : หาอีหยังหละมันหมดแล้ว ข้อ 7 กะมีอีก

บรรทัดที่ 119 กิ่ง : เป็นจั๋งซี้บ่

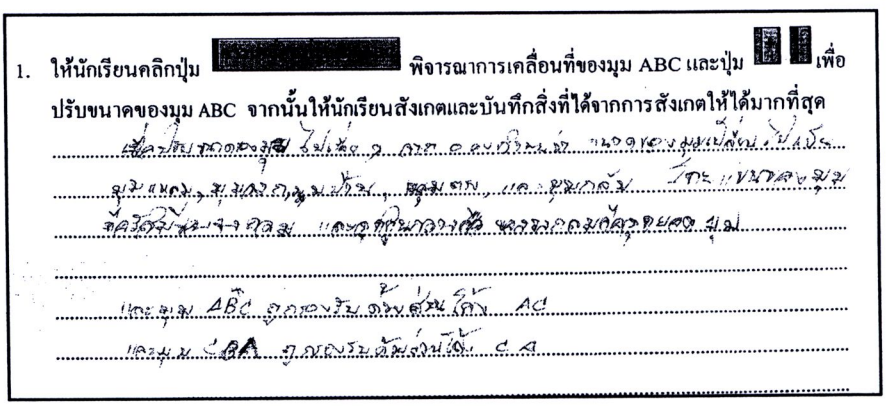
บรรทัดที่ 120 แก่น : KLM

บรรทัดที่ 121 กิ่ง : KML แล่ว

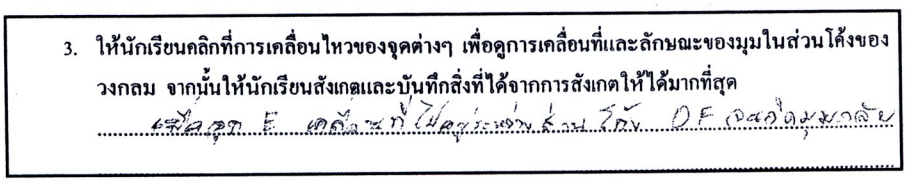
บรรทัดที่ 122 แก่น : มันบ่คือกันเหบาะ จุดยอดหม่องเดียว ขนาดเท่าเดิม

บรรทัดที่ 123 กิ่ง : มีขนาดเท่าเดิมติ

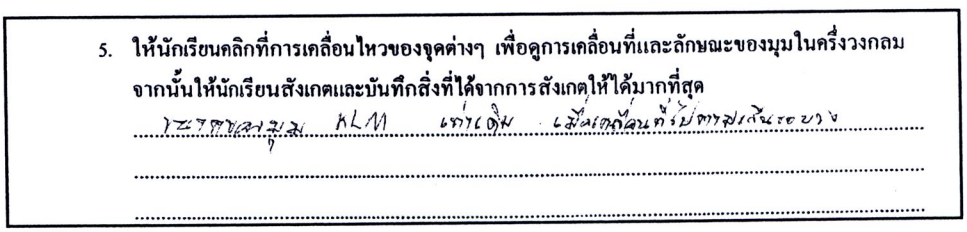
บรรทัดที่ 124 ก้อย : ขนาดของมุมมีขนาดเท่าเดิม



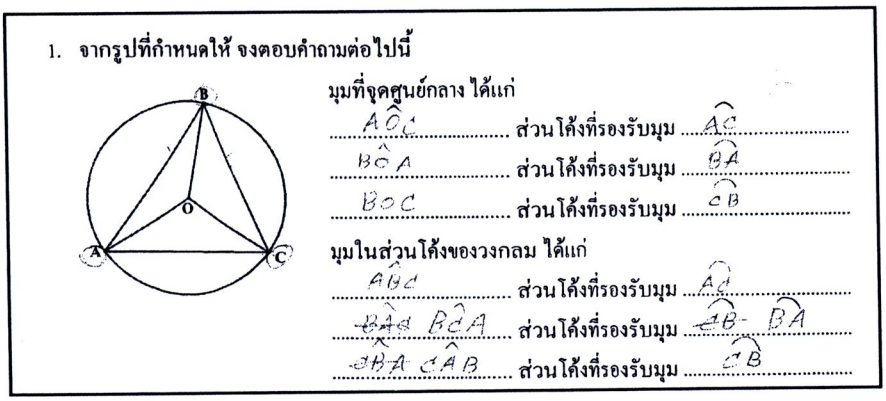
ภาพที่ 20 งานเขียนกิจกรรมที่ 8 ข้อ 1 กลุ่ม Korean Fever



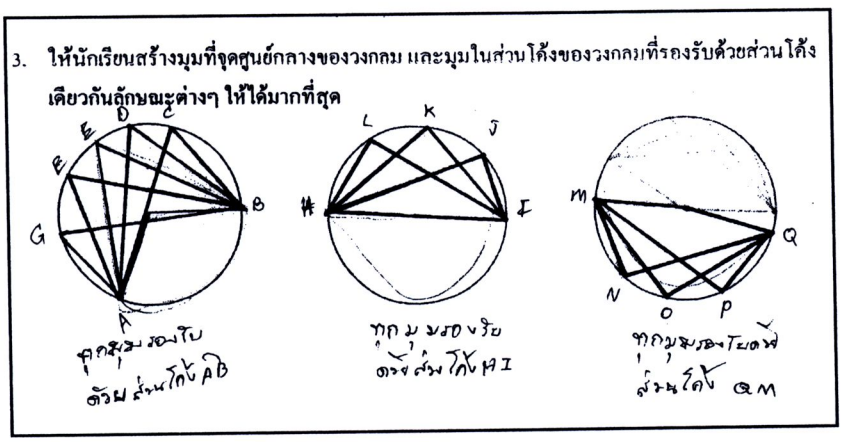
ภาพที่ 21 งานเขียนกิจกรรมที่ 8 ข้อ 3 กลุ่ม Korean Fever



ภาพที่ 22 งานเขียนกิจกรรมที่ 8 ข้อ 5 กลุ่ม Korean Fever



ภาพที่ 23 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 1 กลุ่ม Korean Fever



ภาพที่ 24 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 8 ข้อ 3 กลุ่ม Korean Fever

จากภาพที่ 23 การทำแบบฝึกหัดที่ 8 ข้อที่ 1 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถระบุชื่อมุมที่เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งได้ นั่นคือ นักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)** จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 42 ก้อย พูดว่า " แก่น หยังนะ แขนของมุมคือรัศมีของวงกลม และจุดศูนย์กลางคือจุดยอดมุม เฮาเขียนไปแล้ว" แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถบอกสมบัติของมุมที่จุดศูนย์กลางได้ว่าจุดยอดมุมต้องอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม นั่นคือ นักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์อยู่ในระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)** จากภาพที่ 24 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถนำสมบัติเกี่ยวมุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งและมุมในครึ่งวงกลม มาสร้างมุมที่ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้ เช่น มุมที่จุดศูนย์กลางจุดยอดอยู่ที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้งของวงกลมจุดยอดมุมอยู่บนเส้นรอบวง และมุมในครึ่งวงกลมจุดยอดมุมอยู่บนเส้นรอบวงแขนของมุมตัดที่จุดปลาย

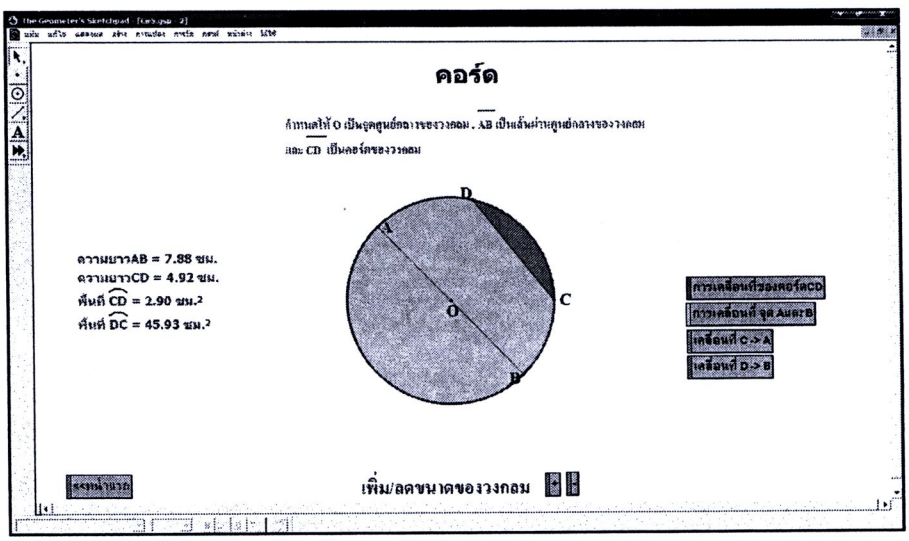
ของเส้นผ่านศูนย์กลาง แสดงให้เห็นว่า**นักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมี**การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น** ดังนี้ จากภาพที่ 24 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถ**นำเสนอมุมที่จุดศูนย์กลางและ มุมในส่วนโค้ง ที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้หลากหลายรูปแบบ**

3.1.3 กิจกรรมที่ 15 เรื่อง คอร์ด วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรบรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) สามารถระบุชื่อคอร์ดได้ ไปสู่การการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis) คือ นักเรียนสามารถบอกลักษณะและสมบัติของคอร์ดได้ เช่น คอร์ดเป็นส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายทั้งข้างอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม คอร์ดตัดกับวงกลมทำให้เกิดส่วนโค้งน้อยและส่วนใหญ่ หรือคอร์ดที่ยาวที่สุดคือ เส้นผ่านศูนย์กลาง คอร์ดของวงกลมวงหนึ่งมีได้หลายเส้น เป็นต้น ผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกิจกรรม ดังต่อไปนี้

<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนเปิดไฟล์ Cir5.gsp แล้วคลิกปุ่ม **คอร์ด**



ภาพที่ 25 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 15 คอร์ด

2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม การเคลื่อนที่ของคอร์ดCD , การเคลื่อนที่ จุด AและB , เคลื่อนที่ C -> A , เคลื่อนที่ D -> B และ + - ถ้าต้องการเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

3. ให้นักเรียนสรุปความรู้ที่ได้เกี่ยวกับคอร์ดให้ได้มากที่สุด

3.1.3.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 15 เรื่อง คอร์ด ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 3	กล้า	:	แล้วคอร์ดคืออะไร
บรรทัดที่ 4	ก้อง	:	คอร์ดมันคือนี่
บรรทัดที่ 5	กล้า	:	ใส
บรรทัดที่ 6	แอ้ม	:	ลองเด้อ
บรรทัดที่ 7	ก้อง	:	การเคลื่อนที่ของคอร์ด เห็นไหม เชื่อไหมล่ะ ก็คอร์ด CD
	...		
บรรทัดที่ 10	กล้า	:	บ่แมน ถามว่าลักษณะของคอร์ดเป็นยังไงมันก็เป็นเส้นตรงที่
บรรทัดที่ 11	ก้อง	:	แบ่ง
บรรทัดที่ 12	กล้า	:	มันตัดวงกลมที่จุด D และจุด C ก็เลยเป็นเส้น
บรรทัดที่ 13	แอ้ม	:	ตอนแรกกะบ่ได้ตัดเด้หล่ะ
บรรทัดที่ 14	กล้า	:	ก็รู้อยู่ว่ามันไม่ได้ตัด มันก็เป็น มันมีจุด
บรรทัดที่ 15	ครู	:	เขาเรียกว่าอะไรคะ มันส่วนของเส้นตรงใช่ไหมคะเพราะมันมีจุดปลายสองจุด
บรรทัดที่ 16	ก้อง	:	มันตัดวงกลมไหม
บรรทัดที่ 17	กล้า	:	ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลม
บรรทัดที่ 19	กล้า	:	เคลื่อนที่ CA ส่วนของ CD ลดลงก็แมนล่ะเนาะ
บรรทัดที่ 20	ก้อง	:	ถ้าเพิ่มขึ้นมันก็เพิ่มขึ้น ถ้าลดมันก็มีขนาดลดลง
บรรทัดที่ 21	กล้า	:	มันกะแมนว่ำ คอร์ดมันคือเส้นตรง
บรรทัดที่ 22	ก้อง	:	ส่วนของเส้นตรงที่ลากตัด
บรรทัดที่ 23	กล้า	:	ที่ลากผ่านวงกลม

บรรทัดที่ 24 ก้อง : ที่ลากตัด
บรรทัดที่ 25 กล้า : แล้วก็มีจุด จุดหยังเกาะ จุดยอดอยู่ที่เส้นรอบวง
บรรทัดที่ 26 ก้อง : จุดยอดทั้งสอง
บรรทัดที่ 27 กล้า : เอาบ่หล่ะ
บรรทัดที่ 28 ก้อง : บ่ฮู้ดอก มันคือสิ่งที่ได้จากการสังเกต
บรรทัดที่ 29 แอ้ม : แล้วคอร์ดมันคือหยัง
บรรทัดที่ 30 กล้า : ก็ยังไม่รู้ว่าคอร์ดคืออะไร
บรรทัดที่ 31 ...
บรรทัดที่ 32 กล้า : ลักษณะของคอร์ดก็คือเป็นเส้นตรง ที่ลากผ่านวงกลม
บรรทัดที่ 33 ก้อง : ส่วนของเส้นตรง
บรรทัดที่ 34 กล้า : OK
บรรทัดที่ 35 ก้อง : ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่าน ต้องเขียนด้วยไหมว่าคอร์ด
บรรทัดที่ 36 กล้า : บ่เป็นหยังครูให่เขียนลงไปเลย
บรรทัดที่ 37 ...
บรรทัดที่ 38 กล้า : ลักษณะของคอร์ดเป็นเส้นตรง เป็นส่วนของเส้นตรงใช่ไหม เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลม ที่ลากตัดหรือลากผ่าน ลากผ่านวงกลมเนาะแล้วก็มีจุดยอดอยู่ทั้งสองข้าง
บรรทัดที่ 39 กล้า ,ก้อง : ที่ลากผ่าน
บรรทัดที่ 40 กล้า : วงกลม แล้วก็จุดยอดทั้งสองอยู่บนเส้นรอบวง จุดทั้งสองอยู่บนเส้นรอบวง OK คอร์ด คือส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลม จุดยอดทั้งสองอยู่บนเส้นรอบวง แล้วก็ ลองเพิ่มขนาดของวงกลมซิ ถ้าเกิดวงกลม ความยาวของคอร์ดยาวขึ้น
บรรทัดที่ 41 ก้อง : แสดงว่าคอร์ดอยู่บนพื้นผิว
บรรทัดที่ 42 กล้า : คอร์ดอยู่ในวงกลมนั่นแหละ
บรรทัดที่ 43 ครู : ถ้านักเรียนดูการเคลื่อนที่ของคอร์ด ถ้านักเรียนสังเกตดูการเคลื่อนที่ มันบ่งบอกถึงอะไร คอร์ดจะอยู่ตำแหน่งนี้ตำแหน่งเดียวไหม คอร์ดของวงกลมจะมีได้กี่เส้น
บรรทัดที่ 44 กล้า : คอร์ดของวงกลมก็มีได้หลายเส้นหวะเนาะ
บรรทัดที่ 45 ก้อง : เขาว่าน่าจะมีเส้นเดียวนะ กล้า

บรรทัดที่ 46	กล้า	:	ใส รัศมีคิดว่ามีเส้นเดียวยังมีได้หลายเส้นเลย เอาดูการเคลื่อนที่มันเคลื่อนที่มาบ่องนี่มันกะเป็นคอร์ดอยู่ดี
บรรทัดที่ 47	แอ้ม	:	มันกะมีหลายเส้น ก้อง
บรรทัดที่ 48	ก้อง	:	เขาว่ามันมีเส้นเดียวถ้ามันมีเยอะมันก็ตัดวงกลม
บรรทัดที่ 49	กล้า	:	เอา คอร์ดมันกะตัดอยู่แล้ว
บรรทัดที่ 50	แอ้ม	:	เอามีหลายเส้นนี่แหละ
บรรทัดที่ 51	กล้า	:	คอร์ดของวงกลม
บรรทัดที่ 52	ก้อง	:	มีหนึ่งเส้น
บรรทัดที่ 53	แอ้ม	:	มีหลายเส้นแหละเนาะ ทั้งสีเขียว
บรรทัดที่ 54	กล้า	:	ทางสีเขียวนี่เป็นคอร์ดหมดเลยเด๋ ก้อง
บรรทัดที่ 55	แอ้ม	:	ลองคลิกเบิ่ง นี่เค้าลองคลิกเบิ่ง เอาหลายเส้นบ่
บรรทัดที่ 56	กล้า	:	หลายเส้น ถ้าเคลื่อนที่ของคอร์ด CD
บรรทัดที่ 57	...		
บรรทัดที่ 58	กล้า	:	ถ้าคอร์ดมีความยาวเพิ่มขึ้น ส่วนโค้งก็จะมีความยาวเพิ่มขึ้นด้วยใช่ไหม
บรรทัดที่ 59	ก้อง	:	เออ
บรรทัดที่ 60	กล้า	:	ถ้าคอร์ดลดลงส่วนโค้งก็จะลดลง ถ้าคอร์ดเพิ่มขึ้นส่วนโค้งก็จะเพิ่มขึ้น

จากโปรโตคอลที่ 6 บรรทัดที่ 3 - 7 กล้า พูดว่า “แล้วคอร์ดคืออะไร” ก้อง ตอบว่า “คอร์ดมันคือนี่” จากนั้น แอ้ม คลิกที่ปุ่มการเคลื่อนที่ของคอร์ด แล้ว ก้อง พูดว่า “การเคลื่อนที่ของคอร์ด เห็นไหม เชื่อไหมล่ะ ก็คอร์ด CD” แสดงว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)** จากโปรโตคอลที่ 6 บรรทัดที่ 38 - 40 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถสรุปลักษณะเฉพาะของคอร์ดได้ว่า คอร์ด คือ ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลม จุดยอดทั้งสองอยู่บนเส้นรอบวง บรรทัดที่ 43-60 ครู พูดว่า “ถ้านักเรียนดูการเคลื่อนที่ของคอร์ด ถ้านักเรียนสังเกตดูการเคลื่อนที่ มันบ่งบอกถึงอะไร คอร์ดจะอยู่ตำแหน่งนี้ตำแหน่งเดียวไหม คอร์ดของวงกลมจะมีได้กี่เส้น” กล้า และ แอ้ม ตอบว่า “มีหลายเส้น” ส่วน ก้อง บอกว่ามีเส้นเดียว โดยให้เหตุผลว่าถ้ามีเยอะมันจะตัดวงกลม จากนั้น แอ้ม คลิกปุ่ม

เพื่อให้เพื่อนดูการเคลื่อนที่ของคอร์ด CD จะเกิดพื้นสีเขียว ซึ่งพื้นที่สีเขียวในแนวคิดของ แอ้ม คือ มีคอร์ดจำนวนมาก จนในที่สุด ก้อง ซึ่งจะเห็นได้จากโปรโตคอลบรรทัดที่

59 ก้อง พูดว่า "เออ" แสดงว่า ก้อง ยอมรับแนวคิดเพื่อนว่าคอร์ดของวงกลมมีได้หลายเส้น แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ โปรโตคอล บรรทัดที่ 32 – 34 จากที่ กล้า พูดว่า "ลักษณะของคอร์ดก็คือเป็นเส้นตรง ที่ลากผ่านวงกลม" ก้อง พูดแย้งขึ้นมาทันทีว่า "ส่วนของเส้นตรง" แสดงให้เห็นว่า ก้อง **สามารถบอกได้ว่าแนวคิดของ กล้า ผิดที่ถูกคืออะไร** แล้ว กล้า พูดว่า OK. แสดงให้เห็นว่า กล้า ก็ยอมรับในแนวคิด ก้อง ว่าแนวคิดของ ก้อง ถูก โปรโตคอล บรรทัดที่ 43 – 59 แสดงถึงการอภิปรายเกี่ยวกับจำนวนของคอร์ด บรรทัดที่ 43 ครู พูดว่า "ถ้านักเรียนดูการเคลื่อนที่ของคอร์ด ถ้านักเรียนสังเกตดูการเคลื่อนที่ มันบ่งบอกถึงอะไร คอร์ดจะอยู่ตำแหน่งนี้ตำแหน่งเดียวไหม คอร์ดของวงกลมจะมีได้กี่เส้น" กล้า และ แอ้ม ตอบว่า "มีหลายเส้น" ส่วน ก้อง บอกว่ามีเส้นเดียว โดยให้เหตุผลว่าถ้ามีเยอะมันจะตัดวงกลม จากนั้นนักเรียนก็ได้มีการอภิปราย ถกเถียงกัน จนในที่สุด ก้อง จึงยอมรับแนวคิดเพื่อนว่าคอร์ดของวงกลมมีได้หลายเส้น แสดงให้เห็นว่า จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 46 กล้า พูดว่า " ไส รัศมีคิดว่ามีเส้นเดียวยังมีได้หลายเส้นเลย เอาดูการเคลื่อนที่มันเคลื่อนที่มาหม่องนี่มันกะเป็นคอร์ดอยู่ดี" แสดงให้เห็นว่า กล้า **ใช้แนวคิดเดิมเกี่ยวกับรัศมีที่เคยเรียนมาในกิจกรรมที่ 6 มาใช้ในการแก้ปัญหา**โดยสังเกตจากการเคลื่อนที่ของคอร์ด จากภาพที่ 15 เป็นการทำกิจกรรมที่ 15 ข้อที่ 2 นักเรียนสามารถสังเกตและบันทึก**แนวคิดเกี่ยวกับสมบัติของคอร์ดได้หลากหลาย** เช่น ลักษณะของคอร์ด เป็นส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่านวงกลมโดยปลายทั้งสองอยู่บนเส้นรอบวง, คอร์ดของวงกลมมีได้หลายเส้น, คอร์ดจะแบ่งส่วนโค้งออกเป็นสองส่วน เป็นต้น

บรรทัดที่ 32	กล้า	:	ลักษณะของคอร์ดก็คือเป็นเส้นตรง ที่ลากผ่านวงกลม
บรรทัดที่ 33	ก้อง	:	ส่วนของเส้นตรง
บรรทัดที่ 34	กล้า	:	OK
บรรทัดที่ 35	ก้อง	:	ส่วนของเส้นตรงที่ลากผ่าน ต้องเขียนด้วยไหมว่าคอร์ด
	...		
บรรทัดที่ 43	ครู	:	ถ้านักเรียนดูการเคลื่อนที่ของคอร์ด ถ้านักเรียนสังเกตดูการเคลื่อนที่ มันบ่งบอกถึงอะไร คอร์ดจะอยู่ตำแหน่งนี้ตำแหน่งเดียวไหม คอร์ดของวงกลมจะมีได้กี่เส้น
บรรทัดที่ 44	กล้า	:	คอร์ดของวงกลมก็มีได้หลายเส้นหวะเนาะ
บรรทัดที่ 45	ก้อง	:	เขาว่าน่าจะมีเส้นเดียวนะ กล้า

บรรทัดที่ 46 กล้า : ไส รัศมีคิดว่ามีเส้นเดียวยังมีได้หลายเส้นเลย เอาดูการเคลื่อนที่มันเคลื่อนที่มาหม่องนี่มันกะเป็นคอร์ดอยู่ดี

บรรทัดที่ 47 แอ้ม : มันกะมีหลายเส้น ก้อง

บรรทัดที่ 48 ก้อง : เขาว่ามันมีเส้นเดียวถ้ามันมีเยอะมันก็ตัดวงกลม

บรรทัดที่ 49 กล้า : เอา คอร์ดมันกะตัดอยู่แล้ว

บรรทัดที่ 50 แอ้ม : เอามีหลายเส้นนี่แหละ

บรรทัดที่ 51 กล้า : คอร์ดของวงกลม

บรรทัดที่ 52 ก้อง : มีหนึ่งเส้น

บรรทัดที่ 53 แอ้ม : มีหลายเส้นแหละเนาะ ทั้งสีเขียว

บรรทัดที่ 54 กล้า : ทางสีเขียวนี่เป็นคอร์ดหมดเลยเด๋ ก้อง

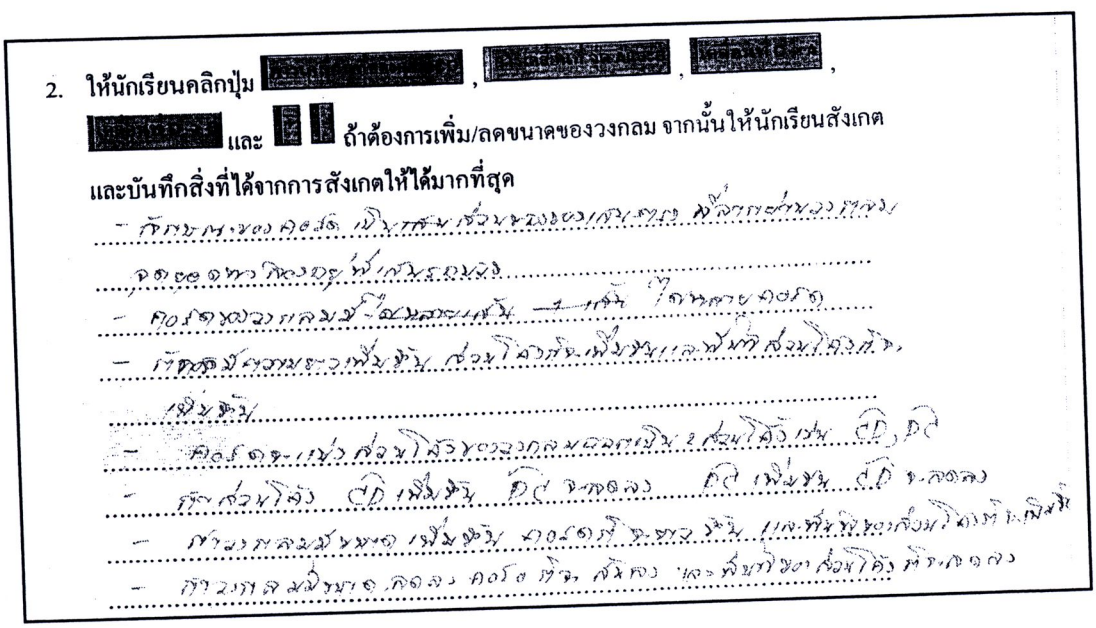
บรรทัดที่ 55 แอ้ม : ลองคลิกเบิง นี่เค้าลองคลิกเบิง เอาหลายเส้นบ่

บรรทัดที่ 56 กล้า : หลายเส้น ถ้าเคลื่อนที่ของคอร์ด CD

บรรทัดที่ 57 ...

บรรทัดที่ 58 กล้า : ถ้าคอร์ดมีความยาวเพิ่มขึ้น ส่วนโค้งก็จะมีความยาวเพิ่มขึ้นด้วยใช่ไหม

บรรทัดที่ 59 ก้อง : เออ


2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted], [redacted], [redacted], [redacted] และ [redacted] ถ้าต้องการเพิ่ม/ลดขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกตให้ได้มากที่สุด

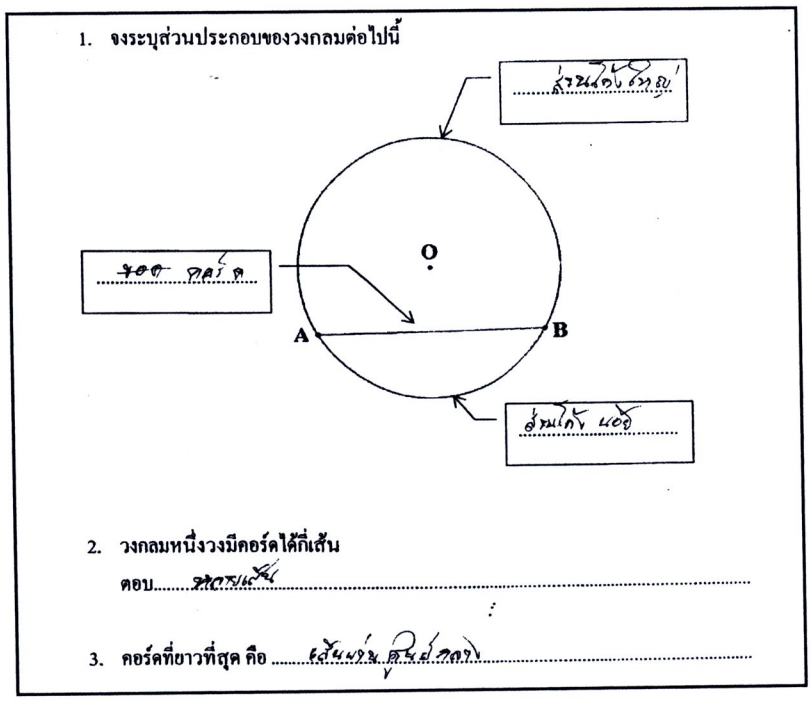
ภาพที่ 26 งานเขียนกิจกรรมที่ 15 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 1 **AGK**[3]

3.1.3.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 15 เรื่อง คอร์ด ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 1	แก่น	:	ถ้ากดเพิ่มหรือลดขนาดของวงกลม เมื่อคลิกที่เพิ่มขนาดของวงกลม
บรรทัดที่ 2	ก้อย	:	พื้นที่ของมันจะเพิ่มหรือลดตามไปด้วยใช่ไหม
บรรทัดที่ 3	แก่น	:	วงกลมจะใหญ่ขึ้น
บรรทัดที่ 4	...		
บรรทัดที่ 5	แก่น	:	เมื่อการเคลื่อนที่ของคอร์ด CD คอร์ด CD เคลื่อนที่ พื้นที่สีฟ้าจะกินพื้นที่สีเหลืองไปเรื่อยๆ โอ๊ะสีเขียว
บรรทัดที่ 6	...		
บรรทัดที่ 7	แก่น	:	นั่นๆ เดี๋ยวมันต้องมีหม่องใดสัมพันธ์กัน ซางมัน บ่มี
บรรทัดที่ 8	ก้อย	:	C นี่เด๋
บรรทัดที่ 9	แก่น	:	เดี๋ยวๆ เมื่อคลิกการเคลื่อนที่ของคอร์ด CD ความยาวของ CD จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามส่วนโค้งของวงกลม ได้แล้วอันหนึ่ง
บรรทัดที่ 10	ก้อย	:	เมื่อเพิ่มหรือลด
บรรทัดที่ 11	แก่น	:	เมื่อเคลื่อนที่คอร์ด CD นั่นเด๋
บรรทัดที่ 12	...		
บรรทัดที่ 13	แก่น	:	เมื่อคอร์ด CD เคลื่อนที่ผ่านเส้นผ่านศูนย์กลาง พื้นที่จะลดลง เมื่อยังไม่ถึงเส้นผ่านศูนย์กลางพื้นที่จะเพิ่มขึ้น
บรรทัดที่ 14	...		
บรรทัดที่ 15	แก่น	:	เมื่อ CD มีขนาดลดลง DC จะมีขนาดเพิ่มขึ้น คอร์ดนำดีกว่า
บรรทัดที่ 16	...		
บรรทัดที่ 17	แก่น	:	เมื่อเคลื่อนที่ไป AB ความยาวของ AB ก็ยังเท่าเดิมเพราะ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม เมื่อขนาดของวงกลมเพิ่มขึ้นความยาวของ AB ก็จะเพิ่มขึ้นตามขนาด

ของวงกลมที่เพิ่มขึ้น



ภาพที่ 27 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 15 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

จากภาพที่ 27 นักเรียนสามารถบอกได้ว่าส่วนของเส้นตรง AB คือ คอร์ด แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตศาสตร์ระดับ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)** จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 19 แก่นพูดว่า "เดี๋ยวๆ เมื่อคลิกการเคลื่อนที่ของคอร์ด CD ความยาวของ CD จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงตามส่วนโค้งของวงกลม ได้แล้วอันหนึ่ง" จากคำพูดของแก่นแสดงว่าแก่นสมบัติของคอร์ดที่ว่าคอร์ดจะแบ่งส่วนโค้งออกเป็นสองส่วน จากการทำแบบฝึกหัดที่ 15 ข้อ 2 นักเรียนสามารถบอกได้ว่าวงกลมหนึ่งวงมีคอร์ดได้หลายเส้น และข้อ 3 นักเรียนสามารถบอกได้ว่าคอร์ดที่ยาวที่สุดคือเส้นผ่านศูนย์กลาง ดังภาพที่ 27 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 การวิเคราะห์ (Analysis)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากการทำแบบฝึกหัดที่ 15 ข้อ 1 จากแก่นพูดว่า "เขาเอ้นอีหยังเกาะ" ก้อยตอบว่า "เส้นรอบวง" แก่นพูดแย้งก้อยว่า "ส่วนโค้งใหญ่ คอร์ดแบ่งส่วนโค้งออกเป็นสองส่วน ส่วนโค้งใหญ่ ส่วนโค้งเล็ก" แสดงให้เห็นว่าแก่น**สามารถอธิบายแนวคิดของก้อยได้ว่าแนวคิดของก้อยไม่ถูก**สำหรับเรื่องนี้ โดยอธิบายว่าคอร์ดแบ่งส่วนโค้งออกเป็นสองส่วน ส่วนโค้งใหญ่ ส่วนโค้งเล็ก และจากการทำแบบฝึกหัดที่ 15 ข้อ 2 นักเรียน

สามารถบอกได้ว่าวงกลมหนึ่งวงมีคอร์ดได้หลายเส้นได้อย่างทันทีทันใด เพราะนักเรียนเคยตอบคำถามในลักษณะนี้เกี่ยวกับรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลางมาแล้ว แสดงให้เห็นว่านักเรียน**มีการนำความรู้เดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการหาคำตอบ**

โปรโตคอลการทำกิจกรรมที่ 15 ข้อ 1

บรรทัดที่ 1	แก่น	:	โอ๋ อันนี่กะได่เลยนี่
บรรทัดที่ 2	...		
บรรทัดที่ 3	แก่น	:	อีหยังเกาะ เขาเอิ้นว่า
บรรทัดที่ 4	ก้อย	:	เส้นรอบวง
บรรทัดที่ 5	แก่น	:	ส่วนโค้งใหญ่ คอร์ดแบ่งส่วนโค้งออกเป็นสองส่วน ส่วนโค้งใหญ่ ส่วนโค้งเล็ก

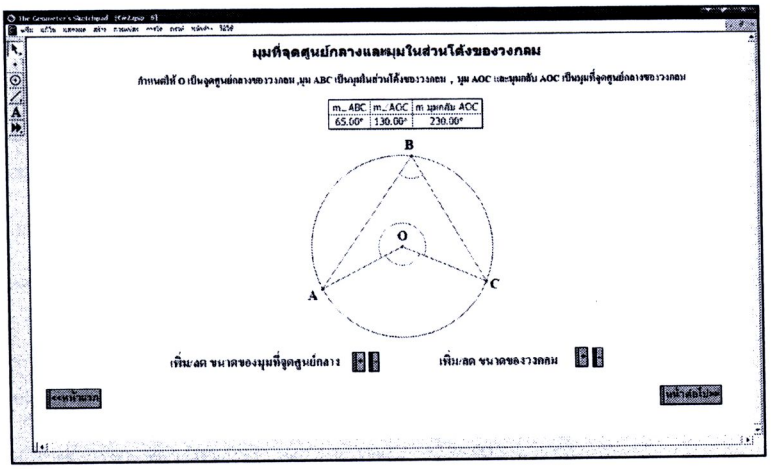
3.2 กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3

3.2.1 กิจกรรมที่ 9 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) คือ นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันหรือเท่ากันได้ ซึ่งมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามใบกิจกรรมดังนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนเปิดไฟล์ Cir2.gsp / ความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

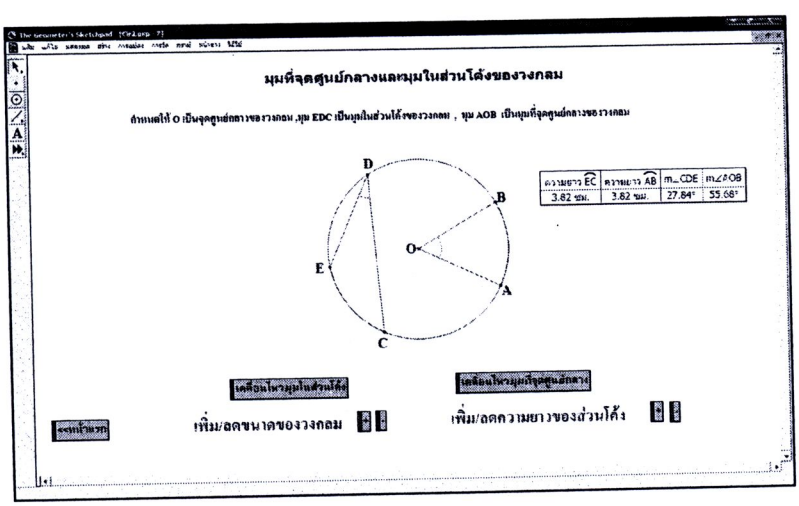
หน้าที่ 1 วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) คือ นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน



ภาพที่ 28 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 9 ความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้ง หน้าที่ 1

2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม เพื่อปรับเพิ่ม/ลดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้
3. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม

<u>หน้าที่ 2</u> วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) คือ นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเท่ากัน



ภาพที่ 29 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 9 ความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้ง หน้าที่ 2

4. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม เพื่อปรับเพิ่ม/ลดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้ง หรือคลิกปุ่ม และ เพื่อเคลื่อนไหวมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้ง จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกขนาดของมุม

5. จากกิจกรรมข้อ 2-4 นักเรียนคิดว่ามุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน หรือมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากันมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

6. สรุปความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันหรือมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากัน

3.2.1.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 9 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

นักเรียนจดบันทึกขนาดของมุมในข้อ 2 และข้อ 4 จากนั้นนักเรียนร่วมกันทำกิจกรรมข้อ 5

บรรทัดที่ 1 ก้อง : คลิกย้อนกลับไปดู ไฟล์ cir2 เพื่อจะดูมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมในครึ่งวงกลม

บรรทัดที่ 2 ครู : ดูสิ่งที่หามาสิ

บรรทัดที่ 3 กล้า : อ้อก้อง (กล้าชี้ที่หน้าจอ) นี่ไงมุมที่จุดศูนย์กลางสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง

บรรทัดที่ 4 ...

บรรทัดที่ 5 กล้า : แม่นก้อง เบิงเด้อก้อง (แล้ว กล้า ก็ชี้ไปที่หน้าจอ) มุม AOC เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางใช่ไหม และ ABC คือมุมในส่วนโค้ง แต่ว่าในขณะที่เราเอา AOC คูณด้วย 2 มันจะเท่ากับมุม AOC นั่นแสดงว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] เพื่อปรับเพิ่ม/ลดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้

ขนาดของมุม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
AB̂C	72.50°	80.00°	90.00°	100.00°	65.00°
AÔC	145.00°	160.00°	180.00°	140.00	130.00°
มุมกลับ AOC	215.00°	200.00°	180.00	200.00	230.00
2(AB̂C)	146.00	160.00°	180.00°	200.00	130.00°

ภาพที่ 30 งานเขียนกิจกรรมที่ 9 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

4. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] เพื่อปรับเพิ่ม/ลดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้ง หรือคลิกปุ่ม [redacted] และ [redacted] เพื่อเคลื่อนไหวมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้ง จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้

ขนาดของมุม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
AÔB	70.08°	68.54°	44.30°	100.13°	131.76°
EDC	35.04°	34.27°	22.15°	72.07°	65.88°
ความยาวของส่วนโค้ง EC	5.10 ซม.	5.34 ซม.	2.08 ซม.	13.11 ซม.	8.33 ซม.
ความยาวของส่วนโค้ง AB	5.10 ซม.	5.34 ซม.	2.08 ซม.	13.11 ซม.	8.33 ซม.
2(EDC)	70.08°	68.54°	44.30°	144.14°	131.76°

5. จากกิจกรรมข้อ 2-4 นักเรียนคิดว่ามุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน หรือมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากันมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

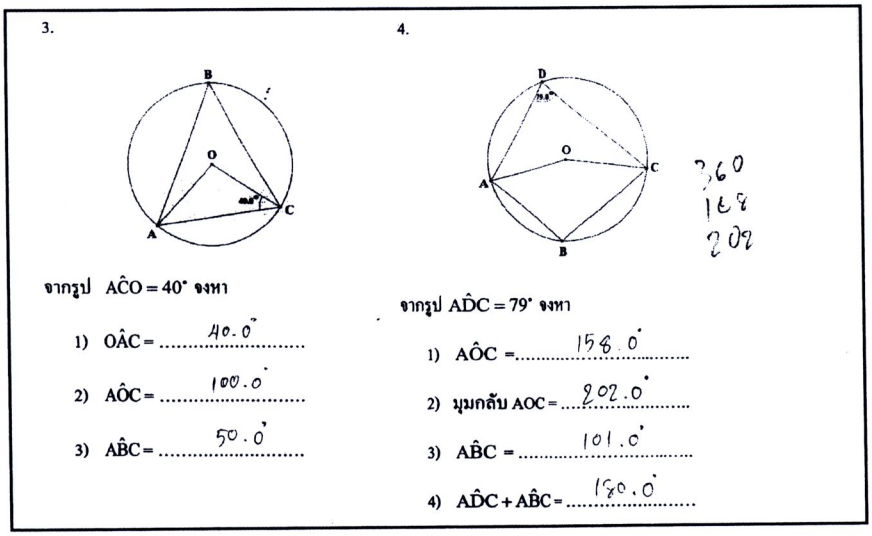
– มุมที่จุดศูนย์กลาง เป็น 2 เท่าของ มุมในส่วนโค้งของวงกลม ที่รองรอยเดียวกัน ไม่เท่ากัน

ภาพที่ 31 งานเขียนกิจกรรมที่ 9 ข้อ 4-5 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

จากการทำกิจกรรมข้อ 2 และข้อ 4 นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] ปรับขนาดของมุมและจดบันทึกขนาดของมุม ดังภาพที่ 30 และภาพที่ 31 นักเรียนสามารถสรุปความสัมพันธ์ได้ว่า มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ดังปรากฏในภาพที่ 31 ข้อ 5 และโปรโตคอลบรรทัดที่ 3 ที่กล้าพูดว่า “อ้อก้อง (กล้าชี้ที่หน้าจอ) นี่ไง มุมที่จุดศูนย์กลางสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง” แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ

3 **การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 3 ที่กล้าพูดว่า "อ้อก้อง (กล้าชี้ที่หน้าจอ) นี่ไงมุมที่จุดศูนย์กลางสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง" จากคำพูดของกล้าที่ว่าอ้อพร้อมทั้งชี้ไปที่หน้าจอคอมพิวเตอร์ แสดงให้เห็นว่ากล้ามี**สมมติฐานของปัญหาเกิดขึ้น**ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และจากโปรโตคอลบรรทัดที่ 5 ที่กล้าพูดว่า "แม่นก้อง เบิงเด้อก้อง (แล้ว กล้า ก็ชี้ไปที่หน้าจอ) มุม AOC เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางใช่ไหม และ ABC คือมุมในส่วนโค้ง แต่ว่าในขณะที่เราเอา AOC คูณด้วย 2 มันจะเท่ากับมุม AOC นั่นแสดงว่ามุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง" แสดงให้เห็นว่าหลังจากที่กล้าพูดว่า อ้อก้อง (กล้าชี้ที่หน้าจอ) นี่ไงมุมที่จุดศูนย์กลางสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง กล้าได้มีการคิดและทบทวนแนวคิดของตนเอง จนในที่สุดก็มั่นใจในคำตอบดังปรากฏในโปรโตคอลบรรทัดที่ 5 และจากการทำแบบฝึกหัดที่ 9 ซึ่งเป็นการนำทฤษฎีไปใช้ ดังภาพที่19 ข้อ 3 ในการหาค่าของมุม ABC นักเรียนหาโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า มุมในส่วนโค้ง = มุมที่จุดศูนย์กลาง ÷ 2 และ จากแบบฝึกหัดข้อ 4 ในการหาค่าของมุม AOC นักเรียนหาโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2(มุมในส่วนโค้ง) แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันทั้งทางตรงและย้อนกลับได้** และจากแบบฝึกหัดข้อ 3 ในการหาค่าของมุม AOC นักเรียนต้องใช้ความรู้ เรื่อง รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะมีขนาดเท่ากัน ดังนั้นจึงได้ว่าขนาดของมุม OAC = 40 องศา และการหาขนาดของมุม AOC นักเรียนต้องใช้ความรู้ เรื่องผลบวกของมุมภายในเท่ากับ 180 องศา ดังนั้น ผลรวมของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากับ 80 องศา จะได้ว่าขนาดของมุม AOC = 100 องศา แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการแก้ปัญหาในเรื่องใหม่ได้**



ภาพที่ 32 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 9 ข้อ 3-4 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

3.2.1.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 9 เรื่อง ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

นักเรียนจดบันทึกขนาดของมุมในข้อ 2 และข้อ 4 จากนั้นนักเรียนร่วมกันทำกิจกรรมข้อ 5

บรรทัดที่ 1	ก้อย	:	คลิกปุ่ม ปรับขนาดของมุม
บรรทัดที่ 2	แก่น	:	นี่ ตัวนี่กับโตนี่เท่ากัน (พร้อมชี้หน้าจอเพื่อนดู) เอาลองคลิกเบิ้ง 45 45 คูณ 2 เป็น 90 หนะ นั่นๆ
บรรทัดที่ 3	...		แก่นย้อนกลับไปดูการบันทึกกิจกรรมในข้อที่ 2
บรรทัดที่ 4	แก่น	:	130 นั่นๆ ไอ้นี่ก็เท่ากัน
บรรทัดที่ 5	ก้อย	:	ก็เท่ากัน
บรรทัดที่ 6	แก่น		AOC จากกิจกรรมข้อ 2 ถึง 4
บรรทัดที่ 7	...		เพื่อนในกลุ่มย้อนกลับไปดูการบันทึกกิจกรรมในข้อที่ 2
บรรทัดที่ 8	ก้อย	:	AOC เท่ากับ
บรรทัดที่ 9	แก่น	:	สอง ABC
บรรทัดที่ 10	ก้อย	:	เออ จริงๆ

บรรทัดที่ 11 ...

บรรทัดที่ 12 แก่น : มุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ 2 เท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน

2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] เพื่อปรับเพิ่ม/ลดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและขนาดของวงกลม จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้

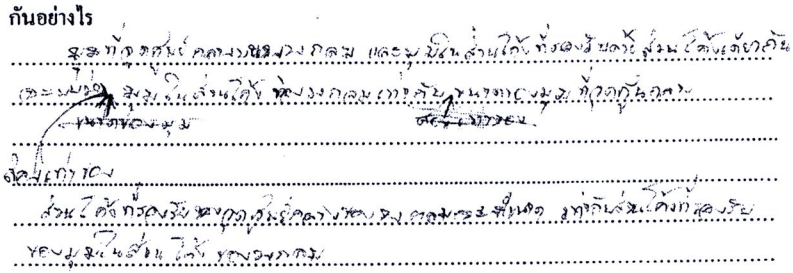
ขนาดของมุม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
AB̂C	65°	57.50°	60°	85	105
AÔC	130	115°	120	170	150
มุมกลับ AOC	230	245°	240	190	210
2(AB̂C)	130	115.0°	120	170	210

ภาพที่ 33 งานเขียนกิจกรรมที่ 9 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

4. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] เพื่อปรับเพิ่ม/ลดขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้ง หรือคลิกปุ่ม [redacted] และ [redacted] เพื่อเคลื่อนไหวมุมที่จุดศูนย์กลางและความยาวของส่วนโค้ง จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้

ขนาดของมุม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
AÔB	55.68°	116.70°	159.65°	33.14°	64.98°
EÔC	27.84°	58.35°	79.82°	16.57°	32.49°
ความยาวของส่วนโค้ง EC	3.82°	7.24°	9.90°	20.28°	4.03°
ความยาวของส่วนโค้ง AB	3.82°	7.24°	9.90°	20.25°	4.03°
2(EÔC)	55.68°	116.70°	159.64°	23.14°	64.98°

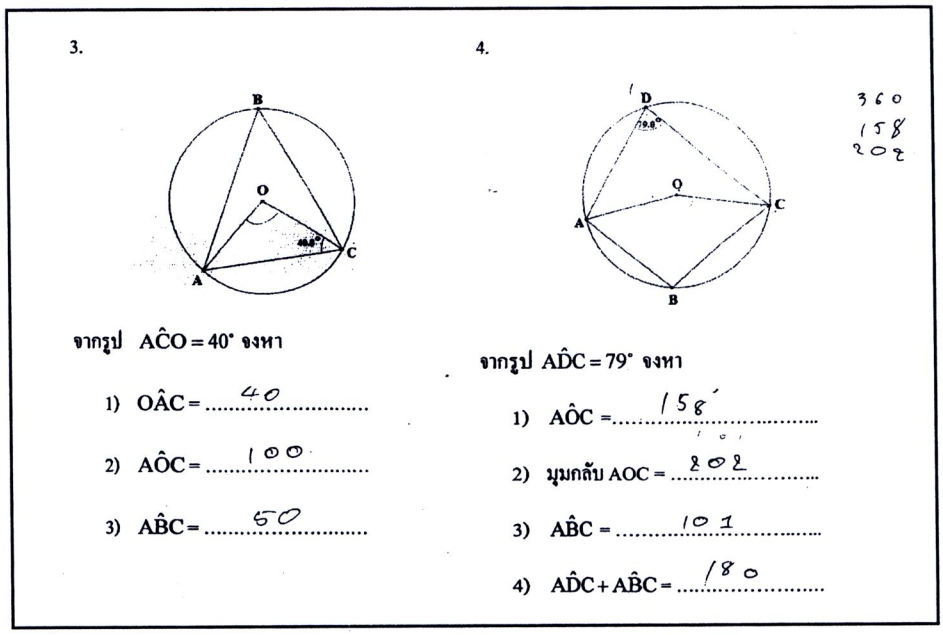
5. จากกิจกรรมข้อ 2-4 นักเรียนคิดว่ามุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน หรือมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่เท่ากันมีความสัมพันธ์กันอย่างไร



ภาพที่ 34 งานเขียนกิจกรรมที่ 9 ข้อ 4-5 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

จากการทำกิจกรรมข้อ 2 และข้อ 4 นักเรียนคลิกปุ่ม ปรับขนาดของมุมและจดบันทึกขนาดของมุม ดังภาพที่ 33 และภาพที่ 34 นักเรียนสามารถสรุปความสัมพันธ์ได้ว่า มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ดังปรากฏในภาพที่ 34 ข้อ 5 และโปรโตคอลบรรทัดที่ 12 ที่แก่นพูดว่า "มุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ 2 เท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน" แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 **การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 2 ที่แก่นพูดว่า "นี่ ตัวนี่กับโตนี่เท่ากัน (พร้อมชี้หน้าจอเพื่อนดู) เอาลองคลิกเบิ้ง 45 45 คูณ 2 เป็น 90 หนะ นั่นๆ" จากนั่นแก่นย้อนกลับไปดูการบันทึกกิจกรรมในข้อ 2 จากบรรทัดที่ 4 แก่นพูดว่า "130 นั่นๆ ไอ้นี่ก็เท่ากัน" และในบรรทัดที่ 12 แก่นพูดว่า "มุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ 2 เท่าของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมเดียวกัน" แสดงให้เห็นว่าในโปรตคอลบรรทัดที่ 2 ที่แก่นพูดว่า "นี่ ตัวนี่กับโตนี่เท่ากัน (พร้อมชี้หน้าจอเพื่อนดู) เอาลองคลิกเบิ้ง 45 45 คูณ 2 เป็น 90 หนะ นั่นๆ" แก่นมี**สมมติฐานของปัญหาเกิดขึ้น**ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และจากโปรโตคอลบรรทัดที่ 10 ก้อยพูดว่า "เออ จริง จริง" แสดงให้เห็นว่าก้อย**สามารถตีความหมายแนวคิดของแก่นได้ว่าแนวคิดของแก่นถูก** ยอมรับได้ และจากการทำแบบฝึกหัดที่ 9 ซึ่งเป็นการนำทฤษฎีไปใช้ ดังภาพที่ 22 ข้อ 3 ในการหาค่าของมุม ABC นักเรียนหาโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า มุมในส่วนโค้ง = มุมที่จุดศูนย์กลาง ÷ 2 และ จากแบบฝึกหัดข้อ 4 ในการหาค่าของมุม AOC นักเรียนหาโดยใช้ความสัมพันธ์ที่ว่า มุมที่จุดศูนย์กลาง = 2(มุมในส่วนโค้ง) แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันทั้งทางตรงและย้อนกลับได้** และจากแบบฝึกหัดข้อ 3 ในการหาค่าของมุม AOC นักเรียนต้องใช้ความรู้ เรื่อง รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่ว่ามุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น จึงได้ว่าขนาดของมุม OAC = 40 องศา และการหาขนาดของมุม AOC นักเรียนต้องใช้ความรู้ เรื่อง ผลบวกของมุมภายในเท่ากับ 180 องศา ดังนั้น ผลรวมของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วเท่ากับ 80 องศา จะได้ว่าขนาดของมุม AOC = 100 องศา แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการแก้ปัญหาในเรื่องใหม่ได้**

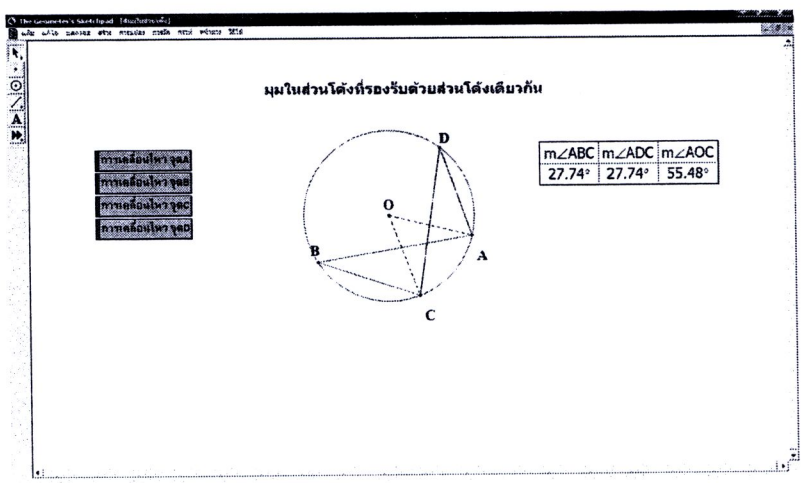


ภาพที่ 35 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 9 ข้อ 4-5 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

3.2.1 กิจกรรมที่ 11 เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลม วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) สามารถบอกความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้ ซึ่งมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามใบกิจกรรมดังนี้

<u>**คำชี้แจง**</u> ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนเปิดไฟล์ Cir3.gsp แล้วตอบคำถามต่อไปนี้



ภาพที่ 36 แสดงหน้าจอโปรแกรม GSP กิจกรรมที่ 11มุมในส่วนโค้ง

2. จากการสังเกตลักษณะของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 มุมใดเป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมและรองรับด้วยส่วนโค้งใด

มุม.....ส่วนโค้งที่รองรับมุมคือ.....

มุม.....ส่วนโค้งที่รองรับมุมคือ.....

2.2 มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีลักษณะอย่างไร

3. ให้นักเรียนคลิก ปุ่ม การเคลื่อนไหว จุดA หรือ การเคลื่อนไหว จุดB หรือ การเคลื่อนไหว จุดC หรือ การเคลื่อนไหว จุดD พร้อมทั้งสังเกตและบันทึกขนาดของมุม

4. ให้นักเรียนอภิปรายความสัมพันธ์มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จากกิจกรรมข้อ 3

5. สรุปความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

3.2.2.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 11 เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลม ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 34 ก้อง : ส่วนโค้ง DB มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มีลักษณะอย่างไร
บรรทัดที่ 35 กล้า : อ่านโจทย์ข้อ 2 ยังไม่ได้ขยับเลย ลองขยับดูไหม
บรรทัดที่ 36 ก้อง : มีเส้นตัดกัน เออ...ถ้ากลับมามันก็ไม่ตัดนะ
บรรทัดที่ 37 กล้า : มุมมันมีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 38 ก้อง : เออ
บรรทัดที่ 39 กล้า : มุมมันจะมีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 40 ก้อง : เออ เขียนหวะ
บรรทัดที่ 41 กล้า : เดี๋ยวใจเย็น ลองพิสูจน์ ใช่ มุมมันจะมีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 42 ก้อง : เขียนหวะ
บรรทัดที่ 43 กล้า : เดี๋ยวหมุมงามๆ ก่อน มุมมีขนาดเท่ากันชัวร์
บรรทัดที่ 44 ก้อง : อือ
บรรทัดที่ 45 กล้า : มุมมีขนาดเท่ากัน

บรรทัดที่ 46 ...

บรรทัดที่ 47 กล้า : มุมมีขนาดเท่ากัน แล้วอะไรอีก

บรรทัดที่ 48 ...

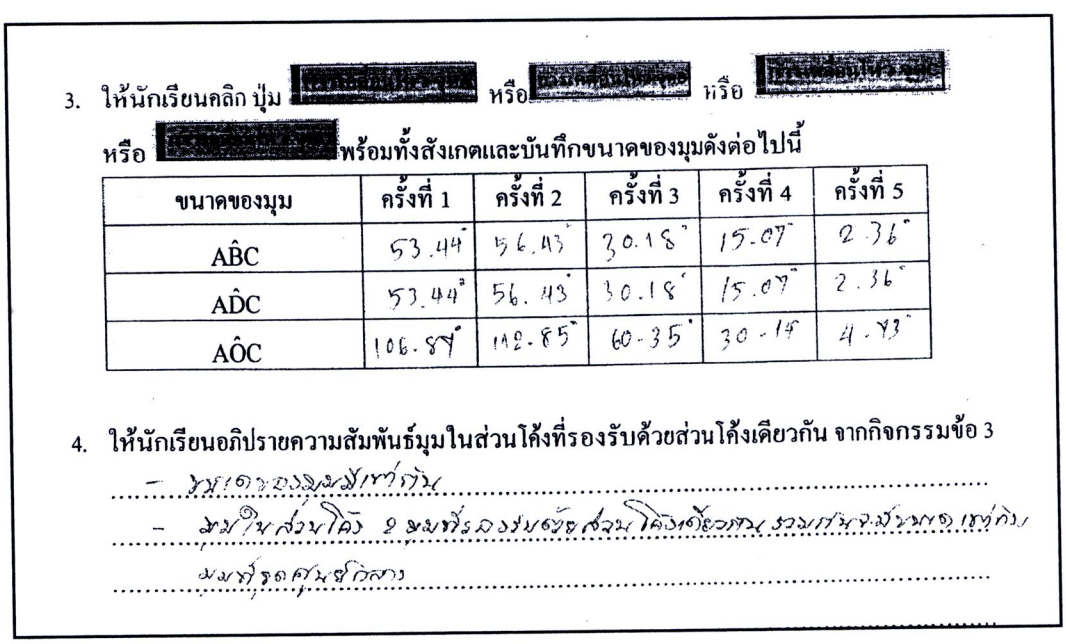
บรรทัดที่ 49 กล้า : มุมมีขนาดเท่ากัน แล้วอะไรอีกแอ้ม มุมในส่วนโค้งที่มีส่วนโค้งเดียวกันจะมีลักษณะอย่างไร ก็คือ มุมมีขนาดเท่ากัน ใช่ไหม (แอ้ม:อือ) ก็รู้อยู่แล้วว่ารองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ส่วนโค้งมันก็เท่ากันนั่นแหละ ใช่ไหมหละ

บรรทัดที่ 50 แอ้ม : ส่วนโค้งเดียวกัน

บรรทัดที่ 51 กล้า : เราใช้คำว่าหรือ

บรรทัดที่ 52 ...

บรรทัดที่ 53 กล้า : มุมมีขนาดท่ากัน มุมนี้ก็เป็นสองเท่าของมุมนี้ก็รู้อยู่แล้ว แต่ว่ามุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมีลักษณะอย่างไร คือ มุมมีขนาดเท่ากัน



3. ให้นักเรียนคลิก ปุ่ม [redacted] หรือ [redacted] หรือ [redacted]
หรือ [redacted] พร้อมทั้งสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้

ขนาดของมุม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
AB̂C	53.44°	56.43°	30.18°	15.07°	2.36°
AD̂C	53.44°	56.43°	30.18°	15.07°	2.36°
AÔC	106.87°	112.85°	60.35°	30.14°	4.73°

4. ให้นักเรียนอภิปรายความสัมพันธ์มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จากกิจกรรมข้อ 3

- ขนาดของมุมเท่ากัน
- มุมในส่วนโค้ง 2 มุมที่รองรับส่วนโค้งเดียวกัน รวมกันจะมีขนาดเท่ากับมุมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

ภาพที่ 37 งานเขียนกิจกรรมที่ 11 ข้อ 3-4 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

จากการทำกิจกรรมข้อ 2 โปรโตคอลบรรทัดที่ 49 ที่กล้าพูดว่า “มุมมีขนาดเท่ากัน แล้วอะไรอีกแอ้ม มุมในส่วนโค้งที่มีส่วนโค้งเดียวกันจะมีลักษณะอย่างไร ก็คือ มุมมีขนาดเท่ากัน ใช่ไหม ก็รู้อยู่แล้วว่ารองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ส่วนโค้งมันก็เท่ากันนั่นแหละ ใช่ไหมหละ” และจากที่ 37 ภาพงานเขียนกิจกรรมที่ 11 ข้อ 4 นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิต**

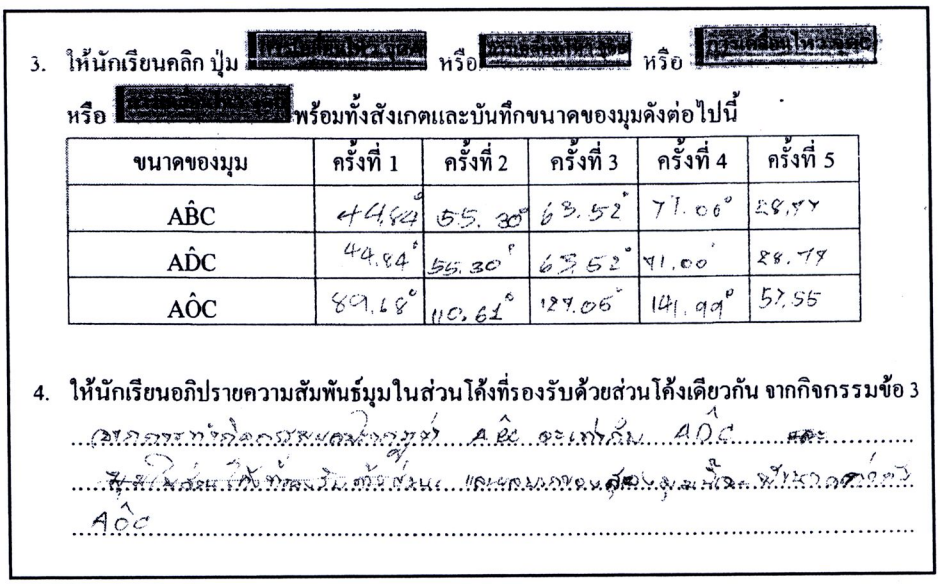
ระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 35-41 บรรทัดที่ 35 กล้าอ่านโจทย์ข้อที่ 2 แล้วพูดว่า "ยังไม่ได้ขยับเลย ลองขยับดูไหม" บรรทัดที่ 37 กล้าพูดว่า "มุมมันมีขนาดเท่ากัน" ก้องพูดว่า "เออ เขียนหวะ" กล้าพูดว่า "เดี๋ยวใจเย็น ลองพิสูจน์ ใช่ มุมมันจะมีขนาดเท่ากัน" จากบรรทัดที่ 35 กล้าพูดว่า "ยังไม่ได้ขยับเลย ลองขยับดูไหม" บรรทัดที่ 37 กล้าพูดว่า "มุมมันมีขนาดเท่ากัน" และบรรทัดที่กล้าพูดว่า "เดี๋ยวใจเย็น ลองพิสูจน์ ใช่ มุมมันจะมีขนาดเท่ากัน" แสดงให้เห็นว่ากล้า**เกิดสมมติฐานของปัญหาว่ามุมในส่วนโค้งมีลักษณะอย่างไร** และคิดว่าถ้าทำให้มุมขยับอาจจะได้คำตอบ และบรรทัดที่ 40 ก้องพูดว่า "เออ เขียนหวะ" แสดงให้เห็นว่าก้อง**สามารถตีความหมายแนวคิดของกล้าได้ว่าแนวคิดของกล้าถูก** ยอมรับได้

3.2.2.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 11 เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลม ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 21	...		
บรรทัดที่ 22	แก่น	:	จากการทำกิจกรรมจะได้ว่ามุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 23	ก้อย	:	ไหน
บรรทัดที่ 24	แก่น	:	กะนี่มุมในส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 25	ก้อย	:	มีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 26	แก่น	:	ที่รองรับด้วย
บรรทัดที่ 27	ก้อย	:	ส่วนโค้ง CA
บรรทัดที่ 28	แก่น	:	เดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน



3. ให้นักเรียนคลิก ปุ่ม [redacted] หรือ [redacted] หรือ [redacted]
หรือ [redacted] พร้อมทั้งสังเกตและบันทึกขนาดของมุมดังต่อไปนี้

ขนาดของมุม	ครั้งที่ 1	ครั้งที่ 2	ครั้งที่ 3	ครั้งที่ 4	ครั้งที่ 5
AB̂C	44.84°	55.30°	63.52°	71.06°	28.77
AD̂C	44.84°	55.30°	63.52°	71.00°	28.77
AÔC	89.68°	110.61°	127.06°	141.99°	57.55

4. ให้นักเรียนอภิปรายความสัมพันธ์มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จากกิจกรรมข้อ 3

จากการทำกิจกรรมจะได้ว่ามุม AB̂C จะเท่ากับ AD̂C และ
ขนาดของมุมทั้งสองส่วน และขนาดของมุมที่ใหญ่ที่สุดคือ
AÔC

ภาพที่ 38 งานเขียนกิจกรรมที่11 ข้อ 3-4 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

จากการทำกิจกรรมข้อ 3 - 4 โปรโตคอลบรรทัดที่ 22 แก่นพูดว่า "จากการทำกิจกรรมจะได้ว่ามุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน " และจากที่ 38 ภาพงานเขียนกิจกรรมที่ 11 ข้อ 3 - 4 นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)**

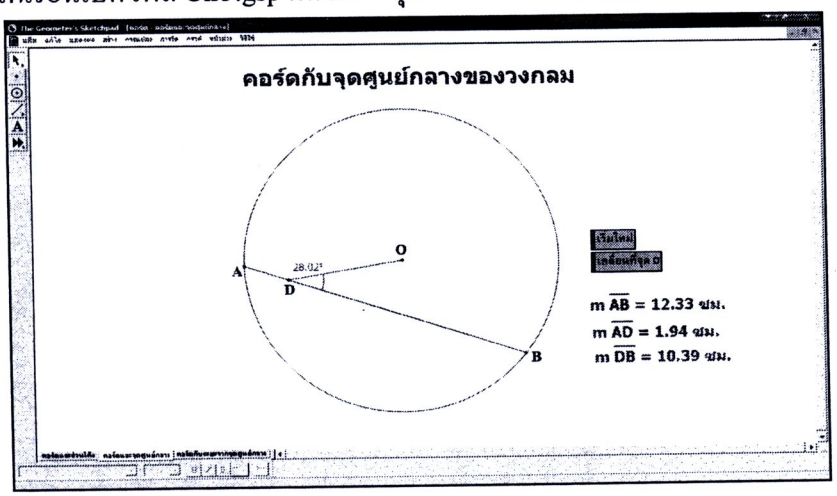
ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 21-28 บรรทัดที่ 22 แก่นพูดว่า "จากการทำกิจกรรมจะได้ว่ามุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน " ก้อยพูดว่า "ไหน" แก่น พูดว่า "กะนี่มุมในส่วนโค้ง" แล้วก้อยพูดว่า "มีขนาดเท่ากัน" จากคำพูดของแก่น พูดว่า "กะนี่มุมในส่วนโค้ง" แล้ว" แล้วก้อยพูดว่า "มีขนาดเท่ากัน" แสดงให้เห็นว่า**ก้อยสามารถตีความหมายคำพูดของแก่นได้ว่าแก่นหมายถึงอะไร**

3.2.2 กิจกรรมที่ 18 เรื่อง คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) สามารถบอกได้ว่าส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด แล้วจะแบ่งคอร์ดออกเป็นสองส่วนเท่ากัน หรือ ถ้าลาก

ส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางมายังจุดกึ่งกลางของคอร์ด แล้วส่วนของเส้นตรงนั้นจะตั้งฉากกับคอร์ด ซึ่งมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามใบกิจกรรมดังนี้

<u>คำชี้แจง</u> ให้นักเรียนปฏิบัติตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ให้นักเรียนเปิดไฟล์ Cir5.gsp แล้วคลิกปุ่ม **คอร์ดและจุดศูนย์กลาง**



ภาพที่ 39 แสดงหน้าจอโปแกรม GSP ภาพกิจกรรมที่ 18 คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อนที่จุด D** เพื่อให้จุด D เคลื่อนที่ และคลิกปุ่ม **เริ่มใหม่** เมื่อต้องการทำซ้ำ จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกต
3. สรุปความสัมพันธ์ของคอร์ดกับจุดศูนย์กลาง

3.2.3.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 18 เรื่อง คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 1 กล้า : ให้นักเรียนคลิก การเคลื่อนที่ของจุด D (กล้า อ่านโจทย์เบาๆ) เบิงเขาทำเอง จุดDป๊าบ

บรรทัดที่ 2 ก้อง : คลิกปุ่มเริ่มใหม่เพราะมันเคลื่อน เขาบอกว่าให้นักเรียนคลิกปุ่มการเคลื่อนที่ของจุด D เพื่อให้จุด D เคลื่อนที่ เมื่อต้องการทำซ้ำ ให้

นักเรียนสังเกตและบันทึก ถ้าจุด D อยู่ที่จุดกึ่งกลางของมุม

บรรทัดที่ 3 กล้า : ไหน

บรรทัดที่ 4 ก้อง : ถ้าจุด D อยู่จุดกึ่งกลางมันจะกาง 90 องศา เชื่อเขา

บรรทัดที่ 5 กล้า : ใช่

บรรทัดที่ 6 ก้อง : ลองให้มันเคลื่อนจุด D ซิ

บรรทัดที่ 7 กล้า : ใช่ ถ้าจุด D อยู่บนคอร์ด อยู่บนจุดกึ่งกลางของคอร์ด AB เห็นไหม กึ่งกลาง

บรรทัดที่ 8 ก้อง : อือ

บรรทัดที่ 9 กล้า : 4.5 ไหนลองวัดดูมันยาวเท่าไหร่

บรรทัดที่ 10 ก้อง : นั่นไง 4.5

บรรทัดที่ 11 กล้า : แหนะ

บรรทัดที่ 12 ก้อง : AD 4.5

บรรทัดที่ 13 กล้า : AD 4.5 เออ BD ก็ 4.5 ใช่ นั่นก็แสดงว่า

บรรทัดที่ 14 ...

บรรทัดที่ 15 กล้า : เอาเลย ถ้าจุด D เคลื่อนที่

บรรทัดที่ 16 ...

บรรทัดที่ 17 ก้อง : ถ้าจุด D อยู่บน

บรรทัดที่ 18 แอ้ม : กึ่งกลาง

บรรทัดที่ 19 ก้อง : ถ้าจุด D อยู่กึ่งกลางคอร์ด AB อ๊อย (กล้า เบื่อเธอมากเลย) มันจะแบ่งเป็นสองส่วนมีขนาดเท่ากัน แล้วก็มุมก็จะกาง ADO

บรรทัดที่ 20 กล้า : เราจะบอกว่าจุด D ไม่ได้ ถ้าเกิดเส้นตรง OD เคลื่อนที่จุด D มาอยู่ที่จุดกึ่งกลาง ถ้าเกิดเราบอกว่าเส้นตรงตัวนี้มันจะไม่มีมุม เราเอาแค่จุด D แมนบ่หละ เอาใหม่

บรรทัดที่ 21 ก้อง : เส้นตรง DO ที่มีจุดปลายอยู่ที่กึ่งกลางโอ๊ะ กึ่งกลางของวงกลม แล้วก็จุดปลายจุดหนึ่งอยู่บนคอร์ด AB

บรรทัดที่ 22 กล้า : ก็คือจุด D ถ้าเคลื่อนที่จุด D มาที่จุดกึ่งกลางของคอร์ด AD แล้วจะแบ่งคอร์ดออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน มันกะแมนตั๊วจุดกึ่งกลาง เอ้อ แล้วจะเกิดมุม 90 องศา OK ไหม เนาะ

บรรทัดที่ 23 ก้อง : แล้วจะเกิดให้มุม ADO กับ มุม ABO

บรรทัดที่ 24 กล้า : โอ๋ย บ่ต้องเขียน ถ้าเส้นตรง OD ซึ่งมีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุด

ศูนย์กลางแล้วก็จุดปลายด้านหนึ่งอยู่บนคอร์ดAB ถ้าเส้นตรง OD ที่มีจุดปลาย

บรรทัดที่ 25 ก้อง : ส่วนของเส้นตรงตั๊ว

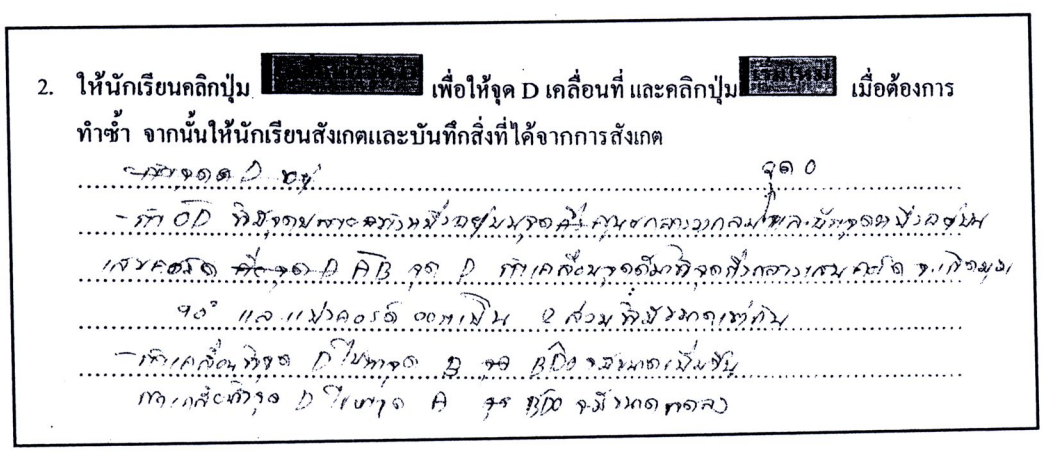
บรรทัดที่ 26 กล้า : เออ ที่มีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่บนจุดศูนย์กลาง และจุดหนึ่งอยู่บนเส้นคอร์ด คือ จุด D เอ้า ถ้าจุดหนึ่งอยู่บนเส้นคอร์ดAB มีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่บนจุดศูนย์กลาง ทีนี้คือจุด เอาใหม่ จุด O อยู่บนเส้นคอร์ด จุด D เออ ถ้าเคลื่อนจุด D มาที่จุดกึ่งกลางเส้นคอร์ด จะเกิดมุม 90 องศา ไง่บ่ ถ้าส่วนของเส้นตรง OD ที่มีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมก็คือจุด O และอีกจุดหนึ่งอยู่บนเส้นคอร์ด AB ก็คือจุด D ถ้าเคลื่อนที่จุด D มาที่จุดกึ่งกลางของเส้นคอร์ดจะเกิดมุม 90 องศา และจะแบ่งเส้นคอร์ดออกเป็น เอ้อบ่แมนดอก แมนอยู่ดอก 90 องศา

บรรทัดที่ 27 ก้อง : ข้อแรกเขาเขียน ส่วนของเส้นตรง OD จุด O อยู่ที่จุดศูนย์กลางและจุด D อยู่บนเส้นคอร์ด AB ถ้าเคลื่อนที่จุด D มาอยู่ที่จุดกึ่งกลางของคอร์ด AD ทำให้คอร์ด AD แบ่งออกเป็นสองส่วนที่มีขนาดเท่ากัน และ

บรรทัดที่ 28 กล้า : จังได๋ต่อ

บรรทัดที่ 29 ก้อง : และเกิดมุมที่มีขนาด 90 องศา คือมุม BDO และมุม ADO

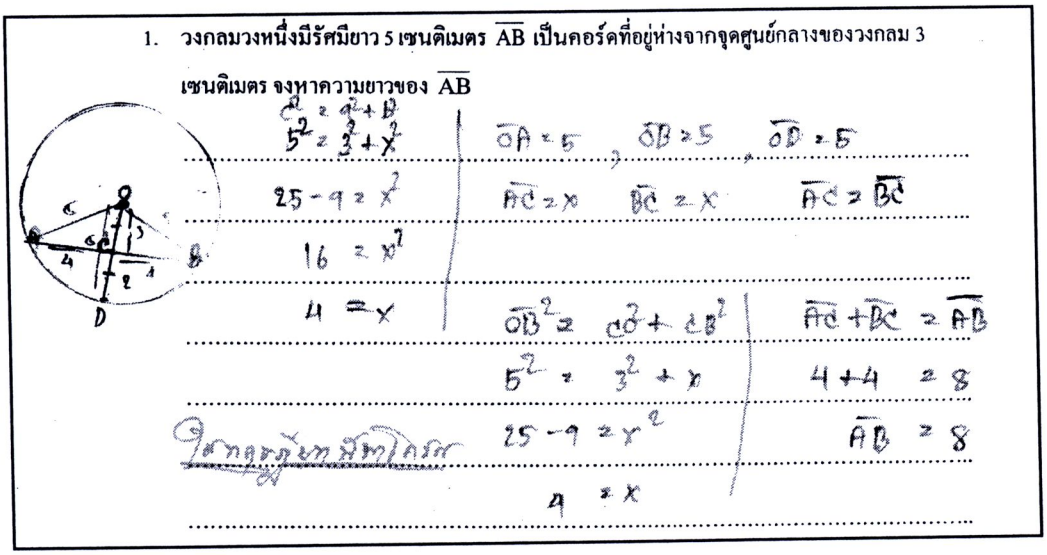
บรรทัดที่ 30 กล้า : Perfect ที่สุด


2. ให้นักเรียนคลิกปุ่ม [redacted] เพื่อให้จุด D เคลื่อนที่ และคลิกปุ่ม [redacted] เมื่อต้องการทำซ้ำ จากนั้นให้นักเรียนสังเกตและบันทึกสิ่งที่ได้จากการสังเกต

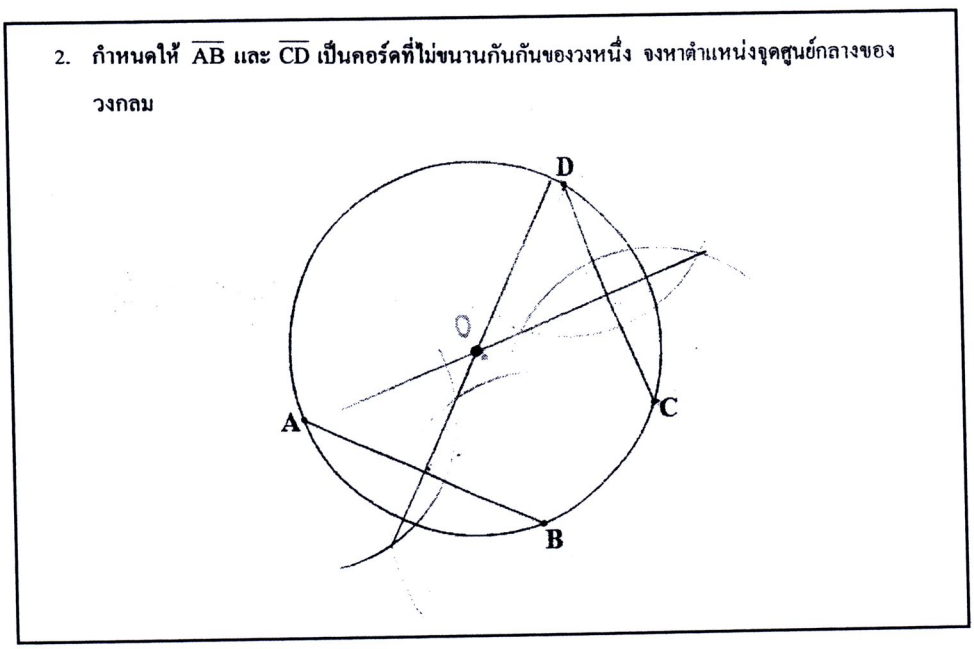
ภาพที่ 40 งานเขียนกิจกรรมที่18 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 26 กล้าพูดว่า "ถ้าส่วนของเส้นตรง OD ที่มีจุดปลายข้างหนึ่งอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลมก็คือจุด O และอีกจุดหนึ่งอยู่บนเส้นคอร์ด AB ก็คือจุด D ถ้าเคลื่อนที่จุด D มาที่จุดกึ่งกลางของเส้นคอร์ดจะเกิดมุม 90 องศา และจะแบ่งเส้นคอร์ดออกเป็นเอ้อบ่แมนดอก แมนอยู่ดอก 90 องศา " จากภาพที่ 40 ภาพงานเขียนกิจกรรมที่ 18 ข้อ 2 นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ได้ว่าถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด แล้วจะแบ่งคอร์ดออกเป็นสองส่วนเท่ากัน และจากภาพที่ 42 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถนำความสัมพันธ์ไปใช้ในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางวงกลมได้ นั่นแสดงว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 4 – 13 ก้องพูดว่า "ถ้าจุด D อยู่จุดกึ่งกลางมันจะกาง 90 องศา เชื่อเขา" กล้าพูดว่า "ใช่" แล้วก้องบอกว่า "ลองให้มันเคลื่อนที่จุด D ซิ" กล้ากล้าสังเกตแล้วพูดว่า "ใช่ ถ้าจุด D อยู่บนคอร์ด อยู่บนจุดกึ่งกลางของคอร์ด AB เห็นไหมกึ่งกลาง" และจากการทดลองวัดกล้าพูดว่า "AD 4.5 เออ BD ก็ 4.5 ใช่ นั่นก็แสดงว่า" แสดงให้เห็นว่า จากการสังเกตการเคลื่อนที่ของส่วนของเส้นตรง OD ทำให้ก้องและกล้า**เกิดสมมติฐานของปัญหาขึ้นว่าสิ่งที่ต้องหาความสัมพันธ์คืออะไร** และจากการที่ก้องพูดว่า "ถ้าจุด D อยู่จุดกึ่งกลางมันจะกาง 90 องศา เชื่อเขา" แล้วกล้าพูดว่า "ใช่" แสดงให้เห็นว่ากล้า**สามารถตีความหมายแนวคิดของก้องได้ว่าแนวคิดของก้องถูก** จากภาพที่ 41 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์ที่ว่า ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด แล้วจะแบ่งคอร์ดออกเป็นสองส่วนเท่ากัน และทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้ในการแก้ปัญหา แสดงให้เห็นว่า**สามารถใช้แนวคิดหรือยุทธวิธีที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาได้**



ภาพที่ 41 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 18 ข้อ 1 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]



ภาพที่ 42 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 18 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

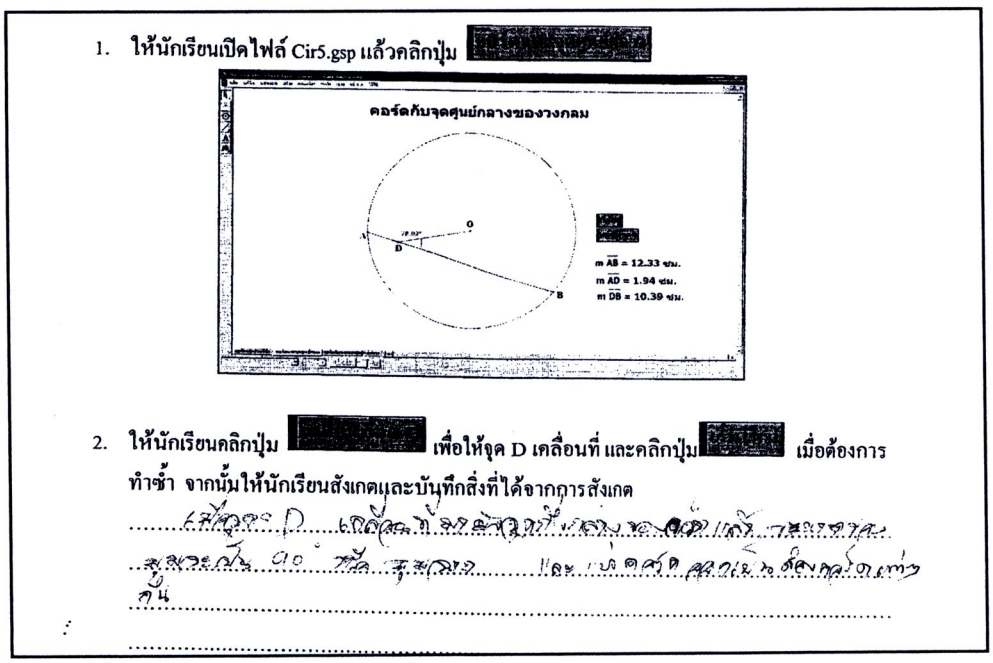
3.2.3.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 18 เรื่อง คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 1 แก่น : บอกให้สังเกต

บรรทัดที่ 2 ...

บรรทัดที่ 3 แก่น : เมื่อจุด D เคลื่อนที่มายังจุดกึ่งกลางคอร์ด แล้วขนาดของมุมกาง 90 องศา

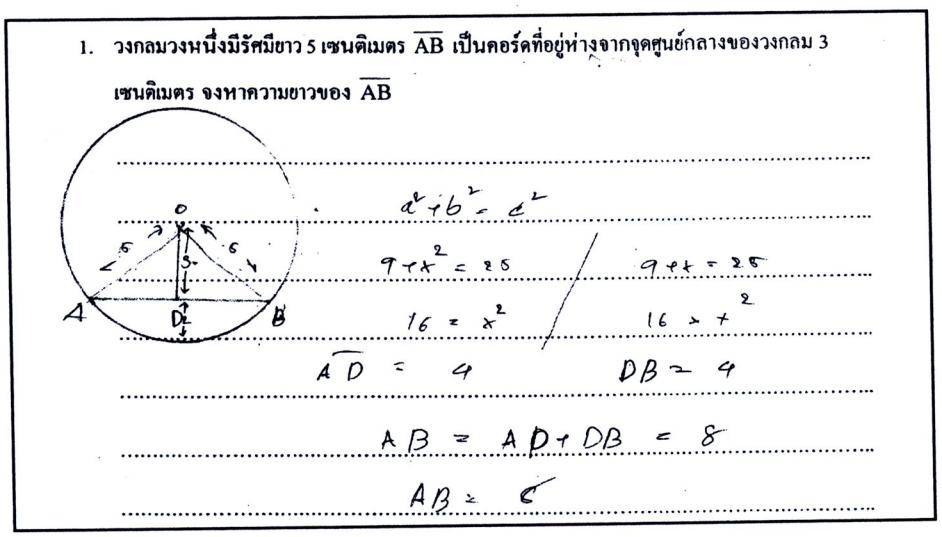


ภาพที่ 43 งานเขียนกิจกรรมที่ 18 ข้อ 1-2 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

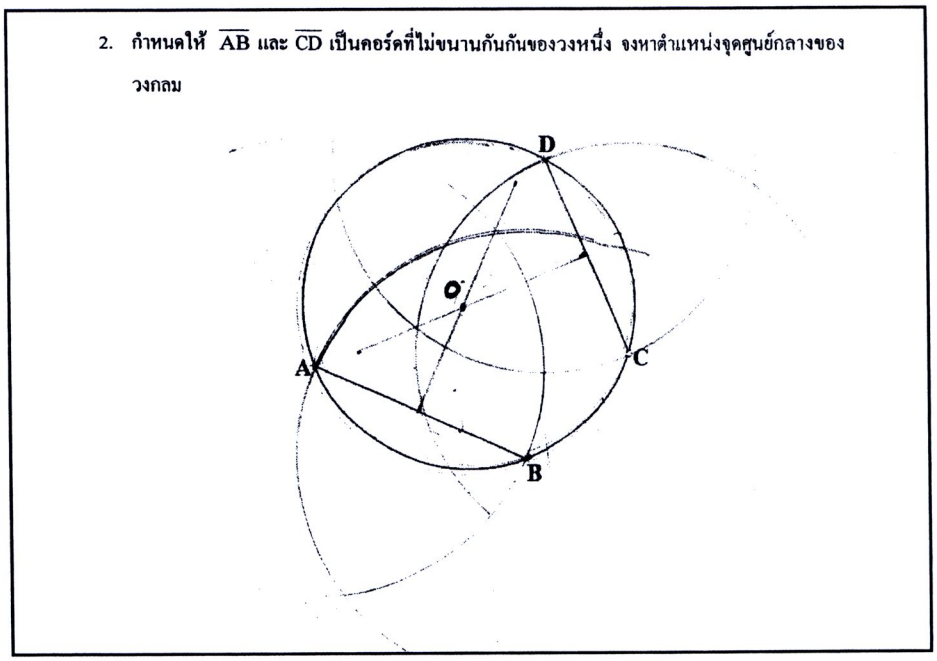
จากภาพที่ 43 และโปรโตคอลบรรทัดที่ 3 แก่นพูดว่า “เมื่อจุด D เคลื่อนที่มายังจุดกึ่งกลางคอร์ด แล้วขนาดของมุมกาง 90 องศา” และจากภาพที่ 44 – 45 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถนำความสัมพันธ์ไปใช้ในการหาตำแหน่งของจุดศูนย์กลางวงกลมได้ นั่น

แสดงว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลบรรทัดที่ 1 – 3 แก่นบอกเพื่อนให้สังเกตการเคลื่อนที่ของจุด D บรรทัดที่ 3 แก่นพูดว่า "เมื่อจุด D เคลื่อนที่มายังจุดกึ่งกลางคอร์ด แล้วขนาดของมุมกาง 90 องศา" จากการที่แก่นบอกให้เพื่อนสังเกตแสดงว่าแก่น**เกิดสมมติฐานของปัญหาขึ้นว่าสิ่งที่ต้องหาความสัมพันธ์คืออะไร** และจากการที่แก่นพูดว่า "เมื่อจุด D เคลื่อนที่มายังจุดกึ่งกลางคอร์ด แล้วขนาดของมุมกาง 90 องศา" แสดงให้เห็นว่าเมื่อเกิดสมมติฐานแล้วแก่นมีแนวทางในการหาคำตอบ จากภาพที่ 45 นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องความสัมพันธ์ที่ว่า ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ด แล้วจะแบ่งคอร์ดออกเป็นสองส่วนเท่ากัน และทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้ในการแก้ปัญหา แสดงให้เห็นว่า**สามารถใช้แนวคิดหรือยุทธวิธีที่มีอยู่ไปใช้ในการแก้สถานการณ์ปัญหาได้**



ภาพที่ 44 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 18 ข้อ 1 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever



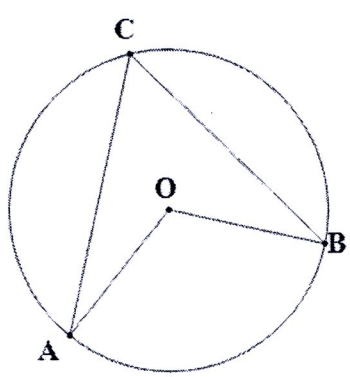
ภาพที่ 45 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 18 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

3.3 กิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 ไปสู่ระดับ 4

3.3.1 กิจกรรมที่ 10 เรื่อง การพิสูจน์และให้เหตุผลมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) คือ นักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีหรือสมบัติของวงกลมที่เกี่ยวกับมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้ ซึ่งมีการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามใบกิจกรรมดังนี้

มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม

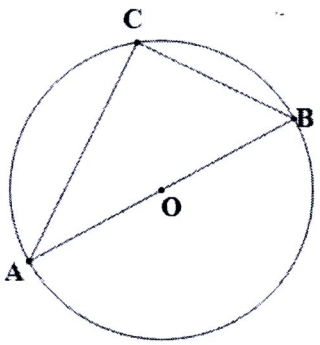
1.



จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม , $A\hat{O}B$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางและ $A\hat{C}B$ เป็นมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AB จงพิสูจน์ว่า $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$

แบบฝึกหัดที่ 10 การพิสูจน์และการให้เหตุผล

มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม



จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม , $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จงพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = 90^\circ$

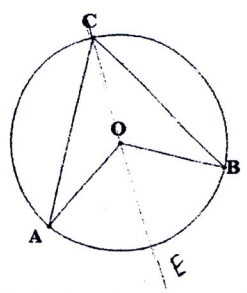
3.3.3.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 10 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

หลังจากที่ครูและนักเรียนทบทวนเนื้อหาที่เคยเรียนและเป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์แล้ว นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 175 กล้า	:	AOE บวกกับ BOE มันจะเท่ากับ AOB ซึ่งเป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง นั่นแสดงว่า ACO บวกกับ BCO มันก็จะเท่ากับ ACB ซึ่งมันเป็นมุมในส่วนโค้งใช่ไหม OAC บวกกับ ACO มันเท่ากับ 2 เท่าของ ACO แล้ว OBC บวกกับ BCO มันเท่ากับ 2 เท่าของ BCO นั่นแสดงว่า ตัวนี้ตัวนี้ มันเท่ากัน OAC = ACO , OBC = BCO นี้ ACO + BCO = AOE และ BOE แต่ว่า AOE + BOE = 2 เท่าของ ACB ใช่ไหม แสดงว่า AOB = 2 เท่าของ ACB
บรรทัดที่ 176 ก้อง	:	กล้าแล้วก็ AOE + BOE = AOB ด้วย ไหนเขียนยัง
บรรทัดที่ 177 แอ้ม	:	เขียนแล้ว
บรรทัดที่ 178 กล้า	:	เอาใหม่ เดี๋ยวงงๆ

ACO + BCO บวกกันมันเท่ากับมุมนี้ใช่ไหม ส่วน AOE บวกกับ BOE มันเท่ากับ 2 เท่าของ ACB มุมนี้ บวกมุมนี้ มันจะเท่ากับ 2 เท่าของมุมนี้ นั่นแสดงว่า ไอ้สองตัวนี้บวกกันแล้วเท่ากับ 2 เท่าของตัวนี้ มันก็จะเป็น 2 เท่าของตัวนี้เหมือนกัน จบ

1. จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม , $A\hat{O}B$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางและ $A\hat{C}B$ เป็นมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AB จงพิสูจน์ว่า $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$



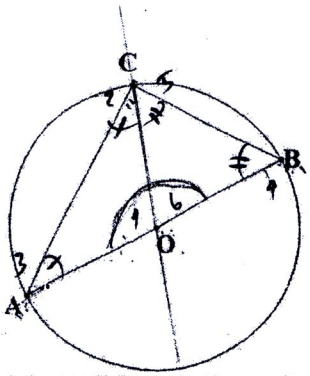
ข้อความ	เหตุผล
ลาก C O ต่อเรื่อยๆ ให้ถูก E	- ขยายรัศมีของวงกลมให้ยาวออกไป
$O\hat{A}C + A\hat{C}O = A\hat{O}E$	ขนาดของมุมภายนอกเท่ากับผลบวกของมุมภายในตรงข้าม
$O\hat{B}C + B\hat{C}O = B\hat{O}E$	
$A\hat{C}E + B\hat{O}E = A\hat{O}B$	- มุมที่จุดศูนย์กลาง
$(O\hat{A}C + A\hat{C}O) + (O\hat{B}C + B\hat{C}O) = A\hat{O}B$	ผลบวกของมุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
$2A\hat{C}O + 2B\hat{C}O = A\hat{O}B$	
$2(CAA\hat{C}O + B\hat{C}O) = A\hat{O}B$	
$A\hat{C}O + B\hat{C}O = A\hat{C}B$	- มุมที่ส่วนโค้งของวงกลม
ดังนั้น $2A\hat{C}B = A\hat{O}B$	

ภาพที่ 46 งานเขียนกิจกรรมที่ 10 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

โปรตคอลแบบฝึกหัดที่ 10

...

บรรทัดที่ 184	กล้า		เออ 180 องศา คุณครูครับมันกาง 180 ไหมนี่ หรือว่าบ่
บรรทัดที่ 185			
บรรทัดที่ 186	ครู	:	นักเรียนก็ซิว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้ กำหนดว่า O เป็นจุดศูนย์กลางใช่ไหมคะ และกำหนด AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง นักเรียนก็น่าจะรู้แล้ว
บรรทัดที่ 187	ก้อง		ง่ายๆ
บรรทัดที่ 189	กล้า		อือ ง่ายๆ
บรรทัดที่ 190	....		
บรรทัดที่ 191	ก้อง		เนื่องจากว่า AE
บรรทัดที่ 192	กล้า		พิสูจน์ว่ามันเท่ากับ 90 องศาใช่ไหม
บรรทัดที่ 193	ก้อง		ก็มันก็ถูกแล้ว ไอ้นี่ ไอ้นี่เท่ากับสอง
บรรทัดที่ 194	กล้า		อันไหนเท่ากับสอง
บรรทัดที่ 195	ก้อง		ไอ้นี่มันเท่ากับสองเท่าไง
บรรทัดที่ 196	กล้า		เอ้อ ก็พิสูจน์ไปแล้วว่า ไอ้นี้เป็นสองเท่าใช่ไหม เอ้อ
	.....		
บรรทัดที่ 208	กล้า		กล้า เขียนการพิสูจน์พร้อมทั้งอธิบายให้เพื่อนฟังเพื่อช่วยกันเรียบเรียง เนื่องจากว่า มุม AOB เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง , มุม ABC เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลม ทั้งสองมุมนี้รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ก็คือจากที่ได้พิสูจน์มาแล้วว่า มุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมภายในส่วนโค้ง ดังนั้น มุม AOB ที่กาง 180 องศา นั่นก็แสดงว่ามุม ACB ก็ต้องกาง 90 องศา เย้
	...		
บรรทัดที่ 213	กล้า		มะเราเอาตามนี้เลยไหม ก็คือ 1 ลากอะไร แอ้ม
บรรทัดที่ 214	ก้อง		แต่เราเปลี่ยนเป็นตัวเลขไง
บรรทัดที่ 215	กล้า		ก็ใช่เนาะ



จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ,
$\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
จงพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = 90^\circ$

ข้อความ	เหตุผล
- $A\hat{O}B$ (มุมที่จุดศูนย์กลาง)	ลาก $\overline{CO}$ ต่อออกมาตัดที่จุด E
- $A\hat{C}B$ (มุมในส่วนโค้งของวงกลม)	$\hat{3} + \hat{2} = \hat{1}$
- หรือความสัมพันธ์ระหว่าง ส่วนโค้งกับ	$\hat{4} + \hat{6} = \hat{6}$
- ความสัมพันธ์ระหว่าง มุมที่จุดศูนย์กลาง	$\hat{1} + \hat{6} = 180^\circ$
และมุมในส่วนโค้ง จะได้ว่า	$(\hat{3}+\hat{2}) + (\hat{6}+\hat{4}) = \hat{6}+\hat{1}$ (หรือ 180°)
มุมที่จุดศูนย์กลาง / มุมในส่วนโค้ง = 2	$2(\hat{2}) + 2(\hat{5}) = \hat{6} + \hat{1}$
- เพราะว่า AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง	$2(\hat{2}+\hat{5}) = 180^\circ$ $(\hat{6}+\hat{1})$
ดังนั้น $A\hat{O}B$ จะเท่ากับ 180°	$\hat{2}+\hat{5} = A\hat{C}B$
สรุปความสัมพันธ์ได้ว่า	$2(\hat{2}+\hat{5}) = 180^\circ$ $(\hat{6}+\hat{1})$
$\frac{A\hat{O}B}{A\hat{C}B} = 2$	$\hat{2}+\hat{5} = \frac{180^\circ}{2}$
แทนค่า $\frac{180^\circ}{A\hat{C}B} = 2$	$\hat{2}+\hat{5} = 90^\circ$
~~180°~~ $A\hat{C}B = 180 \cdot 2$	ดังนั้น $A\hat{C}B = 90^\circ$
~~$A\hat{C}B$~~ $A\hat{C}B = 90^\circ$	
ดังนั้น $A\hat{C}B = 90^\circ$	

ภาพที่ 47 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 10 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

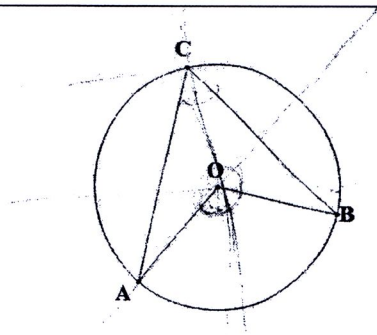
การพิสูจน์กิจกรรมที่ 10 เนื่องจากเป็นการพิสูจน์ครั้งแรกของนักเรียนครูเห็นว่านักเรียนยังไม่สามารถหาแนวทางในการพิสูจน์ได้ ครูจึงแนะนำให้นักเรียนลากส่วนของเส้นตรง OC ไปตัดวงกลมที่จุด E แล้วจากนั้นให้นักเรียนลองนึกถึงทฤษฎีที่เคยเรียนมา มีทฤษฎีใดบ้างสามารถที่นำมาใช้ได้ นักเรียนใช้ทฤษฎีของรูปสามเหลี่ยมที่ว่า ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่

มุมประชิดมุมภายนอกนั้น โปรโตคอลบรรทัดที่ 175 และภาพที่ 46 แสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ว่าทฤษฎีบท มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน และในการทำแบบฝึกหัดที่ 10 นักเรียนสามารถใช้ทฤษฎีมุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน พิสูจน์ได้ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา หรือ หนึ่งมุมฉาก และทฤษฎีของรูปสามเหลี่ยมที่ว่า ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดมุมภายนอกนั้น ดังปรากฏในโปรโตคอลบรรทัดที่ 184 - 208 และภาพที่ 47 แสดงให้เห็นว่านักเรียน**มีคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากภาพงานเขียนของนักเรียนภาพที่ 46 - 47 แสดงให้เห็นว่านำนักเรียนได้นำทฤษฎี ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดมุมภายนอกนั้น มาใช้ในการพิสูจน์ ซึ่งทฤษฎีตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept) นั่นคือ นักเรียนมี**การใช้ที่เครื่องหมายที่กำกวม** และจากการพิสูจน์ว่ามุมในครึ่งวงกลมจะมีขนาดเท่ากับ 90 องศา นักเรียนกลุ่ม AGK[3] สามารถนำเสนอวิธีการพิสูจน์ได้สองอย่าง คือ นำทฤษฎีมุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันมาใช้ในการพิสูจน์ และอีกหนึ่งวิธี คือ การใช้ทฤษฎี ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดมุมภายนอกนั้น แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถนำเสนอการพิสูจน์ได้หลากหลาย** และ**มีการนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการพิสูจน์**

3.3.3.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 10 เรื่อง มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งของวงกลม ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

หลังจากที่ครูและนักเรียนทบทวนเนื้อหาที่เคยเรียนและเป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์แล้ว นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ เพื่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังโปรโตคอลต่อไปนี้



จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม , $A\hat{O}B$ เป็นมุมที่จุดศูนย์กลางและ $A\hat{C}B$ เป็นมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้ง AB จงพิสูจน์ว่า $A\hat{O}B = 2A\hat{C}B$

ข้อความ	เหตุผล
$B\hat{A}O + C\hat{B}O = D\hat{O}B$	มุมภายในของรูปสามเหลี่ยมรวมกันได้เท่ากับ
$A\hat{C}O + O\hat{A}C = D\hat{O}A$	ได้เท่ากับมุมภายนอกที่ไม่ใช่มุมประชิด
$D\hat{O}A + B\hat{O}A = (A\hat{C}O + O\hat{A}C) + (B\hat{C}O + C\hat{B}O)$	
$A\hat{O}B = 2(ACB) + 2(A\hat{C}O)$	สมบัติการแจกแจงการคูณเท่ากัน
$AOB = 2(ACB)$	

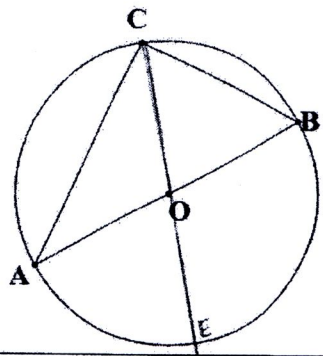
ภาพที่ 48 งานเขียนกิจกรรมที่ 10 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

แบบฝึกหัดที่ 10

บรรทัดที่ 1	ครู	:	นักเรียนก็ดูว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้ โจทย์กำหนด O เป็นจุดศูนย์กลางและ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง จงพิสูจน์ว่า ACB เท่ากับ 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก มีทฤษฎีไหนที่สัมพันธ์บ้าง
บรรทัดที่ 2	...		
บรรทัดที่ 3	แก่น	:	เขาบอกว่าจังได๋หล่ะ
บรรทัดที่ 4	ก้อย	:	ให้ ACB เท่ากับ 90 องศา
บรรทัดที่ 5	...		
บรรทัดที่ 6	แก่น	:	นั่นบ่เท่ากันซ้ำ บ่แมน ผ่าเขิ่งเนาะ

บรรทัดที่ 7	ก้อย	:	อือ
บรรทัดที่ 8	แก่น	:	ผ่าเขิ่ง
บรรทัดที่ 9	ก้อย	:	ผ่าเบิง ไม่ใช่ บ่ บ่ เอาขึ้นมาอีกนิดหนึ่ง
บรรทัดที่ 10	...		
บรรทัดที่ 11	แก่น	:	ไส้สูตรเก่า กะสามเหลี่ยมในรูปวงกลม
บรรทัดที่ 12	...		
บรรทัดที่ 13	แก่น	:	มุมนี้เท่ากับสองมุมนี้บวกกัน ไส้ได่บ่ ที่เขาบอกว่ามุมนี้เท่ากับ
บรรทัดที่ 14	ก้อย,แก่น	:	สองมุมนี้บวกกัน
บรรทัดที่ 15	แก่น	:	ก็ในเมื่อเส้นนี้เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ตรงนี้เป็นจุดศูนย์กลาง หม่องนี้กะเป็น 180 เขิงของ180 ก็คือ 90
บรรทัดที่ 16	...		
บรรทัดที่ 17	แก่น	:	เอาแบบเมื่อกี้เลย
บรรทัดที่ 18	...		
บรรทัดที่ 19	แก่น		สูตรใหม่
บรรทัดที่ 20	...		
บรรทัดที่ 21	แก่น	:	เขียนคิดออกแล้ว
บรรทัดที่ 22	ครู	:	ไม่มีความมั่นใจเลย
บรรทัดที่ 23	แก่น	:	คิดแล้วก็ได้สูตรเก่า
บรรทัดที่ 24	ครู	:	จะเป็นไร
บรรทัดที่ 25	แก่น,กิ่ง, ก้อย	:	เอาแบบเก่าเลย
บรรทัดที่ 26	...		
บรรทัดที่ 27	แก่น	:	เขาบ่ให้พิสูจน์ว่าตัวนี้เป็นสองเท่า กะเขียนต่อว่าในเมื่อ AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางแล้วกะมุม AOB เท่ากับ 180 องศา

จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม ,
$\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
จงพิสูจน์ว่า $A\hat{C}B = 90^\circ$



ข้อความ	เหตุผล
ต่อ $\overline{OC}$	ให้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง
$O\hat{A}C + O\hat{C}A = E\hat{O}A$	ดังนั้น O เป็นจุดกึ่งกลาง ดังนั้น
$O\hat{B}C + O\hat{C}B = B\hat{O}E$	$A\hat{O}B$ เป็นมุมตรง ดังนั้น
$A\hat{C}E + E\hat{O}B = 2(O\hat{C}A) + 2(O\hat{C}B)$	$A\hat{O}B = 180^\circ \div 2 = 90^\circ$
$= 2(O\hat{C}A + O\hat{C}B)$	
$A\hat{O}E + E\hat{O}B = 2(O\hat{C}A) + 2(O\hat{C}B)$	
$A\hat{O}B = 2(O\hat{C}A + O\hat{C}B)$	
$A\hat{O}B = 2(A\hat{C}B)$	
$180^\circ = 2(A\hat{C}B)$	

ภาพที่ 49 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 10 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

การพิสูจน์กิจกรรมที่ 10 เนื่องจากเป็นการพิสูจน์ครั้งแรกของนักเรียน ครูเห็นว่านักเรียนยังไม่สามารถหาแนวทางในการพิสูจน์ได้ ครูจึงแนะนำให้นักเรียนลากส่วนของเส้นตรง OC ไปตัดวงกลมที่จุด E แล้วจากนั้นให้นักเรียนลองนึกถึงทฤษฎีที่เคยเรียนมา ทฤษฎีใดบ้างที่สามารถนำมาใช้ได้ นักเรียนเลือกใช้ทฤษฎีของรูปสามเหลี่ยมที่ว่า ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดมุมภายนอกนั้นมาใช้ในการพิสูจน์ แต่นักเรียนยังไม่สามารถแสดงการพิสูจน์ได้ด้วยตนเองทุกขั้นตอน ส่วนในการพิสูจน์แบบฝึกหัดที่ 10 ดังภาพที่ 49 เป็นการพิสูจน์ว่ามุมในครึ่ง

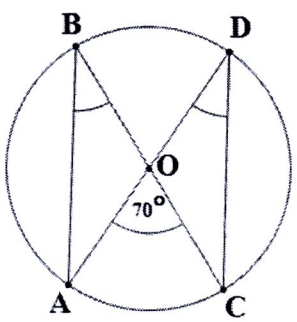
วงกลมมีขนาดเท่ากับ 90 องศา นักเรียนสามารถพิสูจน์ได้ โดยใช้วิธีเดิมที่ใช้พิสูจน์กิจกรรมที่ 10 แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี**การคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน หรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) คือ นักเรียนยังไม่สามารถพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนได้**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ การพิสูจน์ว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา นักเรียนกลุ่ม Korean Fever พิสูจน์โดยใช้ทฤษฎี ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดมุมภายนอกนั้น แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถมีการนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการพิสูจน์** และ การที่นักเรียนนำทฤษฎีมาใช้ในการพิสูจน์ตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept) แสดงให้เห็นว่านักเรียน**มีการใช้เครื่องหมายที่กำกวม**

3.3.2 กิจกรรมที่ 12 เรื่อง การพิสูจน์และให้เหตุผลมุมในส่วนโค้งของวงกลม

วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) คือ นักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้

มุมในส่วนโค้งของวงกลม



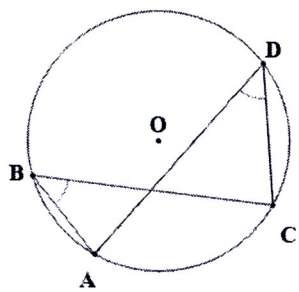
จากรูป $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $A\hat{O}C = 70^\circ$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาขนาดของ $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$
   1) $A\hat{B}C$ = ... เพราะ.....
   2) $A\hat{D}C$ = ...เพราะ.....
2. $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ มีขนาดเป็นเท่ากันหรือไม่อย่างไร

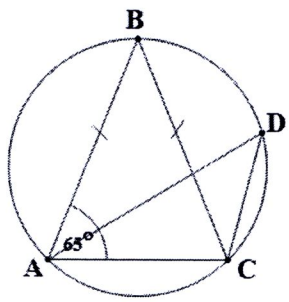
3. ให้นักเรียนเขียนแสดงการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ระหว่าง $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

แบบฝึกหัดที่ 12 การพิสูจน์และการให้เหตุผล

มุมในส่วนโค้งของวงกลม



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย $\overset{\frown}{AC}$ จง พิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = A\hat{D}C$



จากรูป ΔABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $B\hat{A}C = 65°$ จงหาขนาดของ $A\hat{D}C$ พร้อมทั้งแสดงเหตุผล

3.3.3.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 12 เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลมของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

หลังจากที่ครูและนักเรียนทบทวนเนื้อหาที่เคยเรียนและเป็นพื้นฐานสำหรับการพิสูจน์แล้ว นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรมนักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

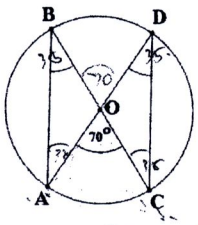
บรรทัดที่ 1	กล้า	:	AD BC เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และ AOC =70 องศา มุมนี้เท่ากับ 70
บรรทัดที่ 2	ก้อง	:	35 35
บรรทัดที่ 3	กล้า	:	ใช่ไหม

บรรทัดที่ 4	ก้อง	:	ก็ไอ้นี้เป็นสองเท่า
	...		
บรรทัดที่ 10	กล้า	:	ABC และ ADC มีขนาดเท่ากันหรือไม่อย่างไร มีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 11	ก้อง	:	เพราะ
บรรทัดที่ 12	กล้า	:	เพราะว่าอยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน
บรรทัดที่ 13	ก้อง	:	มีขนาดเท่ากันเพราะอยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน และ
บรรทัดที่ 14	กล้า	:	มีขนาดเท่ากันเพราะว่า
บรรทัดที่ 15	ก้อง	:	เป็นมุมที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดของมุมเท่ากัน
บรรทัดที่ 16	กล้า	:	เขาถามว่าเท่ากันหรือไม่อย่างไร
บรรทัดที่ 17	ก้อง	:	มีขนาดเท่ากันหรือไม่อย่างไร
บรรทัดที่ 18	กล้า	:	ขนาดมันเท่ากันก็ตอบว่ามันเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน มีขนาดเท่ากันเพราะอยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน และมุมที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน
	...		
บรรทัดที่ 42	กล้า	:	ให้นักเรียนเขียนแสดงการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ระหว่าง ABC และ ADC ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร
	...		
บรรทัดที่ 85	กล้า	:	เขียนเป็นตัวอักษรก่อนค่อยเขียนเป็นตัวเลข แล้วค่อยหาเหตุผลใส่ข้างหลังเนาะ เอ้าเขียนเลย AOC ส่วนด้วย ABC หรือว่า 70ส่วน 2 ฮึ
บรรทัดที่ 86	ก้อง	:	AOC ส่วน 2 เท่ากับ ADC และ ABC
บรรทัดที่ 87	กล้า	:	เออใช่
บรรทัดที่ 88	กล้า	:	AOC ส่วน 2
บรรทัดที่ 89	ก้อง	:	AOC ส่วน 2 เท่ากับ ABC หรือ
บรรทัดที่ 90	กล้า	:	และมุม ใส่เครื่องหมายลูกน้ำ ADC แค่นี้เนาะ เขียนต่อข้างล่างดีกว่าเนาะ ก็คือจะได้ 70 ส่วน 2 เท่ากับ 35 แล้วก็เขียน ABC เท่ากับ 35 องศา และ ADC เท่ากับ 35 องศาเหมือนกัน ความสัมพันธ์ระหว่างใช่ไหม ข้างหลังเขียนเครื่องหมายตัวนี้ (}) ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 91	แอ้ม	:	เสร็จยัง
บรรทัดที่ 92	กล้า	:	ยัง ข้อ 2 อีก

บรรทัดที่ 93	ก้อง	:	อ๋อ ความสัมพันธ์
บรรทัดที่ 94	กล้า	:	เขาบอกว่ามุม ABC และมุม ADC เป็นมุมที่อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากัน เอาไหม มันมีความสัมพันธ์อะไรแล้วเหตุผลหล่ะ ... ความสัมพันธ์คือมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันใช่ไหม
บรรทัดที่ 95	ก้อง	:	ที่มีขนาดเท่ากัน
บรรทัดที่ 96	กล้า	:	เราเขียนได้ว่า ABC กับมุม ADC มีขนาดเออ...อีหยังเกาะเดี๋ยวนะ ABC ADC มีขนาดเท่ากัน มีขนาดเท่ากัน เพราะเป็นมุมในส่วนโค้งเดียวกัน ความสัมพันธ์คือมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากันแค่นี้ไหม
บรรทัดที่ 97	ก้อง	:	อือ
บรรทัดที่ 98	กล้า	:	หรือว่ายังไง ABC และ ADC มีขนาดเท่ากันใช่ไหม เพราะว่าเป็นมุมในส่วนโค้งเดียวกัน ที่นี้ความสัมพันธ์ก็คือ ความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากันใช่ไหม ABC เท่ากับ ADC เอา 35 เท่ากับ 35 เฮาเขียนคำตอบแล้ว เฮากะบอกว่าความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากันดีบ่ เนาะเฮาเขียนแค่นี้ ABC เท่ากับ ADC แล้ว 35 เท่ากับ 35 แล้วกะบอกว่า มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน OKไหม ใช่ไหมหละ เอาเขียน

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

มุมในส่วนโค้งของวงกลม



จากรูป $\overline{AD}$ และ $\overline{BC}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม O และ $A\hat{O}C = 70^\circ$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาขนาดของ $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$
   1) $A\hat{B}C$ = 35° เพราะ $A\hat{O}C$ มีขนาดเป็น 2 เท่าของ $A\hat{B}C$
   2) $A\hat{D}C$ = 35° เพราะ $A\hat{O}C$ มีขนาดเป็น 2 เท่าของ $A\hat{D}C$
2. $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ มีขนาดเป็นเท่ากันหรือไม่อย่างไร
   มีขนาดเท่ากัน เพราะ อยู่บนส่วนโค้งเดียวกัน
   $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ เป็นมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน ซึ่งมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดศูนย์กลาง คือ $A\hat{O}C$
3. ให้นักเรียนเขียนแสดงการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ระหว่าง $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร

$A\hat{O}C = A\hat{B}C, A\hat{D}C$	ความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง
จาก $2 \cdot 70^\circ = 35^\circ, 35^\circ$	มุมที่จุดศูนย์กลาง จะมีขนาดเป็น 2 เท่าของมุมในส่วนโค้ง
$A\hat{B}C = 35^\circ, A\hat{D}C = 35^\circ$	
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	ความสัมพันธ์ของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดของมุมเท่ากัน
$35^\circ = 35^\circ$	

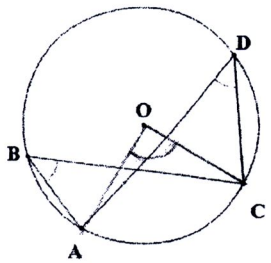
ภาพที่ 50 งานเขียนกิจกรรมที่ 12 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

โปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 12 ข้อ 1

บรรทัดที่ 1	กล้า	:	หาว่า เราจะสร้างขึ้นมาอันหนึ่งใช่ไหม เนาะเอาตัวนี้แหละเนาะ ตัวนี้เนาะ กำหนดมุม จบ จบ ทันที เอาทด ทด ให้ทดก่อนเด้อ ก็คือมุม เราสร้างมุม เขาเขียนไม่ถนัดอะ สร้างมุมที่จุดศูนย์กลางเพิ่ม
บรรทัดที่ 2	ก้อง	:	เอาปากกาดำเขียนเลย
บรรทัดที่ 3	กล้า	:	ก็คือมุม
บรรทัดที่ 4	กล้า,ก้อง	:	AOC
บรรทัดที่ 5	ก้อง	:	เอ้า เขียน
	...		
บรรทัดที่ 10	กล้า	:	เดี๋ยวนะ ไหนก้องเมื่อกี้นี่
บรรทัดที่ 11	ครู	:	สิ่งที่เท่ากันสามารถใช้แทนกันได้

บรรทัดที่ 12	กล้า	:	จงพิสูจน์ว่ามันเท่ากันใช่ไหม AOC ส่วน 2 ใช่ไหม เท่ากับ ABC
บรรทัดที่ 13	ก้อง	:	ไม่ใช่เขียน AOC เท่ากับ สองคูณ ABC
บรรทัดที่ 14	กล้า	:	มันเหมือนกันนี่แหละย้ายข้างมา ก็เหมือนกัน
บรรทัดที่ 15	ก้อง	:	ก่อนย้ายใช่ไหมอาจารย์
บรรทัดที่ 16	กล้า	:	จะเอาแบบนั้นใช่ไหม เอาก็เอา
บรรทัดที่ 17	ครู	:	ไม่เป็นไร เขียนให้เหตุผลด้วย
บรรทัดที่ 18	กล้า	:	ABC
	...		
บรรทัดที่ 28	กล้า	:	AOC เท่ากับ สอง ABC แล้วก็
บรรทัดที่ 29	ก้อง	:	ใส่วงเล็บด้วย ฮา ฮา
บรรทัดที่ 30	กล้า	:	ช่างมัน
บรรทัดที่ 31	กล้า,แอ้ม,ก้อง	:	AOC เท่ากับ สอง ADC
บรรทัดที่ 32	ก้อง	:	ABC เท่ากับ AOC ส่วน 2
บรรทัดที่ 33	กล้า	:	มันแตกต่างกันตรงไหน
บรรทัดที่ 34	ก้อง	:	แล้วมันก็กลับมาที่ AOC เท่ากับสองเท่า ABC
บรรทัดที่ 35	กล้า	:	ตัวนี้ตัวนี้ ตัวนี้แสดงความสัมพันธ์มุมที่จุดศูนย์กลาง และมุมในส่วนโค้งใช่ไหมนี่
บรรทัดที่ 36	ครู	:	ในเมื่อมุมที่จุดศูนย์กลางนี่ใช่ไหม อันนี้เท่ากับอันนี้ อันนี้เท่ากับอันนี้ ถามว่าสองตัวนี้เท่ากันไหม
บรรทัดที่ 37	กล้า	:	เท่ากัน แสดงว่า AOC เท่ากับสอง ABC บวกสอง ABC
บรรทัดที่ 38	ครู,ก้อง	:	ไม่ใช่ อันนี้มันบวกกันจะเท่ากับไอ้นี่
บรรทัดที่ 39	กล้า	:	เออ ใช่ก้อง sorry sorry
บรรทัดที่ 40	ครู	:	ไม่ ก็ในเมื่อเรารู้ตัวนี้เท่ากับตัวนี้ ตัวนี้เท่ากับตัวนี้
บรรทัดที่ 41	ก้อง	:	แสดงว่า ABC เท่ากับ ADC
บรรทัดที่ 42	ครู	:	เอ้อ แสดงว่า 2ADC กับ 2ABC มันเท่ากันไหม
บรรทัดที่ 43	ก้อง	:	เท่าแล้วก็ถอดสองออก
	...		
บรรทัดที่ 47	ก้อง	:	2ABC เท่ากับ 2ADC แล้วก็หักล้างสองออก แล้วก็ตัดสองออก จะได้ ABC เท่ากับ ABC

1)



จากรูป O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $A\hat{B}C$ และ $A\hat{D}C$ เป็นมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วย $\overset{\frown}{AC}$ จงพิสูจน์ว่า $A\hat{B}C = A\hat{D}C$

พิสูจน์

ข้อความ	เหตุผล
ลากรัศมีผ่านจุดศูนย์กลางวงกลม	ความยาวของรัศมีของวงกลม
$A\hat{O}C = 2(A\hat{B}C)$	มุมที่จุดศูนย์กลางเป็นสองเท่า
$A\hat{O}C = 2(A\hat{P}C)$	ของมุมในส่วนโค้ง
$A\hat{O}C = A\hat{B}C$	
$\frac{A\hat{O}C}{2} = A\hat{P}C$	
เพราะว่า $2(A\hat{B}C) = 2(A\hat{D}C)$	สมบัติการเท่ากัน
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	

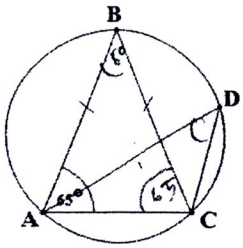
ภาพที่ 51 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 12 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

โปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 12 ข้อ 2

บรรทัดที่ 3	ก้อง	:	ต้องสร้างอะไรเพิ่มอีกไหม
บรรทัดที่ 4	กล้า	:	ไม่เพราะเรารู้สามเหลี่ยมหน้าจั่วตรงนี้เท่ากัน ตรงนี้ต้องเท่ากันด้วย อันนี้มันดูเหมือนสิง่ายนะแต่มันก็ยากนะนี่ ถ้าเกิด
บรรทัดที่ 5	ก้อง	:	แล้ววิธีทำหละ
	กล้า	:	นั่นแหละ งงวิธีทำอยู่ คำตอบจักได่มาจังได๋บ๊
บรรทัดที่ 6	ก้อง	:	เขาถามหาอะไร หาขนาด ADC
	กล้า	:	ขนาดที่เขาต้องการให้เราหา เฮาต้องฝนตัวนี้ไว่ นี่คือสิ่งที่เขาต้องการให้เราหา ไหนขอสีแดงหน่อยเร็ว ให้เราหาตรงนี้ โอ๊ะ เกม เอารูปมาให้เขาดูรูปหนึ่ง นี่เขาเขียนไว่แล้ว ตัวนี้ 65 ใช่ไหม แสดงว่ามุมนี้ก็ 65 ด้วย แมนบ่ มุมนี้ก็เป็น65 ใช่ไหม
บรรทัดที่ 12	แอ้ม	:	อือ

บรรทัดที่ 13	กล้า	:	ใช่ ทีนี้ แต่ว่า ตัวนี้ 65 บวก 65 ได้เท่าไร 130 ใช่ไหม
บรรทัดที่ 14	แอ้ม	:	อือ
บรรทัดที่ 15	กล้า	:	130 บวกกับ 50 เป็น 180 ใช่ไหม
	...		
บรรทัดที่ 16	กล้า	:	นั่นแสดงว่ามุมนี้ก็เท่ากับ 50 องศาด้วย เพราะว่ามันอยู่บนส่วนโค้งเดียวกันไง ใช่ไหม อ้าวแล้วเราจะเขียนยังไงนี้คือปัญหาแหละ
	...		
บรรทัดที่ 17	แอ้ม	:	หม่องนี่เป็นร้อย
บรรทัดที่ 18	กล้า	:	ไผบอก ไหน
บรรทัดที่ 19	ก้อง	:	50
บรรทัดที่ 20	กล้า	:	มันจะเป็นร้อยได้ไง มันไม่ใช่มุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 21	ก้อง	:	งั้นก็เป็น 50
บรรทัดที่ 22	กล้า	:	เพราะว่าสามเหลี่ยมหน้าจั่วใช่ไหมก้อง มันต้องมีมุมเท่ากัน แขนของมุมมันเท่ากัน 65 มันก็คือ 65 ใช่ไหมมุมนี้ 65 บวก 65 ได้ 130 130 บวก 50 ได้ 180 มุมภายในรูปสามเหลี่ยม
บรรทัดที่ 23	ก้อง	:	แล้วอันนี้หละ
บรรทัดที่ 24	กล้า	:	มันอยู่ในส่วนโค้งเดียวกัน อันนี้ก็เป็น 50 ดิ นั่นแหละผมไม่รู้จะเขียนวิธีทำยังไง

2)



จากรูป ΔABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว $B\hat{A}C = 65^\circ$
จงหาขนาดของ $A\hat{D}C$ พร้อมทั้งแสดงเหตุผล

วิธีทำ

ข้อความ	เหตุผล
ΔABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว	
$B\hat{A}C = 65^\circ$	
$B\hat{A}C = A\hat{C}B$	มุมที่ฐานของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
$65^\circ = 65^\circ$	
$B\hat{A}C = 65^\circ$, $A\hat{C}B = 65^\circ$	
$180^\circ - (B\hat{A}C + A\hat{C}B) = A\hat{B}C$	ผลบวกของมุมภายใน Δ เท่ากับ 180°
$180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$	
$A\hat{B}C = 50^\circ$	
$A\hat{B}C = A\hat{D}C$	ความสัมพันธ์ของมุมที่ส่วนโค้งรองรับ
$50^\circ = 50^\circ$	บนส่วนโค้งเดียวกันมีขนาดของมุมเท่ากัน
ดังนั้น $A\hat{D}C = 50^\circ$	

ภาพที่ 52 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 12 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

จากโปรโตคอลและภาพที่ 51 - 52 ภาพงานเขียนของนักเรียนแสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้ แสดงว่านักเรียนมี**มีคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ โปรโตคอลแบบฝึกหัดที่12 ข้อ 1 บรรทัดที่ 12 –14 กล้าพูดว่า “จงพิสูจน์ว่ามันเท่ากันใช่ไหม AOC ส่วน 2 ใช่ไหม เท่ากับ ABC”

แล้วก้องพูดว่า "ไม่ใช่เขียน AOC เท่ากับ สองคูณ ABC" แล้วกล้าตอบว่า "มันเหมือนกันนี่แหละย้ายข้างมา ก็เหมือนกัน" จากการสนทนาของกล้ากับก้องแสดงให้เห็นว่าทั้งกล้าและก้อง**สามารถตีความหมายแนวคิดของซึ่งกันและกัน**ได้ และจากคำพูดของกล้า "มันเหมือนกันนี่แหละย้ายข้างมา ก็เหมือนกัน " แสดงให้เห็นว่ากล้า**สามารถสร้างความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง**ในรูปการดำเนินการคูณและการหารได้ จากโปรโตคอลแบบฝึกหัดข้อ 2 บรรทัดที่ 3 - 4 ก้องพูดว่า "ต้องสร้างอะไรเพิ่มอีกไหม" กล้าตอบว่า "ไม่เพราะเรารู้สามเหลี่ยมหน้าจั่วตรงนี้เท่ากัน ตรงนี้ต้องเท่ากันด้วย" แสดงให้เห็นว่า**กล้าสามารถตีความหมายแนวคิดของก้องได้**ว่าแนวคิดของก้องว่าแนวคิดของก้องไม่จำเป็นต้องทำในข้อนี้ และโปรโตคอลแบบฝึกหัดข้อ 2 จากบรรทัดที่ 17 – 20 แอ้มพูดว่า "หม่องนี่เป็นร้อย" แล้วกล้าพูดว่า "ไผบอก ไหน" และก้องพูดว่า "50" แล้วกล้าอธิบายต่อ "มันจะเป็นร้อยได้ไง มันไม่ใช่มุมที่จุดศูนย์กลาง" แสดงให้เห็นว่า**กล้าสามารถตีความหมายแนวคิดของแอ้มได้**ว่ามันไม่ถูกเพราะมุมที่แอ้มพูดถึงไม่ใช่มุมที่จุดศูนย์กลาง จากการที่นักเรียนนำทฤษฎีที่ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มาใช้ในการให้เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถมีการนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการพิสูจน์** และจากที่นักเรียนนำทฤษฎีมาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความสามารถใน**การใช้เครื่องหมายที่กำกวม** ได้ตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept)

บรรทัดที่ 12	กล้า	:	จงพิสูจน์ว่ามันเท่ากันใช่ไหม AOC ส่วน 2 ใช่ไหม เท่ากับ ABC
บรรทัดที่ 13	ก้อง	:	ไม่ใช่เขียน AOC เท่ากับ สองคูณ ABC
บรรทัดที่ 14	กล้า	:	มันเหมือนกันนี่แหละย้ายข้างมา ก็เหมือนกัน

3.3.3.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 12 เรื่อง มุมในส่วนโค้งของวงกลมของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปราย ถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

โปรโตคอลกิจกรรมที่ 12

บรรทัดที่ 1	ก้อย	:	ข้างบน 70
บรรทัดที่ 2	แก่น	:	140 1 4 0 360 022 110
บรรทัดที่ 3	ก้อย	:	360
บรรทัดที่ 4	แก่น	:	มุมนี้เท่ากับมุมนี้ มุมนี้ มุมนี้ บวกกันแล้วได้มุมนี้ มุมนี้ มุมนี้ บวกกันแล้วได้มุมนี้
บรรทัดที่ 5	ก้อย	:	แมนบ่ เอาหยังมาบวกกะได่ตั้วตรงนี้
บรรทัดที่ 6	แก่น	:	70 70 35 2 เป็น 70 ABC ABC 35 เพราะ
บรรทัดที่ 7	ก้อย	:	สองมุมนี้บวกกันได้ 70 ง่ายจังเลย
บรรทัดที่ 8	แก่น	:	ADC ADC 35 เพราะ
บรรทัดที่ 9	ก้อย	:	เพราะอะไร
บรรทัดที่ 10	กิ่ง	:	ตอบได้แล้ว เพราะหยังหละ
บรรทัดที่ 11	ก้อย	:	เพราะอะไร
บรรทัดที่ 12	แก่น	:	เขียนลงไปตี้หละเพราะอะไร
บรรทัดที่ 13	แก่น	:	ADC และ ABC มีขนาดเท่ากันหรือไม่อย่างไร อธิบายข้อ2 ก่อน จ้อ2 ฮู้ มีขนาดเท่ากันหรือไม่ เท่ากัน เพราะมุมที่
บรรทัดที่ 14	ก้อย	:	มุมในส่วนโค้งเดียวกันแมนบ่
บรรทัดที่ 15	แก่น	:	มุมที่ส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 16	ก้อย	:	จะมีขนาดเท่ากันแมนบ่
บรรทัดที่ 17	แก่น	:	มุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วน
บรรทัดที่ 18	ก้อย	:	ส่วนโค้งเดียวกัน
บรรทัดที่ 19	แก่น	:	ส่วนโค้งเดียวกัน
บรรทัดที่ 20	แก่น	:	ADC

บรรทัดที่ 21	ครู	:	นักเรียนลองนำสิ่งที่โจทย์กำหนดให้เป็นตัวอธิบายและนำความสัมพันธ์ที่เคยเรียนมาอธิบาย มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 22	แก่น	:	เพราะมุมในส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 23	ครู	:	เราได้ 35 มายังไง ได้เพราะอะไรหล่ะค่ะ ให้เหตุผล
บรรทัดที่ 24	ก้อย	:	เพราะสองเท่าในส่วนโค้งจะเท่ากับอันนี่
บรรทัดที่ 25	แก่น	:	เอาใหม่ดิ๊
บรรทัดที่ 26	ก้อย	:	สองเท่าของมุมในส่วนโค้ง เขียนเองซะมุมหม่องนี้เป็นมุมอีหยัง
บรรทัดที่ 27	แก่น	:	อีหยังนะ มุมในส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 28	ก้อย	:	จะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 29	แก่น	:	บ้า สองเท่าของมุมในส่วนโค้งจะเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 30	ก้อย	:	ไม่ใช่
บรรทัดที่ 31	แก่น	:	จังได๋
บรรทัดที่ 32	ก้อย	:	เอ้อรู้แล้ว
บรรทัดที่ 33	แก่น	:	สองเท่าของมุมนี้นะ
บรรทัดที่ 34	ก้อย	:	สองเท่าของมุมนี้ สองเท่าของมุมนี้
บรรทัดที่ 35	แก่น	:	เบ๊าะ เขียนแล้วเอามุมที่จุดศูนย์กลางขึ้นก่อน
บรรทัดที่ 36	แก่น	:	มุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับสองเท่าของมุมในส่วนโค้ง
บรรทัดที่ 37	แก่น	:	ให้นักเรียนเขียนแสดงการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ระหว่าง ABC และ ADC ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร
บรรทัดที่ 38	ก้อย	:	ให้นักเรียนเขียนแสดงการหาคำตอบ พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ระหว่าง ABC และ ADC ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร
บรรทัดที่ 40	ครู	:	ให้นักเรียนนำข้อ1 กับข้อ2 มาเขียนแสดงการหาคำตอบ
บรรทัดที่ 41	แก่น	:	พร้อมทั้งหาความสัมพันธ์ว่ามีความสัมพันธ์กันอย่างไร
บรรทัดที่ 42	ก้อย	:	เฮากะเอาตรงนี้กับตรงนี้ลงไปเสร็จ
บรรทัดที่ 43	แก่น	:	เขียนแสดงหารหาคำตอบ
บรรทัดที่ 44	ก้อย	:	เขียนแสดงหารหาคำตอบก็คือ หาตัวนี้ก่อนใช่ไหมถึงมาหาตัวนี้
บรรทัดที่ 45	แก่น	:	มุมรอบวงกลม
บรรทัดที่ 46	ก้อย	:	จะมีขนาดเท่ากับ 360 องศา
บรรทัดที่ 47	แก่น	:	มุมรอบจุดหรือมุมรอบวงกลม มุมรอบวงกลมแหละ

บรรทัดที่ 48 ก้อย : มุมรอบวงกลม

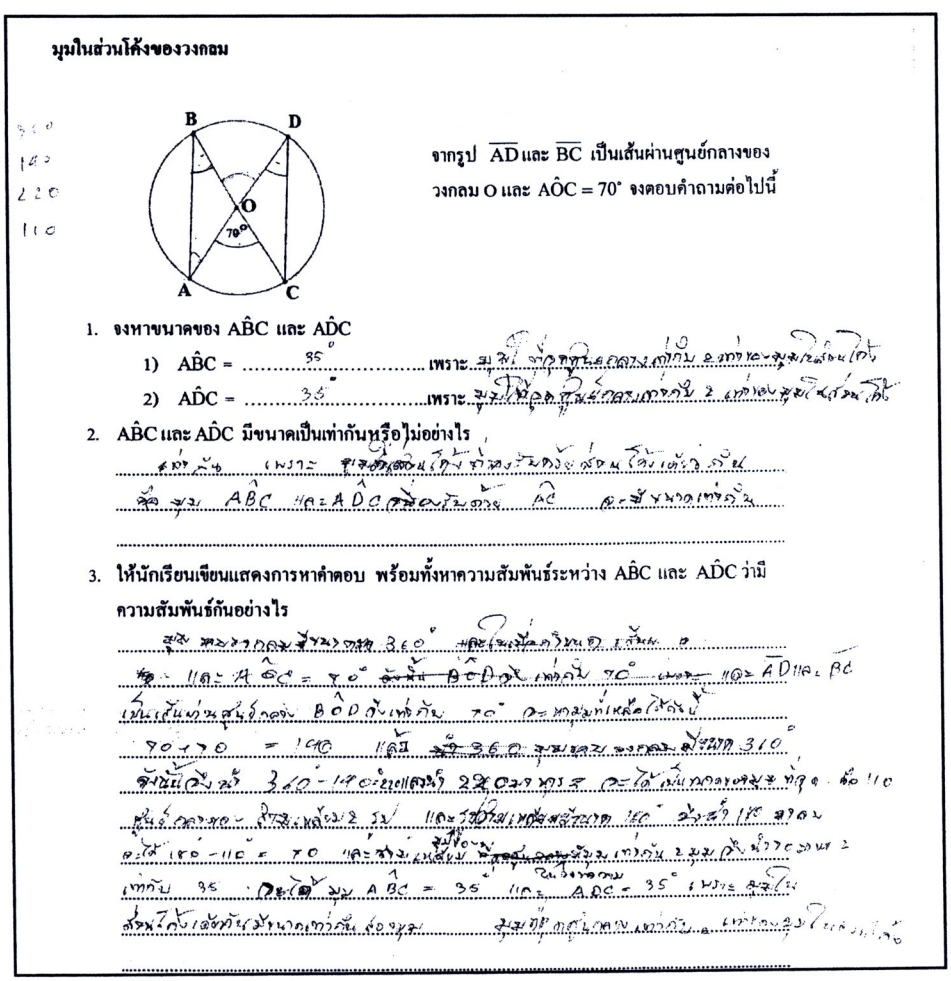
บรรทัดที่ 49 แก่น : มุมรอบจุดวงกลม

บรรทัดที่ 50 ก้อย : มุมรอบวงกลมเท่ากับ 360 องศา มุมครึ่งวงกลมเท่ากับ 180 องศา ซึ่งในอันนี้ เขาเรียกว่ามุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเท่ากับ 70 องศา จะเท่ากับมุมตรงข้ามคือมุมนี้

บรรทัดที่ 51 แก่น : 360 องศา ในเมื่อให้เส้นผ่านศูนย์กลางมาสองเส้นและAOC เท่ากับ 70 องศา ABD เท่ากับ 70 องศา

บรรทัดที่ 52 ครู : เอ้าดูมุมนี้คือมุมอะไรแล้วมุมนี้คือมุมอะไรแล้วได้ 35 องศามาได้อย่างไร

บรรทัดที่ 53 แก่น : เขาเอิ้นว่าหยัง AD เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง เมื่อกำหนด มุมนี้เขาเอิ้นมุมหยังเกาะ มุมตรงข้าม



ภาพที่ 53 งานเขียนกิจกรรมที่ 12 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

โปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 12

ข้อ 1

บรรทัดที่ 1	ครู	:	มุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งมีความสัมพันธ์กันอย่างไรคะ
บรรทัดที่ 2	แก่น	:	สองเท่าของมุมในส่วนโค้งเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 3	ครู	:	เอ้อ
บรรทัดที่ 4	แก่น	:	ก็จะได้ อันนี้เท่ากับ 2D หรือ F เท่ากับ 2E แมนบ่ มันกะจบแค่นี้สิ ไปต่อจังได๋
บรรทัดที่ 5	...		
บรรทัดที่ 6	แก่น	:	ก็จะได้ D เท่ากับ F ส่วน 2 ก็จะได้ 2 เท่ากับ 1 มุม 1 กับ มุม 2
บรรทัดที่ 7	...		
บรรทัดที่ 8	แก่น	:	ตรงนี้เป็นมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 9	...		
บรรทัดที่ 10	แก่น	:	1 เท่ากับ 2(2) (GB เขียน)
บรรทัดที่ 11	...		
บรรทัดที่ 12	แก่น	:	สองทางหน้า แทนที่สิใส่วงเล็บอันเดียวสองอยู่โดดๆ
บรรทัดที่ 13	ก้อย	:	จังซี้ได่บ่ ได่บ่
บรรทัดที่ 14	แก่น	:	เอ้อได่ จังซี้เขียนจังซี้
บรรทัดที่ 15	ก้อย	:	ซางมันไปๆ
บรรทัดที่ 16	แก่น	:	บัดทีนี้เครื่องหมาย
บรรทัดที่ 17	ก้อย	:	เครื่องหมายอีหยัง
บรรทัดที่ 18	แก่น	:	เครื่องหมายหยัง เขาเอิ้น เครื่องหมายไอ้จังซี้
บรรทัดที่ 19	กิ่ง,ก้อย	:	เครื่องหมายลูกน้ำ
บรรทัดที่ 20	แก่น	:	แล้วก็ สองสาม หนึ่งเท่ากับสองสาม เอ้อบอกว่าหนึ่งเท่ากับสองสาม
บรรทัดที่ 21	...		
บรรทัดที่ 22	แก่น	:	แล้วกะวงเล็บได้มาจากตัวนี้
บรรทัดที่ 23	ก้อย	:	เนื่องจาก
บรรทัดที่ 24	แก่น	:	วงเล็บ มุมในส่วนโค้ง สองเท่าของมุมในส่วนโค้งเท่ากับมุมที่จุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 25	แก่น	:	แล้วกะย้ายข้างเป็น ย้ายข้างเป็นหนึ่งส่วนสอง

บรรทัดที่ 26 ก้อย : ย้ายข้างเป็น

บรรทัดที่ 27 แก่น : หนึ่งส่วนสองเท่ากับสอง หนึ่งส่วนสองเท่ากับสาม

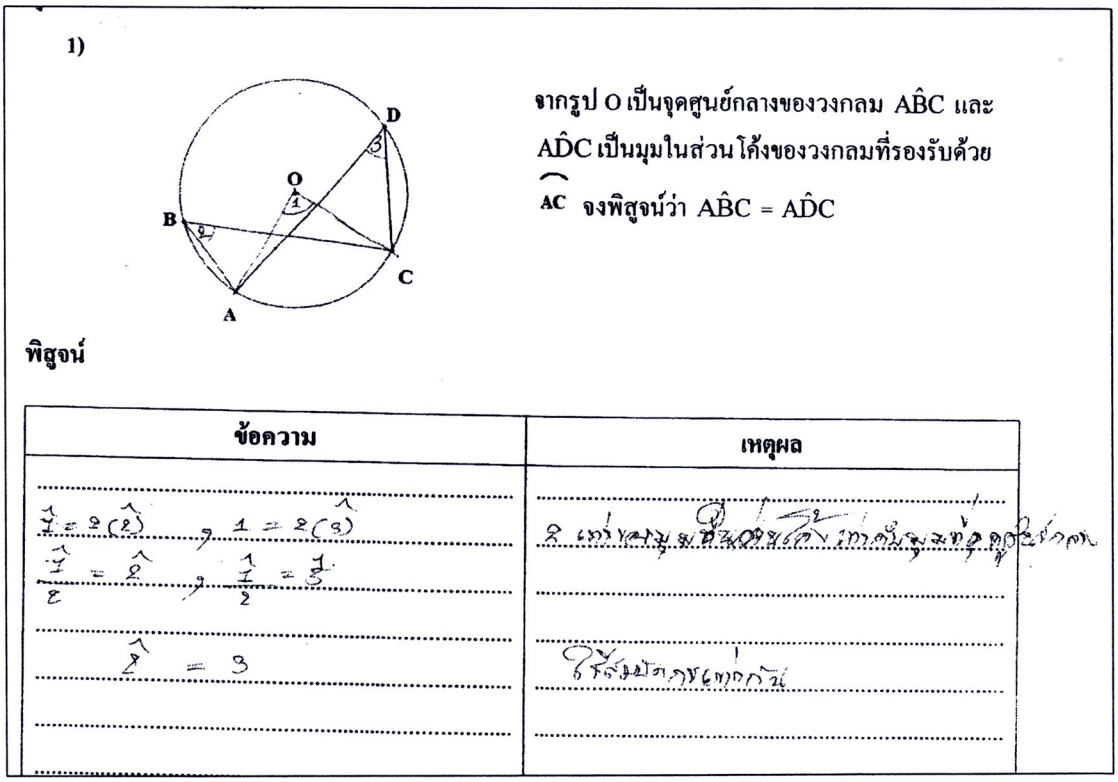
บรรทัดที่ 28 แก่น : เรียบร้อย

บรรทัดที่ 29 ครู : มุมนี้ก็เท่ากับมุมนี้ใช่ไหม อันนี้มันเท่ากันใช่ไหมคะ แล้วอันนี้มันเท่ากันไหม

บรรทัดที่ 30 แก่น : เท่ากัน

บรรทัดที่ 31 ครู : เท่ากันใช่ไหมคะ ก็เหมือนกันเราแก้อันนี้ออกมาแล้วเนาะ มุมนี้มันเป็นยังไงกัน

บรรทัดที่ 33 แก่น : ก็จะได้ ตัวนี้หายไปเลย ก็จะได้ สองเท่ากับสาม



ภาพที่ 54 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 12 ข้อ 1 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ข้อ 2

บรรทัดที่ 1 แก่น : นี่เห็นแล้ว

บรรทัดที่ 2 ...

บรรทัดที่ 3 แก่น : จงหาขนาดของ ABC เขาให้หาขนาด

บรรทัดที่ 4 ...

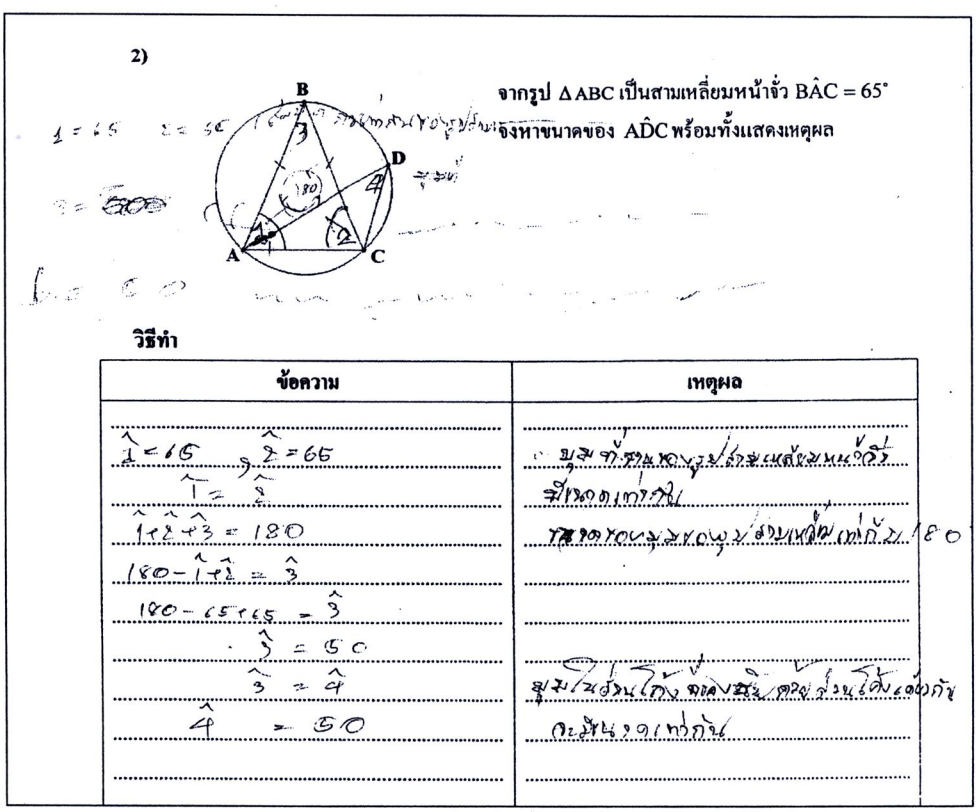
บรรทัดที่ 5 แก่น : เหตุผลคือสามเหลี่ยมหน้าจั่ว เมื่อแขนเท่ากันสองแขน ขนาดของมุมจะเท่ากัน 2 มุม ตรงนี้ มุมเท่ากันสองมุม

บรรทัดที่ 6 ...

บรรทัดที่ 7 แก่น : 65 65 สมบัติการเท่ากันของรูปสี่เหลี่ยมหน้าจั่ว แล้วก็มุมที่ฐานเท่ากัน มุมที่ฐานรวมกัน 130 ที่นี้ DBC เท่ากับ 50 โอ๊ะ อีหยังเกาะเขาเอิ้นมุมในส่วนโค้งเดียวกัน

บรรทัดที่ 8 ก้อย, แก่น : มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน จะมีขนาดเท่ากับ

บรรทัดที่ 9 แก่น : ตอบ B = 50



ภาพที่ 55 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 12 ข้อ 2 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

จากโปรโตคอลและภาพที่ 54 - 55 ภาพงานเขียนของนักเรียนแสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีเกี่ยวกับมุมในส่วนโค้งของวงกลมไปใช้ได้ แสดงว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)**

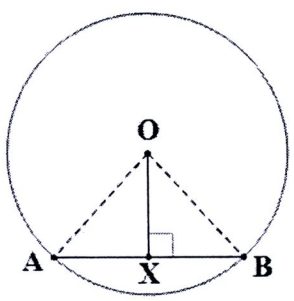
ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 12 ข้อ 1 บรรทัดที่ 24 – 27 จากสองเท่าของมุมในส่วนโค้งเท่ากับมุมที่จุด แก่นพูดว่า "แล้วกะย้ายข้างเป็นย้ายข้างเป็นหนึ่งส่วนสอง หนึ่งส่วนสองเท่ากับสอง หนึ่งส่วนสองเท่ากับสาม" แสดงให้เห็นว่า **แก่นสามารถสร้างความสัมพันธ์ของมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งทั้งทางตรงและย้อนกลับได้** จากที่นักเรียนนำทฤษฎีมาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความสามารถใน**การใช้เครื่องหมายที่กำกวม**ได้ตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept) และจากการที่นักเรียนนำทฤษฎีที่ว่ามุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มาใช้ในการให้เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียน**สามารถมีการนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้ในการพิสูจน์**

3.3.3 กิจกรรมที่ 19 เรื่อง การพิสูจน์และการให้เหตุผลคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

วัตถุประสงค์ของกิจกรรมเพื่อพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) คือ นักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีเกี่ยวกับคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ได้

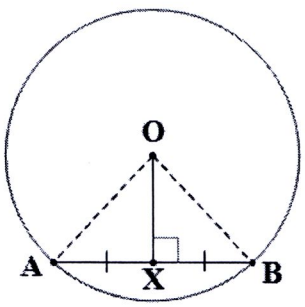
ใบกิจกรรมที่ 19 เรื่อง การพิสูจน์และการให้เหตุผล

คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า $\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

เอกสารแบบฝึกหัดที่ 19 เรื่อง การให้เหตุผลและการพิสูจน์คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม

$\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$ ที่จุด X

จงพิสูจน์ว่า $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับ $\overline{AB}$

3.3.3.1 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 19 เรื่อง คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปรายถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

บรรทัดที่ 1	ครู	:	กำหนดให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง OX ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า OX แบ่งครึ่ง AB พิสูจน์ทฤษฎีที่ว่า ถ้าส่วนของเส้นตรงจากจุดศูนย์กลางมาตั้งฉากกับคอร์ดแล้วมันจะแบ่งคอร์ดออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน OX แบ่งครึ่ง AB นั่นแสดงว่านักเรียนต้องพิสูจน์ว่าอะไรเท่ากับอะไร
บรรทัดที่ 2	กล้า	:	กำหนดให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง OX ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า OX แบ่งครึ่ง AB (อ่านโจทย์)
บรรทัดที่ 3	ครู	:	ดังนั้น สิ่งที่เราต้องพิสูจน์คืออะไรคะ อะไรเท่ากับอะไรนี่ ถ้า OX มันแบ่งครึ่ง AB
บรรทัดที่ 4	กล้า	:	AX เท่ากับ XB
บรรทัดที่ 5	ก้อง	:	อ๋อทฤษฎีนั่นไง
บรรทัดที่ 6	กล้า	:	จบ มา มา
บรรทัดที่ 7	ก้อง	:	ที่ว่า แต่มันไม่ถึงจุดศูนย์กลาง

บรรทัดที่ 8	กล้า	:	บ้าเบาะ ถ้าเกิด
บรรทัดที่ 9	ก้อง	:	เอ้อ มันกึ่งกลางแล้ว กำหนดให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลาง OX ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า OX แบ่งครึ่ง AB (อ่านโจทย์) อ้อ ตั้งฉาก
บรรทัดที่ 10	กล้า	:	แต่ว่าถ้าเราไม่รู้ทฤษฎีนี้เราต้องพิสูจน์ให้ได้
บรรทัดที่ 11	ก้อง	:	ไม่ใช้ทฤษฎีนั้นโอ๊ะอีกแล้ว
บรรทัดที่ 12	....		
บรรทัดที่ 13	กล้า	:	OX ตั้งฉาก AB แล้วเราจะพิสูจน์ได้ไงว่า
บรรทัดที่ 14	แอ้ม	:	จุดศูนย์กลางกับคอร์ด
บรรทัดที่ 15	....		
บรรทัดที่ 16	กล้า	:	OA กับ OB มีขนาดเท่ากันรัศมีวงกลมเดียวกันจะเท่ากัน
บรรทัดที่ 17	ก้อง	:	ถ้าไม่ใช่ทฤษฎีก็ไม่ได้นะสิ OXนะ กับ AB นึกว่าแต่ AX กับ XB
บรรทัดที่ 18	กล้า	:	กะ AX กับ XB หาว่าเท่ากันรึเปล่า
บรรทัดที่ 19	ก้อง	:	จงพิสูจน์ว่า OX แบ่งครึ่ง AB
บรรทัดที่ 20	กล้า	:	วาดรูปสามเหลี่ยมAOX
บรรทัดที่ 21	ก้อง	:	เออ ฉากอะไรนะ ฉากด้านด้าน ด้านด้านฉาก
บรรทัดที่ 22	กล้า	:	อะไรมาฉากด้านด้าน
บรรทัดที่ 23	ก้อง	:	เอาฉากด้านด้าน
บรรทัดที่ 24	...		
บรรทัดที่ 25	ก้อง	:	อะไร Basic (เกมกลับไปเปิดโปรแกรมGSP) นี่ฉากด้านด้าน (ชี้ให้กล้าดู)
บรรทัดที่ 26	กล้า	:	ก้องสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
บรรทัดที่ 27	ก้อง	:	หน้าจั่วอีกแล้ว
บรรทัดที่ 28	กล้า	:	ง่ายๆ นี่หวา AO เท่ากับ OB สามเหลี่ยมหน้าจั่วมันเท่ากันใช่ไหม
บรรทัดที่ 29	ก้อง	:	อือ
บรรทัดที่ 30	กล้า	:	แล้วก็มุมOAB มุม OBA เท่ากันใช่ไหม แล้วจากเส้นตรง OX ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุดX แสดงว่ามันแบ่งสามเหลี่ยมนี่ออกเป็นสองส่วน เนื่องจาก OX ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จึงแบ่งสามเหลี่ยมสองรูป
บรรทัดที่ 31	แอ้ม	:	คุณครูคะ
บรรทัดที่ 32	กล้า	:	สามเหลี่ยม AOB OA เท่ากับ OB รัศมีเท่ากัน จาก OX กับ OX ตั้งฉาก

กับคอร์ด ABที่จุด X นะครับคือจุดนี้เกิดสามเหลี่ยมสองรูปซึ่งเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากก็คือมุมเท่ากันสองมุม มุมนี้เท่ากัน สองมุม มุมนี้มุมนี้เท่ากัน สามเหลี่ยม AOX กับ OXB เท่ากัน

บรรทัดที่ 33 ก้อง : มันงง อะไรจะได้มา

บรรทัดที่ 34 ครู : ต้องการพิสูจน์ว่า AX เท่ากับ BX สามเหลี่ยมสองรูปนี้มันเป็นยังไงกัน

บรรทัดที่ 35 กล้า : เป็นสามเหลี่ยมหยังเกาะ สามเหลี่ยมที่เหมือนกันทุกประการแบบหยังก้อง

บรรทัดที่ 36 ก้อง : ด้าน ด้าน ด้าน

บรรทัดที่ 37 กล้า : แบบด้านมุมมุม ด้านมุมนี้มุมนี้ กำหนดให้ด้านนี้เท่ากัน

บรรทัดที่ 38 ครู : มันก็ใช่

บรรทัดที่ 39 กล้า : หรือว่าจะเป็นฉากด้านด้าน

บรรทัดที่ 40 ครู : อย่างนี้ก็ได้

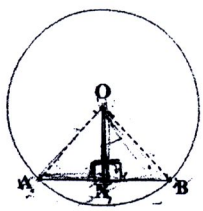
บรรทัดที่ 41 กล้า : เพราะว่าด้านนี้เราก็รู้แล้วว่ามันเท่ากัน

บรรทัดที่ 42 ครู : อย่างนี้ก็ได้ เอาแบบไหนดีล่ะ

บรรทัดที่ 43 ก้อง : เอาแบบฉากด้านด้านเพราะมีมุมนี้เป็นมุมฉาก

คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม

1.



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า $\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

ข้อความ	เหตุผล
ที่ต้องการพิสูจน์ว่า $\overline{AX} = \overline{XB}$ $\overline{OX}$ ตั้งฉาก	
เพื่อที่จะ $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB ก็ต้องพิสูจน์ว่า	ก่อนอื่นก็
จะแสดง $\triangle$ สองรูป ที่จะเป็น $\triangle$ ที่เท่ากัน	
คือ $\triangle AOX$ และ $\triangle BOX$	
$\overline{AO} = \overline{BO}$	รัศมีของวงกลมยาวเท่ากัน (ในวงกลมเดียวกัน)
$O\hat{A}B = O\hat{B}A$	
$\overline{OX} = \overline{XO}$	ด้านร่วม (ที่ทั้งสองรูปมีเท่ากัน)
$A\hat{X}O = B\hat{X}O$	
ดังนั้น $\triangle AOX \cong \triangle BOX$	สามเหลี่ยมสองรูปที่มีด้านทุกด้านเท่ากัน (ด้าน-ด้าน-ด้าน)
จึงทำให้ $\overline{AX} = \overline{XB}$	
และได้ว่า $\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$	

ภาพที่ 56 งานเขียนกิจกรรมที่ 19 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

โปรโตคอล แบบฝึกหัดที่ 19

บรรทัดที่ 1 กล้า : กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม OX แบ่งครึ่ง AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า OX ตั้งฉากกับ AB

บรรทัดที่ 2 ครู : กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม OX แบ่งครึ่ง AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า OX ตั้งฉากกับ AB ตั้งฉากก็คืออะไรคะ แสดงว่าเราต้องหาอะไร

บรรทัดที่ 3 กล้า : มุมฉาก

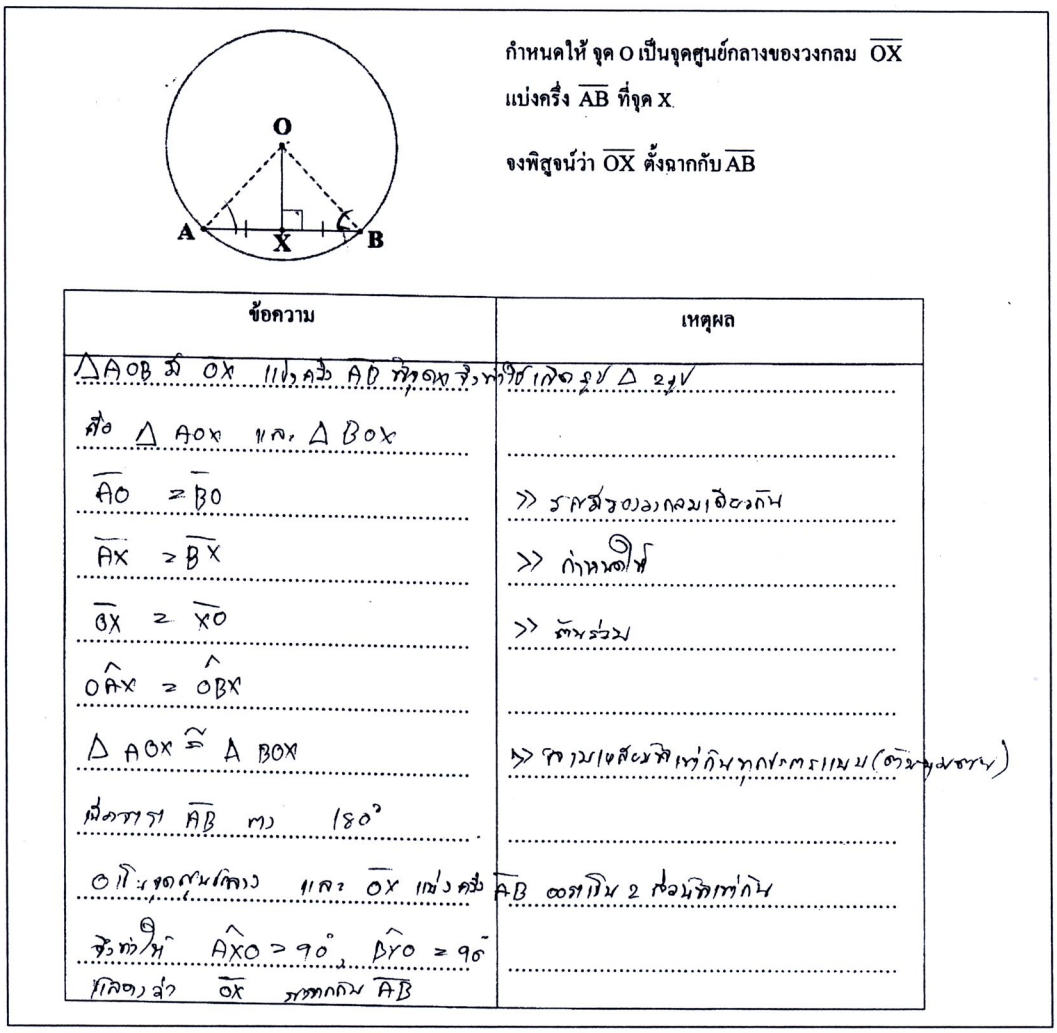
บรรทัดที่ 4 ครู : จะต้องหาให้ได้ว่ามุม มันเป็นมุมฉาก

บรรทัดที่ 5 ก้อง : จงพิสูจน์ว่า OX ตั้งฉากกับ AB มันก็ตั้งฉาก (ก้อง นั่งคิดและอ่าน

			โจทย์อีกรอบ) สามเหลี่ยมด้านเท่า หรือจะเอาด้านมุมฉาก สามเหลี่ยมหน้าจั่ว (ก้อง พูดใหม่)
บรรทัดที่ 6	กล้า	:	เส้นมันแบ่งครึ่ง AB ที่จุด X ใช่ไหม แล้วก็มุมนี้มันเท่ากันใช่ไหม แล้วเราจะหาได้ยังไงว่าตรงนี้มันฉาก
บรรทัดที่ 7	ก้อง	:	หายังไงว่าฉาก ก็ดูฉากไง
บรรทัดที่ 8	กล้า	:	ก็เรารู้อยู่แล้ว
บรรทัดที่ 9	...		
บรรทัดที่ 10	ก้อง	:	เขาบอกว่าจุด O เป็นจุดศูนย์กลาง
บรรทัดที่ 11	กล้า	:	แสดงว่าจุดนี้เท่ากัน
บรรทัดที่ 12	ก้อง	:	ใช้ทฤษฎีได้ไหมเอาทฤษฎีมาใช้ ก็คือว่าถ้ามันครึ่งกันแล้วไอ้นี้มันก็จะตั้งฉาก ถ้ามันตั้งฉากมันแบ่งอันนี้ได้สองอัน ใช้ทฤษฎี
บรรทัดที่ 13	ครู	:	เราต้องการพิสูจน์ทฤษฎี
บรรทัดที่ 14	กล้า	:	เราต้องพิสูจน์ว่าทฤษฎีเป็นจริงบ่
บรรทัดที่ 15	ก้อง	:	พิสูจน์เลย
บรรทัดที่ 16	กล้า	:	เอาแบบเมื่อกี้ สามเหลี่ยมอันนี้ใช่ไหมมันมีด้านนี้เท่ากัน เส้นนี้แบ่งครึ่งใช่ไหม สามเหลี่ยมสองรูป ด้านนี้เท่ากัน ด้านนี้เท่ากัน เส้นนี้เป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งตรง (กล้า หัวเราะ)
บรรทัดที่ 17	...		นักเรียนกลับไปดูการพิสูจน์กิจกรรมที่ 19
บรรทัดที่ 18	...		กล้า เขียนการพิสูจน์ตามแนวทางเดิมในกิจกรรมที่ 19
บรรทัดที่ 19	กล้า	:	กำหนดให้ O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
บรรทัดที่ 20	...		
บรรทัดที่ 21	กล้า	:	อันนี้เท่ากับอันนี้เพราะมันเป็นด้านร่วม
บรรทัดที่ 22	...		
บรรทัดที่ 23	ก้อง	:	อาจารย์
บรรทัดที่ 24	...		
บรรทัดที่ 25	ก้อง	:	ฉาก ด้าน ด้าน ไหม
บรรทัดที่ 26	กล้า	:	เป็นแบบนี้ไหมครับ
บรรทัดที่ 27	ครู	:	ไม่รู้สิเขาไม่ได้บอกมุมมา
บรรทัดที่ 28	ก้อง	:	แบบด้านด้านด้านไหม ด้านมุมด้านไหม
บรรทัดที่ 29	กล้า	:	มุมด้านมุม มุมด้านมุม มันเท่ากันสองมุม

บรรทัดที่ 30	ครู	:	รู้ได้ไงว่าสองมุมนี้เท่ากัน
บรรทัดที่ 31	ก้อง	:	บอกแล้วว่าแบบด้านมุมด้าน
บรรทัดที่ 32	กล้า	:	มันแบ่งครึ่งนะครับคุณครู เส้นนี้ตั้งตรงแล้วมันจะแบ่งครึ่ง
บรรทัดที่ 33	ครู	:	ตอนนี้เราต้องการพิสูจน์มุมนี้อยู่ใช่ไหม มุมนี้มันเท่ากันยอมรับได้ เพราะมันเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว แต่มุมนี้หละ
บรรทัดที่ 34	กล้า	:	ยอมรับไม่ได้ อ๋อ
บรรทัดที่ 35	ก้อง	:	ด้านมุมด้าน เพราะด้านนี้กับด้านนี้ ด้านนี้กับด้านนี้ ก็ด้านมุมด้าน ด้านมุมด้าน
บรรทัดที่ 36	กล้า	:	เออ ด้านมุมด้าน
บรรทัดที่ 37	ก้อง	:	ใช่ไหมอาจารย์
บรรทัดที่ 38	ครู	:	ใช่ ที่เกมพูดตอนแรกใช่ไหม ด้านนี้เท่ากับด้านนี้ ด้านนี้กับด้านนี้ ด้านนี้กับด้านนี้
บรรทัดที่ 39	กล้า	:	ด้านด้านด้าน
บรรทัดที่ 40	ครู	:	เมื่อกี้พูดถึงมุม มุมนี้กับมุมนี้เป็นไงกัน
บรรทัดที่ 41	กล้า	:	เท่ากัน
บรรทัดที่ 42	ครู	:	อ้าวเขียนสัญลักษณ์ไว้ เผื่อได้ใช้ประโยชน์ เพราะเรากำลังจะพูดถึงมุม เราต้องหาให้ได้ว่ามุมนี้เท่ากับ 90 องศา แสดงว่ามันต้องมีมุมมาเกี่ยวข้อง
บรรทัดที่ 43	ก้อง	:	เห็นไหมเขาเก่งไหม
บรรทัดที่ 44	กล้า	:	OX แบ่งครึ่ง AB ที่จุด X จึงทำให้เกิดสามเหลี่ยมสองรูป คือ สามเหลี่ยม AOX และBOX ส่วนของเส้นตรง AO เท่ากับ ส่วนของเส้นตรง BO ส่วนของเส้นตรง AX เท่ากับ BX กำหนดให้ แล้วก็มุม AOX เราไม่รู้ มุม OAX มันเท่ากับมุม OBX เนื่องจาก O เป็นจุดศูนย์กลาง และ OX แบ่งครึ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน
บรรทัดที่ 45	ครู	:	อ้าวเมื่อกี้ถึงไหนแล้ว สามเหลี่ยมสองรูปนี้มันเป็นยังไงกัน
บรรทัดที่ 46	กล้า	:	เท่ากัน
บรรทัดที่ 47	ครู	:	อือ ถ้ามันเท่ากันแล้วยังไงต่อ
บรรทัดที่ 48	ก้อง	:	เส้นที่มันตัดกันก็ต้องตั้งฉากกัน
บรรทัดที่ 49	กล้า	:	O เป็นจุดศูนย์กลาง และ OX แบ่งครึ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน มันก็เลย

บรรทัดที่ 50	ก้อง	:	มันตั้งฉากกัน
บรรทัดที่ 51	กล้า	:	อือตั้งฉาก มันแมนบ่หล่ะเกม
บรรทัดที่ 52	ก้อง	:	ก็มันแบ่งครึ่งกัน มันเท่ากันแล้วใช่ไหม มันก็ตั้งฉากสิ
บรรทัดที่ 53	กล้า	:	เดี๋ยว
บรรทัดที่ 54	...		
บรรทัดที่ 55	กล้า	:	มุม OAX มันเท่ากับมุม OBX สามเหลี่ยม AOX และBOX เป็นสามเหลี่ยมที่เท่ากันทุกประการ แบบด้านมุมด้านใช่ไหม เนื่องจากไอ้เนี่ยมันตั้งฉาก OX แบ่งครึ่ง AB ออกเป็นสองส่วนเท่ากัน
บรรทัดที่ 56	ก้อง	:	มันแบ่งครึ่ง
บรรทัดที่ 57	กล้า	:	มันแบ่งครึ่งออกเป็นสองส่วนเท่ากัน จึงส่งผลให้มันตั้งฉากกับ AB จึงทำให้ไอ้นี่ไอ้นี่มันเป็นมุมฉาก หรือ 90 องศา เกมๆ เรารู้ว่า AB มันกาง 180 องศา ไอ้นี่แบ่งครึ่ง 90 90 โอ้ย (กล้า เขียน) เนื่องจาก AB กาง 180 องศา เนื่องจาก O เป็นจุดศูนย์กลาง และ OX แบ่งครึ่งใช่ไหม
บรรทัดที่ 58			กล้า ลงมือเขียนพิสูจน์



ภาพที่ 57 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 19 ของกลุ่มที่ 1 AGK[3]

จากโปรโตคอลและภาพที่ 56 - 57 ภาพงานเขียนของนักเรียนแสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีเกี่ยวกับคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ได้ แสดงว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 19 บรรทัดที่ 16 กล้าพูดว่า "เอาแบบเมื่อกี้ สามเหลี่ยมอันนี้ใช่ไหมมันมีด้านนี้เท่ากัน เส้นนี้แบ่งครึ่งใช่ไหม สามเหลี่ยมสองรูป ด้านนี้เท่ากัน ด้านนี้เท่ากัน เส้นนี้เป็นเส้นแบ่งครึ่งตั้งตรง (กล้า หัวเราะ)" แสดงให้เห็นว่า**กล้าสามารถนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้แก้สถานการณ์ใหม่ได้** และจากที่

นักเรียนนำทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความสามารถในการใช้เครื่องหมายที่กำกวมได้ ซึ่งตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept)

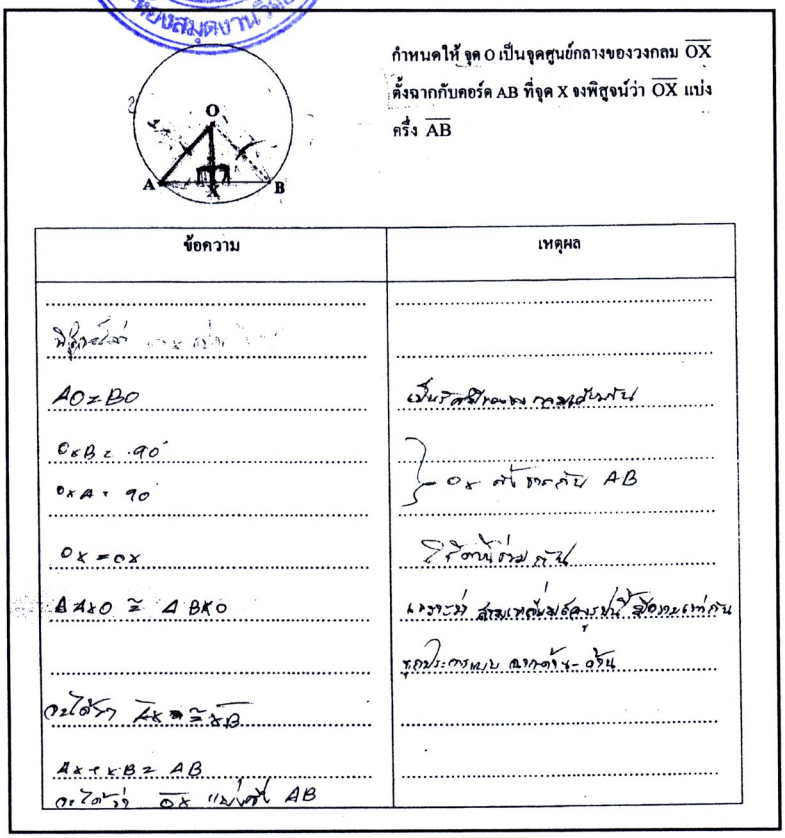
3.3.3.2 การวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต กิจกรรมที่ 19 เรื่อง คอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

ในระหว่างที่นักเรียนร่วมกันทำกิจกรรม นักเรียนมีการอภิปรายถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้ ดังโปรโตคอลต่อไปนี้

โปรโตคอล กิจกรรมที่ 19

บรรทัดที่ 1	ครู	:	OX ตั้งฉาก AB จงพิสูจน์ว่า OX แบ่งครึ่ง AB
บรรทัดที่ 2	...	:	
บรรทัดที่ 3	แก่น	:	อันเดียวกันเท่ากันบ่
บรรทัดที่ 4	...	:	
บรรทัดที่ 5	แก่น	:	มันเป็นเส้นตรง ข้างหนึ่งเป็น 90 องศา อีกข้างหนึ่งเป็น 90 องศาด้วย
บรรทัดที่ 6	...	:	
บรรทัดที่ 7	แก่น	:	AO = OB
บรรทัดที่ 8	...	:	
บรรทัดที่ 9	แก่น		แล้วมันกะไส้ด้านนี้ร่วมกัน
บรรทัดที่ 10	กิ่ง	:	AO = BO เป๊าะ
บรรทัดที่ 11	แก่น	:	OXB = 90 องศา
บรรทัดที่ 12	ครู	:	สามเหลี่ยมสองรูปนี้เป็นยังไงกัน
บรรทัดที่ 13	แก่น	:	สามเหลี่ยมเท่ากันทุกประการแบบ มุม ด้าน มุม

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ



กำหนดให้ จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $\overline{OX}$ ตั้งฉากกับคอร์ด AB ที่จุด X จงพิสูจน์ว่า $\overline{OX}$ แบ่งครึ่ง $\overline{AB}$

ข้อความ	เหตุผล
.....	.....
.....	.....
AO = BO	เส้นรัศมีของวงกลมเส้นเดียวกัน
OXB = 90°	OX ตั้งฉากกับ AB
OXA = 90°	.....
OX = OX	.....
△AXO ≅ △BXO	.....
.....	.....
ดังนั้น AX = XB	.....
AX + XB = AB	.....
ดังนั้น OX แบ่งครึ่ง AB	.....

ภาพที่ 58 งานเขียนกิจกรรมที่ 19 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

โปรโตคอล แบบฝึกหัดที่ 19

บรรทัดที่ 1 แก่น : ในเมื่อ 2 จุดใช้ร่วมกัน ด้านนี้มันก็เท่ากัน อันนี้กับอันนี้ก็เท่ากัน แล้วนี่มานี่ก็เท่ากัน นี่ก็เท่ากัน ส่งผลให้ จุดนี้คือจุดเดียวกัน มันสิเอียงไปไสบ่ได่แล้ว เพราะตัวนี้ก็เท่ากัน ตัวนี้ก็เท่ากัน สองตัวนี้เท่ากันแล้วส่งผลให้มุมนี้เท่ากัน เมื่อสองมุมนี้เท่ากัน มันก็จะแบ่งครึ่ง จาก 180 ก็จะเหลือ 90 ได้ด้วย เก่งแล้ว

บรรทัดที่ 2 ก้อย : จุดใด

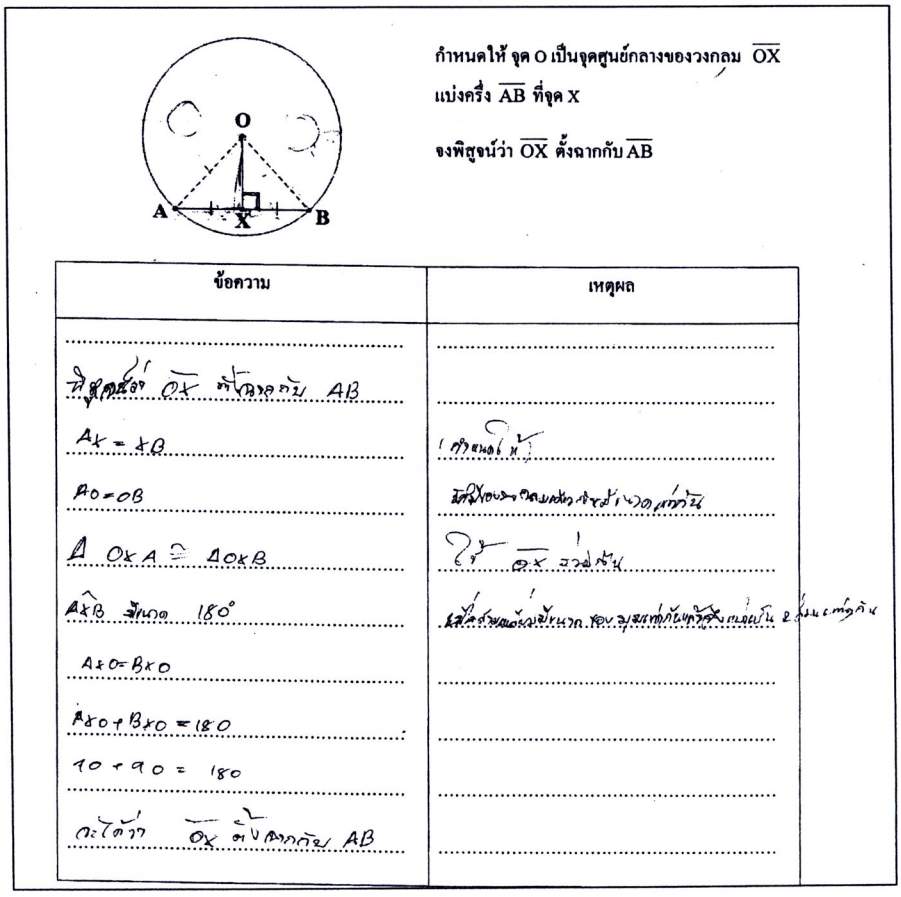
บรรทัดที่ 3 แก่น : จักสิบอกเขียนจั่งได๋ดี ตัวนี้เท่ากัน ตัวนี้เท่ากัน แล้วจะมีเส้นนี้ไส้ร่วมกัน เฮ็ดให้สามเหลี่ยม 2 รูปนี้ ด้านนี้เท่ากัน ด้านนี้เท่ากัน แล้วจะมีจุดนี้ไส้ร่วมกัน เส้นนี้ไส้ร่วมกัน

บรรทัดที่ 4 ก้อย : AX เท่ากบ XB ใช่ไหม OA เท่ากับ OB ใช่ไหม OB หรือ BO

บรรทัดที่ 5 แก่น : อะไรก็ได้ โตนี้เขากำหนดให้เด๋ โตนี้เป็นรัศมี

บรรทัดที่ 6 ... :

บรรทัดที่ 7	แก่น	:	มันเป๊ไปไส่บ่ได้ เพราะตัวนี้เท่ากัน ตัวนี้เท่ากัน มันเลยตั้งตรง ใช้ OX ร่วมกัน สามเหลี่ยม 2 รูปใช้ OX ร่วมกัน AOX , XOB ใช้ OX ร่วมกัน
บรรทัดที่ 8	...		
บรรทัดที่ 9	ก้อย	:	อาจารย์คะ
บรรทัดที่ 10	แก่น	:	ใช่ตรงนี้ ตรงนี้ เท่ากันแล้ว แล้วมันใช้ OX ร่วมกัน
บรรทัดที่ 11	ครู	:	มุมนี้กับมุมนี้มันเป็นยังไงกัน
บรรทัดที่ 12	แก่น	:	มันเท่ากัน แล้วสรุปได้เลยใช่ไหมว่า
บรรทัดที่ 13	ครู	:	ยัง มุมนี้เท่ากัน มุมตรงนี้เท่ากับ จะรู้ได้ยังไงว่ามันเป็นมุมฉาก
บรรทัดที่ 14	...		
บรรทัดที่ 15	แก่น	:	AXB มีขนาดมุม 180 องศา AXO เท่ากันทุกประการกับ OXB ดังนั้นแล้วขนาดของของมุมจึงแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน



ภาพที่ 59 งานเขียนแบบฝึกหัดที่ 19 ของกลุ่มที่ 2 Korean Fever

จากโปรโตคอลและภาพที่ 58 – 59 ภาพงานเขียนของนักเรียนแสดงให้เห็นว่านักเรียนสามารถพิสูจน์และให้เหตุผลทฤษฎีเกี่ยวกับคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลม และสามารถนำทฤษฎีเกี่ยวกับคอร์ดกับจุดศูนย์กลางของวงกลมไปใช้ได้ แสดงว่านักเรียน**มีการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)**

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ นักเรียนได้แสดงพฤติกรรมที่บ่งชี้ว่านักเรียนมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น ดังนี้ จากโปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 19 บรรทัดที่ 3 - 4 แก่นพูดว่า "จักสิบอกเขียนจั้งได้ดี ตัวนี้เท่ากัน ตัวนี้เท่ากัน แล้วจะมีเส้นนี้ไส้ร่วมกัน เฮ็ดให้สามเหลี่ยม 2 รูปนี้ ด้านนี้เท่ากัน ด้านนี้เท่ากัน แล้วจะมีจุดนี้ไส้ร่วมกัน เส้นนี้ไส้ร่วมกัน" และก้อย พูดว่า "AX เท่ากบ XB ใช่ไหม OA เท่ากับ OB ใช่ไหม OB หรือ BO" แสดงให้เห็นว่า **ก้อยสามารถตีความหมายแนวคิดของแก่นได้ว่าแก่นต้องการใหม่เขียนอธิบายอย่างไร** จากโปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 19 บรรทัดที่ 13 – 15 ครูพูดว่า "ยัง มุมนี้เท่ากัน มุมตรงนี้เท่ากับ จะรู้ได้ยังไงว่ามันเป็นมุมฉาก" แล้วแก่นนำคำพูดของครูไปคิดต่อจนได้คำตอบ ดังโปรโตคอลแบบฝึกหัดที่ 19 บรรทัดที่ 15 แกนพูดว่า "AXB มีขนาดมุม 180 องศา AXO เท่ากันทุกประการกับ OXB ดังนั้นแล้วขนาดของของมุมจึงแบ่งออกเป็นสองส่วนเท่าๆกัน " จากที่นักเรียนใช้ความรู้เรื่องความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมมาให้เหตุผล แสดง**ให้เห็นว่านักเรียนสามารถนำแนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมมาใช้แก้สถานการณ์ใหม่ได้** และจากที่นักเรียนนำทฤษฎีมาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความสามารถใน**การใช้เครื่องหมายที่กำกวม**ได้ตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept)

4. ผลการวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง วงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง วงกลม ในขณะทำกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่านักเรียนแต่ละกลุ่มมีการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต ดังตารางที่ 2

ตารางที่ 2 แสดงการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย

การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิต	**ลักษณะการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่น**	
	กลุ่มที่ 1 AGK[3]	**กลุ่มที่ 2 Korean Fever**
ระดับ 1 ไปสู่ระดับ 2	1) **ความสามารถในการตีความความคิดของคนอื่น** เช่น กล้าสามารถตีความหมายคำพูดของครู ที่พูดว่า “นักเรียนดูการเคลื่อนที่ของรัศมี มันจะเคลื่อนที่ไป มันจะมีรอยเกิดขึ้นเรื่อยๆ มันบ่งบอกถึงอะไร” กล้าสามารถหาคำตอบได้ว่ารัศมีและเส้นผ่านของวงกลมมีได้หลายเส้น เป็นต้น 2) **การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่** เช่น ในการสังเกตสมบัติของรัศมี, เส้นผ่านศูนย์กลาง และคอร์ด นักเรียนต้องมีสมมติฐานของปัญหาก่อนจึงนำไปสู่การสังเกตได้ 3) **การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่** เช่น จากความรู้รัศมีของวงกลมมีหลายเส้น นักเรียนตอบได้ว่าคอร์ดของวงกลมหนึ่งมีได้หลายเส้น เป็นต้น	**1) ความสามารถในการตีความความคิดของคนอื่น** นักเรียนอาจจะอธิบายการคิดของนักเรียนคนอื่นๆ และใช้แนวคิดของคนอื่นๆสร้างแนวคิดใหม่เพื่อพิสูจน์ว่าแนวคิดนั้นใช้ไม่ได้เช่น ก้อยพูดว่า “วงกลมจังได๋ ทรงกลม” แก่นพูดว่า “ทรงกลมจังได๋เป็นจังซี้ ทรงกลมกะมีแรเงานำหวะ 2) **การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่** เช่น ในการสังเกตสมบัติของรัศมี, เส้นผ่านศูนย์กลาง และคอร์ด นักเรียนต้องมีสมมติฐานของปัญหาก่อนจึงนำไปสู่การสังเกตได้ 3) **การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่** เช่น จากความรู้รัศมีของวงกลมมีหลายเส้น นักเรียนตอบได้ว่าคอร์ดของวงกลมหนึ่งมีได้หลายเส้น เป็นต้น

ตารางที่ 2 แสดงการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย (ต่อ)

การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิต	**ลักษณะการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่น**	
	กลุ่มที่ 1 AGK[3]	**กลุ่มที่ 2 Korean Fever**
ระดับ 1 ไปสู่ระดับ 2 (ต่อ)	4) **การใช้การนำเสนอที่หลากหลายสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์เดียวกัน หรือเพื่อแสดงแนวคิดเดียวกัน** เช่น การนำเสนอเกี่ยวกับสมบัติของรัศมี, เส้นผ่านศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลมเป็นต้น 5) **ความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ** เช่น ความสัมพันธ์ของรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลาง, ขนาดหรือพื้นที่ของวงกลมกับรัศมีหรือเส้นผ่านศูนย์กลาง	4) **การใช้การนำเสนอที่หลากหลายสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์เดียวกัน หรือเพื่อแสดงแนวคิดเดียวกัน** เช่น การนำเสนอเกี่ยวกับสมบัติของรัศมี, เส้นผ่านศูนย์กลางและคอร์ดของวงกลมเป็นต้น 5) **ความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ** เช่น ความสัมพันธ์ของรัศมีและเส้นผ่านศูนย์กลาง, ขนาดหรือพื้นที่ของวงกลมกับรัศมีหรือเส้นผ่านศูนย์กลาง
ระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3	**1) การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่** เช่น ในการสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน นักเรียนต้องมีสมมติฐานของปัญหาก่อนจึงนำไปสู่การสังเกตได้	**1) การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่** เช่น ในการสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างมุมที่จุดศูนย์กลางและมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน นักเรียนต้องมีสมมติฐานของปัญหาก่อนจึงนำไปสู่การสังเกตได้

ตารางที่ 2 แสดงการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย (ต่อ)

การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิต	**ลักษณะการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่น**	
	กลุ่มที่ 1 AGK[3]	**กลุ่มที่ 2 Korean Fever**
ระดับ 2 ไปสู่ระดับ 3 (ต่อ)	**2) การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่** เช่น การนำความรู้เรื่องผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมาใช้ในการแก้ปัญหา เป็นต้น **3) ความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ** เช่น ความสัมพันธ์มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน หรือมุมในส่วนโค้งจะมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน	**2) การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่** เช่น การนำความรู้เรื่องผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยมมาใช้ในการแก้ปัญหา เป็นต้น **3) ความสามารถในการสร้างความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ** เช่น ความสัมพันธ์มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน หรือมุมในส่วนโค้งจะมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของมุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน

ตารางที่ 2 แสดงการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย (ต่อ)

การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิต	**ลักษณะการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่น**	
	กลุ่มที่ 1 AGK[3]	**กลุ่มที่ 2 Korean Fever**
ระดับ 3 ไปสู่ระดับ 4	**1) การใช้เครื่องหมายที่กำกวม** เช่น จากที่นักเรียนนำทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผลได้ ตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ถือทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept) **2) การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่** เช่น นักเรียนนำแนวคิดในการพิสูจน์ทฤษฎีบท มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันไปพิสูจน์ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา **3) การใช้การนำเสนอที่หลากหลายสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์เดียวกัน หรือเพื่อแสดงแนวคิดเดียวกันเช่น** นักเรียนสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา ได้มากกว่าหนึ่งวิธี	**1) การใช้เครื่องหมายที่กำกวม** เช่น จากที่นักเรียนนำทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผลได้ตามแนวคิดของ Erh-Tsung Chin (2003) ถือทฤษฎีทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept) **2) การใช้แนวคิดเดิมหรือยุทธวิธีเดิมในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีเดิมให้เข้ากับบริบทใหม่** เช่น นักเรียนนำแนวคิดในการพิสูจน์ทฤษฎีบท มุมที่จุดศูนย์กลางจะมีขนาดเป็นสองเท่าของมุมในส่วนโค้งที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันไปพิสูจน์ทฤษฎีบท มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา

ตารางที่ 2 แสดงการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย (ต่อ)

การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิต	ลักษณะการคิดทางคิดศาสตร์แบบยืดหยุ่น	
	กลุ่มที่ 1 AGK[3]	กลุ่มที่ 2 Korean Fever
ระดับ 3 ไปสู่ระดับ 4 (ต่อ)	**4) ความสามารถในการตีความความคิดของคนอื่น** เช่น กล้าพูดว่า "จงพิสูจน์ว่ามันเท่ากันใช่ไหม AOC ส่วน 2 ใช่ไหม เท่ากับ ABC" แล้วก้องพูดว่า "ไม่ใช่เขียน AOC เท่ากับ สองคูณ ABC" แล้วกล้าตอบว่า "มันเหมือนกันนี่แหละย้ายข้างมา ก็เหมือนกัน" จากการสนทนาของกล้ากับก้องแสดงให้เห็นว่าทั้งกล้าและก้องสามารถตีความหมายแนวคิดของซึ่งกันและกันได้	**3) ความสามารถในการตีความความคิดของคนอื่น** แก่นพูดว่า "จักสิบอกเขียนจั๋งได๋ ดี ตัวนี้เท่ากัน ตัวนี้เท่ากัน แล้วจะมีเส้นนี้ไส้ร่วมกัน เฮ็ดให้สามเหลี่ยม 2 รูปนี้ ด้านนี้เท่ากัน ด้านนี้เท่ากัน แล้วจะมีจุดนี้ไส้ร่วมกัน เส้นนี้ไส้ร่วมกัน" และก้อย พูดว่า "AX เท่ากบ XB ใช่ไหม OA เท่ากับ OB ใช่ไหม OB หรือ BO" แสดงให้เห็นว่าก้อยสามารถตีความหมายแนวคิดของแก่นได้ว่าแก่นต้องการใหม่เขียนอธิบายอย่างไร

5. การอภิปรายผล

จากการวิจัย พบว่า การพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนจากระดับหนึ่งไปสู่ระดับที่สูงกว่า การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นจะมีบทบาทในฐานะเป็นตัวกระตุ้นการพัฒนาความเข้าใจ ซึ่งจะเห็นได้จากการที่นักเรียนมีการอภิปรายกันในกลุ่ม นักเรียนถกเถียง แลกเปลี่ยนเรียนรู้แนวความคิดของเพื่อนในกลุ่ม ความสามารถในด้านการตีความหมายแนวคิดของคนอื่นจะมีผลต่อความเข้าใจของนักเรียน ซึ่งจะเห็นได้จากการทำกิจกรรมของนักเรียนกลุ่มที่ 1 กับกลุ่มที่ 2 กลุ่มที่ 1 สมาชิกในกลุ่มมีการอภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้แนวความคิดซึ่งกันและกันทำให้การทำงานของนักเรียนกลุ่มที่ 1 ใช้เวลาน้อยกว่ากลุ่มที่ 2 ซึ่งบรรยากาศการทำงานภายในกลุ่มไม่ค่อยมีการอภิปราย แลกเปลี่ยนเรียนรู้กันก็จะใช้เวลาในการทำงานมาก หรือการนำเสนอแนวคิดที่หลากหลายก็จะทำให้นักเรียนมีการพัฒนาระดับความเข้าใจมากขึ้น เช่น การนำเสนอเกี่ยวกับ

สมบัติของรัศมี เส้นผ่านศูนย์กลาง และคอร์ดของนักเรียน ได้หลากหลาย ทำให้นักเรียนพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตจากระดับ 1 ไประดับ 2 เป็นต้น ซึ่งสอดคล้องกับการศึกษาของ Warner, Alcock, Coppolo & Davis (2003) นอกจากนี้การใช้โปรแกรม The Geometer' s Sketchpad เป็นเครื่องมือเชิงการรู้ (Cognitive Tool) ยังช่วยให้การพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของผู้เรียนให้สูงขึ้นด้วย โปรแกรม The Geometer' s Sketchpad เป็นโปแกรมที่มีสามารถสร้างให้วัตถุเคลื่อนไหวและมีความยืดหยุ่นได้ นักเรียนสามารถใช้โปรแกรม The Geometer' s Sketchpad สำรวจเกี่ยวกับทฤษฎีวงกลมได้ ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจเกี่ยวทฤษฎีก่อนการพิสูจน์ทฤษฎีนั้นๆ ทำให้นักเรียนรู้เป้าหมายของการพิสูจน์ และสามารถพิสูจน์ทฤษฎีนั้นๆได้ ซึ่งสอดคล้องกับทฤษฎีการจัดกิจกรรมของ van Hiele