บทที่ 2
วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อใช้เป็นแนวทางในการวิจัยดังรายละเอียดต่อไปนี้

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551
2. ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญา (Intellectual Development Theory)
3. ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสซึม (Constructivism)
4. แนวคิดเกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognition)
5. แนวคิดเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น (Flexible mathematical thinking)
6. แนวคิดเกี่ยวกับระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของ van Hiele
7. กรอบทฤษฎีการพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นความรู้ความเข้าใจ
8. แนวคิดเกี่ยวกับเทคโนโลยีกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์
9. แนวคิดเกี่ยวกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) กับการเรียนการสอน
10. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
11. กรอบที่ใช้ในการวิจัย

1. หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 (สำนักวิชาและมาตรฐานการศึกษา, 2551)

1.1 สาระสำคัญของหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551

หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐานพุทธศักราช 2551 มุ่งพัฒนานักเรียนทุกคนมีความสามารถในการสื่อสาร ความสามารถในการคิด ความสามารถในการแก้ปัญหา ความสามารถในการใช้ทักษะชีวิต ความสามารถในการใช้เทคโนโลยี เป็นคนดี มีปัญญา มีความสุข มีศักยภาพในการศึกษาต่อและประกอบอาชีพ

1.2 ความสำคัญของสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

คณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วน รอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน

ได้อย่างถูกต้อง เหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข

1.3 คุณภาพของนักเรียนในสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เมื่อนักเรียนจบการศึกษาขั้นพื้นฐาน 12 ปีแล้ว นักเรียนจะต้องมีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์ มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ตระหนักในคุณค่าของคณิตศาสตร์และสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์พัฒนาคุณภาพชีวิต ตลอดจนสามารถนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ ไปเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และเป็นพื้นฐานในการศึกษาระดับที่สูงขึ้นไป

การที่นักเรียนจะเกิดการเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีคุณภาพนั้นจะต้องมีความสมดุลระหว่างสาระทางด้านความรู้ ทักษะกระบวนการ ควบคู่ไปกับคุณธรรมจริยธรรมและค่านิยม ดังนี้

1.3.1 มีความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์พื้นฐานเกี่ยวกับจำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต การวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น พร้อมทั้งสามารถนำความรู้นั้นไปประยุกต์ได้

1.3.2 มีทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นได้แก่ มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ

1.3.3 มีความสามารถในการทำงานอย่างเป็นระบบ มีระเบียบวินัย มีความรอบคอบ มีความรับผิดชอบ มีวิจารณญาณ มีความเชื่อมั่นในตนเอง พร้อมทั้งตระหนักในคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์เมื่อนักเรียนจบชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนควรจะมีความสามารถดังนี้

1) มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับจำนวนจริง มีความเข้าใจเกี่ยวกับอัตราส่วน สัดส่วน ร้อยละ เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง สามารถดำเนินการเกี่ยวกับจำนวนเต็ม เศษส่วน ทศนิยม เลขยกกำลัง รากที่สองและรากที่สามของจำนวนจริง ใช้การประมาณค่าในการดำเนินการและแก้ปัญหา และนำความรู้เกี่ยวกับจำนวนไปใช้ในชีวิตจริงได้

2) มีความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับพื้นที่ผิวของปริซึม ทรงกระบอก และปริมาตรของปริซึม ทรงกระบอก พีระมิด กรวย และทรงกลม เลือกใช้หน่วยการวัดในระบบต่าง ๆ เกี่ยวกับความยาว พื้นที่ และปริมาตรได้อย่างเหมาะสม พร้อมทั้งสามารถนำความรู้เกี่ยวกับการวัดไปใช้ในชีวิตจริงได้

3) สามารถสร้างและอธิบายขั้นตอนการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติโดยใช้วงเวียนและสันตรง อธิบายลักษณะ สมบัติของรูปเรขาคณิตสามมิติซึ่ง ได้แก่ ปริซึม พีระมิด ทรงกระบอก กรวย และทรงกลมได้

4) มีความเข้าใจเกี่ยวกับสมบัติของความเท่ากันทุกประการและความคล้ายของรูปสามเหลี่ยม เส้นขนาน ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับ สามารถนำสมบัติเหล่านั้นไปใช้ในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ มีความเข้าใจเกี่ยวกับการแปลงทางเรขาคณิต (Geometric Transformation) ในเรื่องการเลื่อนขนาน (Translation) การสะท้อน (Reflection) และการหมุน (Rotation) และนำไปใช้ได้

5) สามารถนึกภาพและอธิบายลักษณะของรูปเรขาคณิตสองมิติและสามมิติ

6) สามารถวิเคราะห์และอธิบายความสัมพันธ์ของแบบรูป สถานการณ์หรือปัญหา และสามารถใช้สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ระบบสมการเชิงเส้นสองตัวแปร อสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว และกราฟในการแก้ปัญหาได้

7) สามารถกำหนดประเด็น เขียนข้อคำถามเกี่ยวกับปัญหาหรือสถานการณ์ กำหนดวิธีการศึกษา เก็บรวบรวมข้อมูลและนำเสนอข้อมูลโดยใช้แผนภูมิรูปวงกลม หรือรูปแบบอื่นที่เหมาะสมได้

8) เข้าใจค่ากลางของข้อมูลในเรื่องค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลที่ยังไม่ได้แจกแจงความถี่ และเลือกใช้ได้อย่างเหมาะสม รวมทั้งใช้ความรู้ในการพิจารณาข้อมูลข่าวสารทางสถิติ เข้าใจเกี่ยวกับการทดลองสุ่ม เหตุการณ์ และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ สามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการคาดการณ์และประกอบการตัดสินใจในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้

9) ใช้วิธีการที่หลากหลายแก้ปัญหา ใช้ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้อย่างเหมาะสม ให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจ และสรุปผลได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ ได้อย่างถูกต้อง และชัดเจน เชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ในคณิตศาสตร์ และนำความรู้ หลักการ กระบวนการทางคณิตศาสตร์ไปเชื่อมโยงกับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

2. ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญา (Intellectual Development Theory)

2.1 ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของเพียเจต์

เพียเจต์ (Piaget) กล่าวว่า พัฒนาการทางสติปัญญาของเด็กเกิดขึ้นอย่างต่อเนื่อง 4 ขั้นใหญ่ๆ (Inhelder and Piaget, 1958; Piaget, 1963; Piaget and Inhelder, 1969 อ้างถึงใน กิ่งฟ้า สินธุวงษ์, 2547) แต่ละขั้นของพัฒนาการจะมีช่วงคาบเกี่ยวซึ่งกันและกัน และเป็นรากฐานสำหรับพัฒนาการขั้นถัดไป และจะอยู่ในระดับสูงขึ้นเรื่อยๆ (Piaget and Inhelder, 1969 อ้างถึงใน กิ่งฟ้า สินธุวงษ์, 2547) เพียเจต์ (Piaget) (กิ่งฟ้า สินธุวงษ์, 2547) กล่าวไว้ว่า อายุเฉลี่ยโดยประมาณของแต่ละขั้นของแต่ละบุคคลจะแตกต่างกัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับสภาพสังคมและสิ่งแวดล้อม แต่สรุปโดยรวมทั่วไปได้ดังนี้

1) ขั้นรับรู้ด้วยประสาทสัมผัส (Sensorimotor Period) เป็นขั้นพัฒนาการในช่วงอายุ 0 - 2 ปี รับรู้ด้วยประสาทสัมผัสทั้งห้า แสดงสามารถในการเคลื่อนไหวเพื่อจุดมุ่งหมายเฉพาะหน้าระยะสั้นๆ เริ่มเข้าใจการคงอยู่ของวัตถุ เริ่มใช้ภาษาสื่อสารได้

2) ขั้นก่อนปฏิบัติการ (Preoperational Period) เป็นขั้นพัฒนาการในช่วงอายุ 2 – 7 ปี ความคิดของเด็กวัยนี้เป็นแบบทางเดียวแปรกลับไปมาไม่ได้ ใช้จินตนาการและภาษาของตนเองในการสื่อสารและแสดงออกถึงความรู้สึกนึกคิดอย่างง่ายๆ แก้ปัญหาโดยการลองผิดลองถูก

3) ขั้นการคิดแบบรูปธรรม (Concrete Operational Period) เป็นพัฒนาการในช่วงอายุ 7 – 11 ปี เป็นขั้นที่การคิดของเด็กไม่ขึ้นกับการรับรู้จากรูปร่างเท่านั้น เด็กสามารถสร้างภาพในใจสามารถคิดย้อนกลับได้ และมีความเข้าใจเกี่ยวกับความสัมพันธ์ของตัวเลขและสิ่งต่างๆ ได้มากขึ้น

4) ขั้นการคิดแบบนามธรรม (Formal Operational Period) เป็นขั้นพัฒนาการในช่วงอายุ 11–15 ปี เด็กสามารถคิดสิ่งที่เป็นนามธรรมได้ และสามารถคิดตั้งสมมติฐานและใช้กระบวนการทางวิทยาศาสตร์ได้

เพียเจต์ (Piaget) (กิ่งฟ้า สินธุวงษ์, 2547) กล่าวว่า การเรียนรู้เป็นผลผลิตของพัฒนาการ การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเฉพาะบุคคลและเฉพาะเรื่อง ผู้เรียนต้องกระทำกับวัตถุและปรากฏการณ์ในสิ่งแวดล้อม โดยการปรับตัว (Adaptation) ให้อยู่สภาวะสมดุล (Equilibration) ซึ่งต้องใช้กระบวนการทางสมอง 2 กระบวนการ คือ กระบวนการการดูดกลืน (Assimilation) และกระบวนการปรับให้เหมาะสม (Accommodation) ประกอบเข้าด้วยกัน เริ่มจากการรับและดูดกลืนสิ่งแวดล้อมหรือสิ่งเร้า แล้วพยายามปรับให้สิ่งเร้านั้นเหมาะกับประสบการณ์หรือความรู้เดิมหรืออาจจะต้องสร้างความรู้ใหม่ขึ้นเพื่อให้อยู่ในสภาวะสมดุล (Equilibration)

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

1.2 ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของบรูเนอร์

Bruner (1963 อ้างถึงใน ทิศนา แขมมณี, 2548) เป็นนักจิตวิทยาสนใจและศึกษาเรื่องของพัฒนาการทางสติปัญญาต่อเนื่องจากเพียเจต์ บรูเนอร์เชื่อว่ามนุษย์เลือกที่จะรับรู้สิ่งที่ตนเองสนใจและการเรียนรู้เกิดจากกระบวนการค้นพบด้วยตัวเอง (discovery learning) แนวคิดที่สำคัญๆ ของบรูเนอร์ มีดังนี้

1) การจัดโครงสร้างของความรู้ให้มีความสัมพันธ์ และสอดคล้องกับพัฒนาการทางสติปัญญาของเด็ก มีผลต่อการเรียนรู้ของเด็ก

2) การจัดหลักสูตรและการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับระดับความพร้อมของผู้เรียน และสอดคล้องกับพัฒนาการทางสติปัญญาของผู้เรียนจะช่วยให้การเรียนรู้เกิดประสิทธิภาพ

3) การคิดแบบหยั่งรู้ (intuition) เป็นการคิดหาเหตุผลอย่างอิสระที่สามารถช่วยพัฒนาความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ได้

4) แรงจูงใจภายในเป็นปัจจัยสำคัญที่จะช่วยให้ผู้เรียนประสบผลสำเร็จในการเรียนรู้

5) ทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาของมนุษย์แบ่งได้เป็น 3 ขั้น

5.1) ขั้นการเรียนรู้จากการกระทำ (Enactive Stage) คือ ขั้นของการเรียนรู้จากการใช้ประสาทสัมผัสรับรู้สิ่งต่างๆ การลงมือกระทำช่วยให้เด็กเกิดการเรียนรู้ได้ดี การเรียนรู้เกิดจากการกระทำ

5.2) ขั้นการเรียนรู้จากการคิด (Iconic Stage) เป็นขั้นที่เด็กสามารถสร้างมโนภาพในใจได้ และสามารถเรียนรู้จากภาพแทนของจริงได้

5.3) ขั้นการเรียนรู้สัญลักษณ์และนามธรรม (Symbolic Stage) เป็นขั้นการเรียนรู้สิ่งที่ซับซ้อนและเป็นนามธรรมได้

6) การเรียนรู้เกิดขึ้นได้จากการที่คนเราสามารถสร้างความคิดรวบยอด หรือสามารถจัดประเภทของสิ่งต่างๆ ได้อย่างเหมาะสม

7) การเรียนรู้ที่ได้ผลดีที่สุดคือการให้ผู้เรียนค้นพบการเรียนรู้ด้วยตนเอง (discovery learning)

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย วันที่ 26 ส.ค. 2555 เลขทะเบียน 203382 เลขเรียกหนังสือ

3. ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสซึม (Constructivism)

สุรางค์ โค้วตระกูล (2544) กล่าวว่า ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสซึม (Constructivism) มีหลักการที่สำคัญ คือ ในการเรียนรู้ผู้เรียนจะต้องเป็นผู้กระทำ (active) และสร้างความรู้ ซึ่งในเรื่องการเรียนรู้หรือการสร้างความรู้นั้น มีกลุ่มนักจิตวิทยา Constructivist ได้ให้ความเห็นที่แตกต่างกัน ดังนี้

ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสซึมเชิงพุทธิปัญญา (Cognitive Constructivism) เป็นทฤษฎีที่มีรากฐานมาจากทฤษฎีพัฒนาการของเพียเจต์ (Piaget) (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2544) ซึ่งเพียเจต์ (Piaget) อธิบายว่า การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่เกิดขึ้นเฉพาะบุคคลและเฉพาะเรื่อง ผู้เรียนต้องกระทำกับวัตถุและปรากฏการณ์ในสิ่งแวดล้อม โดยการปรับตัว (Adaptation) ให้อยู่สภาวะสมดุล (Equilibration) ซึ่งต้องใช้กระบวนการทางสมอง 2 กระบวนการ คือ กระบวนการการดูดกลืน (Assimilation) และกระบวนการปรับให้เหมาะสม (Accommodation) ประกอบเข้าด้วยกัน เริ่มจากการรับและดูดกลืนสิ่งแวดล้อมหรือสิ่งเร้า แล้วพยายามปรับให้สิ่งเร้านั้นเหมาะกับประสบการณ์หรือความรู้เดิมหรืออาจจะต้องสร้างความรู้ใหม่ขึ้นเพื่อให้อยู่ในสภาวะสมดุล (Equilibration) (กิ่งฟ้า สินธุวงษ์, 2547)

ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสซึมเชิงสังคม (Social Constructivism) เป็นทฤษฎีที่มีรากฐานมาจากทฤษฎีพัฒนาการของวีก็อทสกี้ (Vygotsky) นักจิตวิทยาชาวรัสเซียที่ได้ศึกษาวิจัยเกี่ยวกับพัฒนาการทางเชาว์ปัญญาในสมัยเดียวกับเพียเจต์ (Piaget) (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2544) วีก็อทสกี้ให้ความสำคัญกับวัฒนธรรมและสังคมมาก เขาอธิบายว่า มนุษย์ได้รับอิทธิพลจากสิ่งแวดล้อมตั้งแต่แรกเกิด ซึ่งนอกจากสิ่งแวดล้อมทางธรรมชาติแล้วก็ยังมีสิ่งแวดล้อมทางสังคมซึ่งก็คือวัฒนธรรมที่แต่ละสังคมสร้างขึ้น ดังนั้นสถาบันทางสังคมต่างๆ เริ่มตั้งแต่สถาบันครอบครัวจะมีอิทธิพลต่อการพัฒนาการทางเชาว์ปัญญาของแต่ละบุคคล นอกจากนั้น ภาษายังเป็นเครื่องมือสำคัญของการคิดและการพัฒนาเชาว์ปัญญาขั้นสูง พัฒนาการทางภาษาและทางความคิดของเด็กเริ่มด้วยการพัฒนาที่แยกจากกัน แต่เมื่ออายุมากขึ้นพัฒนาการทั้ง 2 ด้านจะเป็นไปร่วมกัน (สุรางค์ โค้วตระกูล, 2541 อ้างถึงใน ทิศนา แขมมณี, 2548)

อัมพร ม้าคะนอง (2546) กล่าวว่า ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสซึมมีอิทธิพลต่อการจัดการเรียนการสอนอย่างแพร่หลายในปัจจุบัน เนื่องจากเป็นทฤษฎีที่ให้ความสำคัญที่ตัวผู้เรียน ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของการจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญ ทฤษฎีนี้เน้นว่า ความรู้เป็นสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นโดยผู้เรียน ผู้เรียนใช้ความรู้และประสบการณ์ที่มีอยู่เป็นพื้นฐานในการสร้างความรู้ใหม่ การเรียนรู้เป็นสิ่งที่เกิดขึ้นภายในตัวผู้เรียนจากการมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมภายนอก ผู้เรียนแต่ละคนจะสร้างความรู้ด้วยวิธีการที่แตกต่างกัน ดังนั้น แนวการสอนตามทฤษฎีนี้ จึงเน้นการจัดกิจกรรมการเรียนการรู้ที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนได้สื่อสารและมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อน โดยผู้สอนคอยช่วยเหลือให้ผู้เรียนนำความรู้ที่มีอยู่ออกมาใช้ และไตร่ตรองสิ่งที่ได้จากการอภิปรายกับผู้อื่น ผู้สอนมีหน้าที่จัดสภาพแวดล้อมการเรียนรู้ให้เหมาะสม ตั้งประเด็นปัญหาที่ท้าทาย และช่วยเหลือให้ผู้เรียนสร้างความรู้ได้เอง

การประยุกต์ใช้ทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ในการเรียนการสอน

การนำทฤษฎีคอนสตรัคติวิสต์ไปใช้ในการเรียนการสอน (ทิศนา แขมมณี, 2548) สามารถทำได้ ดังนี้

1) ผลของการเรียนรู้ตามทฤษฎีนี้จะมุ่งเน้นไปที่กระบวนการสร้างความรู้และการตระหนักในกระบวนการนั้น ผู้เรียนต้องฝึกฝนการสร้างความรู้ด้วยตนเอง โดยครูต้องเป็นตัวอย่างและฝึกฝนกระบวนการเรียนรู้ให้ผู้เรียนเห็น

2) เป้าหมายของการสอนเปลี่ยนจากการถ่ายทอดสาระความรู้ไปสู่การสาธิตกระบวนการแปลและสร้างความหมายที่หลากหลาย

3) ผู้เรียนเป็นผู้มีบทบาทในการเรียนรู้อย่างกระตือรือร้น เป็นผู้จัดกระทำกับข้อมูลหรือประสบการณ์ต่างๆ และสร้างความหมายให้กับสิ่งนั้นด้วยตนเอง โดยให้ผู้เรียนได้มีปฏิสัมพันธ์กับสื่อ หรือข้อมูลต่างๆที่เป็นของจริงและมีความสอดคล้องกับความสนใจของผู้เรียน

4) ในการจัดการเรียนครูจะต้องสร้างบรรยากาศทางสังคมจริยธรรมให้เกิดขึ้น ปฏิสัมพันธ์ทางสังคม การร่วมมือและการแลกเปลี่ยนความรู้ ความคิดและประสบการณ์ระหว่างผู้เรียนกับผู้เรียนและบุคคลอื่นๆ จะช่วยให้ผู้เรียนเรียนรู้ได้กว้างขึ้น ซับซ้อนขึ้นและหลากหลายขึ้น

5) ในการเรียนการสอน ผู้เรียนเป็นผู้มีบทบาทในการเรียนรู้อย่างเต็มที่ (Devries, 1992 อ้างถึงใน ทิศนา แขมมณี, 2548) โดยผู้เรียนจะเป็นผู้นำตนเองและควบคุมตนเองในการเรียนรู้ เช่น ผู้เรียนตั้งกฎระเบียบเอง แก้ปัญหาที่เกิดขึ้นเอง หรือเลือกผู้ร่วมงานได้เอง เป็นต้น

6) ครูเปลี่ยนบทบาทจากผู้ถ่ายทอดความรู้และควบคุมการเรียนรู้เป็นการให้ความร่วมมืออำนวยความสะดวกและช่วยเหลือผู้เรียนในการเรียนรู้ (Devries, 1992 อ้างถึงใน ทิศนา แขมมณี, 2548)

7) การประเมินผลการเรียนการสอน (Jonassen, 1992 อ้างถึงใน ทิศนา แขมมณี, 2548) ควรประเมินตามจุดมุ่งหมายในลักษณะที่ยืดหยุ่นกันไปในแต่ละบุคคล และการประเมินควรใช้วิธีการที่หลากหลาย ซึ่งอาจเป็นการประเมินจากเพื่อน แฟ้มผลงาน (portfolio) รวมทั้งการประเมินตนเอง

4. แนวคิดเกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognition)

Flavell (1979) เชื่อว่าการตรวจสอบ (Monitoring) เกี่ยวกับลักษณะกิจกรรมเชิงการคิดต่างๆ จะเกิดขึ้นผ่านการกระทำและการทำงานร่วมกันของปรากฏการณ์ 4 ประเภท คือ 1) ความรู้เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognitive knowledge) 2) ประสบการณ์เกี่ยวกับการตระหนักในการคิด (Metacognitive experiences) 3) เป้าหมายหรือภาระงาน (Goals or Tasks) และ

4) การกระทำหรือยุทธวิธี (Action or Strategies) ซึ่ง Flavell (1979) ได้อธิบายการทำงานของ 2 ประเภทแรก ดังนี้

1) ความรู้เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognitive Knowledge) เป็นส่วนของความรู้ที่ไม่ว่าเด็กหรือผู้ใหญ่ได้สะสมจากการทำกิจกรรมร่วมกับบุคคลอื่นในฐานะของผู้สร้างสรรค์เชิงการคิด และเกี่ยวข้องภาระงาน, เป้าหมาย, การกระทำและประสบการณ์เชิงการรู้ที่หลากหลายของตนเอง ซึ่งความรู้เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognitive Knowledge) ประกอบด้วยความรู้พื้นฐานหรือความเชื่อเกี่ยวกับสิ่งที่เป็นปัจจัยหรือพฤติกรรมที่เป็นตัวแปร และสิ่งเหล่านี้มีปฏิกิริยาต่อกันในแนวทางใดที่มีผลต่อแนวคิดและผลของกิจกรรมเชิงการรู้ ซึ่งปัจจัยหรือตัวแปรเหล่านี้แบ่งได้เป็น 3 ประเภทที่สำคัญ คือ บุคคล (Person) , ภาระงาน (Task) , และยุทธวิธี (Strategy)

ปัจจัยหรือตัวแปรประเภทบุคคลประกอบด้วยทุกสิ่งทุกอย่างที่เราเชื่อเกี่ยวกับธรรมชาติของตัวเราและบุคคลอื่นในฐานะผู้ประมวลผลเชิงการรู้ ซึ่งมันสามารถเป็นกลุ่มย่อยเพิ่มเข้าไปในความเชื่อเกี่ยวกับความแตกต่างภายในตัวบุคคล(intraindividual differences) , ความแตกต่างระหว่างบุคคล(interindividual differences) และความเป็นสากลเกี่ยวกับการคิด (universals of cognition) ตัวอย่าง ความแตกต่างภายในตัวบุคคล(intraindividual differences) เช่น เราเชื่อว่าเราสามารถเรียนรู้ได้ดีด้วยการฟังมากกว่าการอ่าน ความแตกต่างระหว่างบุคคล(interindividual differences) เช่น เราเชื่อว่าเพื่อนเราคนหนึ่งอ่อนไหวทางสังคมมากกว่าเพื่อนคนอื่นๆ และความเชื่อเกี่ยวกับสมบัติที่เป็นสากลเกี่ยวกับการคิด (universal properties of cognition) ที่ว่าเด็กอาจเรียนรู้ได้ทีละน้อย และพวกเขาสามารถเรียนรู้ได้ในระดับที่แตกต่างกันและความเข้าใจที่แตกต่างกัน (เช่น เรียนรู้จากการเข้าร่วมอย่างตั้งใจ , การจำ , การสนทนา , การแก้ปัญหา เป็นต้น)

ปัจจัยหรือตัวแปรประเภทภาระงานเป็นเรื่องเกี่ยวกับข้อมูลที่เป็นประโยชน์ในระหว่างการทำกิจกรรมเชิงการรู้ ความรู้เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognitive Knowledge) ในกลุ่มย่อยนี้คือ ความเข้าใจเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงอะไรที่แสดงออกโดยนัยว่า กิจกรรมเชิงการรู้จะถูกจัดได้ดีที่สุดได้อย่างไรและเราจะไปถึงเป้าหมายนั้นได้อย่างไร

ปัจจัยหรือตัวแปรประเภทยุทธวิธี เป็นเรื่องเกี่ยวกับการเลือกใช้ยุทธวิธีอะไรที่จะให้บรรลุตามเป้าหมายที่ตั้งไว้และดำเนินการให้บรรลุเป้าหมาย

2) ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด (Metacognitive Experience) อาจเกิดขึ้นได้ในช่วงระยะเวลาสั้นๆ หรือระยะเวลาที่ยาวนาน อาจเกิดขึ้นได้ทั้งในเนื้อหาง่าย ๆ หรือซับซ้อนก็ได้ เช่น เราอาจเคยมีประสบการณ์ที่รู้สึกฉงนกับเรื่องใดเรื่องหนึ่งอยู่ชั่วครู่แล้วก็ละเลยไป หรือบางครั้งเราอาจจะรู้สึกประหลาดใจว่าจริงๆแล้วเราเข้าใจในสิ่งที่คนอื่นพูดถึงหรือไม่

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

ประสบการณ์เหล่านี้อาจเกิดขึ้นได้ทุกช่วงเวลาของกิจกรรมเชิงการรู้ ซึ่งอาจเกิดขึ้นช่วงก่อนทำกิจกรรมหรือหลังจากการทำกิจกรรมหรือในขณะที่กำลังการทำกิจกรรมก็ได้ เช่น เราอาจจะรู้สึกว่าเราอาจจะล้มเหลวในกิจกรรมที่กำลังจะทำ หรือเราอาจจะรู้สึกพอใจกับผลของการทำกิจกรรม ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดหลายอย่างเกี่ยวข้องกับว่าเราอยู่ตำแหน่งใดในกิจกรรมที่กำลังทำอยู่ และกำลังก้าวหน้าอย่างไร ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดมีผลกระทบที่สำคัญต่อเป้าหมายหรือภาระงานเชิงการรู้ ความรู้เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดและการกระทำหรือยุทธวิธีเชิงการรู้ เรื่องแรก : ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดสามารถนำเราไปสู่การตั้งเป้าหมายใหม่หรือปรับปรุงหรือยกเลิกเป้าหมายเดิม เรื่องที่สอง : ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดสามารถส่งผลกระทบต่อฐานความรู้เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดโดยการเพิ่มเติม การลบออก หรือปรับปรุงแก้ไข เรื่องสุดท้าย : ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิดสามารถกระตุ้นยุทธวิธีเพื่อการบรรลุเป้าหมายสองประเภท ได้แก่ เป้าหมายเชิงการรู้และเป้าหมายเกี่ยวกับความตระหนักในการคิด ตัวอย่างเช่น เรารู้สึกว่าเรายังไม่เข้าใจเนื้อหาสำหรับการสอบในวันพรุ่งนี้ (ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด) ฉะนั้นเราต้องอ่านเนื้อหานั้นอีกครั้ง (ยุทธวิธีเชิงการรู้มีเป้าหมายเพื่อที่จะทำให้บรรลุเป้าหมายเชิงการรู้ด้วยการปรับปรุงความรู้ของตนเอง) และหลังจากการทดสอบเรารู้สึกว่าพอใจกับการทำข้อสอบในครั้งนี้ (ประสบการณ์เกี่ยวกับความตระหนักในการคิด) ในทำนองเดียวกันถ้าเราเข้าใจเนื้อหาสำหรับการสอบในวันพรุ่งนี้แล้ว เราได้จะพยายามหาคำถามและคำตอบเพื่อตอบคำถามเกี่ยวกับเนื้อหานั้นด้วยตัวของเราเอง (ยุทธวิธีเกี่ยวกับความตระหนักในการคิดที่มีเป้าหมายเพื่อให้บรรลุเป้าหมายเชิงความตระหนักในการคิดด้วยการประเมินความรู้ของตนเอง) สรุปก็คือยุทธวิธีเชิงการรู้ทำให้เกิดความก้าวหน้าเชิงการรู้ ส่วนยุทธวิธีเกี่ยวกับความตระหนักในการคิดใช้เพื่อตรวจสอบความก้าวหน้าดังกล่าว

Baker & Brown (1984 อ้างถึงใน พิมพันธ์ เดชะคุปต์, 2544) กล่าวว่า เมตาคอกนิชันแยกได้เป็น 2 องค์ประกอบ คือ

1) การตระหนักรู้ (awareness) เป็นการตระหนักรู้ถึง ทักษะ ยุทธวิธี และข้อมูลที่จำเป็นต่อการทำงานอย่างมีประสิทธิภาพ และรู้ว่าจะต้องทำอย่างไร (What to do) เป็นเรื่องของการที่บุคคลรู้ถึงสิ่งที่ตนเองคิด และความสอดคล้องกับสถานการณ์การเรียนรู้ รวมไปถึงการสะท้อนการคิดของตนออกมาโดยการอธิบายให้ผู้อื่นฟังได้ สามารถสรุปใจความสำคัญของสิ่งที่เรียนรู้นั้น มีวิธีจำสิ่งนั้นได้ง่าย ตลอดจนการคิดแบบทดสอบ การวางขอบข่าย และการจดบันทึกซึ่งเป็นทักษะที่จะให้บุคคลทำงานอย่างมีแบบแผน

2) ความสามารถในการกำกับตนเอง (self-regulation) เป็นความสามารถในการกำกับตนเองในขณะที่กำลังคิดแก้ปัญหา ประเมินความพยายามในการทำงาน การวางแผน และขั้นตอนในการทำงาน การทดสอบวิธีการที่ใช้ การตัดสินใจในการใช้เวลา และใช้ความสามารถที่มีอยู่ และการเปลี่ยนไปใช้วิธีการอื่นๆ เพื่อแก้ปัญหา

5. แนวคิดเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น (Flexible mathematical thinking)

ความคิดยืดหยุ่น (Flexibility) (Guilford, 1969 อ้างถึงใน อารี พันธ์มณี, 2546) หมายถึง ความสามารถของบุคคลในการคิดหาคำตอบได้หลายประเภทและหลายทิศทาง โดยแบ่งออกเป็น

1) ความคิดยืดหยุ่นที่เกิดขึ้นทันที (Spontaneous Flexibility) เป็นความสามารถที่จะพยายามคิดให้หลายประเภทอย่างอิสระ เช่น คนที่มีความคิดยืดหยุ่นจะคิดได้ว่าประโยชน์ของก้อนหินมีอะไรบ้าง หลายประเภท ในขณะที่คนที่ไม่มีความยืดหยุ่นจะคิดได้เพียงอย่างเดียวหรือสองอย่างเท่านั้น

2) ความคิดยืดหยุ่นทางด้านการดัดแปลง (Adaptive Flexibility) เป็นความสามารถที่จะคิดได้หลากหลายและสามารถคิดดัดแปลงจากสิ่งหนึ่งไปเป็นหลายสิ่งได้ ซึ่งมีประโยชน์ต่อการแก้ปัญหา คนที่มีความคิดยืดหยุ่นจะคิดได้ไม่ซ้ำกัน

Sternberg & Powell (1983 อ้างถึงใน Passig & Eden, 2000) นิยามการคิดแบบยืดหยุ่นว่าเป็นความสามารถในการมองสิ่งต่างๆ จากมุมมองที่หลากหลาย การคิดแบบยืดหยุ่นได้ถูกกล่าวไว้ในสองลักษณะที่แตกต่างกัน คือ ลักษณะที่หนึ่งกล่าวว่า เด็กๆสามารถแสดงความสามารถในการคิดที่ดีกว่าได้อย่างสอดคล้องและจะยึดมั่นในวิธีการที่ได้รับการพิสูจน์แล้วว่ามีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา ลักษณะที่สองกล่าวว่า เมื่อมีความจำเป็น เด็กๆสามารถปรับเปลี่ยนวิธีการทำงานของพวกเขาได้และมีการแลกเปลี่ยนวิธีการซึ่งกันและกันเพื่อให้มาซึ่งวิธีการที่จะทำให้ประสบความสำเร็จ การคิดแบบยืดหยุ่นถือเป็นคุณลักษณะที่สำคัญอย่างหนึ่งของพฤติกรรมที่ชาญฉลาด

McGrowen & Tall (2001); Warner, Coppolo & Davis (2002) กล่าวว่า Krutetskii (1969b) และ Shapiro (1992) ได้จำแนกการคิดแบบยืดหยุ่นในฐานะการคิดที่สามารถย้อนกลับได้ เช่น การสร้างความสัมพันธ์แบบสองทางซึ่งระบุได้ด้วยความสามารถที่ “ทำการส่งผ่าน/การเปลี่ยน” จาก ‘ความสัมพันธ์โดยตรง’ ให้สอดคล้องกับ ‘ความสัมพันธ์แบบย้อนกลับ’

Gray & Tall (1994 อ้างถึงใน McGrowen & Tall, 2001) ได้จำแนกการคิดแบบยืดหยุ่นในลักษณะของความสามารถในการคิดเชิงกระบวนการความคิดรวบยอด (Proceptual thinking) คือ การเคลื่อนย้ายอย่างยืดหยุ่นระหว่างการตีความเครื่องหมายในฐานะกระบวนการ

(Process) เพื่อทำบางสิ่งบางอย่างและในฐานะวัตถุ (Object) เพื่อคิดด้วยกรอบความคิดและคิดเกี่ยวกับกรอบความคิดนั้นที่ขึ้นอยู่กับบริบทนั้นๆ

Warner, Coppolo & Davis (2002) ได้ให้นิยามลักษณะของการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น (Flexible mathematical thought) ในฐานะของความสามารถในการใช้หน่วยความรู้ระยะยาวของตนเองในสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย ซึ่งสรุปลักษณะสำคัญของความยืดหยุ่นเกี่ยวกับการคิดแบบยืดหยุ่นได้ดังนี้

1) การใช้ยุทธวิธีที่แปลกใหม่หรือไม่คุ้นเคยในการแก้ปัญหา (Use of novel strategies to solve problem)

2) ความสามารถในการสร้างความความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ (Ability to establish both direct and reverse association) เป็นการให้นิยามเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นของ Kruteskii (1969b อ้างถึงใน Warner, Coppolo & Davis, 2002) และ Shapiro (1992 อ้างถึงใน Warner, Coppolo & Davis, 2002)

3) การใช้เครื่องหมายที่กำกวม (Ambiguous use of notation) เป็นการให้นิยามเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นของ Gray & Tall (1994 อ้างถึงใน Warner, Coppolo & Davis , 2002) ซึ่งได้ยกตัวอย่างเกี่ยวกับการปรับเปลี่ยนการใช้เครื่องหมายการหาร (Division sign) ไปสู่แท่งเศษส่วน (Fraction bar)

Erh-Tsung Chin (2003) ได้ขยายแนวคิดของ "Procept" (ในความเข้าใจของ Gray & Tall, 1994) ไปสู่คณิตศาสตร์ขั้นสูงโดยการพิจารณาการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในฐานะของ "Formal procept" โดยพิจารณาสถานะของทฤษฎี (Theorem) หมายถึง สัญลักษณ์ (Symbol) ที่อาจทำให้เกิดขึ้นตามหลักทฤษฎี ส่วนการอนุมานพิสูจน์ถือเป็นกระบวนการ (Process) ที่ประกอบด้วยขั้นตอน (procedure) ที่ต่อเนื่องกันและอาจมีการสังเคราะห์ของหน่วยเชิงการรู้ที่แตกต่างกันชัดเจน หรือ ในแนวคิดในรูปทั่วไปของทฤษฎี(Theorem) ถือเป็นวัตถุ (Object) เสมือนเป็นเอกลักษณ์ที่ปรับเปลี่ยนได้ เพื่อนำไปใช้ในฐานะของข้อมูลนำเข้าสำหรับการสร้างทฤษฎีใหม่ ดังนั้น ทฤษฎีสามารถทำหน้าที่เป็นแกนหมุนระหว่างกระบวนการ (Process) (วิธีการเกี่ยวกับการพิสูจน์) และความคิดรวบยอด (Concept) (แนวคิดในรูปทั่วไปของทฤษฎี)

4) ความสามารถในการตีความความคิดของคนอื่น (Capacity to interpret someone else's thinking) นักเรียนอาจจะอธิบายการคิดของนักเรียนคนอื่นๆ และใช้แนวคิดของคนอื่นๆสร้างแนวคิดใหม่เพื่อพิสูจน์ว่าแนวคิดนั้นใช้ไม่ได้ หรือถามเกี่ยวกับแนวคิดของเพื่อน

5) การใช้แนวคิดหรือยุทธวิธีในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีที่มีอยู่ให้เข้ากับบริบทใหม่ (Using an idea or strategy across different contexts or changing an existing strategy to fit a new context)

6) การใช้การนำเสนอที่หลากหลายสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์เดียวกัน หรือเพื่อแสดงแนวคิดเดียวกัน (Using multiple representations for the same mathematical problem or using multiple representations to express the same idea) การนำเสนอที่หลากหลายเป็นแนวคิดที่สำคัญของความคิดยืดหยุ่นทางคณิตศาสตร์

7) การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่ (Raising hypothetical problem situations based on existing problem) พฤติกรรมนี้จะมีคำถาม "ถ้า...อะไร (What if)" เป็นองค์ประกอบสำคัญ เพื่อพิจารณาความคล้ายคลึงกันกับปัญหาที่มีอยู่ ซึ่งจะโยงไปถึงการคิดแผนดำเนินการ

6. แนวคิดเกี่ยวกับระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของ van Hiele

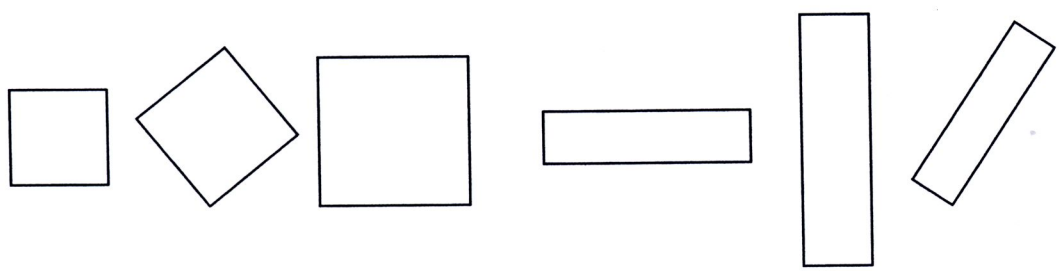
ทฤษฎี van Hiele พัฒนาโดย Dina van Hiele – Geldof และ Pierre Marie van Hiele สองสามี-ภรรยาชาวดัตช์ ในขณะที่กำลังศึกษาในระดับปริญญาเอก ที่มหาวิทยาลัย Utrecht ในปี 1957 ซึ่งได้นำไปใช้เพื่ออธิบายว่าทำไมนักเรียนจึงมีความยุ่งยากในกระบวนทางการคิดทางเรขาคณิตในระดับสูงโดยเฉพาะอย่างยิ่งการพิสูจน์ ซึ่งนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนปลายจะต้องสามารถทำได้ พบว่าที่นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนรู้เรขาคณิตนั้นมีพื้นฐานมาจากความไม่สอดคล้องกันระหว่างกิจกรรมการเรียนการสอนที่กำหนดโดยครูกับระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของตัวนักเรียนเอง แต่หลังจากสำเร็จการศึกษาได้ไม่นาน Dina van Hiele – Geldof ก็ได้เสียชีวิต Pierre Marie van Hiele จึงได้ปรับปรุงแก้ไขทฤษฎีให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น ซึ่งต่อมาก็ได้เผยแพร่ไปทั่วโลก รูปแบบของ van Hiele ประกอบด้วยความรู้ความเข้าใจทางเรขาคณิต 5 ระดับ ได้แก่ การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization), การวิเคราะห์ (Analysis) , การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน(Informal deduction), การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction), ขั้นนามธรรม (Rigor) (Usiskin, 1982; Crowley, 1987)

6.1 ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของ van Hiele

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต van Hiele แบ่งออกเป็น 5 ระดับดังนี้ (Crowley, 1987; Pegg, 1995)

ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)

มโนมติเชิงเรขาคณิตจะถูกมองแบบองค์รวมมากกว่าการมีส่วนประกอบย่อย รูปเรขาคณิตจะถูกพิจารณาตามลักษณะทางกายภาพที่ปรากฏเห็น นักเรียนในระดับนี้สามารถบอกชื่อ เปรียบเทียบ และจัดกระทำกับรูปเรขาคณิต เช่น วงกลม มุมในครึ่งวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลาง มุมในส่วนโค้ง คอร์ด เป็นต้น ซึ่งไม่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น การคิดระดับนี้เป็นการคิดที่เกี่ยวข้องกับรูปร่าง การสร้างความหมายของรูปเรขาคณิตจะขึ้นอยู่กับการรับรู้จากการมองเห็น (Visual perception) อย่างเช่น ในภาพที่ 1 นักเรียนในระดับนี้สามารถรับรู้ได้ว่ามีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสใน (ก) และมีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าใน (ข) นักเรียนจะยังไม่รู้ว่ารูปสี่เหลี่ยมเหล่านี้มีมุมฉากหรือด้านตรงข้ามขนานกัน



(ก) (ข)

ภาพที่ 1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสและรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์ (Analysis)

ในระดับนี้เริ่มมีการวิเคราะห์มโนมติเชิงเรขาคณิต การสังเกตและการทดลองของนักเรียนเริ่มมองเห็นลักษณะเฉพาะของรูปเรขาคณิตนั้นๆ สมบัติเชิงเรขาคณิตจะถูกอธิบายในลักษณะเฉพาะ ซึ่งสมบัติแต่ละสมบัติจะอยู่ในลักษณะที่เป็นอิสระต่อกัน นักเรียนยังไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติเหล่านั้นได้ ตัวอย่างเช่น นักเรียนบอกได้ว่า นักเรียนบอกได้ว่าวงกลมหนึ่งวงมีรัศมีได้หลายเส้น เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมมีความยาวเป็นสองเท่าของความยาวของรัศมี มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีจุดยอดที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลมจะมีจุดยอดบนเส้นรอบวงและแขนของมุมตัดกับเส้นรอบวงเสมอ แต่นักเรียนไม่สามารถบอกถึงความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติแต่ละอย่างได้ นอกจากนี้ นักเรียนยังไม่สามารถทำความเข้าใจในข้อสรุปหรือนิยามได้ ตัวอย่างเช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นรูปที่มีด้านสี่ด้านยาวเท่ากันและมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก, รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่ด้านที่มีมุมสี่มุมเป็นมุมฉากและมีด้านขนานกันสองคู่

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

การคิดในระดับนี้ นักเรียนสามารถเชื่อมโยงหรือสร้างความสัมพันธ์ภายในระหว่างสมบัติที่ค้นพบอย่างมีเหตุผล เช่น มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม จะมีขนากเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มุมในครึ่งวงกลมจะมีขนาดเท่ากับ 90 องศาหรือหนึ่งมุมฉาก ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน รูปสี่เหลี่ยมที่ด้านตรงข้ามขนานกัน มุมตรงข้ามจะเท่ากัน หรือในสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ข้อความจริงเกี่ยวกับด้านเท่ากันสองด้าน มีผลทำให้มุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านที่เท่ากันจะเท่ากันด้วย นอกจากนี้นักเรียนสามารถบอกความสัมพันธ์ระหว่างรูปเรขาคณิตแต่ละชนิด เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความยาวของด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เพราะมันมีสมบัติทุกอย่างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก กล่าวคือ นักเรียนสามารถสรุปเกี่ยวกับสมบัติและเข้าใจเกี่ยวกับวงศ์ (Class) ของรูปเรขาคณิต นักเรียนสามารถให้คำจำกัดความอย่างมีความหมาย แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจการให้เหตุผลเชิงนิรนัยทั้งหมดหรือเข้าใจบทบาทของสิ่งที่เห็นจริงแล้ว (axiom) การให้เหตุผลเชิงนิรนัยในระดับนี้เป็นการให้เหตุผลในรูปของผลลัพธ์ที่เกิดจากการปฏิบัติ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาไปสู่การพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนในลำดับต่อไป ตัวอย่างเช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากชนิดหนึ่ง หรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น

ระดับที่ 4 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)

นักเรียนสามารถนำเอาทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล และสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีทางเรขาคณิต นักเรียนสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีการที่หลากหลายและมีความเข้าใจเกี่ยวกับปฏิสัมพันธ์ระหว่างเงื่อนไขหรือทฤษฎีที่จำเป็นและเหมาะสมในการพิสูจน์เรขาคณิต นอกจากนี้นักเรียนสามารถแยกแยะและมีความเข้าใจในความแตกต่างระหว่างทฤษฎีกับทฤษฎีบทกลับ การคิดเชิงเรขาคณิตในระดับนี้เป็นระดับที่คาดหวังว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาจะต้องมี ตัวอย่างคำบรรยายของนักเรียน เช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส คือ รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีคู่ด้านที่ติดกันเท่ากัน หรือรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากคือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมีมุมเป็นมุมฉาก

ระดับที่ 5 : ขั้นนามธรรม (Rigor)

เป็นระดับที่นักเรียนสามารถสร้าง วิเคราะห์ และเปรียบเทียบทฤษฎีทางเรขาคณิตในระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกันได้ เช่น เรขาคณิตนอกระบบยุคลิด (Non-Euclidean) ในระดับนี้เรขาคณิตจะถูกมองในรูปของความเป็นนามธรรม เช่น ถ้าสัจพจน์ที่เกี่ยวกับความขนานกันระบุว่าเส้นขนานทั้งสองเส้นไปพบกันที่อนันต์ นักเรียนสามารถนำไปใช้อย่างมีเหตุผล

6.2 สมบัติของระดับการคิดทางเรขาคณิตของ van Hiele

ระดับการคิดทางเรขาคณิตของ van Hiele มีสมบติดังนี้ (Crowley, 1987)

1) การมีลำดับ (Sequential) หมายถึง การที่ผู้เรียนจะประสบความสำเร็จในระดับใดระดับหนึ่ง ผู้เรียนจะต้องมียุทธวิธีและการคิดในระดับที่ต่ำกว่าอย่างเพียงพอ

2) การพัฒนาความก้าวหน้า (Advancement) หมายถึง การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนจากระดับที่ต่ำกว่าไปยังระดับที่สูงจะขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีการเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ไม่ได้ขึ้นอยู่อายุของนักเรียน และไม่มีวิธีการสอนใดที่จะทำให้นักเรียนพัฒนาข้ามระดับการคิดได้

3) การมีความเข้าใจที่ชัดเจนในขั้นถัดไป (Intrinsic and Extrinsic) หมายถึง ความรู้จากระดับการคิดที่ต่ำกว่าจะถูกนำไปสร้างความรู้ในระดับการคิดที่สูงกว่า ทำให้นักเรียนมีความเข้าใจชัดเจนขึ้น เช่น ในระดับ 1 นักเรียนจะรับรู้เกี่ยวกับรูปเรขาคณิตเฉพาะลักษณะภายนอกแบบองค์รวมเท่านั้น จากนั้นรูปเรขาคณิตจะถูกพิจารณาเกี่ยวกับสมบัติและองค์ประกอบต่างๆ ในระดับการคิดเชิงเรขาคณิตระดับ 2

4) การมีภาษาประจำระดับ (Linguistic) หมายถึง แต่ละระดับการคิดจะมีภาษาสัญลักษณ์และระบบความสัมพันธ์เฉพาะในระดับการคิดนั้น ความสัมพันธ์ที่ถูกต้องในระดับหนึ่งอาจถูกปรับเปลี่ยนในอีกระดับหนึ่งก็ได้ เช่น นักเรียนรู้ว่าสี่เหลี่ยมจัตุรัสก็เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าและสี่เหลี่ยมด้านขนานได้เช่นกัน เมื่อนักเรียนมีการพัฒนาระดับการคิดที่สูงขึ้น

5) การไม่เข้ากัน (Mismatch) หมายถึง ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกับการสอนของครูไม่สอดคล้องกัน การเรียนรู้และความก้าวหน้าตามความปรารถนาอาจไม่เกิดขึ้นโดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้าครูใช้สื่อ เนื้อหา หรือคำศัพท์ในการสอนสูงกว่าระดับการคิดของนักเรียน นักเรียนอาจไม่สามารถพัฒนาการคิดตามการสอนของครูได้

สมบัติของระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของ van Hiele เหล่านี้มีความสำคัญเป็นอย่างยิ่งต่อนักการศึกษาและครูในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

6.3 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวคิดของ van Hiele

Pegg (1995) ได้กล่าวไว้ว่า จากงานวิจัยของ van Hiele พบว่า การพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตจากระดับที่ต่ำกว่าไปสู่ระดับที่สูงกว่าของนักเรียนนั้นขึ้นอยู่กับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และพวกเขาได้อธิบายขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ไว้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ขั้นการรับข้อมูล (Information หรือ Inquiry) ในขั้นตอนนี้นักเรียนจะมีการสนทนากันเกี่ยวกับกิจกรรมที่กำลังศึกษา นักเรียนจะมีการสังเกต การตั้งคำถาม การตีความ

ขั้นตอนที่ 2 ขั้นการแนะนำสิ่งใหม่ (Directed orientation) นักเรียนมีการสำรวจสิ่งที่เป็นปัญหาที่เกิดขึ้นในขั้นตอนที่ 1 นักเรียนจะมีการพูดคุย พร้อมนำสิ่งที่สำรวจได้แต่ละอันมาสร้างความเข้าใจเชิงเรขาคณิต

ขั้นตอนที่ 3 ขั้นการอธิบาย (Explication) นักเรียนจะมีการอธิบายผลของการกระทำที่ได้จากขั้นตอนที่ 2 คำพูดของพวกเขา ครูสามารถที่จะบอกคำเฉพาะที่ใช้กับการอธิบายของนักเรียน

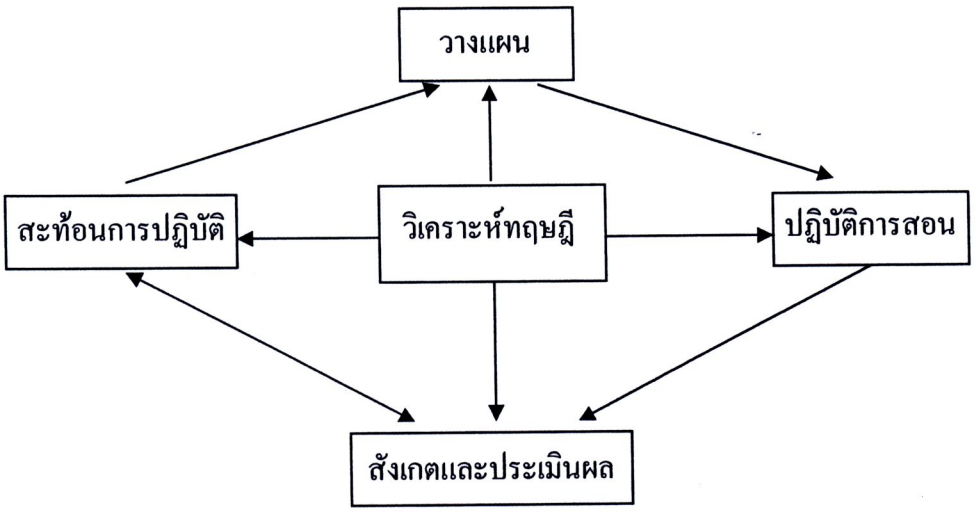
ขั้นตอนที่ 4 ขั้นการกำหนดทิศทางอย่างอิสระ (Free orientation) นักเรียนทำกิจกรรมที่ต้องใช้ขั้นตอนการแก้ปัญหาที่ซับซ้อน นักเรียนจะใช้ความสามารถและประสบการณ์เดิมช่วยในการแก้ปัญหา และกิจกรรมนั้นต้องเป็นกิจกรรมที่มีเจตนาให้เกิดผลตามนั้น เช่น นำรูปเรขาคณิตหลายๆ รูปให้นักเรียนดูแล้วถามว่ามีรูปเรขาคณิตอะไรบ้าง เป็นต้น

ขั้นตอนที่ 5 ขั้นบูรณาการ (Integration) เป็นการทบทวน อภิปรายและสรุปสิ่งที่ได้จากการเรียนรู้ โดยการเชื่อมโยงแต่ละส่วนที่ได้จากการเรียนรู้ให้สัมพันธ์กัน

7. กรอบทฤษฎีการพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นความรู้ความเข้าใจ

Heingraj (2006 อ้างถึงใน กฎุมพี กาสีชา, 2550) ได้พัฒนากรอบทฤษฎีเกี่ยวกับการพัฒนาแผนกิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นความรู้ความเข้าใจ ซึ่งมีขั้นตอนในการปฏิบัติที่สำคัญ 5 ขั้น คือ 1) ขั้นการวิเคราะห์ทฤษฎี (Theoretical Analysis) 2) ขั้นการวางแผน (Planning) 3) ขั้นปฏิบัติการสอน (Implementation of Instruction) 4) ขั้นการสังเกตและประเมินผล (Observation and Assessment) 5) ขั้นสะท้อนการปฏิบัติ (Reflection)

ขั้นตอนการพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในแต่ละขั้นตอน และคำอธิบายความสัมพันธ์ในแต่ละขั้นตอน ดังภาพที่ 2



ภาพที่ 2 กรอบทฤษฎีเกี่ยวกับการพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน (Heingraj, 2006 อ้างถึงใน กฎุมพี กาสีชา, 2550)

การพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนจะเริ่มจากการวิเคราะห์ทฤษฎีเพื่อตอบคำถามความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์คืออะไร และความเข้าใจนั้นถูกสร้างโดยนักเรียนได้อย่างไร ในการวิเคราะห์ครั้งแรกจะเกิดจากความรู้ความเข้าใจของครูผู้วิจัยเกี่ยวกับมโนมติที่ต้องการสอนและอยู่บนพื้นฐานของประสบการณ์ของการเป็นนักเรียนและเป็นครูที่สอนมโนมตินั้นมาก่อน ซึ่งแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนถูกสร้างขึ้นจากผลการวิเคราะห์ทฤษฎีซึ่งอธิบายเกี่ยวกับการพัฒนาความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนในชั้นเรียน ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้และกระบวนการสร้างความเข้าใจของนักเรียน สังเกตและประเมินผล นำข้อมูลที่ได้จากครูผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัยมาสะท้อนผล ผู้วิจัยนำผลการวิเคราะห์ข้อมูลมาพิจารณาทฤษฎีที่เกี่ยวกับความเข้าใจในมโนมติทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการสอน ซึ่งเป็นผลทำให้เกิดการปรับปรุงและเปลี่ยนแปลงทฤษฎีนั้นอีกครั้ง ผลการวิเคราะห์จะถูกนำมาพิจารณาประกอบการวางแผนและสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนใหม่ โดยเป็นการเข้าไปสู่วงจรการพัฒนาแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนอีกครั้ง และจะทำอย่างนี้ไปเรื่อยๆ จนกว่าผู้วิจัยจะเห็นว่าแผนการจัดกิจกรรมการเรียนสอนใหม่เหมาะสมเพียงพอที่จะทำให้นักเรียนมีความเข้าใจในมโนมติที่ครูผู้วิจัยคาดหวัง

8. แนวคิดเกี่ยวกับเทคโนโลยีกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติอเมริกา (National Council of Teachers of Mathematics [NCTN], 2000) กล่าวว่า เทคโนโลยีทางอิเล็กทรอนิกส์ เครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ ถือเป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับใช้ในการสอน การเรียนรู้และการทำคณิตศาสตร์ เทคโนโลยีถูกนำมาใช้เพื่อให้นักเรียนสามารถมองเห็นภาพเกี่ยวกับแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และสำรวจข้อเท็จจริงเนื้อหาต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ เช่น เรขาคณิต , สถิติ , พีชคณิต , การวัด และจำนวน เป็นต้น โดยนักเรียนจะมุ่งความสนใจไปที่การสร้างการตัดสินใจ การไตร่ตรอง การให้เหตุผลและการแก้ปัญหา นอกจากนี้เทคโนโลยียังมีความสามารถในการจัดระบบ การวิเคราะห์ข้อมูล และการคำนวณได้อย่างมีประสิทธิภาพและมีความแม่นยำสูง

8.1 เทคโนโลยีทำให้การเรียนรู้คณิตศาสตร์ดีขึ้น

การใช้เครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ ทำให้นักเรียนสามารถพิจารณาตัวอย่างหรือรูปแบบการนำเสนอได้มากกว่าปฏิบัติด้วยมือ นักเรียนจึงสามารถทำและสำรวจข้อคาดการณ์ได้ง่ายขึ้น ความสามารถทางด้านกราฟิกของเครื่องมือทางเทคโนโลยีทำให้นักเรียนสามารถเข้าถึงแบบจำลองที่มองเห็นได้ และความสามารถทางการคำนวณของเครื่องมือทางเทคโนโลยีทำให้นักเรียนที่สามารถเข้าถึงการคำนวณที่ยุ่งยากและสามารถจัดการกับขั้นตอนที่นักเรียนคุ้นเคยได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง ดังนั้นนักเรียนจึงมีเวลาที่มากขึ้นสำหรับการสร้างความคิดรวบยอดและการสร้างแบบจำลอง

เทคโนโลยีทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมและเป็นเจ้าของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นนามธรรม โดยการจัดเตรียมวิธีการเกี่ยวกับการมองแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากมุมมองหลายๆ มุมมอง การเรียนรู้ของนักเรียนจะถูกช่วยเหลือโดยการให้ข้อมูลย้อนกลับ นักเรียนสามารถสืบเสาะแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้โดย ลากปุ่มเพื่อให้รูปเรขาคณิตมีการเคลื่อนไหวและเปลี่ยนแปลงรูปทรง หรือเปลี่ยนแปลงสูตรแล้วดูค่าต่างๆที่เปลี่ยนแปลง เทคโนโลยียังให้ความสำคัญกับการให้นักเรียนได้อภิปรายกับนักเรียนคนอื่นๆ หรือกับครูเกี่ยวกับวัตถุที่บนหน้าจอและผลของการเปลี่ยนของรูปที่เคลื่อนไหวได้อย่างหลากหลาย

เทคโนโลยียังได้เตรียมทางเลือกไว้สำหรับให้ครูได้ปรับเปลี่ยนการสอนเพื่อตอบสนองความต้องการของนักเรียนพิเศษ นักเรียนที่สมาธิสั้นอาจให้ความสนใจภาระงานที่น่าสนใจบนหน้าจอคอมพิวเตอร์มากขึ้น และคนที่มีปัญหาเกี่ยวกับการจัดการอย่างเป็นระบบอาจได้รับประโยชน์จากข้อจำกัดที่กำหนดโดยสภาพแวดล้อมของคอมพิวเตอร์ นักเรียนที่มีปัญหากับขั้นตอนพื้นฐานสามารถพัฒนาและแสดงให้เห็นความเข้าใจทางคณิตศาสตร์อื่นได้ ซึ่งในการ

ปรับเปลี่ยนจะช่วยให้พวกเขาเรียนรู้ขั้นตอนได้ ความเป็นไปได้สำหรับการเข้าร่วมของนักเรียนเกี่ยวกับความท้าทายเชิงกายภาพในคณิตศาสตร์มีมากขึ้นด้วยเทคโนโลยี

8.2 เทคโนโลยีช่วยสนับสนุนการสอนคณิตศาสตร์ที่มีประสิทธิภาพ

การใช้เทคโนโลยีที่มีประสิทธิภาพในห้องเรียนคณิตศาสตร์นั้นขึ้นอยู่กับครู เทคโนโลยีไม่ใช่ยารักษาสารพัดโรค ครูควรใช้เทคโนโลยีเพื่อช่วยส่งเสริมโอกาสการเรียนรู้ของนักเรียนโดยการเลือกและการสร้างภาระงานทางคณิตศาสตร์ที่เป็นประโยชน์เกี่ยวกับสิ่งที่เทคโนโลยีสามารถทำได้อย่างมีประสิทธิภาพและสามารถทำได้ดี เช่น ความสามารถทางด้านกราฟฟิกช่วยในการสร้างภาพที่สามารถทำให้มองเห็นได้ และความสามารถทางด้านการคำนวณครูสามารถใช้ในการเลียนแบบสถานการณ์ที่ยุ่งยากซับซ้อน เพื่อให้นักเรียนได้มีประสบการณ์กับสถานการณ์ปัญหาที่ยากต่อการสร้างถ้าปราศจากเทคโนโลยี หรือใช้ข้อมูลและแหล่งข้อมูลจากอินเตอร์เน็ต เพื่อออกแบบภาระงานของนักเรียน ตารางคำนวณ ,ซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต, คอมพิวเตอร์เวิรลดเป็นเครื่องมือที่มีประโยชน์ในการให้ปัญหาที่คุ้มค่ากับความพยายาม

เทคโนโลยีไม่สามารถมาแทนที่ครูคณิตศาสตร์ได้ ครูเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญในชั้นเรียนที่มีการนำเทคโนโลยีมาใช้ การทำการตัดสินใจที่ส่งผลต่อการเรียนรู้ของนักเรียนในแนวทางที่สำคัญ บทบาทอย่างแรก ครูต้องตัดสินใจว่าเมื่อใดต้องใช้เทคโนโลยีและต้องใช้อย่างไร ในขณะที่นักเรียนใช้เครื่องคิดเลขหรือคอมพิวเตอร์ในชั้นเรียน เป็นเวลาที่ครูจะได้มีโอกาสสังเกตการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ดังนั้นเทคโนโลยีจึงมีส่วนช่วยในการประเมิน ทำให้ครูสามารถพิจารณากระบวนการที่นักเรียนใช้ในการศึกษาสำรวจทางคณิตศาสตร์ของพวกเขา และครูสามารถนำข้อมูลที่ได้จากการสังเกตเหล่านี้ไปใช้ในการตัดสินใจเกี่ยวกับการสอนได้

8.3 เทคโนโลยีมีอิทธิต่อการสอนคณิตศาสตร์

เทคโนโลยีไม่เพียงแต่มีอิทธิพลว่าคณิตศาสตร์ควรสอนและเรียนอย่างไร แต่ยังส่งผลถึงคณิตศาสตร์อะไรที่ควรสอนและเมื่อไรควรจะปรากฏในหลักสูตร การมีเทคโนโลยีทำให้เด็กๆสามารถสำรวจและแก้ปัญหาเกี่ยวกับตัวเลขจำนวนมากๆและสามารถสำรวจเกี่ยวกับรูปทรงโดยการใช้ซอฟต์แวร์พลวัตได้ นักเรียนในระดับประถมศึกษาสามารถจัดระบบและวิเคราะห์กลุ่มของข้อมูลขนาดใหญ่ได้ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นสามารถเรียนความสัมพันธ์เชิงเส้นและแนวคิดเกี่ยวกับความชันและการเปลี่ยนแปลงที่สม่ำเสมอด้วย การนำเสนอทางคอมพิวเตอร์และโดยการกระทำการทดลองเชิงกายภาพด้วยระบบห้องปฏิบัติการทางเครื่องคิดเลข นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายสามารถใช้การลอกเลียนแบบเพื่อศึกษาการกระจายของกลุ่มตัวอย่าง และสามารถทำงานกับคอมพิวเตอร์เกี่ยวกับระบบพีชคณิตที่ส่วนใหญ่เป็นการจัดการเกี่ยวกับสัญลักษณ์

ได้อย่างมีประสิทธิภาพ การใช้เครื่องมือทางเทคโนโลยีทำให้นักเรียนสามารถให้เหตุผลเกี่ยวกับประเด็นทั่วไปได้มากขึ้น พวกเขาสามารถสร้างแบบจำลองและแก้ปัญหาที่ซับซ้อนได้

9. แนวคิดเกี่ยวกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) กับการเรียนการสอน

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548) กล่าวว่า โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นโปรแกรมหนึ่งที่ครูสามารถเรียนรู้ได้ไม่ยาก สามารถนำไปบูรณาการกับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ได้อย่างมีประสิทธิภาพ โปรแกรมนี้ช่วยทำให้นักเรียนสามารถเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ตามมาตรฐานการเรียนรู้หลักสูตร มีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีทักษะการจินตนาการ เกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ นักเรียนสามารถสร้างความรู้ด้วยตนเอง ด้วยคุณสมบัติโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นระบบซอฟต์แวร์ที่ใช้สำหรับสร้าง สำรวจ และวิเคราะห์สิ่งต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาคณิตศาสตร์หลายด้าน เราสามารถใช้เรขาคณิตพลวัตสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ที่มีปฏิสัมพันธ์ได้หลากหลาย ตั้งแต่การค้นหาในระดับพื้นฐานซึ่งเกี่ยวกับรูปร่างและจำนวนไปจนถึงภาพวาดขั้นสูงที่มีความซับซ้อน และเคลื่อนไหวได้

วรรณวิภา สุทธเกียรติ (2544) กล่าวว่าโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีคุณสมบัติในการสร้างรูปเรขาคณิต วัดหาขนาดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุม และพื้นที่ ได้อย่างรวดเร็วถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติ และสามมิติบนหน้าจอ แล้วทำกิจกรรมการสำรวจด้วยการยืด หด หมุน เลื่อน รูปในมุมมองต่างๆ เพื่อเรียนรู้ความคิดรวบยอดต่างๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจ ก่อให้เกิดจินตนาการในการค้นหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนมองสิ่งต่างๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น

ดนัย ยังคง (2551) กล่าวว่า ซอฟแวร์ The Geometer's Sketchpad (GSP) มีเครื่องมือที่ใช้แทนวงเวียนและสันตรงสำหรับสร้างรูปต่างๆ มีคำสั่งซึ่งเป็นเครื่องมือสำหรับวัดขนาดของมุมและความยาวแทนไม้โพรแทรกเตอร์และไม้บรรทัด มีคำสั่งและเครื่องคำนวณสำหรับหาค่าของพื้นที่หรือคำนวณค่าต่างๆ ตลอดจนมีเครื่องมือช่วยเขียนกราฟของฟังก์ชันได้ ดังนั้นเราจึงสามารถใช้ The Geometer's Sketchpad ประกอบในการสอนวิชาคณิตศาสตร์ได้ทั้งในระดับประถมศึกษา จนถึงในระดับมหาวิทยาลัย

ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์ (2551) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการทำโครงงานคณิตศาสตร์โดยการประยุกต์ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นอีกทางเลือกหนึ่งที่ให้ผู้เรียนได้ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)ในการวางแผน ทดลอง สำรวจ กระตุ้นให้เกิดการคิด

วิเคราะห์ สร้างทฤษฎี พิสูจน์ทฤษฎี หรือการอธิบายหลักการทางคณิตศาสตร์ต่างๆ ให้เป็นรูปธรรม เพื่อสร้างสรรค์โครงงานทางคณิตศาสตร์ให้น่าสนใจยิ่งขึ้น ด้วยความสามารถของโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ที่เป็นโปรแกรมเรขาคณิตแบบพลวัตอังส่งเสริมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์แบบเคลื่อนไหว ผู้เรียนเรียนสามารถคิดสร้างสรรค์โครงงานของตนเองหรือกลุ่มทำงานได้ตามความสนใจ และความถนัด ตามจินตนาการของผู้เรียนใน การเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ

10. บทบาทของเทคโนโลยีตามแนวคิดคอนสตรัคติวิสซึม

เทคโนโลยีไม่ได้ใช้ในฐานะที่เป็นพาหนะสำหรับส่งผ่านหรือถ่ายทอดการสอน (Jonassen Campbell & Davidson, 1994 อ้างถึงใน สุมาลี ชัยเจริญ, 2551) แต่ควรจะใช้เทคโนโลยีเป็นสิ่งเติมเต็มหรือสนับสนุนเกี่ยวกับการคิดและการสร้างความรู้ บทบาทที่แท้จริงสำหรับเทคโนโลยีในการเรียนรู้ มีดังต่อไปนี้คือ

1) เทคโนโลยีเสมือนเป็นเครื่องมือ ที่ใช้สำหรับการเข้าถึงข้อมูล สำหรับการนำเสนอแนวความคิดใหม่และชุมชนการเรียนรู้และสำหรับสร้างผลิตผล (Product) ตัวอย่างเช่น Word Processors, Spreadsheets โปรแกรมช่วยการออกแบบ ทั้งหมดที่สนับสนุนประสิทธิผลของผู้ใช้ การสร้างความรู้ทั้งหมดต้องการสร้างการสื่อสาร การออกแบบวัสดุการจัดการแหล่งการเรียนรู้ เทคโนโลยีที่เป็นเครื่องมือช่วยขยายองค์ประกอบทางปัญญาของมนุษย์

2) เทคโนโลยีเปรียบเสมือนเพื่อนทางปัญญาหรือเครื่องมือทางพุทธิปัญญา เทคโนโลยีสามารถที่ทำได้มากกว่าช่วยขยายความสามารถของมนุษย์ แต่หากเป็นเครื่องมือทางพุทธิปัญญา (Cognitive Tools หรือ Mindtool) ที่ช่วยขยายองค์ประกอบทางพุทธิปัญญา ในขณะที่กำลังเรียนรู้ โดยการสนับสนุนผู้เรียนในการปฏิบัติทั้งด้านกระบวนการภายใน (Mental) และเครื่องมือคิดคำนวณที่จะสนับสนุน แนะแนวทาง และขยายกระบวนการคิดของผู้ใช้ เทคโนโลยีอาจเป็นเครื่องมือของการสร้างความรู้และส่งเสริมสิ่งที่จำเป็นในการคิดอย่างมีวิจารณญาณ และสามารถประยุกต์ไปสู่เนื้อหาวิชาอื่นๆ

3) เทคโนโลยีเป็นบริบท หมายถึง การสร้างและนำเสนอบริบท และสถานการณ์จากการแก้ปัญหาของผู้เรียน ตลอดจนการสร้างความรู้สิ่งแวดล้อมทางการเรียนรู้ในกรณีศึกษา (Case-Base Learning Environments) สิ่งแวดล้อมทางการเรียนรู้ที่เหมาะสม (Situated Learning Environments) สิ่งแวดล้อมที่เพียบพร้อมสำหรับการเรียนด้วยการลงมือกระทำอย่างตื่นตัว (Rich Environments for Active Learning) ความยืดหยุ่นทางปัญญา (Cognitive Flexibility) สื่อหลายมิติ (Hypertexts) การเรียนรู้โดยใช้ปัญหาเป็นรากฐาน (Problem – base Learning) และ Microworld ทั้งหมดที่กล่าวมาเป็นเครื่องมือที่จัดสถานการณ์ปัญหาที่เหมาะสมสำหรับผู้เรียนที่จะค้นหา และดำเนินการ

แก้ปัญหาอย่างมีความหมายตามสภาพจริงไปพร้อมๆกับจัดสิ่งที่ช่วยสนับสนุน ได้แก่ การช่วยเหลือ (Scaffolding) เพื่อที่จะช่วยให้ผู้เรียนเจริญเติบโตเข้ามาอยู่ใน Zones of Proximal Development ซึ่งเป็น Zone ที่ผู้เรียนสามารถที่จะเรียนรู้ได้เองตามทฤษฎีของ Vygotsky

11. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ชนิศวรา ฉัตรแก้ว (2549) ได้ทำการพัฒนาหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตและลำดับขั้นการคิดตามรูปแบบแวนฮีลี โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัต (GSP) สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2548 โรงเรียนสาธิตแห่งมหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ 1 ห้องเรียน จำนวน 39 คน ที่ได้จากการสุ่มตัวอย่างแบบกลุ่มจากทั้ง 7 ห้องเรียน ซึ่งผลจากการใช้หน่วยการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นประกอบด้วยเรื่อง เส้นขนาน ความคล้าย และการสำรวจรูปเรขาคณิต พบว่านักเรียนมีลำดับการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีเพิ่มขึ้นมากที่สุดในการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน

ทองขาว แสงสุริจันทร์ (2550) ได้ศึกษาระดับการคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นของประเทศลาวโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad กับกลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 จำนวน 6 คน จาก 20 คน ที่เข้าทำการทดสอบวัดระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามรูปแบบของvan Hiele ซึ่งนักเรียนทั้ง 6 คนนี้มีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตอยู่ในขั้นการวิเคราะห์ ผลจากการทำกิจกรรมเรื่อง การเลื่อนขนาน การสะท้อนและการหมุน โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad พบว่านักเรียนสามารถแสดงการคิดเชิงเรขาคณิตตามรูปแบบระดับการคิดของ van Hiele ในระดับที่สูงขึ้น คือ การให้เหตุผลอย่างไม่เป็นแบบแผน

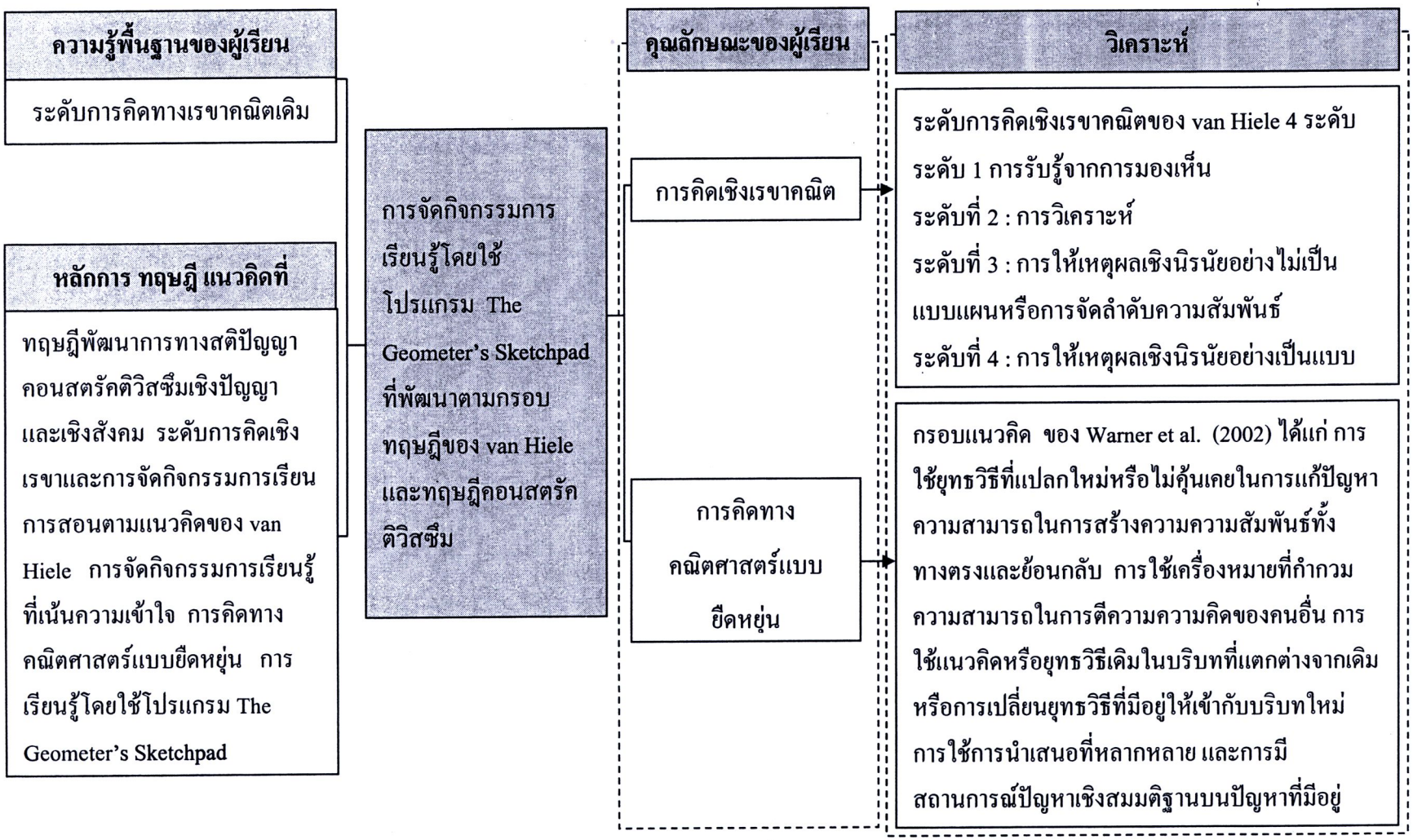
นิตยา อุดมผล (2551) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้เรื่องวงรี โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ประกอบการเรียนรู้ ในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 จำนวน 24 คน โรงเรียนน้ำพองศึกษา ปีการศึกษา 2550 พบว่า นักเรียนสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตจากระดับการวิเคราะห์เป็นระดับการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดความสัมพันธ์ได้

Warner, Alcock, Coppolo and Davis (2003) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นมีส่วนสนับสนุนการพัฒนาความเข้าใจอย่างไร? กับนักเรียนระดับเกรด 6 และเกรด 7 ที่คละความสามารถและสมัครใจเข้าร่วมการวิจัยเป็นเวลา 12 สัปดาห์ หลังเลิกชั้นเรียนคณิตศาสตร์ โดยนักเรียนทำการแก้สถานการณ์ปัญหาแบบผสมผสาน เช่น การสร้างหอคอย การหาจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ในการสร้างหอคอยสูง 4 ชั้น การเลือกบล็อค 2 สี ของ Martino and Maher (1999) จากการวิเคราะห์รายละเอียดงานของนักเรียนคนหนึ่งบนปัญหาแบบผสมผสาน แสดงให้เห็นว่าการ

ส่งผ่านจากระดับหนึ่งไปยังระดับถัดไปในรูปแบบความเข้าใจของ Pirie/Kieren เกิดขึ้นสัมพันธ์กันกับพฤติกรรมการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น พวกเขาสันนิษฐานว่าพฤติกรรมของการคิดแบบยืดหยุ่นเป็นตัวเร่งของการส่งผ่านในรูปแบบของ Pirie/Kieren สำหรับการพัฒนาเกี่ยวกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ และพวกเขายังสันนิษฐานว่าความสำเร็จของชั้นเรียนที่เน้นการปฏิสัมพันธ์ คือ โอกาสและการสนับสนุนนักเรียนให้เข้าร่วมในการคิดแบบยืดหยุ่น นอกจากนี้งานวิจัยยังแสดงให้เห็นด้วยว่าถึงแม้นักเรียนที่ถูกจัดว่ามีความสามารถต่ำกว่าค่าเฉลี่ยยังสามารถพัฒนาความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่ชำชองได้ในสภาพแวดล้อมในการถาม การโต้แย้งและการอภิปราย

12. กรอบที่ใช้ในการวิจัย

ผู้วิจัยทำการศึกษาเกี่ยวกับระดับการคิดทางเรขาคณิตที่มีอยู่เดิมของผู้เรียน รวมทั้งศึกษากรอบแนวคิดต่างๆ ที่เกี่ยวกับคอนสตรัคติวิสซึมเชิงปัญญาและคอนสตรัคติวิสซึมเชิงสังคม ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามรูปแบบของ van Hiele การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนตามแนวคิดของ van Hiele การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นความเข้าใจ และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญให้เหมาะสมกับระดับสติปัญญาและศักยภาพในการเรียนรู้ของผู้เรียน สามารถสรุปเป็นกรอบแนวคิดการวิจัยได้ดังภาพที่ 3



ภาพที่ 3 กรอบแนวคิดการวิจัยเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ตามแนวทฤษฎีคอนสตรัคติวิซึม เรื่อง วงกลม