บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

พระราชบัญญัติการศึกษาแห่งชาติ พ.ศ. 2542 และที่แก้ไขเพิ่มเติม (ฉบับที่ 2) พ.ศ. 2545 (สำนักคณะกรรมการการศึกษาแห่งชาติ, 2545) ได้กำหนดแนวทางการจัดการศึกษาไว้ว่า การจัดการศึกษาต้องถือว่าผู้เรียนมีความสำคัญที่สุด กระบวนการจัดการศึกษาต้องส่งเสริมให้ผู้เรียนสามารถพัฒนาตามธรรมชาติและเต็มตามศักยภาพ ผู้สอนจัดบรรยากาศ สภาพแวดล้อม สื่อการเรียน และอำนวยความสะดวก เพื่อให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้และมีความรอบรู้ จัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียนโดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ฝึกทักษะ กระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์และการประยุกต์ความรู้มาใช้เพื่อป้องกันและแก้ไขปัญหา จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น จัดการเรียนการสอนโดยผสมผสานสาระความรู้ด้านต่างๆ อย่างได้สัดส่วนสมดุลกัน รวมทั้งปลูกฝังคุณธรรม ค่านิยมที่ดีงามและคุณลักษณะพึงประสงค์ไว้ในทุกวิชา

หลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐานคณิตศาสตร์ พ.ศ. 2551 (สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา, 2551) กล่าวว่า คณิตศาสตร์มีบทบาทในการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุมีผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม คณิตศาสตร์ถือเป็นเครื่องมือสำคัญในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ นอกจากนี้หลักสูตรยังมุ่งหวังให้ผู้เรียนสามารถใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการทางคณิตศาสตร์และเทคโนโลยีในการแก้ปัญหาสถานการณ์ต่างๆโดยใช้วิธีการที่หลากหลายและเหมาะสม สามารถให้เหตุผลประกอบการตัดสินใจและสรุปได้อย่างเหมาะสม ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสาร การสื่อความหมายและการนำเสนอได้อย่างถูกต้องและชัดเจน มีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และสามารถเชื่อมโยงความรู้หลักการ และกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่นๆได้

คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิต แต่สำหรับนักเรียนส่วนใหญ่แล้วคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีเนื้อหาที่ยากต่อการเข้าใจ ซึ่งจะเห็นได้จากจำนวนนักเรียนบรรลุวัตถุประสงค์โดยปราศจากความเครียดมีเพียงเล็กน้อย และในขณะเดียวกันก็มีนักเรียนหลายคนที่ต้องล้มเหลวในการเรียนคณิตศาสตร์ (Gray & Tall, 1992) และการประเมินใน

โครงการ PISA2003และ PISA2006 สำหรับประเทศไทย ผลการวิจัยชี้ถึงความอ่อนด้อยของนักเรียนไทยเมื่อเทียบกับนานาชาติและประเทศในเอเชียด้วยกัน ทั้งในด้านการเรียนรู้ตามหลักสูตร โดยเฉพาะด้านการอ่าน คณิตศาสตร์และการแก้ปัญหา นักเรียนไทยอยู่ในกลุ่มต่ำ (สำนักงานเลขาธิการสภาการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ, 2550; สสวท., 2550) Peterson (1988 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2547) กล่าวว่าปัญหาที่ทำให้นักเรียนไม่ประสบผลสำเร็จในการเรียนคณิตศาสตร์ส่วนหนึ่งอาจมีสาเหตุมาจากการจดจำขั้นตอนหรือวิธีการใช้โดยปราศจากความเข้าใจหรือมโนทัศน์ การจัดการเรียนการสอนที่ผู้สอนเริ่มต้นจากการสอนขั้นตอนหรือวิธีการให้ผู้เรียนก่อนที่จะสอนให้ผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์ของเนื้อหานั้น อาจมีผลต่อความรู้ทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียนในระยะยาว เนื่องจากผู้เรียนจะไม่ได้พัฒนาความเข้าใจอย่างถ่องแท้ในเนื้อหาคณิตศาสตร์เฉพาะ แต่จะจดจำขั้นตอนหรือวิธีการไปใช้ คณิตศาสตร์ในความคิดของผู้เรียนจึงลดความสัมพันธ์ลงเป็นเพียงการดำเนินการโดยใช้สัญลักษณ์ (Peterson, 1988 อ้างถึงใน อัมพร ม้าคนอง, 2546) ดังที่ Gray & Tall (1992) กล่าวว่า เป็นปรากฏการณ์ที่คล้ายคลึงกันในหลายๆพื้นที่เกี่ยวกับการเรียนคณิตศาสตร์จากระดับประถมศึกษาจนถึงระดับมัธยมศึกษาสู่ระดับมหาวิทยาลัย นั่นก็คือประสบการณ์พื้นฐานของการเรียนรู้เกี่ยวกับขั้นตอน (procedure) ที่อาจจะส่งผลต่อการพัฒนาความยืดหยุ่นและความสามารถของผู้เรียน หรืออาจจะส่งผลต่อการยึดติดในวิธีการเกี่ยวกับการเรียนรู้สูตรที่ไม่ยืดหยุ่นในภายหลัง

Usiskin (2544 อ้างถึงใน สำนักคณิตศาสตร์และคอมพิวเตอร์, 2545) กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ครูผู้สอนควรตระหนักถึงความสำคัญของการสอนให้ผู้เรียนมีความรู้และความเข้าใจ (Understanding) ในความคิดรวบยอด (Concept) และหลักการทางคณิตศาสตร์ การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจจะช่วยให้การเรียนรู้ขั้นต่อไปง่ายขึ้น และยังช่วยให้นักเรียนมองเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่มีความหมาย การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจจะช่วยให้สามารถนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน และเป็นพื้นฐานในการเรียนคณิตศาสตร์ขั้นสูงได้ดี นอกจากนี้การเรียนรู้ด้วยความเข้าใจยังส่งเสริมความสามารถในการเรียนรู้ด้วยตนเองของนักเรียน สามารถควบคุมการเรียนรู้ของตนด้วยการกำหนดเป้าหมายและใช้กระบวนการเรียนรู้ด้วยตนเอง เมื่อนักเรียนได้รับการท้าทายด้วยการให้ทำงานคณิตศาสตร์ที่เหมาะสม จะก่อให้เกิดความเชื่อมั่นในตนเองในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ยากๆ กระหายที่จะหาคำตอบด้วยตนเอง รู้จักยืดหยุ่นในการหาคำตอบ เมื่อใช้วิธีการหนึ่งหาคำตอบไม่ได้ ก็รู้จักที่จะเปลี่ยนไปใช้วิธีการอื่น (ดวงเดือน อ่อนน่วม, 2547) ซึ่งความยืดหยุ่นนี้ถือเป็นองค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหา

Warner, Alcock, Coppolo & Davis (2003) กล่าวว่า องค์ประกอบที่สำคัญของการแก้ปัญหาคือ ความคงทนของความรู้ หมายถึงความสามารถในการเรียกและการใช้ข้อเท็จจริง ทักษะ ขั้นตอน

และแนวคิด ความยืดหยุ่นมีความจำเป็นถ้านักเรียนมีการประยุกต์ความรู้ไปใช้ในบริบทใหม่ ดังนั้น ความยืดหยุ่นจึงเป็นองค์ประกอบที่สำคัญในการแก้ปัญหา

Mediterr (2002) กล่าวว่า ความยืดหยุ่นในการคิดที่มีความสำคัญในคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย 2 ลักษณะที่สำคัญเกี่ยวกับการเรียนรู้และการจำ ลักษณะที่หนึ่ง คือ ความสามารถในการระลึกได้และการใช้ความจริงทางคณิตศาสตร์ที่ได้เรียนรู้มาก่อน ลักษณะที่สอง คือ ความสามารถในการใช้ประโยชน์สิ่งที่จำได้หรือระลึกได้ในสถานการณ์ใหม่ที่ไม่คุ้นเคย

Sternberg & Powell (1983 อ้างถึงใน Passig & Eden, 2000) ได้ให้คำจำกัดความ การคิดแบบยืดหยุ่นในฐานะความสามารถในการมองสิ่งของหรือปัญหาจากมุมมองที่หลากหลาย ความสามารถในการคิดอย่างยืดหยุ่นจะเห็นได้ชัดเจนในช่วงวัยรุ่น ซึ่งความยืดหยุ่นนี้จะถูกแสดงออกในสองทิศทางที่ตรงกันข้าม คือ นักเรียนที่มีความยืดหยุ่นในการคิดก็จะคิดในแนวทางที่มีความสอดคล้องและยึดมั่นกับวิธีการซึ่งได้พิสูจน์แล้วว่ามีประสิทธิผลในการแก้ปัญหา แต่เมื่อมีความจำเป็น พวกเขาก็สามารถที่จะปรับเปลี่ยนวิธีการทำงานของพวกเขาได้และมีการปรับเปลี่ยนวิธีการเพื่อให้ได้มาซึ่งวิธีการที่จะประสบผลสำเร็จมากขึ้น การคิดแบบยืดหยุ่นจึงเป็นลักษณะพิเศษหนึ่งของพฤติกรรมที่ชาญฉลาด

นอกจากนี้ความคิดยืดหยุ่นยังถือเป็นองค์ประกอบหนึ่งของความคิดสร้างสรรค์ (พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2547) โดย Guildford (1967 อ้างถึงใน พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2547) และ Torrance (1973 อ้างถึงใน พร้อมพรรณ อุดมสิน, 2547) ได้เสนอองค์ประกอบความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ที่มีลักษณะร่วม 3 ลักษณะ คือ

1) ความคล่องในการคิด (Fluency) เป็นความสามารถในการคิดได้หลากหลายในปริมาณมาก

2) ความยืดหยุ่นในการคิด (Flexibility) เป็นความสามารถในการกระทำต่อปัญหาได้หลายประเภทและหลายทิศทาง

3) ความคิดริเริ่ม (Originality) เป็นความคิดที่แปลกใหม่ แตกต่างจากความคิดดั้งเดิมหรือแตกต่างไปจากความคิดคนอื่น

ดวงเดือน อ่อนนวม (2547) ได้ให้แนวทางการจัดการเรียนการสอนที่จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างสร้างสรรค์ไว้ว่า การจัดกิจกรรมควรเน้นความหลากหลาย และความยืดหยุ่นในการคิด สร้างความรู้ใหม่จากการเชื่อมโยงความรู้เดิม เน้นกระบวนการเช่นเดียวกันกับผลผลิต ไม่ยึดมั่นตามความคิดของครูฝ่ายเดียว มีการแลกเปลี่ยนเรียนรู้ระหว่างครูกับนักเรียนและระหว่างนักเรียนกับนักเรียน บรรยากาศในการเรียนรู้ทั้งทางด้านกายภาพ และตัวบุคคลเอื้อต่อการพัฒนาสติปัญญา ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดสำคัญของกลุ่มคอนสตรัคติวิสซึม (constructivism)

(Haylock & Thangata, 2007) คือ การเรียนรู้เป็นกระบวนการที่ไม่หยุดนิ่งซึ่งผู้เรียนต้องสร้างแนวคิดหรือความคิดใหม่ๆจากความรู้ที่มีอยู่หรือความรู้เดิมของผู้เรียนเอง ความรู้ไม่ใช่ต้องรอรับเข้ามาแต่เป็นสิ่งที่ต้องสร้างขึ้นเอง

สมาคมครูคณิตศาสตร์แห่งชาติอเมริกา (NCTM, 2000) กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่มีความเป็นนามธรรมและยากแก่การสร้างองค์ความรู้ของนักเรียน เทคโนโลยีเป็นทางเลือกหนึ่งที่สามารถช่วยให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น ยกตัวอย่างเช่น การใช้เครื่องคิดเลขและคอมพิวเตอร์ ทำให้นักเรียนสามารถพิจารณาตัวอย่างหรือรูปแบบการนำเสนอได้มากกว่าปฏิบัติด้วยมือ สามารถทำและสำรวจข้อคาดเดาได้ง่าย เครื่องมือทางเทคโนโลยียังมีความสามารถทางกราฟิกทำให้นักเรียนเข้าถึงตัวแบบที่สามารถมองเห็นได้ และความสามารถทางการคำนวณที่สามารถจัดการกับขั้นตอนที่คุ้นเคยได้อย่างรวดเร็วและถูกต้อง จึงทำให้นักเรียนมีเวลามากขึ้นสำหรับการสร้างตัวแบบและความคิดรวบยอด Gray & Tall (1992) กล่าวว่า คอมพิวเตอร์สามารถใช้เพื่อให้ความหมายเครื่องหมายทางพีชคณิต การวาดกราฟและความคิดรวบยอดมองเห็นได้ และหาผลลัพธ์ของการคำนวณขั้นตอนต่างๆ ที่ผู้เรียนอาจให้ความสนใจไปที่ความหมายของผลลัพธ์การคำนวณเหล่านั้น การใช้คอมพิวเตอร์ได้ท้าทายแนวคิดดั้งเดิมของพวกเราเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ในส่วนทีมันสามารถดำเนินการแบบดั้งเดิมได้ทั้งหมด ซึ่งเป็นตำแหน่งแก่นแท้ของวิธีการเข้าถึงการดำเนินการของคณิตศาสตร์ โดยการมองธรรมชาติของการดำเนินความหมายทางคณิตศาสตร์มากกว่าที่จะเน้นไปบนวิธีการดำเนินการของการคำนวณทางคณิตศาสตร์

ความเข้าใจทางเรขาคณิตเป็นทักษะทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญ แต่การรับรู้เกี่ยวกับเรขาคณิตของนักเรียนมักแสดงออกในทางลบ นักเรียนมักจะบอกว่าเรขาคณิตนั้นยากและน่าเบื่อ ส่วนการเรียนจะให้ประสบความสำเร็จในเรขาคณิตนั้นมักเริ่มต้นด้วยการท่องจำเกี่ยวกับการสร้าง นิยามและทฤษฎี (Pegg, 1996) จากการศึกษาและการวิจัยเพื่อหาแนวทางแก้ปัญหาการเรียนการสอนเรื่องเรขาคณิต โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) หรือซอฟแวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์เรขาคณิตพลวัต สุชาวดี เอี่ยมอรพรรณ (2547) กล่าวว่า การสอนเรขาคณิตโดยใช้โปรแกรม GSP นักเรียนจะเกิดความสนุกและมีความเข้าใจในบทเรียนมากขึ้น ครูจะใช้เวลาในการสอนน้อยลง นักเรียนสนใจและสามารถทำแบบฝึกหัดด้วยตนเองมากขึ้น ตอบคำถามได้ดี และจดจำทฤษฎีบทได้แม่นยำและจดจำได้นานกว่าที่เรียนโดยไม่ใช้สื่อรูปธรรม วรรณวิภา สุทธเกียรติ (2544) กล่าวว่าโปรแกรม GSP มีคุณสมบัติในการสร้างรูปเรขาคณิต วัดหาขนาดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุมและพื้นที่ ได้อย่างรวดเร็วถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติ และสามมิติบนหน้าจอ แล้วทำกิจกรรมการสำรวจด้วยการยืด หด หมุน เลื่อน รูปในมุมมองต่างๆ เพื่อเรียนรู้ความคิดรวบยอดต่างๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจ ก่อให้เกิดจินตนาการในการ

ค้นหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนมองสิ่งต่างๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น Hsieh (1993 อ้างถึงใน Heingraj, 2006) โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) มีบทบาทสำคัญในการสอนและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่งเรื่อง เรขาคณิตและพีชคณิต นักเรียนสามารถใช้เมนูเพื่อสร้างโครงสร้างทางเรขาคณิตได้อย่างง่าย ความสามารถของซอฟต์แวร์นี้ยังให้นักเรียนสามารถดำเนินการเพื่อกระทำบนกราฟิกได้อย่างแม่นยำ ทำให้มีโอกาสมากขึ้นกว่าเมื่อก่อนในการสังเกตและสะท้อนบนผลของการจัดกระทำ ซึ่งเป็นการเรียนรู้จากประสบการณ์จริงและสถานการณ์การเรียนรู้แบบเคลื่อนไหว ประสบการณ์นี้อาจจะกระตุ้นให้เกิดการเชื่อมโยงเครือข่ายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนได้ถ้าประสบการณ์ใหม่สอดคล้องกับแนวคิดเดิม แต่ถ้าประสบการณ์ใหม่ไม่สอดคล้องกับแนวคิดเดิม นักเรียนก็จะมีการปรับความรู้ให้สอดคล้องกับความรู้ใหม่ที่ได้รับ กิติศักดิ์ ใจอ่อน (2550) พบว่า การใช้แผนการสอนแบบเปิดที่เน้นการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) สะท้อนให้เห็นลักษณะกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ในด้านต่างๆ ได้แก่ การสำรวจ การให้เหตุผล การตรวจสอบและการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย นิตยา อุดมผล (2551) ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียน ตามรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของ van Hiele โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad พบว่า เป็นกิจกรรมที่มีความท้าทาย สามารถกระตุ้นให้นักเรียนมีการคาดเดาหรือทำนายผล และตรวจสอบผลการคาดเดา ส่งเสริมให้นักเรียนพัฒนาทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์และสร้างความรู้ด้วยตนเอง นักเรียนสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของตนเองตามกรอบของ van Hiele จากระดับ 2 การวิเคราะห์หรือพรรณนารูปลักษณะ เป็นระดับที่ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์

จากที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นได้ว่าการคิดแบบยืดหยุ่นและการเรียนรู้ด้วยความเข้าใจมีความสำคัญในการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียน และโปรแกรม The Geometer's Sketchpad มีความสำคัญในการเป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ (learning tool) โดยเฉพาะอย่างยิ่งในเรื่องเรขาคณิต ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจศึกษาการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่องวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง วงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้

3. ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นที่ก่อให้เกิดการพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เรื่อง วงกลมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้ ซึ่งเป็นกิจกรรมการเรียนการสอนในบริบทนอกชั้นเรียน การวิจัยครั้งนี้ใช้ระเบียบวิธีวิจัยเชิงคุณภาพ กลุ่มเป้าหมายในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสนมวิทยาคาร อำเภอสนม จังหวัดสุรินทร์ ในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 6 คน โดยแบ่งเป็นนักเรียนออกเป็น 2 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน

4. นิยามศัพท์เฉพาะ

4.1 การคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่น หมายถึง ลักษณะพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกในขณะที่ทำกิจกรรม ดังนี้

1) การใช้ยุทธวิธีที่แปลกใหม่หรือไม่คุ้นเคยในการแก้ปัญหา (Use of novel strategies to solve problem)

2) ความสามารถในการสร้างความความสัมพันธ์ทั้งทางตรงและย้อนกลับ (Ability to establish both direct and reverse association)

3) การใช้เครื่องหมายที่กำกวม (Ambiguous use of notation) หมายถึง การใช้เครื่องหมายหรือสัญลักษณ์ที่สามารถตีความหมายได้ทั้งกระบวนการ (Process) และความคิดรวบยอด (Concept)

4) ความสามารถในการตีความความคิดอื่น (Capacity to interpret some else's thinking) นักเรียนอาจจะอธิบายการคิดของนักเรียนคนอื่นๆ และใช้แนวคิดของคนอื่นๆสร้างแนวคิดใหม่เพื่อพิสูจน์ว่าแนวคิดนั้นใช้ไม่ได้ หรือถามเกี่ยวกับแนวคิดของเพื่อน

5) การใช้แนวคิดหรือยุทธวิธีในบริบทที่แตกต่างจากเดิมหรือการเปลี่ยนยุทธวิธีที่มีอยู่ให้เข้ากับบริบทใหม่ (Using an idea or strategy across different contexts or changing an existing strategy to fit a new context)

6) การใช้การนำเสนอที่หลากหลายสำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์เดียวกัน หรือเพื่อแสดงแนวคิดเดียวกัน (Using multiple representations for the same mathematical problem or using multiple representations to express the same idea) การนำเสนอที่หลากหลายเป็นแนวคิดที่สำคัญของความคิดยืดหยุ่นทางคณิตศาสตร์

7) การมีสถานการณ์ปัญหาเชิงสมมติฐานบนปัญหาที่มีอยู่ (Raising hypothetical problem situations based on existing problem) พฤติกรรมนี้จะมีคำถาม "ถ้า...อะไร (what if)" เป็นองค์ประกอบสำคัญ เพื่อพิจารณาความคล้ายคลึงกันกับปัญหาที่มีอยู่ ซึ่งจะโยงไปถึงการคิดแผนดำเนินการ

4.2 การคิดเชิงเรขาคณิต หมายถึง การคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียนตามรูปแบบการคิดของ van Hiele 4 ระดับ คือ

ระดับที่ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)

มโนมติเชิงเรขาคณิตจะถูกมองแบบองค์รวมมากกว่าการมีส่วนประกอบย่อย รูปเรขาคณิตจะถูกพิจารณาตามลักษณะทางกายภาพที่ปรากฏเห็น นักเรียนในระดับนี้สามารถบอกชื่อ เปรียบเทียบ และจัดกระทำกับรูปเรขาคณิต เช่น วงกลม มุมในครึ่งวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลม มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลม ซึ่งไม่เกี่ยวกับสมบัติของรูปเรขาคณิตนั้น การคิดระดับนี้เป็นการคิดที่เกี่ยวข้องกับรูปร่าง การสร้างความหมายของรูปเรขาคณิตจะขึ้นอยู่กับการรับรู้จากการมองเห็น (Visual perception)

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์ (Analysis)

ในระดับนี้เริ่มมีการวิเคราะห์มโนมติเชิงเรขาคณิต การสังเกตและการทดลองของนักเรียนเริ่มมองเห็นลักษณะเฉพาะของรูปเรขาคณิตนั้นๆ สมบัติเชิงเรขาคณิตจะถูกอธิบายในลักษณะเฉพาะ ซึ่งสมบัติแต่ละสมบัติจะอยู่ในลักษณะที่เป็นอิสระต่อกัน นักเรียนยังไม่สามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติเหล่านั้นได้ ตัวอย่างเช่น นักเรียนบอกได้ว่าวงกลมหนึ่งวงมีรัศมีได้หลายเส้น เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมมีความยาวเป็นสองเท่าของความยาวของรัศมี มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีจุดยอดที่จุดศูนย์กลางของวงกลม มุมในส่วนโค้งของวงกลมจะมีจุดยอดบนเส้นรอบวงและแขนของมุมตัดกับเส้นรอบวงเสมอ

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

การคิดในระดับนี้ นักเรียนสามารถเชื่อมโยงหรือสร้างความสัมพันธ์ภายในระหว่างสมบัติที่ค้นพบอย่างมีเหตุผล เช่น มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมจะมีขนาดเป็นสองเท่าของขนาดของมุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกัน มุมในครึ่งวงกลมจะมีขนาดเท่ากับ 90

องศาหรือหนึ่งมุมฉาก ในวงกลมเดียวกัน มุมในส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยส่วนโค้งเดียวกันจะมีขนาดเท่ากัน เป็นต้น นักเรียนสามารถให้คำจำกัดความอย่างมีความหมาย แต่นักเรียนยังไม่เข้าใจการให้เหตุผลเชิงนิรนัยทั้งหมดหรือเข้าใจบทบาทของสิ่งที่เห็นจริงแล้ว (axiom) การให้เหตุผลเชิงนิรนัยในระดับนี้เป็นการให้เหตุผลในรูปของผลลัพธ์ที่เกิดจากการปฏิบัติ ซึ่งจะเป็นพื้นฐานในการพัฒนาไปสู่การพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผนในลำดับต่อไป ตัวอย่างเช่น รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสเป็นสี่เหลี่ยมมุมฉากชนิดหนึ่ง หรือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสคือสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านทั้งสี่ยาวเท่ากัน เป็นต้น

ระดับที่ 4 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction)

นักเรียนสามารถนำเอาทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล และสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีทางเรขาคณิต นักเรียนสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีการที่หลากหลายและมีความเข้าใจเกี่ยวกับปฏิสัมพันธ์ระหว่างเงื่อนไขหรือทฤษฎีที่จำเป็นและเหมาะสมในการพิสูจน์เรขาคณิต นอกจากนี้นักเรียนสามารถแยกแยะและมีความเข้าใจในความแตกต่างระหว่างทฤษฎีกับทฤษฎีบทกลับ การคิดเชิงเรขาคณิตในระดับนี้เป็นระดับที่คาดหวังว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาจะต้องมี

4.3 การพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต หมายถึง การเปลี่ยนระดับการคิดจากระดับที่ต่ำกว่าไปสู่ระดับที่สูงกว่าตามระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของ van Hiele

4.4 โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) หมายถึง ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ ที่ใช้สำหรับสร้าง สำรวจ และวิเคราะห์เนื้อหาทางคณิตศาสตร์ สามารถใช้สร้างตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มีปฏิสัมพันธ์ได้หลากหลาย ตั้งแต่การค้นหาในระดับพื้นฐานเกี่ยวกับรูปร่างและจำนวนไปจนถึงภาพวาดขั้นสูงที่มีความซับซ้อน และเคลื่อนไหวได้

5. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1) เข้าใจลักษณะและธรรมชาติของการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นของนักเรียน เรื่องวงกลม

2) นักเรียนมีความสามารถในการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นและพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิต เรื่องวงกลม เมื่อทำกิจกรรมที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้

3) เป็นแนวทางสำหรับครูในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน เพื่อการพัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์แบบยืดหยุ่นและพัฒนาการคิดเชิงเรขาคณิตของนักเรียน โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียนรู้