# บทที่ 2
# วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยในครั้งนี้เป็นงานวิจัยเชิงคุณภาพ มีวัตถุประสงค์เพื่อวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด ผู้วิจัยทำการศึกษาวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อเป็นแนวทางสำคัญในการดำเนินการวิจัย มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. กระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Learning Process)
   - 1.1 กระบวนการทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Process)
     - 1.1.1 การแก้ปัญหา (Problem Solving)
     - 1.1.2 การพิสูจน์และการให้เหตุผล (Reasoning and Proof)
     - 1.1.3 การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Communication)
   - 1.2 การเรียนรู้ในฐานะที่เป็นวาทกรรมทางคณิตศาสตร์
2. วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Discourse)
   - 2.1 แนวคิดเกี่ยวกับวาทกรรม (Ideas of discourse)
   - 2.2 แนวคิดเกี่ยวกับวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ (Ideas of Mathematical Discourse)
   - 2.3 การส่งเสริมให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์
   - 2.4 การส่งเสริมให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระดับประถมศึกษา
3. บริบทของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้เกิดวาทกรรมทางคณิตศาสตร์
   - 3.1 การศึกษาชั้นเรียน (Lesson Study) กระบวนการที่ทำให้เกิดวาทกรรมทางคณิตศาสตร์
   - 3.2 วิธีการแบบเปิด (Open Approach) วิธีการที่ส่งเสริมให้นักเรียนแสดงวาทกรรมทางคณิตศาสตร์
   - 3.3 ปัญหาปลายเปิด (Open Ended Problem) บริบทที่กระตุ้นให้เกิดการแสดงวาทกรรมทางคณิตศาสตร์
4. แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์
   - 4.1 แนวคิดและทฤษฎีการวิเคราะห์วาทกรรม (Ideas and Theory of Discourse Analysis)
   - 4.2 แนวคิดและทฤษฎีการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ (Ideas and Theory of Mathematical Discourse Analysis)
5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
   - 5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

## 5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ การโต้แย้งให้เหตุผล และการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

### 1. กระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของประเทศไทยที่ผ่านมาส่วนใหญ่ไม่ได้เน้นกระบวนการเรียนรู้หรือวิธีการเรียนรู้ของนักเรียน ในชั้นเรียนครูจะเป็นคนดำเนินกิจกรรมทั้งหมด จัดการการสอนแบบบรรยาย ให้นักเรียนท่องจำหรือถามตอบ ความจริงแล้วสิ่งเหล่านี้เป็นเพียงการบอกคณิตศาสตร์กับนักเรียน (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546) หรือให้นักเรียนทำตามกรอบที่ครูวางเอาไว้ นอกจากนี้ครูส่วนใหญ่ยังไม่ยอมรับในกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียน (Von Glasserfeld, 1995) การเรียนรู้เป็นสิ่งที่ไม่สามารถทำให้เกิดขึ้นมาได้จากการส่งผ่านโดยตรง แต่ต้องอาศัยตัวสื่อกลางในการส่งผ่าน และพิจารณาจากกระบวนการของสิ่งนั้น พร้อมกับผู้ที่จะรับรู้

กระบวนการเรียนรู้ (Learning Process) หมายถึง การดำเนินการอย่างเป็นขั้นตอนหรือใช้วิธีการต่าง ๆ ที่ช่วยให้บุคคลเกิดการเรียนรู้ เป็นการดำเนินการอย่างเป็นขั้นตอน โดยใช้วิธีการต่าง ๆ ซึ่งปัจจุบันมีทฤษฎีการเรียนรู้และหลักการเรียนรู้มากมาย ที่อธิบายถึงกระบวนการเรียนรู้ ในที่นี้ผู้วิจัยจะนำเสนอเพียงเฉพาะกระบวนการที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เท่านั้น

คณิตศาสตร์นอกจากจะเป็นกลุ่มของความคิดรวบยอดและทักษะแล้ว ยังรวมทั้งวิธีการในการสืบสวนให้เหตุผลและการสื่อสารด้วย คณิตศาสตร์ช่วยพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลอย่างมีตรรกะ ทำให้นักเรียนอยากรู้อยากเห็นและกระตุ้นให้นักเรียนอยากสำรวจและทำความเข้าใจโลกของพวกเขา นอกจากนั้นคณิตศาสตร์ยังเป็นพื้นฐานของศาสตร์อื่น ๆ (National Council of Teachers of Mathematics: NCTM, 1989) เช่น ความเจริญทางด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐกิจและสังคม เป็นต้น ปัจจุบันถือได้ว่าคนเราอยู่ในโลกของคณิตศาสตร์ เพราะการตัดสินใจต่าง ๆ ในชีวิตประจำวันต้องใช้การคิดและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มากยิ่งขึ้น การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในหลักสูตรต่าง ๆ ต้องเปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้ความคิดรวบยอดและวิธีการที่สำคัญทางคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ (NCTM, 2000)

สมาคมครูคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM 1989, 2000) ได้เสนอเป้าหมายหลักในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนไว้ทั้งหมด 10 มาตรฐาน แบ่ง 5 มาตรฐานแรกเป็นส่วนเนื้อหาได้แก่ จำนวนและการดำเนินการ (Number and operations) พีชคณิต (Algebra) เรขาคณิต (Geometry) การวัด (Measurement) และการวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น (Data analysis and probability) กับอีก 5 มาตรฐานเป็นส่วนกระบวนการได้แก่ การแก้ปัญหา (Problem solving) การให้เหตุผลและการพิสูจน์ (Reasoning and proof) การเชื่อมโยง (Connection) การสื่อสาร (Communication) และการแสดงแทน (Representation)

10 มาตรฐานการเรียนรู้ เป็นสิ่งที่สำคัญที่ครูผู้สอนต้องทำให้เกิดขึ้นในชั้นเรียนและส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างอิสระ เปิดโอกาสให้ทุกคนเข้าร่วมเรียนรู้ตามความเหมาะสม

กับความพร้อม ความสนใจ และความสามารถของผู้เรียน อันที่จะเป็นพื้นฐานสำคัญให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์และนำไปใช้เป็นพื้นฐานการเรียนเนื้อหาอื่น ๆ ต่อไป ทั้งที่อยู่ในชั้นเรียนและที่อยู่ในชีวิตประจำวัน จากแนวคิดที่ว่าถ้านักเรียนมีมาตรฐานการเรียนรู้เหล่านี้จะทำให้นักเรียนเป็นผู้ที่มีความรู้ในเนื้อคณิตศาสตร์ สามารถแก้ปัญหาได้เมื่อเผชิญกับปัญหา โดยใช้เหตุผลและการพิสูจน์ แล้วสื่อสารให้ผู้อื่นได้เข้าใจในแนวคิดของตนเองหรือโต้แย้งเมื่อไม่เห็นด้วย ซึ่งน่าจะทำให้นักเรียนสามารถดำรงตนอยู่ในสังคมได้

จะเห็นได้ว่า กระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่สำคัญเริ่มแรกในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์จำเป็นต้องกำหนดให้นักเรียนมีประสบการณ์ ได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสาร และการให้เหตุผล

## 1.1 กระบวนการทางคณิตศาสตร์

กระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญที่ครูผู้สอนต้องสร้างขึ้นมาเป็นพื้นฐาน ในทางทักษะกระบวนการเรียนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียน มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

### 1.1.1 การแก้ปัญหา

การแก้ปัญหา เป็นการทำงานเพื่อหาคำตอบซึ่งยังไม่รู้อยู่ข้างหน้า นักแก้ปัญหาที่ดีจะต้องมีการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Disposition) ซึ่งหมายถึงการวิเคราะห์สถานการณ์ในเทอมของคณิตศาสตร์อย่างรอบคอบและวิเคราะห์ธรรมชาติที่มาของปัญหาภายใต้สถานการณ์ที่เห็นอย่างพินิจพิเคราะห์ ตัวอย่างเช่น เด็กอาจจะมีความสงสัยว่า ใช้เวลานานเท่าไรจึงจะนับถึงล้าน

การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นเป้าหมายที่สำคัญในกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (NCTM, 2000) ซึ่งกระบวนการแก้ปัญหาจะเกิดขึ้นมาได้ก็ต่อเมื่อมีปัญหา (Problems) หรือกิจกรรม (Tasks) ที่น่าสนใจหรือท้าทายให้ผู้ที่ต้องการจะแก้ อยากที่จะเข้าไปแก้ด้วยความตั้งใจ และมีความพยายามแก้ปัญหานั้นให้ประสบผลสำเร็จ

**(1) ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์**

สมาคมครูคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM 1989, 2000) ได้เสนอเป้าหมายหลักในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนไว้ในส่วนของมาตรฐานที่เป็นส่วนกระบวนการที่สำคัญอย่างแรกคือ การแก้ปัญหา โดยได้ให้ความหมายไว้ว่า

การแก้ปัญหา เป็นเป้าหมายที่สำคัญในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์สำหรับนักเรียนตั้งแต่ระดับอนุบาลจนถึงเกรด 12 ที่ต้องการให้นักเรียนสามารถ 1) สร้างความรู้ใหม่ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปใช้ในการแก้ปัญหา 2) แก้ปัญหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์และบริบทอื่น ๆ 3) ประยุกต์และปรับยุทธวิธีที่หลากหลายเพื่อใช้ในการแก้ปัญหา และ 4) ตรวจสอบและสะท้อนให้เห็นถึงกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้

**(2) แนวคิดและทฤษฎีของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์**

Polya (1973) เสนอว่า สิ่งสำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์คือ วิธีการในการแก้ปัญหา เพราะว่าคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ในกระบวนการเป็นสิ่งที่ถูกสร้างสรรค์ขึ้นมา อย่างที่กล่าวได้ว่า คณิตศาสตร์ในขณะที่กำลังถูกสร้าง ซึ่งไม่เคยถูกนำเสนอกับใครเลยไม่ว่าจะเป็นครูหรือคนทั่วๆ ไป นั่นคือการเรียนรู้คณิตศาสตร์ต้องการเพียงเพื่อให้นักเรียนกระหายที่จะแก้ปัญหาด้วยตัวเองอย่างท้าทาย ที่ประกอบด้วย 4 ขั้นตอนได้แก่

1) ขั้นการทำความเข้าใจกับปัญหา (Understanding the Problem) เป็นขั้นที่พิจารณาถึงสิ่งที่ปัญหาต้องการให้ค้นหา สิ่งที่ปัญหานั้นกำหนดมาให้และขอมูลต่างๆ ที่จำเป็นต้องใช้ในการค้นหาคำตอบ

2) ขั้นวางแผนในการแก้ปัญหา (Making a Plan) เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาต้องพิจารณาข้อมูลต่างๆ ที่โจทย์กำหนดมาให้ แล้วใช้ความรู้ประกอบกับประสบการณ์ของผู้แก้ปัญหา ในการวางแผนเพื่อที่จะให้ได้วิธีการในการค้นหาคำตอบของปัญหา

3) ขั้นการดำเนินการตามที่วางแผนไว้ (Carrying out the Plan) เป็นขั้นที่ลงมือแก้ปัญหาตามแผนการที่ได้วางเอาไว้ จนได้คำตอบของปัญหา

4) ขั้นการมองย้อนกลับหรือการตรวจสอบ (Looking Back) เป็นขั้นตอนที่ผู้แก้ปัญหาพิจารณาถึงขั้นตอนต่างๆ ที่ใช้ในการแก้ปัญหาว่าครบถ้วน ถูกต้องหรือได้คำตอบที่เหมาะสม

Schoenfeld (1985) ได้ทำการศึกษาพฤติกรรมการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของนักเรียนในระหว่างที่นักเรียนกำลังทำการแก้ปัญหา เพื่อดูกระบวนการคิดของนักเรียน โดยทำการวิเคราะห์พฤติกรรมในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาและวิเคราะห์พฤติกรรมในระหว่างที่นักเรียนทำการแก้ปัญหาตามแง่มุมที่ซับซ้อนเกี่ยวกับศาสตร์เชิงการรู้ (Cognitive sciences) ว่าอะไรเป็นการคิดคณิตศาสตร์ แล้วเราจะช่วยให้นักเรียนคิดคณิตศาสตร์ได้อย่างไร และพยายามอธิบายมุมมองเชิงคุณภาพที่แตกต่างกัน 4 มุมมอง ที่เกี่ยวข้องกับแบบอย่างของปัญหาและแบบอย่างของพฤติกรรมได้แก่ 1) ทรัพยากร (Resources) คือ มีความสามารถทางคณิตศาสตร์เป็นไปตามแต่ละบุคคลที่สามารถนำไปสู่การส่งเสริมการแก้ปัญหาด้วยตนเอง 2) ยุทธวิธีที่น่าจะแก้ปัญหาได้ (Heuristics) คือ ยุทธวิธีหรือวิธีการสำหรับทำให้เกิดความก้าวหน้าตามสิ่งที่ไม่คุ้นเคยหรือไม่เป็นมาตรฐานของปัญหา และบทบาทที่จะยกระดับให้เกิดประสิทธิภาพในการแก้ปัญหา รวมถึงสิ่งที่เพิ่มเข้าด้วย 3) การควบคุมจัดการ (Control) คือ การตัดสินใจโดยรวมเกี่ยวกับการเลือกสรรและการจัดเตรียมเครื่องมือหรือวิธีการไว้จากทรัพยากรและการวางแผนตามยุทธวิธีนั้นๆ 4) ระบบความเชื่อ (Belief systems) คือ คนๆ หนึ่งที่จะ “มองโลกทั้งหมดว่าเกี่ยวพันกับคณิตศาสตร์” กลุ่มของ (ไม่จำเป็นที่จะต้องตระหนัก) การตัดสินใจเกี่ยวกับพฤติกรรมที่เป็นลักษณะเฉพาะของแต่ละบุคคล พฤติกรรมการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ Schoenfeld จำแนกได้ 6 ตอน (episode) ได้แก่ การอ่าน (Reading) การวิเคราะห์ข้อมูล (Analysis)

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ
ห้องสมุดงานวิจัย
วันที่ 12 มิ.ย. 2556
เลขทะเบียน 209105
เลขเรียกหนังสือ



การสำรวจ (Exploration) การวางแผน (Planning) การนำไปใช้ (Implementation) และการตรวจสอบ (Verification) พฤติกรรมการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ทั้ง 6 ตอน ได้มาจากการปรับและขยายออกจากการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ของ Polya (1945)

Schoenfeld (1983) กล่าวว่า สิ่งหนึ่งที่เป็นข้อจำกัดของการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนเป็นส่วนหนึ่งของอุปสรรคการสอนทักษะการคิดทางคณิตศาสตร์ ที่มักจะลืมถึงความดีของสิ่งนั้นที่มีอยู่ (โดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อสอนเกี่ยวกับองค์ประกอบของคณิตศาสตร์) นั่นคือ สิ่งที่พวกเราไม่ได้คิดเกี่ยวกับมัน อย่างที่พวกเราลงมือทำโดยอัตโนมัติเลย เราก็รู้ว่าวิธีการที่ถูกที่จะเข้าใกล้ถึงปัญหานั้นส่วนใหญ่จะเกิดขึ้นในชั้นเรียน แต่นักเรียนทำไม่ได้ แสดงให้เห็นอย่างตรงมาตรงไปเลยว่า วิธีการที่ถูกของพวกเขาไม่ได้ช่วยให้หลีกเลี่ยงความผิดพลาดทั้งหมดที่เข้าใกล้ ซึ่งพวกเขามักจะพยายามด้วยตัวของเขาเอง สำหรับเหตุผลที่พวกเรามีอยู่ไม่ได้ช่วยแก้ไขได้ตามสิ่งที่เราคิด ดังนั้นพวกเขาจะสามารถทำได้ตามมัน (Schoenfeld, 2007)

Schoenfeld (2007) กล่าวว่า แง่มุมของหลักสูตรดั้งเดิมและการประเมินผลตามมาตรฐานคือ ความรู้ในเรื่องคณิตศาสตร์ประกอบด้วย ความชำนาญเกี่ยวกับเนื้อหาที่เป็นความจริง กระบวนการ และความคิดรวบยอด หลักสูตรส่วนมากในปัจจุบันมีทัศนะในการสร้างพื้นฐานขึ้นตามงานวิจัยในปัจจุบัน อย่างที่เป็นความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อน การเปลี่ยนแปลงเชิงการรู้อย่างสิ้นเชิง (Cognitive revolution) (Gardner, 1985) ผลที่ทำให้เกิดขึ้นมาซึ่งเกี่ยวกับรากฐานการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีของธรรมชาติและความรู้ ที่เคลื่อนย้ายไปเน้นความสนใจในธรรมชาติของความเข้าใจคณิตศาสตร์ มุมมองเกี่ยวกับการมีศักยภาพทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่แสดงให้เห็นได้ในปัจจุบันที่เพิ่มเข้าไปไม่เพียงแต่ความรู้พื้นฐาน ที่มีความสามารถจัดเตรียมเครื่องมือหรือวิธีการไว้ให้ที่เป็นยุทธวิธีในการแก้ปัญหาเพียงเท่านั้น แต่ยังสามารถใช้สิ่งที่คน ๆ หนึ่งรู้จริงและมีประสิทธิผล และมากกว่านี้ (deCorte, Greer, & Verschaffel, 1996; Lester, 1994; Schoenfeld, 1985a, 1985b, 1992) อย่างเช่น ในวารสารของ National Research Council ฉบับ Adding It up (2001) ที่อธิบาย 5 มาตรฐานที่ประกอบเข้ามาเป็นความมีประสิทธิภาพทางคณิตศาสตร์ (Mathematical proficiency) คือ ความสามารถในการเข้าใจความคิดรวบยอด (Conceptual understanding) ความคล่องแคล่วในกระบวนการ (Procedural fluency) ความสามารถเชิงยุทธวิธี (Strategic competence) การปรับเหตุผลให้เหมาะสม (Adapting reasoning) และการจัดการผลที่เกิดขึ้น (Productive disposition)

Wilson (1993) กล่าวถึง การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ว่าเป็นลักษณะเด่นที่สำคัญในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เป้าหมายแรกของการสอนคณิตศาสตร์และการเรียนรู้คณิตศาสตร์คือ การพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาให้ได้อย่างกว้างขวางและหลากหลายในเรื่องความซับซ้อนของปัญหาคณิตศาสตร์ ซึ่งบางทีปัญหาของคุณอาจจะไม่ใหญ่โตมาก แต่ว่ามันเป็นสิ่งที่ท้าทายความอยากรู้และนำไปสู่การแสดงบทบาทในการสร้างสรรค์สติปัญญาของคุณ และ

ถ้าคุณสามารถแก้ปัญหาได้โดยมันมีความหมายกับคุณ คุณอาจจะพบกับความเคร่งเครียดและมีความสนุกกับความสำเร็จในการค้นพบนี้ สิ่งที่เป็นประสบการณ์เช่นนี้อายุจะมีความรู้สึกไวกับการสร้างความพอใจสำหรับความสำเร็จที่เกิดขึ้นในจิตใจ และจากความประทับใจและการแสดงบทบาทสำหรับเวลาที่ยาวนาน

Brownell (1942 อ้างถึงใน Silver, 1985) กล่าวว่า การแก้ปัญหาที่กล่าวถึงนี้เป็นเพียงแค่เพื่อนำไปสู่กิจกรรมการหยั่งรู้ ตามธรรมชาติของเนื้อหาสาระโดยการให้เหตุผลเริ่มแรกของการเรียนรู้เดิม การแก้ปัญหาจะกลายมาเป็นกระบวนการที่ผ่านการนำไปสู่สิ่งที่ช่วยให้เขาหลุดพ้นจากปัญหาของเขา ดังที่ปัญหาบางทีอาจจะเป็นความคิดที่อาศัยอยู่ในท่ามกลางแนวความคิดที่เกิดขึ้นเป็นประจำ และขยายออกจากปัญหาหรือสถานการณ์ที่ยากลำบากของปัญหาและสามารถเข้าใจสถานการณ์ในช่วงเวลาอื่น ๆ เมื่อการแก้ปัญหาเป็นปัจจัยที่สำคัญดังกล่าวนี้ครูผู้สอนควรที่จะช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา

NCTM (1989) เสนอว่า การแก้ปัญหาเป็นจุดเน้นที่สำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์ การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมายแรกของการสอนคณิตศาสตร์และการเรียนรู้คณิตศาสตร์และเป็นส่วนที่บูรณการกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ทั้งหมด การแก้ปัญหาไม่ได้เป็นหัวข้อที่แยกออกมาต่างหากแต่เป็นกระบวนการที่สอดแทรกเข้าไปในการเรียนการสอนและการจัดเตรียมบริบทที่จะทำให้นักเรียนสร้างความคิดรวบยอดและเรียนรู้ทักษะทางคณิตศาสตร์ และจำเป็นต้องทำการเรียนการสอนในเรื่องการแก้ปัญหาในวิชาคณิตศาสตร์และสาขาอื่น ด้วยเหตุผล 5 ประการที่สนับสนุนแนวคิดดังกล่าว คือ 1) การแก้ปัญหาเป็นส่วนที่สำคัญมากของวิชาคณิตศาสตร์ 2) คณิตศาสตร์มีการประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางทั้งในสาขาวิชาคณิตศาสตร์และสาขาอื่น การแก้ปัญหาถูกนำมาใช้งาน การทำความเข้าใจ 3) มีแรงจูงใจอย่างแท้จริงอยู่ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ 4) การแก้ปัญหาเป็นการนันทนาการ 5) การแก้ปัญหาจำเป็นต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนเพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้พัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหา มีความเข้าใจและซาบซึ้งในคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเป้าหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์

Garofalo and Lester (1985 อ้างถึงใน ปานจิต รัตนพล, 2547) เสนอกรอบแนวคิดเกี่ยวกับ (Meta-Cognition) การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ว่าประกอบด้วยกลวิธี 4 ขั้นตอน คือ

1) การเริ่มต้นกำหนดวิธีการแก้ปัญหา (Orientation) หมายถึง พฤติกรรมอันมีกลวิธีในการวิเคราะห์ข้อมูลและทำความเข้าใจปัญหา

2) การกำหนดโครงสร้างของการแก้ปัญหา (Organization) หมายถึง การวางแผนกำหนดพฤติกรรม และการเลือกปฏิบัติ

3) การดำเนินการแก้ปัญหา (Execution) หรือการดำเนินการตามแผนที่ได้วางเอาไว้

4) การประเมินความถูกต้อง (Verification) หรือการประเมินการตัดสินใจและผลลัพธ์ของการปฏิบัติตามแผน

จะเห็นได้ว่า การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ถือเป็นสิ่งจำเป็นที่นักเรียนต้องค้นหาวิธีการ ข้อคาดการณ์ และหลักการต่างๆ อย่างเช่น การอ่าน การวิเคราะห์ข้อมูล การสำรวจ การวางแผน การนำไปใช้ และการตรวจสอบ มาใช้แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ครูสร้างขึ้นมาอย่างเหมาะสมกับนักเรียนทุกคนที่สามารถเข้าร่วมแก้ปัญหาได้ หรือเมื่อนักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา นักเรียนจะมีความชอบ และกระหายที่แก้ปัญหาต่างๆ อย่างท้าทาย

**1.1.2 การพิสูจน์และการให้เหตุผล**

เป้าหมายในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่อยู่ในเรื่องการพิสูจน์และการให้เหตุผลสำหรับนักเรียนตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงเกรด 12 คือ ต้องการให้นักเรียนสามารถ 1) ตระหนักว่าการพิสูจน์และการให้เหตุผลเป็นลักษณะพื้นฐานของคณิตศาสตร์ 2) สร้างและค้นหาข้อคาดการณ์ (Conjectures) ทางคณิตศาสตร์ 3) พัฒนาและเห็นคุณค่าของการให้เหตุผลและการพิสูจน์ และ 4) เลือกและใช้รูปแบบของการให้เหตุผลและวิธีการพิสูจน์ที่หลากหลาย

NCTM (1990) ได้กล่าวถึง ความสัมพันธ์ระหว่างกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ว่า การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งของความคิดทางคณิตศาสตร์ เป็นการสรุปที่เป็นเหตุเป็นผลเกี่ยวกับข้อคิดเห็นและการระบุถึง สิ่งที่สัมพันธ์กันอย่างไร และเป็นทักษะพื้นฐานที่ผู้เรียนจะต้องมีเมื่ออยู่ในห้องเรียนและในชีวิตจริง การให้เหตุผลเป็นส่วนหนึ่งของการคิดที่อยู่เหนือจากการระลึกถึงได้

การให้เหตุผล (Reasoning) หรือการโต้แย้ง (Refutation) ทางคณิตศาสตร์เป็นลักษณะทางด้านจิตใจ ที่ต้องได้รับการพัฒนาผ่านบริบทที่หลากหลายและตั้งแต่เริ่มขั้นแรกในหลายๆ บริบท ทุกระดับที่นักเรียนจะให้เหตุผลเชิงอุปนัยจากรูปแบบและกรณีพิเศษต่างๆ ตัวอย่างเช่น นักเรียนในระดับชั้นต้นๆ ใช้การพิสูจน์ที่ไม่มีรูปแบบในการเสนอว่า 0 เป็นจำนวนคู่ โดยการให้เหตุผลว่า “ถ้า 0 เป็นจำนวนคี่แล้ว 0 กับ 1 เป็นจำนวนคี่ที่อยู่ติดกัน แต่ในความเป็นจริงแล้ว จำนวนคู่กับจำนวนคี่ต้องอยู่สลับกัน เมื่อ 1 เป็นจำนวนคี่แล้ว 0 จึงเป็นจำนวนคู่”

นักเรียนในระดับชั้นที่สูงขึ้น ควรเรียนรู้ที่จะสร้างข้อสรุปให้ดีขึ้น เริ่มใช้ข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน เมื่อจบชั้นมัธยมแล้วนักเรียนต้องสามารถเข้าใจการพิสูจน์และสามารถพิสูจน์ได้ อนุมานข้อสรุปจากสมมติฐานได้อย่างมีตรรกะและเห็นคุณค่าของการให้เหตุผล รวมทั้งการสร้างข้อคาดการณ์ขึ้นมาจากแนวคิดของตนเอง แล้วพยายามค้นหา เหตุผลมาสนับสนุนแนวคิดนั้น อาจจะทำโดยการแลกเปลี่ยนแนวคิดกับคนอื่นๆ หรือพยายามตรวจสอบข้อเท็จจริงด้วยตนเอง

Lakatos (1976 อ้างถึงใน Worrall, J. & Zahar, E., 1976) ให้ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับมุมมองของความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีรูปแบบถาวร มีความแน่นอนและที่เกิดขึ้นมาก่อนแล้วทำงานในทางปรัชญาคณิตศาสตร์ที่เป็นการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ที่มีความคล้ายคลึงกับปัญหาของ Hume ที่นำเสนอองค์ประกอบของทฤษฎี Poper (1972) ที่เกี่ยวข้องกับการปลอมแปลง นั่นคือ Lakatos ได้นิยามทั้งปัญหาที่เป็นไปได้ของความรู้ทางคณิตศาสตร์และคำแนะนำที่อธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหา การอธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหาของ Lakatos ที่ประกอบด้วยวิธีการทีซึ่งเกี่ยวข้องกับการเรียนที่กระตุ้นให้ผู้เรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยตัวเอง ซึ่งจะนำไปสู่พัฒนาการของข้อคาดการณ์ ความคิดรวบยอด และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สิ่งเหล่านี้จะค่อย ๆ พัฒนาผ่านภาษาเฉพาะกลุ่มและเป็นตัวนำไปวิเคราะห์โดยการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมดังที่แสดงบทบาทสำคัญ ผ่านการเริ่มต้นของพวกเขาจนกระทั่งสิ้นสุด การประเมินผลงานที่เป็นไปในทางสร้างสรรค์ถ้ามันเป็นสิ่งที่มีคุณค่าสำหรับเขา

หลักการสำคัญของ Lakatos คือ ข้อแรกใช้แนวคิดของ Hegel สิ่งที่เกี่ยวกับการโต้แย้งด้วยเหตุผลที่มีลักษณะเช่นเดียวกัน ข้อคาดการณ์และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ซึ่งตรงกันกับการยกตัวอย่างค้านตัวอย่างเดิมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และการรวมสิ่งต่าง ๆ เข้าด้วยกันจนนำไปสู่การขัดเกลาให้ดีขึ้นด้วยแนวคิดที่ยอมรับว่าเป็นจริงและการพิสูจน์ Lakatos เน้นความสำคัญตรงที่เกี่ยวกับแง่มุมของการโต้แย้งด้วยเหตุผล (Dialectical) ซึ่งเป็นรูปแบบของการโต้แย้งด้วยเหตุผลที่อยู่ในชั้นเรียน โดยเขาใช้เสียงที่มาจากความแตกต่างกันของนักเรียนหลาย ๆ คน ข้อที่สองใช้แนวคิดของ Poper เกี่ยวกับสิ่งที่เป็นไปไม่ได้อย่างแน่นอนในทางวิทยาศาสตร์และความสำคัญของการค้นหาสิ่งที่แปลก Lakatos โต้แย้งกับแนวคิดของ Hegel และ Poper ที่ทำหน้าที่แทนความผิดพลาดตามรูปแบบเดิมในปรัชญาสมัยใหม่ แต่ยิ่งไปกว่านั้นยังทำให้เกิดความเข้าใจผิดเกี่ยวกับการเก็บรักษาไว้ของทฤษฎีที่ได้เปรียบไม่มีข้อผิดพลาดในสถานะทางคณิตศาสตร์ และข้อที่สามใช้แนวคิด Polya (1954) ที่ทำงานที่กระตุ้นให้ผู้เรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ ด้วยตัวเอง การศึกษาเกี่ยวกับวิธีการและบทบาทของการค้นหาและการประดิษฐ์สร้างสรรค์หลักการสำคัญที่มีอิทธิพล โดยเฉพาะอย่างยิ่งการให้บทนิยามของปัญหาและการค้นหาข้อคาดการณ์ที่จะนำไปพัฒนา

ในทางตรงกันข้ามความเกี่ยวข้องกันของความรู้ทางคณิตศาสตร์ (การให้เหตุผลโต้แย้งระหว่างผู้ที่เชื่อในหลักการของตนเอง ดังที่กล่าวถึงคนที่พูดถึงว่าเราสามารถที่จะรู้ได้และผู้ที่ช่างสงสัย อย่างคนที่กล่าวถึงว่าเราไม่สามารถจะรู้ได้ หรือที่น้อยที่สุดที่ว่าเราไม่สามารถรู้ในสิ่งที่เราจะรู้) หรือว่าอะไรคือประเภทของความรู้ที่มันมีอยู่ Lakatos ให้ความสำคัญกับการเดา จึงเสนอวิธีการที่จะทำให้เข้าไปสู่ความผิดพลาดทางคณิตศาสตร์ในการพิสูจน์ ข้อคาดการณ์และความคิดรวบยอดที่เปลี่ยนแปลงได้ง่ายและเปิดโอกาสให้มีการเจรจาต่อรอง เขาวิจารณ์วิธีการอนุมานในทางคณิตศาสตร์เป็นอย่างมาก ในการนิยาม สัจพจน์และข้อความที่พิสูจน์ทางคณิตศาสตร์แล้วยอมรับว่าเป็นจริงที่แสดงให้ปรากฏอยู่ ซึ่งไม่ได้อธิบายถึงในเรื่องของการพัฒนา

และพิจารณาแล้วว่าเป็นสิ่งที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงตลอดไป แทนที่จะเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่น่าท้าทาย ซึ่งการท้าทายทำได้ผ่านรูปแบบของการวิเคราะห์ ข้อคาดการณ์และการพิสูจน์ จากการปรับปรุงให้ดีขึ้นอย่างทีละน้อยค่อยเป็นค่อยไป

Lakatos เชื่อว่าด้วยคาดหวังว่าจะเป็นแง่มุมที่ดีและจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับคณิตศาสตร์ มองว่ากระบวนการค้นหาทางคณิตศาสตร์ ตามรูปแบบดั้งเดิมทำได้ผ่านสิ่งที่เข้าใจยากและอธิบายไม่ได้โดยอาศัยเหตุผลที่เป็นกฎเกณฑ์ และการพิจารณาจะเป็นการนำไปสู่ความโชคดีของการทำงานอย่างอาศัยการเดาและสัญชาตญาณ ด้วยเหตุดังกล่าวนั้น การเปิดประตูออกมาให้เห็นสภาวการณ์ (Arenas) ใหม่เกี่ยวกับเหตุผลของการคิด อาศัยแนวคิดของ Poper (1972) นักปรัชญาทางทฤษฎีรูปแบบที่ใช้เกี่ยวกับวิธีการที่จะประเมินข้อคาดการณ์ แต่ไม่ใช่วิธีการที่จะสร้างข้อคาดการณ์ซึ่งจะสามารถออกมาจากการอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับจิตวิทยาและสังคมวิทยาได้ อย่างที่ Lakatos เชื่อว่านักปรัชญาสามารถสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับลักษณะที่มีหลักการทางวิทยาศาสตร์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้รับแรงกระตุ้นจากมุมมองของ Poper ใน 2 แนวทางคือ ข้อแรกมีการให้เหตุผลเกี่ยวกับการค้นพบ อย่างที่เป็นกระบวนการสร้างขึ้นมาของข้อคาดการณ์กับแนวคิดของการพิสูจน์ (Proofs ideas) หรือการอธิบายอย่างคร่าว ๆ (Sketch) ที่เป็นเนื้อหาไปสู่กฎเกณฑ์ที่มีเหตุผล และข้อที่สองความแตกต่างระหว่างการค้นพบ (Discovery) กับการอ้างเหตุผล (Justification) คือ การแนะนำไปในทางที่ผิดซึ่งมีผลกระทบกับคนอื่น ๆ อย่างเช่น แนวทางในการที่เราค้นพบข้อคาดการณ์จะกระทบกับการพิสูจน์หรือการอ้างเหตุผลของเราที่เกี่ยวของกับมันด้วย และแนวคิดของการพิสูจน์จะเป็นผลกระทบเกี่ยวกับสิ่งที่เรากำลังพิสูจน์

การพิสูจน์และการให้เหตุผล เป็นกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีส่วนช่วยให้นักเรียนมีความสามารถในด้าน การค้นหาความจริง การสร้างข้อคาดการณ์ หรือการแก้ปัญหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ จากการพินิจพิจารณา สำรวจและตรวจสอบข้อเท็จจริงตามลำดับอย่างมีตรรกะ มีความสมเหตุสมผล ในขณะที่นักเรียนทำการแก้ปัญหานักเรียนสามารถอ้างถึงแนวคิดของตนเอง อธิบายถึงวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหาได้เรียงลำดับอย่างเป็นขั้นตอนและมีความน่าเชื่อถือ จนกระทั่งผู้อื่นเข้าใจและยอมรับในวิธีการนั้น

### 1.1.3 การสื่อสารทางคณิตศาสตร์

การสื่อสาร (Communication) เป็นเป้าหมายการจัดการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่อยู่ในเรื่องการสื่อสารสำหรับนักเรียนตั้งแต่ชั้นอนุบาลถึงมัธยมศึกษาคือต้องการให้นักเรียนสามารถ 1) ตระหนักและรวบรวมความคิดทางคณิตศาสตร์ โดยผ่านการสื่อสารได้ 2) สื่อสารความคิดทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นเรื่องราวและชัดเจนต่อเพื่อน ครูและบุคคลอื่น ๆ ได้ 3) วิเคราะห์และประเมินคุณค่าความคิดและยุทธวิธีทางคณิตศาสตร์ของคนอื่นได้ และ 4) ใช้ภาษาทางคณิตศาสตร์ในการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ได้อย่างชัดเจน

เมื่อนักเรียนได้รับการกระตุ้นให้สื่อสารเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่กำลังเรียน เช่น การพิสูจน์ข้อคาดการณ์ แล้วให้เหตุผลต่อเพื่อน หรือการกำหนดคำถามเกี่ยวกับบางอย่างที่เป็นปริศนา พวกเขาจะเกิดการหยั่งรู้ความคิดของตนเองเพื่อสื่อสารความคิดของตนเองสู่ผู้อื่นอย่างเป็นระเบียบ ซึ่งเป็นการสะท้อนสิ่งที่พวกเขาเรียนรู้ ระลึกได้ และรวบรวมความคิดทางคณิตศาสตร์ตามธรรมชาติของนักเรียน

นักเรียนควรได้รับการสนับสนุน เพื่อเพิ่มความสามารถในการแสดงออกอย่างคล่องแคล่วและชัดเจน เมื่อพวกเขาโตขึ้น ลักษณะการให้เหตุผลและการสนทนาพูดคุยกันแบบนี้จะติดตัวพวกเขาไปด้วย และนักเรียนจะสามารถรับรู้และตอบสนองต่อคู่สนทนาได้ ทั้งความสามารถในการพูดและการเขียนเพื่อนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์เป็นส่วนหนึ่งที่ต้องให้ความเอาใจใส่ตลอด

(1) แนวคิดและทฤษฎีของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

Shonon (1948) ได้พัฒนานำเอาทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับการสื่อสาร มาสร้างรูปแบบวิธีการที่หลากหลายเกี่ยวกับการปรับเสียง ซึ่งเปลี่ยนช่วงความถี่ของคลื่นวิทยุสำหรับสัญญาณที่นำไปยังเสียงพูดแพร่ผ่านวิทยุมีความเข้มข้นขึ้น ตามความสนใจในทฤษฎีทั่วไปที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสาร หลักการพื้นฐานสำหรับทฤษฎีคือที่เพิ่มจำนวนเข้ามาขององค์ประกอบใหม่ โดยเฉพาะอย่างยิ่งความพยายามเกี่ยวกับช่องทางเดินของเสียง และความเป็นไปได้ในการจัดเก็บเพราะสาเหตุจากโครงสร้างทางสถิติที่เกี่ยวกับเนื้อความซึ่งเป็นต้นฉบับและเพราะธรรมชาติของจุดหมายปลายทางของข้อมูลข่าวสาร ซึ่งประยุกต์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของระบบตรรกศาสตร์และการให้เหตุผล มาใช้ในงานทางวิศวกรรม อย่างที่เป็นเครื่องรับสัญญาณเสียง ช่องทางเดินของเสียง ตัวส่งสัญญาณเสียง และผู้รับสัญญาณ แล้วใช้ระบบสถิติเข้ามาทำการคำนวณ

Nohda (1997 อ้างถึงใน ปานจิต รัตนพล, 2547) กล่าวถึง การสื่อสารและการเจรจาต่อรองผ่านวิธีการแบบเปิด ดังที่เห็นได้ว่าความต้องการทางทฤษฎีของ Christiansen and Walter (1986) ทำให้การค้นหาเป็นสิ่งที่จำเป็นอย่างยิ่งต่อการเปลี่ยนแปลงบทบาทและการดำเนินการของครูที่ได้แก่ 1) การเปลี่ยนแปลงในการกระจายจุดเน้นที่สำคัญตามกิจกรรมแต่ละชนิดที่มีความแตกต่างกัน 2) การเปลี่ยนแปลงในการดำเนินการของครูแต่ละชนิดและในลำดับที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่อยู่ในกระบวนการสอน และ 3) การเปลี่ยนแปลงในวิธีการที่ครูจะคอยให้ความช่วยเหลืออย่างที่เป็น ผู้สื่อผ่านของความหมายทางคณิตศาสตร์

อย่างที่อ้างถึงในตัวอย่างที่เกี่ยวของกับกิจกรรมการแก้ปัญหาระหว่างครูกับนักเรียน บทบาทบางอย่างของครูที่มีระยะเวลาแตกต่างกันของการสอนและกระบวนการเรียนรู้อย่างที่เป็น ครูผู้สอนในการสอนความรู้ทางคณิตศาสตร์และทักษะ (จากบนลงล่าง, Top-Down) อย่างที่ครูผู้สอนช่วยนักเรียนในการแก้ปัญหา (จากล่างขึ้นบน, Bottom-Up) อย่างที่ผู้สร้างทำการตัดสินใจในการพิจารณาลงความเห็น อย่างที่การสอนนำไปสู่ข้างหน้าหรือไม่ ครูการอธิบาย

อย่างละเอียด ดังที่เป็นบทบาทซึ่งผสมผสานกันด้วยการกระทำที่เฉพาะและคอยรับใช้ในการสร้างพื้นฐานและบริบทสำหรับการสอน ระหว่างที่มีนักเรียนอยู่ในขณะนี้และภายในกิจกรรมของการเชื่อมโยงด้วยคำพูดซึ่งเป็นความคิดส่วนตัว

การสื่อสารที่ใช้ในการแก้ปัญหาอย่างที่เป็นการจัดตั้งหลักการในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ของญี่ปุ่น สำหรับเรียกความตระหนักในการเรียนรู้ที่อยู่ภายใต้การสนับสนุนของครู การสื่อสารนี้มีหลายมุมมองที่เกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน ดังที่ทำการควบคุม จัดตั้ง และมีพลัง คล่องแคล่วของชั้นเรียน เพื่อวัตถุประสงค์สำหรับการแลกเปลี่ยนความเห็นและการพัฒนาความคิดทางคณิตศาสตร์

สมาคมครูคณิตศาสตร์ของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 1998, 2000) ได้เสนอแนวคิดเกี่ยวกับการสื่อสารว่า การสื่อสารเป็นส่วนที่จำเป็นสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ การสื่อสารเป็นวิธีการที่จะแบ่งปันหรือมีส่วนร่วมในแนวคิดและการทำความเข้าใจให้กระจ่างขึ้น โดยผ่านการสื่อสารแนวคิดที่เป็นรูปร่างมากขึ้นซึ่งเกิดจากการสะท้อน การกลั่นกรอง การอภิปรายและการแก้ไขปรับปรุงเปลี่ยนแปลง กระบวนการสื่อสารยังช่วยสร้างแนวคิดที่มีความหมายและช่วยแสดงออกถึงแนวคิดนั้นสู่สาธารณะ เมื่อนักเรียนถูกท้าทายให้คิดและให้เหตุผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และเพื่อสื่อสารผลจากการคิดของพวกเขาต่อคนอื่น โดยการพูดหรือการเขียนนั้น พวกเขาเรียนรู้ที่จะทำความกระจ่างและชัดเจน การฟังการอธิบายของคนอื่นทำให้นักเรียนมีโอกาสที่จะพัฒนาความเข้าใจของพวกเขาเอง การสนทนาในเรื่องที่เป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์นั้น จะถูกสำรวจจากหลาย ๆ แง่มุม ซึ่งจะช่วยให้การคิดของผู้เข้าร่วมนั้นเฉียบคมขึ้นและทำให้เกิดการเชื่อมโยง นักเรียนที่มีส่วนร่วมในการอภิปรายในการแสดงให้เห็นถึงวิธีการแก้ปัญหาโดยเฉพาะอย่างยิ่งผู้ที่ไม่เห็นด้วยจะเกิดความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น ในฐานะที่ต้องโน้มน้าวเพื่อนให้เห็นด้วยกับความคิดเห็นที่ต่างกันนั้น และกิจกรรมยังช่วยให้นักเรียนพัฒนาภาษาสำหรับการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับการเห็นคุณค่าในความจำเป็นของความถูกต้องของภาษา นักเรียนที่มีโอกาสได้รับการให้กำลังใจ และการสนับสนุนในการพูด การเขียน การอ่าน และการฟังนั้นจะได้รับประโยชน์ 2 ส่วนคือ พวกเขาได้สื่อสารเพื่อเรียนรู้คณิตศาสตร์และได้เรียนรู้เพื่อที่จะสื่อสารคณิตศาสตร์

Emori (2005) ให้แนวคิดเกี่ยวกับการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ว่า การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์นั้นมีหลายประเภท บางครั้งครูอาจจะตำหนิว่ากล่าวนักเรียนในพฤติกรรมที่ไม่เหมาะสม แต่ในทางตรงกันข้าม ครูจะต้องให้กำลังใจนักเรียนเมื่อเผชิญกับปัญหาที่ยาก ๆ หรือบางครั้ง นักเรียนจะคุยกันในห้องเรียนในเรื่องที่พวกเขาสนใจ ดังนั้นเราต้องตัดสินใจว่าการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ประเภทใดที่มีคุณค่าในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามปกติแล้วนักวิจัยและครูมักจะเน้นไปที่ปริมาณการพูดของนักเรียนในชั้นเรียน คุณภาพของสิ่งที่พูด และวิธีการแสดงออก ซึ่งมุมมองเหล่านี้ไม่ใช่ส่วนที่จำเป็นเพียงส่วนเดียวในการประเมินการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ในญี่ปุ่นนักวิจัยยังสรรเสริญครูที่ทำให้การเรียนการสอน

เต็มไปด้วยการสนทนาอย่างกระตือรือร้นของนักเรียน แต่องค์ประกอบที่สำคัญในการประเมินควรจะเป็นคุณภาพของการคิดของนักเรียน ก่อนหน้านี้ได้มีการนิยามการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ว่าต้องประกอบด้วยการแสดงออกทางคณิตศาสตร์ ถึงอย่างไรก็ตาม การสื่อสารที่ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ก็ไม่ใช่การสื่อสารทางคณิตศาสตร์เสมอไป ในทางตรงกันข้ามการพูดโดยใช้ภาษาในชีวิตประจำวัน ก็เป็นการสื่อสารที่จะถูกประเมินว่าเป็นการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ได้ ในที่นี้ได้วางการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ว่าเป็นการแลกเปลี่ยนของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ การถ่ายทอดโครงสร้างนั้นยากกว่าการถ่ายทอดการดำเนินการที่เป็นรูปธรรม และลักษณะหนึ่งของการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์

บทเรียนที่ดีคือบทเรียนถูกพัฒนาให้สอดคล้องกับธรรมชาติในการคิดของนักเรียน เพื่อที่จะรู้การคิดของนักเรียน ครูควรที่จะรู้วิธีการในการวิเคราะห์การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ หนึ่งในลักษณะของการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์คือการมีอยู่ของโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ในฐานะข้อมูลที่ถูกส่งผ่าน เมื่อเราประเมินการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรามุ่งความสนใจไปที่ความถูกต้องแม่นยำ ความพอเพียง และความอิสระของความคิดของผู้ที่เข้าไปมีส่วนร่วมในการสื่อสาร แนวคิดที่สามารถดึงเอาลักษณะของการสื่อสาร ความถูกต้องแม่นยำ ความคุ้มค่าและความอิสระของการสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เราจะเลือกบางตัวอย่างเพื่อที่จะวิเคราะห์ในการบรรยายถัดไปจะอยู่บนพื้นฐานของสามมุมมองเหล่านี้

ความหมายของ “เชิงคณิตศาสตร์” ไม่ได้ขึ้นอยู่กับเนื้อหาและวิธีในการแสดงออก การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ควรที่จะรวมกระบวนการที่กระตือรือร้นของความคิดทางคณิตศาสตร์ในฐานะกิจกรรมเชิงการรู้ของผู้ที่เข้าไปมีส่วนร่วมในการสื่อสาร ข้อเท็จจริงหรือข้อมูลที่ใช้ในการสื่อสาร เรียกว่า “สาร” (Messages) สารเป็นเพียงวัตถุเชิงกายภาพ (Physical object) การสื่อสารหรือการส่งสาร ไม่ได้หมายความว่าแค่เพียงเป็นการส่งข้อมูล การตีความ แต่เป็นลักษณะเฉพาะตัวของผู้รับสารเป็นตัวสร้างความหมาย การตีความขึ้นอยู่กับแต่ละบุคคล เมื่อเราวิเคราะห์การสื่อสาร เราควรที่จะพยายามรู้ถึงการตีความที่เป็นส่วนตัวของนักเรียนแต่ละคน สารอันหนึ่งที่กระทำต่อผู้รับสารอาจมีทั้งทางบวกหรือทางลบ และมันมีผลกระทบที่ขึ้นอยู่กับการคิดก่อนหน้านี้ของผู้รับสารก่อนรับสาร เพราะฉะนั้นเป็นไปได้ที่หนึ่งสารจะแสดงออกทั้งการให้ข้อมูลย้อนกลับทางบวกและการให้ข้อมูลย้อนกลับทางลบในเวลาเดียวกัน บางส่วนของข้อมูลย้อนกลับที่เป็นคู่ (Dyad feedback) เป็นห่วงโซ่ที่ซับซ้อนเหมือนกับห่วงโซ่ของการให้ข้อมูลย้อนกลับ (Chained feedback)

การทำให้ความไม่สอดคล้องเชิงการรู้ (Cognitive dissonance) ลดลงโดยบางครั้งนักเรียนที่ถูกโน้มน้าวถูกทำให้เปลี่ยนความตั้งใจมากกว่านักเรียนที่โน้มน้าวเพราะฉะนั้นครูต้องให้ความสนใจกับแนวคิดของนักเรียนในการอภิปรายหลังเรียนเพื่อเป็นการป้องกันความไม่สอดคล้องเชิงศักยภาพ ที่อาจทำให้นักเรียนสับสนกับความคิดของตนเอง เมื่อครูช่วยในการสนทนาของนักเรียน จึงมีความจำเป็นที่ต้องให้ความสนใจว่า ประเภทของการเปลี่ยนแปลงเชิง

การรู้ (Cognitive transformation) ที่เกิดขึ้นกับนักเรียนที่ได้รับสะท้อนกลับ (Feedback) และรูปแบบของการสื่อสารโดยทั่วไปมีการสื่อสาร 2 ประเภท ประเภทแรกเป็นการสื่อสารที่อาศัยรูปแบบรหัส การสื่อสารอีกประเภทหนึ่งคือการสื่อสารที่อาศัยรูปแบบในการสรุปสาร ห่วงโซ่แบบประสานนั้นอธิบายได้ด้วยรูปแบบรหัส ห่วงโซ่แบบประสานและห่วงโซ่แบบผู้รับเหนือกว่าอธิบายได้ด้วยรูปแบบในการสรุปความตามสาร ประเภทของห่วงโซ่การสื่อสารเหล่านี้อาศัยความรู้ที่ถูกเก็บไว้ของผู้ส่งสารและผู้รับสาร

ห่วงโซ่การสื่อสารในการเรียนคณิตศาสตร์ถูกแบ่งออกเป็น 4 ประเภท คือ Coordinate Chain, Resonant Chain, Transcendent Chain, Emergent Chain นิยามกระบวนการเชิงการรู้ของผู้ที่เข้าไปมีส่วนร่วมในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยการใช้รูปแบบ 5 แง่มุม ความตระหนัก (Realization) การดูดซึม (Assimilation) การขยายออก (Expansion) การจำแนกความแตกต่าง (Differentiation) และการสร้างขึ้นมาใหม่ (Re-construction) ซึ่งเมื่อกระบวนการสื่อสารที่มีผู้ส่งสารและผู้รับสารทำการสื่อสารกันนั้น การเลือกรับรู้ถูกกระทำที่สองขั้น ขั้นแรกการเลือกรับรู้ถูกกระทำเมื่อข้อความถูกตีความ และขั้นที่สองการเลือกรับรู้ถูกกระทำ ณ เวลาของการคิดสะท้อน

กลไกของห่วงโซ่การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (The mechanism of communication chain in learning mathematics) มีกรอบเชิงทฤษฎีเพื่อวิเคราะห์ห่วงโซ่การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์จาก 3 มุมมองของความต่อเนื่องดังนี้ (1) ความต่อเนื่องของกิจกรรมของนักเรียน (2) ความต่อเนื่องของการคิดระหว่างนักเรียน และ (3) ความต่อเนื่องของการคิดของนักเรียนแต่ละคน

ภายใต้มุมมองเหล่านี้ ทำอย่างไรครูคณิตศาสตร์ของเราจึงจะเข้าใจห่วงโซ่การสื่อสารในกระบวนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (How should we mathematics teachers grasp a communication chain in learning mathematics) เพื่อสร้างความชัดเจนเกี่ยวกับกลไกพื้นฐานของการเปลี่ยนแปลงเชิงการเรียนรู้ที่มีการตรวจสอบ (Feedback brings) จากมุมมองของความต่อเนื่องของกิจกรรมของนักเรียน พบว่า การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นการพัฒนาดังเช่นห่วงโซ่ของวงจรซึ่งประกอบด้วยการถ่ายทอดข่าวสารและการย้อนกลับระหว่างนักเรียนสองคน (หรือนักเรียนกับครู) ในกรณีของการสื่อสารระหว่างนักเรียนสามคน มันเป็นการดำเนินไปดังเช่นการย้อนกลับของห่วงโซ่ ในวงจรนี้นักเรียนแต่ละคนจะตีความข้อมูลข่าวสารบนฐานความรู้และประสบการณ์ และจะมีการติดตามกระบวนการคิดเพื่อปรับให้เหมาะสมและส่งต่อข้อมูลข่าวสารนั้นตามการตีความของแต่ละบุคคล การเปลี่ยนแปลงเชิงการรู้ของนักเรียนอยู่บนฐานของบางกิจกรรม เพื่อคัดลอกบางส่วนของการย้อนกลับจากคนอื่น เพื่อคัดเลือกข้อมูลข่าวสารระหว่างข้อมูลข่าวสารบางส่วนที่ตัวเองได้รับมาและข้อมูลข่าวสารที่คนอื่นให้มา เพื่อสร้างความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลข่าวสารเหล่านั้น ก่อตั้งสิ่งเหล่านั้นไปสู่การสร้างข้อมูลข่าวสารต่อไป และสุดท้ายการเปลี่ยนแปลงเชิงการรู้บรรลุผลโดยกิจกรรมที่สร้างลำดับใหม่

กระบวนการเชิงการรู้ของนักเรียนที่มีอยู่ในห่วงโซ่การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์จากมุมมองของความต่อเนื่องของการคิดของนักเรียนแต่ละคน พบว่า กระบวนการเชิงการรู้ของนักเรียนที่มีอยู่ในห่วงโซ่การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์แสดงให้เห็น 5 แง่มุมของการเปลี่ยนแปลงเชิงการรู้ การตระหนักรู้ ความการดูดซึม การขยาย การจำแนกความแตกต่างและการสร้างใหม่ ซึ่งแง่มุมเหล่านี้ไม่ได้ถูกแบ่งแยกเป็นแต่ละระยะ สิ่งเหล่านี้เป็นกระบวนการที่ลึกซึ้งของความเข้าใจที่นำมาใช้ซ้ำแล้วซ้ำเล่าซึ่งอยู่บนฐานของกิจกรรมเชิงการรู้ที่เรียกว่าความตระหนัก และเกี่ยวกับกระบวนการเชิงการรู้ มีลักษณะ 2 อย่างที่ชัดเจนขึ้นมาคือ 1) ด้วยกิจกรรมเชิงการรู้ของความทรงจำของหน่วยความจำ เราสามารถใช้สารในฐานะที่เป็นวัตถุ (Object) ของการสื่อสารและวัตถุของการสะท้อนการคิด (Reflective thinking) และ 2) การเลือกที่จะรับรู้ขึ้นอยู่กับประสบการณ์และความรู้ของนักเรียนที่จะรับสารนั้น ซึ่งมันก็จะส่งผลกระทบต่อการตีความสารและการคิดอย่างมีวิจารณญาณหรือการสะท้อนการคิดของตัวเอง

การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ไม่ใช่การตอบสนองอย่างง่าย ๆ ที่มีต่อสาร ดังเช่นการถูกกระตุ้นในเชิงกายภาพ การสื่อสารในการเรียนรู้คณิตศาสตร์เป็นความร่วมมือกับบุคคลอื่น ๆโดยมีเป้าหมายเพื่อที่รวมเอาพื้นที่เชิงความคิด (Mental space) ที่มันแยก ๆ กันอยู่มารวมเป็นโครงสร้างเดียวกันอย่างมีความหมาย นอกจากนั้น ยังเป็นกิจกรรมเชิงการรู้ที่ทำเพื่อรักษาหรือคงไว้ซึ่งความต่อเนื่องของการคิดของนักเรียนแต่ละคน ดังเช่นชนิดของกิจกรรมเชิงการรู้ที่ได้แสดงไว้ใน 5 แง่มุม คือ การตระหนัก การดูดซึม การขยาย การจำแนกความแตกต่าง และการสร้างใหม่

การมีส่วนร่วมในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ประกอบไปด้วยความหลากหลายของการพูด การเปล่งเสียงและการนำเสนอของการดำเนินการที่เป็นรูปธรรม และการเข้าใจชนิดของแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เรียนในชั้นเรียน นักเรียนจำเป็นต้องทำความเข้าใจความหลากหลายของการพูดในฐานะที่เป็นห่วงโซ่ของการสื่อสารและการกระทำภายในตัวของมัน ซึ่งมันไม่เพียงพอที่จะเข้าใจแต่ละคำพูดของบุคคลอื่น ๆ ซึ่งแยกกันอยู่

กระบวนการของการทำให้เป็นรูปแบบทั่วไป (Internalization) ของห่วงโซ่การสื่อสารทำให้กระบวนการเชิงการรู้ของนักเรียนเปิดไปสู่ยังกระบวนการสร้างเชิงสังคมของความหมายทางคณิตศาสตร์ในความหมายของการเปิดข้อจำกัดซึ่งไม่สามารถก้าวข้ามโดยความคิดของใครเพียงคนใดคนหนึ่ง ปรากฏการณ์ของการสื่อสารยอมรับความหลากหลายชนิดของการตีความสำหรับการอภิปรายถกเถียงอย่างต่อเนื่องตามลำดับ และการทำให้เป็นรูปแบบทั่วไปของห่วงโซ่การสื่อสารที่ก่อให้เกิดความหมายได้ช่วยขยายการคิดของบุคคล กระบวนการทำให้เป็นรูปแบบทั่วไปของห่วงโซ่การสื่อสารทำให้เกิดโอกาสของการเรียนรู้ที่หลากหลายและทำให้นักเรียนแต่ละคนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ในระดับที่ลึกซึ้งขึ้นในแต่ละระดับ

บทเรียนที่ดีคือการพัฒนาจากวิธีคิดที่เป็นธรรมชาติของนักเรียน เราจำเป็นต้องเพิ่มความสำคัญเรื่องวิธีคิดที่เป็นธรรมชาติของนักเรียนและเราไม่ควรไปกดดันด้วย

การเอาแนวคิดแบบผู้ใหญ่หรือวิธีคิดแบบคณิตศาสตร์ใส่เข้าไป เพื่อรักษาพฤติกรรมเหล่านี้เราจำเป็นต้องรู้ว่านักเรียนคิดคณิตศาสตร์อย่างไร และนักเรียนรู้สึกอย่างไรในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องให้อำนาจกับคนอื่น ๆ ด้วย เราเชื่อว่าปฏิสัมพันธ์เชิงสังคมเป็นสิ่งจำเป็นสำหรับการเรียนรู้ เราค่อนข้างเห็นด้วยกับความเชื่อที่ว่านักเรียนควรจะถูกสนับสนุนให้มีประสบการณ์ในการทำกิจกรรมที่ต้องมีความร่วมมือกัน เราจัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และความร่วมมือเป็นสิ่งที่สำคัญอย่างหนึ่งของการดำรงชีวิตในสังคมแห่งข้อมูลข่าวสาร แต่จนบัดนี้เราก็ยังไม่รู้กลไกการสื่อสารของมนุษย์โดยเฉพาะอย่างยิ่งในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เกือบจะทั้งหมดของนักวิจัยที่ให้ความสำคัญกับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนไม่สามารถตรวจสอบกลไกของกระบวนการเชิงการรู้และกระบวนการทางด้านอารมณ์ของการสื่อสาร นักวิจัยได้เน้นไปที่การให้ความสำคัญกับ การสนับสนุนกิจกรรมทางการสื่อสารของนักเรียน แต่พวกเขาก็ไม่เคยไปถึงการที่จะรู้ว่าการสื่อสารนั้นทำงานอย่างไร ซึ่งพวกเขาได้เก็บเอากลไกของการสื่อสารเหล่านั้นใส่ไว้ในกล่องดำ (Black box)

Pirie (1998) กล่าวว่า ความหมายของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์สามารถแบ่งออกได้ เป็น 6 ข้อหลังดังต่อไปนี้

1) ภาษาธรรมดา (Ordinary language) ขอบเขตของความธรรมดานี้ มีความหมายว่าเป็นภาษาที่ใช้กันอยู่ในปัจจุบันที่อยู่ในคำศัพท์ในชีวิตประจำวันของคนอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับนักเรียน ซึ่งจะเป็นแนวทางที่แตกต่างสำหรับนักเรียนที่มีอายุแตกต่างกันและระยะที่มีความเข้าใจแตกต่างกัน

2) ภาษาพูดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical verbal language) ภาษาพูดในที่นี้หมายถึง การใช้คำพูด เช่นเดียวกันกับการพูดหรือการเขียน

3) ภาษาสัญลักษณ์ (Symbolic language) ภาษาแบบนี้เป็นเครื่องหมายอย่างหนึ่งของการสื่อสาร ที่ทำขึ้นมาในรูปการเขียนสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

4) การแสดงแทนที่มองเห็น (Visual representation) ถึงแม้ว่าจะไม่ยึดติดกับภาษา แน่นอนว่าสิ่งนี้มีพลังที่หมายความถึงการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

5) ไม่ใช่การพูดแต่เป็นการแลกเปลี่ยนสมมุติฐาน (Unspoken but shared assumption) ในอีกด้านหนึ่งสิ่งที่ตกหล่นไม่มีจริง ๆ ในการนิยามเกี่ยวกับภาษา แต่พวกมันมีความหมายโดยความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ที่อาศัยการสื่อสารและการทำความเข้าใจใหม่อย่างสร้างสรรค์ พวกเขาจะไม่ยอมรับสิ่งหนึ่งที่มีความเสี่ยง

6) สิ่งที่คล้ายกับภาษาทางคณิตศาสตร์ (Quasi-mathematical language) ภาษานี้ใช้กันปกติ แต่ไม่ได้แยกออกไปจากกัน ที่เกี่ยวข้องกับนักเรียน สำหรับพวกเขาความหมายทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้นมาไม่ได้เป็นหลักฐานที่แน่นอนไปสู่บุคคลภายนอก (ผู้ที่บางครั้งอาจจะดี ในบริบทนี้อาจจะเป็นครู)

Vygotsky (1934) กล่าวถึง การทำหน้าที่ทางจิตใจ เป็นเหมือนกับสิ่งที่มีอยู่ภายในอย่างมหาศาล มีความสลับซับซ้อนที่รวมอยู่ภายในแต่ละบุคคลซึ่งทำหน้าที่ร่วมกัน และการกระทำในทางจิตวิทยา ไม่สามารถแยกออกจากกันได้ หน่วยที่จะนำไปสู่เป้าหมายของการสังเกตและสามารถดำเนินการได้ เป็นโลกขนาดเล็ก (Microcosm) ของความซับซ้อนเกี่ยวกับกระบวนการที่ทำหน้าที่อยู่ภายในที่แสดงลักษณะพิเศษตามความจริงของการกระทำทางจิตวิทยา โดยใช้หน่วยของการวิเคราะห์ค้นหาความจริงเกี่ยวกับ ความหมายของคำพูด (Word meaning) เพื่อที่จะทำความเข้าใจ ความจริงและความสัมพันธ์ใหม่ที่ถูกสร้างขึ้นมา ความเข้าใจ ที่คล้ายกับกลุ่มนักจิตวิทยา Marxist-Lenist คือ สิ่งที่ปรากฏขึ้นมาอย่างชัดเจนในคำกล่าวจากเริ่มต้นจนกระทั่งสิ้นสุดของการคิดและคำพูด (Thinking and Speech) เมื่อการพูดนั้นเป็นการพูดเกี่ยวกับการโต้แย้งด้วยเหตุผลที่ดำเนินการอย่างรวดเร็ว ไม่เพียงแต่จากการไม่ทำความเข้าใจในใจความสำคัญจนถึงความรู้สึก แต่ยิ่งไปกว่านั้น คือ จากความรู้สึกไปจนถึงการคิด มันเป็นสิ่งที่มีความหมายต่อการไตร่ตรองของการคิดอย่างแท้จริงภายในความตระหนักรู้ (Consciousness) ของคุณลักษณะที่แตกต่างกันโดยตรง ไม่ได้ผ่านการสื่อถึงความรู้สึก นั้นก็คือ ความตระหนักรู้เป็นการไตร่ตรองในการพูด ที่เปรียบเหมือนพระอาทิตย์ที่สะท้อนแสงกับพื้นน้ำ และการทำความเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างน้ำเสียงและความหมายในการพูด ดังที่เราสามารถเข้าใจความสัมพันธ์ระหว่างการคิดและคำพูดได้ เพราะว่า การคิดและคำพูดในครั้งหนึ่งหรือบางเวลา มันก็คือ หน่วยของการคิดที่แสดงออกเป็นคำพูด (Verbal thought)

Vygotsky ได้เสนอแนวคิดที่ตรงกันข้ามกับ Piaget ว่า คำพูดครั้งแรกของเด็กก็คือ คำพูดทางสังคมที่เกิดแล้วก่อนหน้านี้ เมื่อมีอายุที่แน่นอนการเริ่มต้นของคำพูดทางสังคม จะกลายมาเป็นสิ่งที่ตรงกันข้ามอย่างทันทีทันใดแบ่งแยกเข้าไปในคำพูดที่ถือเอาประโยชน์ของตัวเองเป็นใหญ่ นั้นคือ การพูดเพื่อตนเอง และสื่อสารคำพูดเพื่อคนอื่น คำพูดที่ถือเอาประโยชน์ของตัวเองเป็นใหญ่ จะทำให้แตกออกจากคำพูดทางสังคมทั่วไป ทำให้ยกระดับไปถึงภายในคำพูด ภายในคำพูด คือ ผลที่เกิดขึ้นมาแล้วเกี่ยวกับการเปลี่ยนรูปของคำพูดก่อนนี้ที่สนับสนุนจุดมุ่งหมายของการสื่อสารเข้าไปในการคิดที่แสดงออกเป็นคำพูดของแต่ละบุคคล ก่อนสภาวะที่ครอบครองของความเข้าใจที่มีมากกว่าการให้ความหมาย ที่เกี่ยวข้องกับประโยคมากกว่าคำพูด และเกี่ยวข้องกับบริบทมากกว่าประโยคที่เป็นบทบาทเกี่ยวกับภายในคำพูด ถึงแม้ว่าการยืนยันการให้ความหมายสำหรับวาทะกรรมที่ใช้อยู่รวมกันเป็นสังคม (Socialized discourse) ความเข้าใจที่แสดงแทนจุดร่วมของสองสิ่งระหว่างความคิดของเฉพาะบุคคล (One's individual thinking) และการคิดที่แสดงออกเป็นคำพูด ที่เข้าใจได้ไปยังคนอื่น

Von Glasserfeld (1995) กล่าวว่า สิ่งที่อาจจะเป็นความสัมพันธ์กันอย่างเป็นพื้นฐานเพื่อใช้ในมุมมองของ Radical Constructivism : ภาษาที่สร้างขึ้นมาใช้เป็นประจำจะเป็นภาพลวงตาของความคิด ความเข้าใจ และจำนวนชั้นของความรู้ทั้งหมดที่ลำเลียงจากผู้พูดไปสู่ผู้ฟัง ภาพลวงตานี้มีอำนาจเพราะว่ามันจะปรากฏขึ้นมาจากความเชื่อที่สร้างขึ้นตาม

ความหมายของคำหรือวลีที่เหมาะสมที่อยู่ภายนอกของผู้ใช้ภาษานั้น บางทีอาจจะเป็นแนวทางที่ดีสำหรับ การถอดภาพลวงตานั้นออกด้วยความจำหรือการสร้างวิธีการอย่างหนึ่งขึ้นมาจากการสร้างความหมายของคำและวลี เมื่อคน ๆ นั้นได้เรียนรู้ภาษามาครั้งแรก แน่นอนว่ามันสามารถเป็นแค่เพียงส่วนเล็ก ๆ ที่ทำให้ไม่เกี่ยวพันกันของภาษา สิ่งหนึ่งได้รับรู้ด้วยจำนวนประสบการณ์ของคน ๆ นั้นและไม่ใช่ประสบการณ์ของคน ๆ เดียวที่ถูกต้องตลอดมาบางทีอาจจะเป็นคนอื่น อย่างเช่น ไม่ว่าคนอื่นจะพูดหรือเขียนคุณจะไม่สามารถทำได้อย่างเขา แต่จะแปลความเรื่องนั้นเป็นความหมายของคุณตามคำและวลีที่ได้ยิน ถ้าให้เราอยู่ในชุมชนของผู้ใช้ภาษาอื่น ๆ การสร้างความหมายของเรื่องนั้นก็จะเป็นไปตามความสนใจของตัวเราเอง ถึงอย่างไรก็ตาม ก็จะกลายมาเป็นความต้องการต่อกันและกัน เพราะว่าเราเรียนรู้ที่จะปรับเปลี่ยนและปรับให้เข้ากันให้ได้ทั้งหมดตามความเหมาะสมของสถานการณ์ในการมีปฏิสัมพันธ์กับคนอื่น ในวิธีการนี้เราจะจัดการจนนำไปสู่ความสำเร็จที่เกี่ยวพันกันเป็นอย่างดีของความสอดคล้องกัน แต่การปรับปรุงให้สอดคล้องกันอย่างที่เป็นการสร้างความหมายของบุคคลไม่ได้มีเหมือนกันทุกอย่าง แน่นอนว่าที่ผ่านมาที่เรามีชีวิตอยู่ขณะนี้และหลังจากที่ได้ค้นหาความหมายที่เราได้เกี่ยวข้องกับคำที่มีความแน่นอนอย่างที่ไม่ได้มีความสอดคล้องกันทั้งหมด ด้วยการใช้คำอื่นที่สร้างขึ้นมาจากคำนั้น ๆ สิ่งนี้บางทีอาจจะช่วยทำให้เราจำได้โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเราได้กระทำแบบครูที่เป็นความเข้าใจอย่างใหม่และความรู้ใหม่ที่ไม่สามารถทำได้อย่างตรงไปตรงมาผ่านไปยังคนอื่นโดยการพูด เพราะว่าแต่ละอันนั้นมันเป็นการสร้างความหมาย ความเข้าใจ และความรู้ที่เป็นนามธรรมจากทั้งเขาหรือเธอนั้นตามประสบการณ์

การสื่อสาร เป็นกระบวนการที่จำเป็นสำหรับการเรียนคณิตศาสตร์ การสื่อสารเป็นวิธีการแลกเปลี่ยนหรือมีส่วนร่วมในแนวคิดและการทำความเข้าใจให้กระจ่างขึ้น โดยผ่านการสื่อสารแนวคิดที่เป็นรูปร่างมากขึ้นซึ่งเกิดจากการพูด การสะท้อน การกลั่นกรอง การอภิปรายและการแก้ไขปรับปรุงเปลี่ยนแปลง นอกจากนี้ยังช่วยสร้างแนวคิดที่มีความหมายและการแสดงออกถึงแนวคิดจากคน ๆ เดียวไปสู่ส่วนรวม เมื่อนักเรียนถูกท้าทายให้คิดและให้เหตุผลเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ผลลัพธ์ที่ได้จากการคิดของนักเรียนที่มีต่อคนอื่น โดยการพูดหรือการเขียนจะทำความกระจ่างและชัดเจน การฟังคำอธิบายของคนอื่นทำให้นักเรียนมีโอกาสที่จะพัฒนาความเข้าใจของพวกเขาเอง การสนทนาในเรื่องที่เป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์นั้น จะถูกสำรวจจากหลาย ๆ แง่มุม นั่นก็คือ การสื่อสารจะช่วยทำให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์มากขึ้นทั้งจากตนเองและการแลกเปลี่ยนกับผู้อื่น

### 1.2 แนวคิดของการเรียนรู้ในเรื่องวาทกรรมทางคณิตศาสตร์

Sfard (2001) กล่าวว่า สิ่งที่สำคัญที่สุดที่ครูจะเพิ่มเติมให้นักเรียนที่จะนำไปเป็นวิธีการใหม่ในการสื่อสารและเป็นเป้าหมายสำคัญของครู เกี่ยวกับวิธีการสื่อสารความคิด การสร้างความหมาย และมีความสำคัญที่กลายมาเป็นความชัดเจนทันทีทันใด ในความเป็นจริงสิ่งที่แตกต่างกันระหว่างความคิดและการสื่อสารคือ การคิดที่ไม่สามารถป้องกันแนวคิดของตัวเองได้

และการคิดที่เป็นกรณีที่เฉพาะเจาะจงเกี่ยวกับกิจกรรมของการสื่อสาร ทั้งการคิดที่คิดแล้วออกมาเป็นคำพูด และการคิดที่อยู่ในจินตนาการ หรือในสัญลักษณ์อื่น ๆ ความคิดของเราจะมีความชัดเจนอย่างยิ่งด้วยความพยายามที่จะพูดอภิปราย อย่างที่ไม่มีรูปแบบ มีการโต้แย้ง ถามคำถาม และรอการตอบสนอง จนกระทั่งกลายมาเป็นส่วนสำคัญในวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เป็นเหมือนกับการเรียนรู้ที่จะคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

กระบวนการเรียนรู้และวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ เป็นส่วนที่ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะ ความสามารถในการแก้ปัญหา การพิสูจน์และการให้เหตุผล และการสื่อสารเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ เมื่อพบกับปัญหา นักเรียนสามารถทำการคิดค้นหาวิธีการในการแก้ปัญหา ตรวจสอบหรือพิสูจน์ข้อเท็จจริงจากข้อคาดการณ์ แล้วใช้การแก้ไข ปรับเปลี่ยนข้อคิดเห็นหรือโต้แย้งสำหรับแนวคิดที่ไม่เห็นด้วย มีการแลกเปลี่ยนแนวคิดระหว่างกันและกันอย่างมีเหตุผล จนได้ข้อสรุปร่วมกันในการแก้ปัญหานั้น ๆ การที่นักเรียนมีข้อสรุปเกิดจากการตกลงร่วมกันจะเป็นสร้างความมั่นใจให้นักเรียนสามารถสื่อสารแนวคิด พูดอธิบาย แสดงถึงวิธีการแก้ปัญหาให้ผู้อื่นฟังด้วยความเข้าใจ ชัดเจน และมีเหตุผลสนับสนุน เป็นลำดับขั้นตอน ซึ่งแสดงถึงว่า นักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในคณิตศาสตร์

## 2. วาทกรรมทางคณิตศาสตร์

### 2.1 แนวคิดเกี่ยวกับวาทกรรม

คำว่า “วาทกรรม” (Discourse) บางครั้งไม่ได้หมายความถึงแค่เพียง ภาษา คำพูด หรือถ้อยแถลงเพียงอย่างเดียว แต่วาทกรรมนี้จะใช้หมายความถึง กระบวนการสร้างคำพูดที่มีความตั้งใจที่จะให้เหตุผล โต้แย้งหาข้อสรุป เพื่อต้องการที่จะแก้ปัญหาให้ได้ ซึ่งคำว่า “วาทกรรม” ในประเทศไทย อาจารย์สมเกียรติ วันทะนะ แห่งคณะสังคมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ เป็นนักวิชาการท่านแรกที่เลือกใช้คำภาษาไทยว่า “วาทกรรม” แทนคำว่า “Discourse” ในภาษาอังกฤษ (ไชยรัตน์ เจริญสินโอฬาร, 2549)

Foucault (1972a อ้างถึงใน ไชยรัตน์ เจริญสินโอฬาร, 2549) กล่าวไว้ว่า “วาทกรรม” เป็นมากกว่าเรื่องของภาษาหรือคำพูด แต่มีภาคปฏิบัติการจริงของวาทกรรม (Discursive practices) ซึ่งรวมถึงจารีตปฏิบัติ ความคิด ความเชื่อ คุณค่า และสถาบันต่าง ๆ ในสังคมที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนั้น ๆ ด้วย และวาทกรรมถูกสร้างขึ้นมาจากความแตกต่างระหว่างสิ่งที่สามารถพูดได้อย่างถูกต้องในช่วงเวลาหนึ่ง (ภายใต้กฎเกณฑ์และตรรกะชุดหนึ่ง) กับสิ่งที่ถูกพูดอย่างแท้จริง ขอบเขตของวาทกรรมในขณะใดขณะหนึ่งก็คือกฎเกณฑ์ว่าด้วยความแตกต่างนี้ ฉะนั้น วาทกรรมจึงสร้างสรรพสิ่งต่าง ๆ ขึ้นมา ภายใต้กฎเกณฑ์ที่ชัดเจนชุดหนึ่ง กฎเกณฑ์นี้จะเป็นตัวกำหนดการดำรงอยู่ การเปลี่ยนแปลง หรือการเลือนหายไปของสรรพสิ่ง นั่นคือควบคู่ไปกับสรรพสิ่งต่าง ๆ ที่สังคมสร้างขึ้น ยังมีการสร้างและการเปลี่ยนแปลงสิ่งที่ถูกพูดถึงโดยวาทกรรม

NCTM (1991) กล่าวว่า วาทกรรมในชั้นเรียนที่กล่าวถึง เป็นวิธีการแสดงออกทางการคิด การพูด การเห็นด้วยและไม่เห็นด้วย ที่มีลักษณะเกี่ยวกับสาขาหรือขอบเขตของความสนใจเกี่ยวกับความรู้ วาทกรรมเป็นมากกว่าการอธิบายของนักเรียนถึงวิธีการที่พวกเขาแก้ปัญหาได้ตามการร่วมมือกันหาคำตอบเกี่ยวกับจำนวน หรือการอธิบายถึงด้วยคำพูดที่มีลักษณะกัดแทะหรือกัดกิน เมื่อมีการให้เหตุผลและหลักฐานที่เป็นพื้นฐานสำหรับวาทกรรม กับจำนวนนักเรียนที่โตแล้วทำการสร้างปัญหาขึ้น ค้นหา ข้อคาดการณ์ ให้เหตุผลอย่างมีเหตุมีผล และประเมินหลักฐานและอีกทั้งการทำความเข้าใจเกี่ยวกับบางสิ่ง พวกเขาจะเรียนรู้ที่จะใช้ กับทั้งที่จะพูดและเขียน ซึ่งเป็นเครื่องมือของคณิตศาสตร์หรือสาขาที่มีหลักการที่น่าเชื่อถืออย่างที่เป็น คำศัพท์เฉพาะทาง, รูปแบบ, การแสดงแทนด้วยการให้เหตุผล และการใช้สัญลักษณ์

Sierpinska (1998) กล่าวว่า ในทุกวันนี้มีความวิตกกังวลมากเกี่ยวกับการสื่อสารภาษาและวาทกรรมในชั้นเรียนที่ถูกแทนที่ด้วยประเด็นสำคัญในทางประวัติศาสตร์ของคณิตศาสตรศึกษาที่ทำให้ต้องหยุดมองและให้มุมมองด้วยการตั้งคำถามและข้อสังเกตใหม่อย่างหนึ่งและทำการส่งเสริม แง่มุมทางสังคมและวัฒนธรรม และลักษณะเร่งด่วนของความหมายทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นร่วมกัน โดยครูและนักเรียนในชั้นเรียนที่ถูกไฟส่องให้สว่างขึ้นมาก่อนหน้านี้ที่สนุกตามกระบวนการรู้ของนักเรียนแต่ละคน ภาษาในคณิตศาสตรศึกษาก็ยังคงเป็นประเด็นที่สำคัญ แต่ไม่ได้รับความสนใจที่จะยกระดับขึ้นมาจากการศึกษาเนื้อหา (Texts) ไปยังการศึกษาเกี่ยวกับภาษาที่อยู่ในการกระทำ (Action) ดังที่มันถูกใช้ในบริบทที่แตกต่างกันและอย่างที่เป็นส่วนหนึ่งของการปฏิบัติทางสังคม โดยสรุปแล้วเน้นไปที่การเคลื่อนที่จากภาษาไปสู่วาทกรรม ทุกวันนี้การพิจารณาอย่างใคร่ครวญไปยังกระบวนการสื่อสารในหมู่นักเรียนและการสื่อสารกับนักเรียน และมีคำถามสำคัญเกี่ยวกับภาวะฉุกเฉินของการสร้างความหมายร่วม (Taken-as-share) ผ่านการสื่อสารในวัฒนธรรมชั้นเรียน การสื่อสารที่ไม่ได้ทำให้เข้าใจอย่างที่เป็นความหมายจริงๆ เกี่ยวกับการเรียนเป็นการคิดว่าเหมือนกันกับการสื่อสาร ดังที่ การเรียนรู้ที่น่าจะเข้าใจได้ดีที่สุดในฐานะที่เป็นกระบวนการสื่อสารที่ประกอบไปด้วย การพัฒนาของบริบทที่มีจิตใจร่วมกันและขอเขตที่พูดถึงผ่านสิ่งที่เป็นวาทกรรมของการเรียนรู้ อย่างความหลากหลายของเนื้อหาและความสามารถทางวิชาการที่มีความคิดเห็นเชื่อมโยงกัน จนกลายมาเป็นความสามารถเข้าใจได้ดีสำหรับผู้ที่ใช้มัน

วาทกรรม เป็นการใช้ภาษาหรือคำพูด ที่อาศัยการปฏิบัติจริงรวมถึงจารีตปฏิบัติ ตามความคิด ความเชื่อ คุณค่าในสังคมที่เกี่ยวข้องกับเรื่องนั้นๆ และวาทกรรมถูกสร้างขึ้นมาจากความแตกต่างระหว่างสิ่งที่สามารถพูดได้อย่างถูกต้องในช่วงเวลาหนึ่ง ภายใต้กฎเกณฑ์และตรรกะชุดหนึ่งกับสิ่งที่ถูกพูดอย่างแท้จริง ดังนั้น วาทกรรมจึงเป็นกระบวนการสร้างคำพูดที่มีความตั้งใจที่ใช้การให้เหตุผล โต้แย้งหาข้อสรุป เพื่อต้องการที่จะแก้ปัญหาอย่างใดอย่างหนึ่งให้สำเร็จ

## 2.2 แนวคิดของวาทกรรมทางคณิตศาสตร์

Linell (1998) กล่าวว่า รายละเอียดของการศึกษาเชิงประจักษ์ (Empirical) โดยทำการตรวจสอบข้อมูล สิ่งที่ต้องเตรียมที่สำคัญที่สุดและหลักฐานที่ปรากฏชัดเจนในการสนับสนุนคำพูด สิ่งที่ได้มาจากภาษาดั้งเดิม สังเกตได้ว่า การพรรณนาถึงและการบรรยายเกี่ยวกับภาษาและภาษาที่ใช้จะต้องตั้งอยู่บนพื้นฐานทางทฤษฎีของการกระทำของมนุษย์และกิจกรรมในเชิงการรู้และการมีปฏิสัมพันธ์กันในแต่ละบริบท (อ้างถึงใน Ryve, 2006)

Georgakopoulou & Goutsos (1997) กล่าวว่า เมื่อเรากล่าวถึงการใช้ประโยชน์ของใจความสั้น ๆ ในสิ่งแวดล้อมของการสื่อสาร ใจความแวดล้อมจะช่วยในการเข้าใจความหมายของข้อความนั้น ซึ่งการพูดถึงเรื่องวาทกรรม ขณะที่บางครั้งเราใช้วาทกรรมกับเนื้อหาหรือใจความของข้อความสั้น ๆ หลากหลายรูปแบบมีความคล้ายคลึงกัน แต่ตรงกันข้ามมันมีความแตกต่างระหว่างวาทกรรมกับเนื้อหาหรือใจความของข้อความสั้น ๆ ที่เป็นการนำพาไปยังการประยุกต์ใช้หน่วยของการพูดเปรียบเทียบกับการเขียนสำหรับการสื่อสารนั้น ๆ

วาทกรรม คือ การตั้งชื่อภายใต้ร่มของการสื่อสารทั้งการพูดและการเขียน นอกจากประโยคนั้น ๆ เนื้อหาหรือใจความเป็นความหมายพื้นฐานของการสื่อสารอาจจะเป็นได้ทั้งการพูดและการเขียน การพูดคนเดียว หรือการมีปฏิสัมพันธ์กับคนอื่น วาทกรรมจึงเป็นมากกว่านำมาใช้ในขอบเขตที่เรียกว่า ความตั้งใจที่ตั้งอยู่ในเรื่องของการใช้เนื้อหาหรือใจความนั้น ซึ่งมันประกอบด้วยเนื้อหาหรือใจความและสภาพแวดล้อม

Sfard (2001) กล่าวว่า ขอบเขตของวาทกรรม และการสื่อสารดูเหมือนว่าจะเป็นสิ่งที่อยู่ในการพูดถึงของทุก ๆ คนเกือบทุกวัน ทุกคนสามารถตีความได้หลากหลายเพียงแค่มันกลายมาเป็นความตระหนักถึงการเพิ่มความสำคัญจากการสนทนาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เพื่อที่จะนำไปสู่ความสำเร็จในการเรียนรู้คณิตศาสตร์ แต่มันมีมากกว่านั้นในวาทกรรม ที่เราจะพบได้จากการความตั้งใจ และถ้าอย่างนั้นเราวางการสื่อสารไว้ในใจในฐานะคณิตศาสตรศึกษามันจะเป็นเหมือนกับการเปลี่ยนแปลง ที่ไม่เพียงแค่เป็นวิธีการสอนของเราเท่านั้นแต่ยังเป็นวิธีการที่เราคิดเกี่ยวกับเรื่องนั้นและเป็นสิ่งที่เราเรียนรู้ การสื่อสารจะไม่เป็นแค่เพียงมองในแง่มุมของสิ่งที่ผ่านการคิดเท่านั้น แต่เกือบจะเท่ากันกับตัวตนของการคิด การสื่อสารมีความสัมพันธ์ที่ใกล้ชิดที่จะเข้าไปถึงการรู้ ซึ่งก็คือเป็นการตรวจสอบอย่างละเอียดในสิ่งที่พูด เป็นการสร้างทฤษฎีไปยังสิ่งที่เกี่ยวกับหลักการพื้นฐาน และถ้าการเรียนรู้หมายถึงการเปลี่ยนแปลง อาจจะเห็นได้จากความพยายามที่จะทำความเข้าใจความหมายที่เกิดขึ้นจากสิ่งที่อยู่ในคำพูดครั้งล่าสุด โดยที่การเรียนรู้ของมนุษย์จะเป็นเหมือนกับความมีพลังและความคิดสร้างสรรค์ และเป็นสิ่งที่ตอบสนองได้ง่ายตามพฤติกรรมที่กระทำกันตามสังคมไปจนถึงการจับยึดตามขอบเขตจากสภาพแวดล้อมในโครงสร้างทางปัญญา สร้างตามหลักเกณฑ์ที่เป็นสากล นั่นคือเป้าหมายในการพูดที่แตกต่างจากปกติหรือที่คาดไว้ สิ่งนั้นส่วนมากจะเป็นการเรียนรู้ของเขาคือจะเป็นสิ่งที่ไม่มีความสำคัญจนกว่า

จะมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมที่มีความเฉพาะเจาะจง ที่มีความตั้งใจ มีการปรับปรุงจากการมีปฏิสัมพันธ์ทางสังคมกับคนอื่น ๆ

Sfard (2007) วัตถุประสงค์หนึ่งที่มีความสำคัญมากของการเรียนรู้ ระดับโรงเรียนก็คือ การปรับเปลี่ยนวิธีคิด ในกรณีที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ จุดประสงค์ของการสอนที่จะทำให้ผู้เรียนมีความสามารถในการสร้างการรับรู้ และมีความรู้จากกิจกรรมการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ เช่น ถ้าการคิดเป็นความเข้าใจเหมือนดังเป็นรูปแบบของการสื่อสาร มีความหมายของการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ความเชี่ยวชาญที่เหมาะสมในการกำหนดชนิดของวาทกรรม การเรียนรู้คณิตศาสตร์สามารถกำหนดเกณฑ์โดยอาศัยการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นภายใน 4 ลักษณะเฉพาะของวาทกรรมทางคณิตศาสตร์คือ ในการใช้คำพูดทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน การใช้สื่อกลางที่ได้มาจากการมองเห็น ลักษณะกิจวัตรที่ทำเรื่อยเปื่อยที่สามารถกระทำและนำไปประยุกต์ใช้ได้ และภายในองค์ประกอบของการพูดบรรยายได้ตรงกับปัญหา โดยอาศัยแง่มุมเชิงสังคมที่สำคัญสิ่งหนึ่งก็คือ การคนเราสร้างขึ้นมาเอง

วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ ถือได้ว่า เป็นกระบวนการสร้างคำพูดที่มีความตั้งใจที่จะให้เหตุผล โต้แย้งหาข้อสรุป เพื่อต้องการที่จะแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ให้ได้ โดยอาศัยหลักฐานที่ปรากฏชัดเจนมาสนับสนุนคำพูด การอธิบายถึงขั้นตอนวิธีการแก้ปัญหาที่จะทำให้นักเรียนมีความสามารถในการสร้างการรับรู้ และมีความรู้จากกิจกรรมการแก้ปัญหาเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

2.3 **การส่งเสริมให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์**

Sierpinska (1998) กล่าวว่า กลุ่มความเชื่อทางปฏิสัมพันธ์นิยมดังที่ได้รับการยอมรับอย่างเป็นทางการสำหรับความเข้าใจเกี่ยวกับความหมายที่สร้างขึ้นมา มันอยู่ในภาษาที่มองเห็นได้ในฐานของวาทกรรม ความหมายที่สร้างขึ้นผ่านวาทกรรมในการวางข้อกำหนดของการปฏิบัติ มุมมองความเชื่อนี้เป็นของ Piaget (อ้างถึงใน NCTM, 1998) ที่กล่าวว่า ตัวถูกสื่อ/ตัวถูกหมาย (Signified) คือบางสิ่งบางอย่างที่พิเศษกว่าเกี่ยวกับภาษา บางสิ่งที่เกิดขึ้นมาเป็นพิเศษอย่างอ้อมค้อม ดังที่โครงสร้างทางปัญญา (Schemata) แสดงแทนผ่านตัวสื่อ/ตัวหมาย (Signifier) เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ อย่างเช่น จำนวน เป็นต้น ไม่มีจุดเริ่มต้นของสิ่งเหล่านั้น ในความสัมพันธ์ที่นำไปสู่ระบบของสัญลักษณ์อย่างที่เป็นปรากฏการณ์ทางสังคม แต่ในท้ายที่สุดการทำงานประสานกันจากการกระทำของใครตามหน้าที่ ก็คือ อย่างที่เป็นลำดับต่อเนื่องกันมาจะนำไปสู่การทำให้อยู่ในสภาพที่สมดุลขึ้นอยู่กับทางชีววิทยาและสิ่งแวดล้อม Walkerdine (อ้างถึงใน NCTM, 1998) เชื่อว่า ในความหมายแรกของตัวสื่อ/ตัวหมายจะมีมากกว่าตัวถูกสื่อ/ตัวถูกหมาย อย่างที่พวกเรามีชีวิตอยู่ในโลกของคำพูด ที่มีสภาพเป็นความจริงตลอดเวลาที่เราหลีกเลี่ยงไม่ได้ สิ่งนี้เป็นระบบความคิดอันเป็นรากฐานของสังคม เศรษฐกิจ การเมืองที่มีมุมมองเกี่ยวกับความหมาย สังคมมนุษย์ไม่ได้เป็นความรู้ยกเว้นจะผ่านวาทกรรมและวาทกรรมเป็นพื้นฐานของระบบเครื่องหมายที่ไม่ได้เป็นสิ่งที่มีผลกับคนทั้งโลกและผ่านเรื่องราวที่มีความเฉพาะเจาะจง ที่เกี่ยวข้องกับประวัติศาสตร์ที่ก่อให้เกิดขึ้นมาด้วยตัวของความรู้เอง ตามระบบความคิดอันเป็น

รากฐานของสังคม เศรษฐกิจ การเมืองที่มีมุมมองเกี่ยวกับความหมายไม่ได้มองเป็นรากฐานในการประเมินผลและการใช้คำพูดอย่างหยาบ ๆ แต่เป็นการมองโลกหรือสังคมมนุษย์ที่มีอยู่ ซึ่งทั้งสองอย่างไม่ว่าพวกเราต้องการมันหรือไม่ แต่มันเป็นมุมมองในทางวาทกรรม

ข้อความรู้ไม่ได้เป็นสิ่งที่คน ๆ หนึ่งจะทำให้เข้าใจผิดตามความหมายของคำพูดและการแสดงออกทางสีหน้าท่าทางที่ยังคงใช้ได้กับคนทั่ว ๆ ไป ตัวอย่างการใช้คำพูดของเด็กที่อยู่บ้านกับโรงเรียนซึ่งมีความแตกต่างกัน โดยที่บ้านเด็กจะใช้คำพูดในความหมายที่ต้องการผลสำเร็จตามการกระทำอย่างใดอย่างหนึ่ง จะเป็นคำพูดที่เน้นหนักเน้นน้ำเสียง แต่ที่โรงเรียนเด็กจะใช้ทำพูดในลักษณะที่เป็นความต้องการที่จะได้ความกระจ่างชัดในบางสิ่งบางอย่างตามวัตถุประสงค์ของการกระทำ และที่สำคัญในบทเรียนหนึ่ง ๆ นั้นเด็กจะใช้คำพูดในการอภิปรายกันอย่างที่เป็นการเน้นหนักและต้องการความชัดเจน เพื่อต้องการรู้หรือทำความเข้าใจในบทเรียนนั้น ๆ พวกเขาจะต้องสังเกตความแตกต่างระหว่างวาทกรรม และความตั้งใจของเพื่อนที่จะส่งผลให้กลายมาเป็นผู้ที่มีส่วนร่วมสร้างวาทกรรมใหม่

Presmeg (2006) กล่าวว่า การวางแผนเกี่ยวกับการที่จะยกระดับในวาทกรรมจะเป็นอย่างที่ครูจัดเตรียมเครื่องมือหรือวิธีการไว้ให้บรรลุผลสำเร็จตามห่วงโซ่ที่เชื่อมโยงกันในชั้นเรียน ที่เป็นการทำให้สะดวกขึ้นสำหรับการที่จะยกระดับวาทกรรมในชั้นเรียน เหมือนกับนักเรียนได้อภิปรายถึงวิธีการใหม่ในแต่ละความก้าวหน้าอย่างยาวนานของห่วงโซ่หนึ่ง ๆ จะทำให้เกิดเสียงสะท้อนกับกระบวนการอธิบายในรายละเอียด การเปลี่ยนแปลงในวาทกรรมนั้น จะมีอยู่ในการเคลื่อนที่ผ่านห่วงโซ่ที่เป็นตัวอย่างของการเจรจาต่อรองเกี่ยวกับความหมายเชิงคณิตศาสตร์ผ่านการมีปฏิสัมพันธ์กันทางสังคม อย่างที่ Sfard and Dorfler (2000) ซึ่งทั้งสองพิจารณาเหมือนอย่างที่เป็นศูนย์กลางในการทำให้เป็นสัญลักษณ์เชิงคณิตศาสตร์ที่เป็นสภาพแท้จริงภายในสิ่งที่มีอยู่ กระบวนการที่เป็นห่วงโซ่ยังคงมีความเกี่ยวพันกับการทำให้เป็นรูปธรรม เพราะว่าตัวที่ถูกหมายหรือถูกสื่อนั้นในทางกลับกันจะเป็นการสร้างวัตถุใหม่ ที่เป็นการสร้างสัญลักษณ์โดยตัวที่มีความหมายหรือตัวสื่อใหม่ เหตุการณ์ที่เกิดต่อเนื่องกันนี้เป็นกระบวนการที่หลอมรวมให้มีความชัดเจนของทั้งสองกระบวนการ ดังที่พวกเขาเกี่ยวพันกับวิธีการใช้ของเป้าหมายทางคณิตศาสตร์

Kieran, Forman, and Sfard (2002) กล่าวว่า การคิด เป็นการสร้างกรอบความคิดอย่างหนึ่งในฐานะกรณีเฉพาะของกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารและการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่มีความหมายเหมาะสมตามที่เป็นพูดได้อย่างคล่องแคล่ว ในวาทกรรมที่จะเป็นการยอมรับว่าอยู่ในตำแหน่งที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ผ่านคู่สนทนาอย่างที่มีความชำนาญ

การส่งเสริมให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ เป็นการสนับสนุนให้นักเรียนได้พูด อภิปรายในส่วนที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ด้วยสื่อสารผ่านคู่สนทนาอย่างมีความชำนาญ มีอธิบายในรายละเอียด การเปลี่ยนแปลง การเจรจาต่อรองเกี่ยวกับความหมายเชิงคณิตศาสตร์ผ่านการมีปฏิสัมพันธ์กันทางสังคม มีการสร้างวัตถุใหม่ เป็นสัญลักษณ์ที่มีความหมายหรือตัวสื่อใหม่ การใช้คำพูดของนักเรียน จะเป็นคำพูดที่เน้นหนักเน้นน้ำเสียง มีลักษณะที่เป็นความ

ต้องการที่จะได้ความกระจ่างชัดในบางสิ่งบางอย่างตามวัตถุประสงค์ของการกระทำ และที่สำคัญในบทเรียนหนึ่ง ๆ นั้นนักเรียนจะใช้คำพูดในการอภิปรายกัน อย่างที่เป็นการเน้นหนักและต้องการความชัดเจนหรือข้อสรุปที่ตกลงใจร่วมกัน

**2.4 การส่งเสริมให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระดับประถมศึกษา**

Atkin (2001) กล่าวว่า ครูผู้สอนที่ต้องจัดเตรียมห้องเรียนควรจะเลือกเปลี่ยนแปลงบรรยากาศห้องเรียน โดยให้ทุกคนมีส่วนร่วมหรือนั่งกันเป็นวงกลมบนพื้นห้อง ความเชื่อของครูที่ว่าถ้านักเรียนสามารถมองเห็นคนอื่น ๆ ได้จะเป็นไปได้มากกว่าที่จะพูดกับคนอื่น ๆ พวกเขาจะมีความชำนาญทางศิลปะที่มีคุณค่ามากขึ้นด้วยการลงมือทำเอง เมื่อเขาต้องการเสียงที่เป็นความคิดเห็น อย่างไรก็ตาม การทำให้มีส่วนร่วมกับบทสนทนาในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่กำหนดขึ้นสำหรับต่างชาติ กลุ่มที่ทำการอภิปรายกันเป็นหมุนเวียนกันของการสนทนาในชั้นเรียนไม่เป็นธรรมชาติ ที่เป็นอย่างนี้ เมื่อนักเรียนพูดกับเพื่อนของพวกเขาไม่ได้เป็นสิ่งที่ถูกทำให้มีคุณค่า แต่เป็นเพียงการโต้ตอบจากเพื่อนของพวกเขาเท่านั้น ต่อมาการค้นหาสิ่งที่ถูกสร้างขึ้นมาอย่างที่ไม่ได้เป็นแบบแผนตามสภาวะแวดล้อมครูจะเป็นผู้ที่กำหนดลำดับหรือเริ่มตั้งคำถามและเลือนหายไป

แนวคิดของ Lakatos (1976 อ้างถึงใน Worrall, J. & Zahar, E., 1976) ที่นำมาใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ขึ้นอยู่กับความสามารถของครูที่จะดูแลไม่ได้อยู่ในสภาวะที่ข่มขู่ ซึ่งนักเรียนมีอิสระที่จะออกเสียงแสดงความคิดเห็น กระตุ้นให้คิด และพิจารณาข้อคาดการณ์ ที่นำมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนระดับประถมศึกษาเป็นแนวคิดที่มีอิทธิพลเป็นอย่างมาก มันช่วยส่งเสริมให้นักเรียนนำเสนอข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์และทดสอบความสามารถมีชีวิตอยู่และเจริญเติบโตได้ในเรื่องของข้อคาดการณ์ในสังคมที่เป็นตัวกำหนด ถึงอย่างไรก็ตาม วิธีการนี้นำเสนอความท้าทายทั่วไปในชั้นเรียนของครู ชั้นเรียนของครูจะต้องเป็นกระบวนการทั้งการสอนให้ค้นพบและความรู้ทางเนื้อหาคณิตศาสตร์จนกระทั่งถึงการทำให้ง่ายขึ้นตามชนิดของวาทกรรมทางคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ด้วยการโต้แย้ง Lakatos อธิบายถึงการเข้าไปถึงยังการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่มีความแตกต่างกันอย่างแท้จริงจากเป็นการอธิบาย ในที่นี้เป็นความสามารถที่จะยอมรับ ถ้ามันไม่ได้ดีกว่า นำไปสู่การโต้แย้งข้อคาดการณ์ผ่านการเสนอข้อคาดการณ์ในชุมชนใช้ความคิดและการใช้เหตุผลอย่างในห้องเรียน และมีการโต้แย้งข้อคาดการณ์ ซึ่งนักเรียนจะสามารถปรับปรุงทั้งการพูดและการกระทำให้ดีขึ้นตามข้อคาดการณ์และการค้นหาความน่าเชื่อถือในคณิตศาสตร์ พวกเขาจะสร้างคณิตศาสตร์ขึ้นมาด้วยตัวเขาเอง

การส่งเสริมให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้นในชั้นเรียนระดับประถมศึกษา เป็นการเปลี่ยนแปลงบรรยากาศในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของครูที่ทำให้นักเรียนสามารถมองเห็นคนอื่น ๆ ได้ เมื่อนักเรียนพูดกับเพื่อนของพวกเขา Lakatos เสนอแนวคิดมาใช้ใน

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่นักเรียนมีอิสระที่จะออกเสียงแสดงความคิดเห็น กระตุ้นให้คิดและพิจารณาข้อคาดการณ์ ที่นำมาใช้ในการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนระดับประถมศึกษา ที่เป็นการอธิบายจนเกิดการยอมรับ และถ้าการอธิบายไม่ได้ดีกว่าก็จะนำไปสู่การโต้แย้งข้อคาดการณ์ โดยการเสนอข้อคาดการณ์ในชุมชนใช้ความคิดและการใช้เหตุผลอย่างในห้องเรียน มีการโต้แย้งข้อคาดการณ์ ซึ่งนักเรียนจะสามารถปรับปรุงทั้งการพูดและการกระทำให้ดีขึ้นตามข้อคาดการณ์ รวมทั้งสามารถค้นหาความน่าเชื่อถือในคณิตศาสตร์ จากการสร้างคณิตศาสตร์ขึ้นมาด้วยตัวของเขาเอง

**3. บริบทของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ส่งเสริมให้เกิดวาทกรรมทางคณิตศาสตร์**

**3.1 การศึกษาชั้นเรียนกระบวนการที่ทำให้เกิดวาทกรรมทางคณิตศาสตร์**

**3.1.1 กระบวนการพัฒนาวิชาชีพครูของญี่ปุ่น**

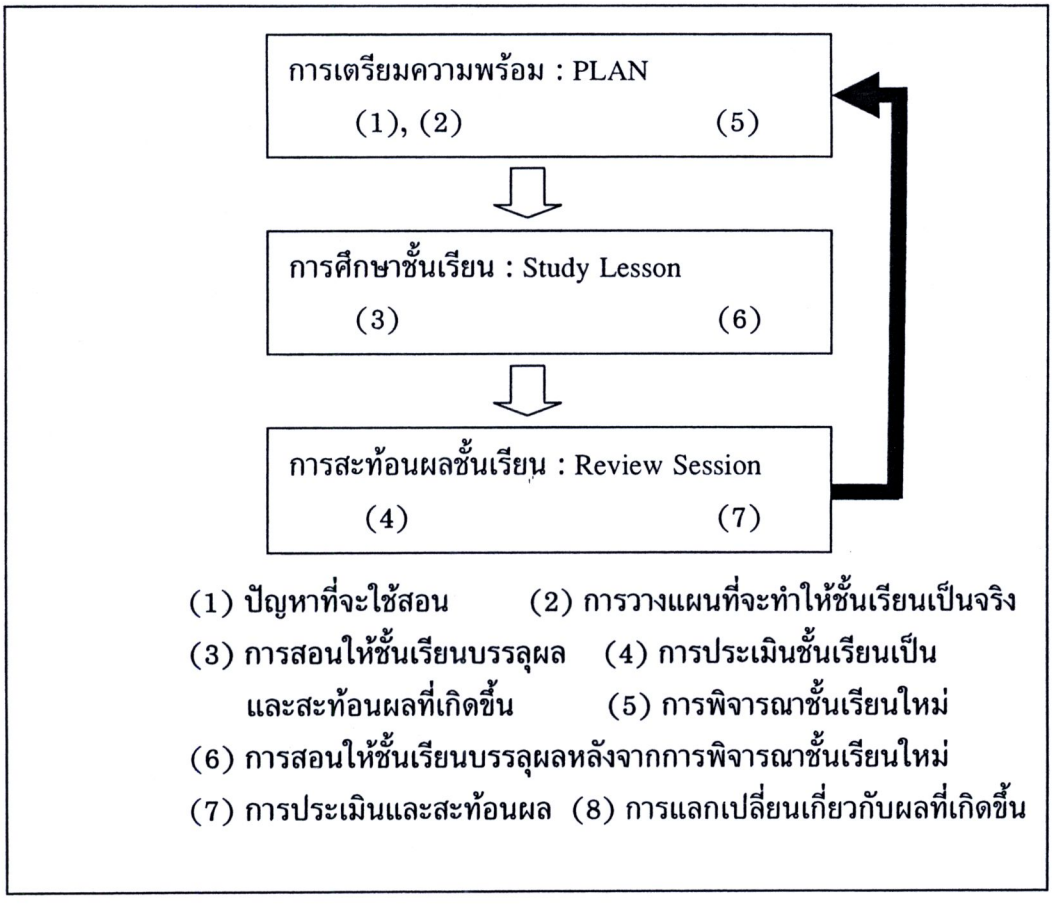
การศึกษาชั้นเรียน คือ ระบบการพัฒนาวิชาชีพครูที่ใช้โรงเรียนเป็นฐานของการพัฒนา ซึ่งครูญี่ปุ่นจะต้องได้รับการพัฒนาตั้งแต่เริ่มต้นวิชาชีพครู ลักษณะที่สำคัญของระบบดังกล่าวคือ กลุ่มครูญี่ปุ่นจะพบกันเป็นระยะ ๆ เพื่อร่วมกันพัฒนาแผนการสอน สร้างสรรค์นวัตกรรมการสอนการทดลองใช้แผนดังกล่าวในห้องเรียนจริง และการปรับปรุงแผนร่วมกัน แนวคิดพื้นฐานของระบบดังกล่าวคือ วิธีการที่มีประสิทธิภาพที่สุดในการปรับปรุงและพัฒนาการสอนในห้องเรียน คือ การพัฒนาและปรับปรุงบทเรียน ในบริบทของห้องเรียนจริง สิ่งที่ท้าทายคือ 1) การกำหนดการเปลี่ยนแปลงที่ต้องการให้เกิดขึ้นเพื่อการพัฒนาการเรียนรู้ของผู้เรียนในห้องเรียน และ 2) การแลกเปลี่ยนความรู้และปัญหาในห้องเรียนร่วมกับครูคนอื่นและให้กลุ่มครูรับรู้เป้าหมายของการสอนร่วมกัน

หัวใจสำคัญของการศึกษาชั้นเรียน ประกอบด้วยกระบวนการทำงานร่วมกัน ได้แก่ (1) การร่วมสร้างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน (2) การร่วมสังเกตชั้นเรียน และ (3) การร่วมสะท้อนผลการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2547)

**3.1.2 กระบวนการของการศึกษาชั้นเรียน**

ในปัจจุบันนี้ การศึกษาชั้นเรียนที่มีรูปแบบในประเทศญี่ปุ่น Baba (2007) กล่าวว่า เป็นประเด็นที่ได้รับความสนใจอย่างกว้างขวาง ซึ่งกล่าวถึงไปยังกระบวนการในการที่ครูอย่างค่อย ๆ คืบหน้าไปทีละน้อยด้วยความมานะพากเพียรที่จะปรับปรุงวิธีการสอนโดยการทำงานร่วมกับครูคนอื่น ที่จะตรวจสอบและเขียนวิจารณ์ประเด็นต่าง ๆ สำหรับครูคนอื่นที่ทำการสอนด้วยเทคนิคต่าง ๆ เริ่มแรกการพัฒนาการศึกษาชั้นเรียนในฐานะเป็นการฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการเรียนการสอนในช่วงสมัย Meiji ของประเทศญี่ปุ่น โดยหน้าที่ของ การศึกษาชั้นเรียนเทียบเท่ากับการหมายความถึงความสามารถของครูที่จะพัฒนาและศึกษาในการฝึกปฏิบัติเกี่ยวกับการเรียนการสอนของพวกเขาการศึกษาชั้นเรียน จะช่วยในเรื่อง “การตระเตรียม (Preparation), ความเป็นจริงที่เกิดขึ้นในชั้นเรียน (Actual class), และได้ทบทวนชั้นเรียนในแต่ละภาคการศึกษา (Class

review session)" ในญี่ปุ่นมีชื่อว่า 'Kyozai Kenkyu' หรือ 'Koukai/Kenkyu Jyugyo' และ 'Jyugyo Kentoukai' กระบวนการในการเปลี่ยนแปลงจากแผนในหลักสูตรหรือในหนังสือแบบเรียนไปยังชั้นเรียน ซึ่งจะเห็นว่าหลักสูตรสามารถเป็นการปรับปรุงชั้นเรียน ในฐานะที่เป็น "การเตรียมความพร้อม" ที่เป็นขั้นแรกของกระบวนการศึกษาชั้นเรียนจะเริ่มต้นด้วยการค้นหาและการคัดเลือกสิ่งที่มีความสัมพันธ์ไปยังวัตถุประสงค์ของชั้นเรียน และหลังจากนั้นก็ทำตามโดยผ่านการขัดเกลาให้ดีขึ้นตามการออกแบบชั้นเรียน ที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานความเป็นจริงที่ต้องการให้เกิดกับนักเรียนและซึ่งผูกทุกอย่างของข้อความรู้รวมกันไว้ในแผนการสอน ความหมายของการศึกษาชั้นเรียนจึงเป็นสิ่งที่รวบรวมทุกอย่างของกระบวนการซึ่งประกอบหน้าที่ไว้ในการร่วมมือกันของครูคนอื่น ๆ ชั้นเรียนที่ใช้ การศึกษาชั้นเรียนเป็นชั้นเรียนที่ทำการสอนบนพื้นฐานที่การสอนนั้นถูกวางแผนเอาไว้แล้ว ชั้นเรียน การศึกษาชั้นเรียนจะถูกตรวจสอบหรือสังเกตโดยครูคนอื่น ๆ ผู้ที่บางครั้งอาจจะเป็นอาจารย์มหาวิทยาลัยและผู้เชี่ยวชาญจากคณะกรรมการการศึกษา และการทบทวนชั้นเรียนในแต่ละภาคการศึกษาเป็นการจัดเตรียม เพื่อทุกคนที่เป็นผู้สังเกตชั้นเรียนนั้น ดังแผนผังด้านล่างนี้




**ภาพที่ 1** แสดงเรื่องการฝึกปฏิบัติการสอน (Strigler & Hiebert, 1999)

### 3.1.3 การเปรียบเทียบชั้นเรียนแบบดั้งเดิมกับชั้นเรียนแบบ การศึกษาชั้นเรียน

การเปรียบระหว่างชั้นเรียนที่ทำการเรียนการสอนแบบดั้งเดิมกับชั้นเรียนแบบ การศึกษาชั้นเรียนจะทำให้เห็นความแตกต่างของผลที่เกิดขึ้นระหว่างชั้นเรียนทั้งสองแบบได้ชัดเจน จากตารางด้านล่างนี้

**ตารางที่ 1** การเปรียบระหว่างชั้นเรียนที่ทำการเรียนการสอนแบบที่ใช้พัฒนาวิชาชีพครูของสหรัฐอเมริกากับชั้นเรียนแบบ การศึกษาชั้นเรียน (Lewis, 2002)

| การสอนแบบดั้งเดิม | การสอนแบบ การศึกษาชั้นเรียน |
|---|---|
| จุดเริ่มต้นด้วยคำตอบ | จุดเริ่มต้นด้วยคำถาม |
| ขับเคลื่อนโดยปราศจากผู้เชี่ยวชาญ | ขับเคลื่อนโดยผู้มีส่วนร่วม |
| รูปแบบของการสื่อสารกัน : | รูปแบบของการสื่อสารกัน : |
| ผู้ฝึกปฏิบัติ ⇨ ครูผู้สอน | ครูผู้สอน ⇨ ครูผู้สอน |
| ลำดับขั้นมีความสัมพันธ์กันเป็นแบบ | ลำดับขั้นมีความสัมพันธ์กันเป็นแบบ |
| ผู้ฝึกปฏิบัติ & ผู้เรียน | ผู้เรียน & ผู้เรียน |
| การวิจัยบอกให้ทราบถึงการปฏิบัติ | การปฏิบัติถือว่าเป็นการวิจัย |

(อ้างถึงใน Takahashi, 2007)

จะเห็นได้ว่าการเตรียมตัวของครูผู้สอนเป็นสิ่งที่สำคัญในการที่จะจัดการชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของตัวเองให้มีคุณค่า หรือให้นักเรียนได้สร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ตามบทเรียนนั้น ๆ แล้วนำความรู้ที่ได้รับไปเผชิญกับปัญหาต่าง ๆ สามารถแก้ปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาได้อย่างมั่นใจ การวางแผนการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เป็นระบบระเบียบอย่างที่เป็นการศึกษาชั้นเรียนจะเป็นส่วนหนึ่งที่ช่วยในการพัฒนาแผนของครูและช่วยให้นักเรียนได้เรียนรู้คณิตศาสตร์อย่างมีความเข้าใจแท้จริง

## 3.2 วิธีการแบบเปิด วิธีการที่ส่งเสริมให้นักเรียนแสดงวาทกรรมทางคณิตศาสตร์

### 3.2.1 ประวัติการใช้วิธีการแบบเปิดในชั้นเรียนคณิตศาสตร์

ในช่วงระหว่างปี ค.ศ. 1993-1996 เป็นช่วงที่ยังคงมีกลุ่มคนที่มีความสนใจอย่างคึกคักที่จะอภิปรายถึงเกี่ยวกับสิ่งที่ตั้งชื่อว่า “การใช้ปัญหาปลายเปิดในคณิตศาสตร์ (Using Open-Ended Problems in Mathematics)” อย่างที่เป็นส่วนหนึ่งในการสัมมนาของสาขาวิชาที่มีหลักการและกฎเกณฑ์ทางวิทยาศาสตร์ในเรื่องของจิตวิทยาคณิตศาสตรศึกษา (Psychology of Mathematics Education: PME) หรือการประชุม PME ครั้งที่ 17 ที่มหาวิทยาลัยทสึคุบะ (Tsukuba) ประเทศญี่ปุ่น ซึ่งรายงานได้รับการปรับปรุงเนื้อหาให้บรรจุรูปแบบที่ให้นำเสนอภายในกลุ่มที่ทำการอภิปรายกัน นับตั้งแต่มีการประชุม PME ที่เป็นองค์กรนานาชาติและมี

การนำเสนอ โดยการคัดเลือกมาจากส่วนต่าง ๆ ของโลก ส่วนใหญ่คนที่อภิปรายจะได้รับการคัดเลือกมาจาก ออสเตรเลีย ญี่ปุ่น และสหราชอาณาจักร (อังกฤษ) ที่เป็นหนังสือที่เกี่ยวกับชั้นเรียนในประเทศเหล่านี้ ตั้งแต่นั้นมา ก็มีธรรมเนียมที่ทำสืบต่อกันมาเกี่ยวกับการใช้ปัญหาปลายเปิด แล้วก็มีการนำเสนอจากหลาย ๆ ประเทศที่เพิ่มเข้าไปอย่างเช่น ฟินแลนด์ (Finland) และ ไตหวัน (Taiwan) ส่วนมากรายงานที่นำเสนอจะมุ่งความสนใจไปยังความเข้าใจหรือความตระหนัก (Realization) เกี่ยวกับการสอนคณิตศาสตร์ด้วยการใช้ปัญหาปลายเปิดและให้มีตัวอย่างที่หลากหลาย

วิธีการที่ใช้ปัญหาปลายเปิดในชั้นเรียน เพื่อช่วยส่งเสริมให้มีการอภิปรายกันเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ อย่างเป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายว่า วิธีการแบบเปิด (Open-Approach Method) ที่พัฒนามาในปี ค.ศ. 1970 ในประเทศญี่ปุ่น (Shimada, 1977) ใกล้กันกับที่เคยมีอยู่ในประเทศอังกฤษ ที่ใช้การสืบค้นหาข้อเท็จจริง ซึ่งเป็นปัญหาปลายเปิดอีกชนิดหนึ่ง จนกลายมาเป็นที่นิยมในการสอนคณิตศาสตร์ (William, 1994) และแนวคิดนี้เป็นที่แพร่กระจายออกไปมากโดยการรายงานของ Cockcroft (1982) ในปี ค.ศ. 1980 แนวคิดที่บางอย่างที่ได้มาจากปัญหาปลายเปิดในชั้นเรียน ได้แพร่กระจายออกไปอย่างกว้างขวางทั่วโลกจนถึงปัจจุบัน และก็มีงานวิจัยที่อาจจะเกิดขึ้นได้อย่างชัดแจ้งขึ้นมากในหลาย ๆ ประเทศ (อย่างเช่น Nohda, 1988, Pehkonen, 1989, 1995, Silver & Mamana, 1989, Williams, 1989, Mason, 1991, Nohda, 1991, 1995, Stacey, 1991, 1995, Zimmermann, 1991, Clarke & Sullivan, 1992, Silver, 1993, 1995) ในบางประเทศพวกเขาใช้ชื่อที่แตกต่างกันแทนปัญหาปลายเปิดอย่างในประเทศเนเธอร์แลนด์ พวกเขาเรียกว่า "วิธีการที่ปฏิบัติได้จริงในคณิตศาสตร์ (Realistic Mathematics)" (Treffers, 1991)

แนวคิดเกี่ยวกับการใช้ปัญหาปลายเปิดในคณิตศาสตร์ระดับโรงเรียนได้รับการบันทึกไว้ในหลักสูตรของหลาย ๆ ประเทศ ทั้งที่เป็นรูปแบบและอื่น ๆ ตัวอย่างเช่น ในหลักสูตรคณิตศาสตร์เพื่อที่มีเนื้อหาครอบคลุมของโรงเรียนในเมืองแฮมเบิร์ก (Hamburg) ประเทศเยอรมนี อย่างที่หนึ่งในห้าของเวลาสอนจะเป็นการปล่อยให้เป็นเนื้อหาอิสระ เพื่อที่จะส่งเสริมให้ใช้กิจกรรมทางคณิตศาสตร์ ในรัฐแคลิฟอร์เนีย (California) ประเทศสหรัฐอเมริกา พวกเขาใช้การแนะนำปัญหาปลายเปิดไปยังการใช้เพื่อการประเมินค่าเทียบกับแบบทดสอบแบบมีตัวเลือกธรรมดา ในออสเตรเลีย ก็ใช้บางส่วนของปัญหาปลายเปิด เพื่อประเมินค่าในภาคปลายตั้งแต่ท้ายทศวรรษที่ 1980 ที่ผ่านมา (Stacey, 1995 อ้างถึงใน NCTM, 1998)

### 3.2.2 แนวคิดเกี่ยวกับการสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดในประเทศไทย

การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แบบวิธีการแบบเปิดเป็นนวัตกรรมใหม่ที่พึ่งถูกนำมาใช้ในชั้นเรียนของไทย หลักการของกิจกรรมแบบวิธีการแบบเปิดคือมีแนวทางในการแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย เปิดกว้างสำหรับคำตอบของปัญหา โดยลักษณะดังกล่าวของ วิธีการแบบเปิดจะช่วยให้นักเรียนได้ใช้กระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างเต็มที่

กระบวนการนำเสนอและการสื่อสารจะถูกนำมาใช้ในระหว่างการนำเสนอผลงานของตนเอง กระบวนการพิสูจน์และให้เหตุผลจะถูกนำมาใช้ในการอภิปรายถกเถียงในระหว่างการทำกิจกรรมกลุ่ม นอกจากนี้การเปิดกว้างสำหรับคำตอบและแนวทางแก้ปัญหาทำให้แนวทางคิดต่าง ๆ ของนักเรียนได้รับการยอมรับในชั้นเรียน ส่งผลให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อกิจกรรมการเรียนการสอนในห้องเรียน

การเรียนการสอนคณิตศาสตร์ด้วยวิธีการแบบเปิด มีจุดมุ่งหมายเพื่อสนับสนุนกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์และการคิดแบบคณิตศาสตร์ของนักเรียนไปพร้อม ๆ กันในระหว่างแก้ปัญหา ดังนั้น ในการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิด นักเรียนแต่ละคนจะมีอิสระในการทำกิจกรรมรวมทั้งมีอิสระในการคิดเพื่อความก้าวหน้าในการแก้ปัญหาของตนเอง โดยความก้าวหน้าในการแก้ปัญหานั้นขึ้นอยู่กับความสามารถ ความสนใจและอารมณ์ของตนเอง

วิธีการแบบเปิดช่วยให้นักเรียนพัฒนาตนเอง ในด้านคุณลักษณะของความเป็นมนุษย์และสติปัญญาทางด้านคณิตศาสตร์ ในระหว่างทำกิจกรรมในชั้นเรียนที่มีแนวคิดทางคณิตศาสตร์หลากหลาย มีการตั้งสมมุติฐานว่าในระหว่างการทำกิจกรรมเดียวกันนักเรียนที่มีความรู้ความสามารถสูงกว่า จะมีส่วนร่วมในกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น ส่วนนักเรียนที่มีความสามารถต่ำก็ยังคงสนุกกับกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ตามความสามารถ ความสนใจ และอารมณ์ของตนเอง

ในการเรียนการสอนด้วยวิธีการแบบเปิด เป็นนวัตกรรมหนึ่งที่ทำให้นักเรียนสามารถแสดงออกถึงกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ นอกจากนั้นยังเปิดโอกาสให้นักเรียนค้นคว้าอย่างมียุทธวิธีด้วยวิธีการซึ่งเขารู้สึกมั่นใจ และยังเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถขยายความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้มากขึ้น ผลที่เกิดขึ้นก็คือ นักเรียนจะมีการพัฒนาการคิดแบบคณิตศาสตร์เพิ่มมากขึ้น และในขณะเดียวกันยังสนับสนุนกิจกรรมเชิงสร้างสรรค์ของนักเรียนแต่ละคนในการเรียนคณิตศาสตร์ ช่วยให้นักเรียนสร้างสรรค์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ขึ้นมาด้วยตัวเอง ขณะที่ครูไม่ได้เป็นผู้ชี้นำหรือคอยบอกให้นักเรียนทำตาม แต่กลับเป็นผู้ที่คอยช่วยเหลือและเปิดโอกาสให้นักเรียนแสดงบทบาทของตนเองในการเรียนอย่างเต็มที่

### 3.3 ปัญหาปลายเปิดบริบทที่กระตุ้นให้แสดงวาทกรรมทางคณิตศาสตร์

#### 3.3.1 ความคิดรวบยอดของปัญหาปลายเปิด

วัตถุประสงค์หนึ่งของการประชุม PME ในทสึคุบะ (Tsukuba) ประเทศญี่ปุ่น เป็นการค้นหาคำตอบสำหรับคำถามที่ว่า “ปัญหาปลายเปิดคืออะไร? (What are “Open-Ended Problems”?) ตั้งแต่นั้นมากลุ่มของคนที่ใช้ปัญหาปลายเปิดดูเหมือนจะไม่ได้ทำให้เห็นความแตกต่างได้ดีนัก ภายในการประชุม มีปัญหาหลายอย่างเกี่ยวกับชนิดของปัญหาที่ถูกตั้งไว้ก่อนหน้านี้ อย่างเช่น การสืบสวนค้นหาความจริง (Investigations) การนำเข้าสู่ปัญหา (Problem Posing) สถานการณ์ในชีวิตจริง (Real-life Situations) โครงงาน (Project) ขอบเขตของปัญหา (Problem Fields or Problem Sequences) ปัญหาที่ปราศจากคำถาม (Problem without

question) และปัญหาที่มีการเปลี่ยนแปลง (Problem Variations or 'What-if' Method) ซึ่งจะเห็นได้ว่า การใช้ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับ ปัญหาปลายเปิด นั่นทำได้โดยอยู่ในฐานะที่เป็นร่มเดียวกันของระดับปัญหาที่บรรจุไว้ในปัญหาทุกระดับที่กล่าวมาความคิดรวบยอดของปัญหาปลายเปิด นั่นเริ่มต้นที่จะอธิบายถึงด้วยความที่ตรงกันข้ามกับปัญหาแบบปิดหรือปัญหาที่มีคำตอบอย่างเดียวหรือวิธีการแก้ปัญหาทำได้แบบเดียว และพูดถึงปัญหานั้นได้แบบปิด ถ้าจุดเริ่มต้นที่สถานการณ์และเป้าหมายของสถานการณ์เป็นแบบปิด ตัวอย่างเช่น การอธิบายถึงอย่างเฉพาะเจาะจง ถ้าจุดเริ่มต้นของสถานการณ์ปัญหาและหรือเป้าหมายของสถานการณ์ปัญหาเป็นแบบเปิด ตัวอย่างเช่น ปัญหานั้นไม่ปิด ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์ในโรงเรียนเป็นอยู่บ่อย ๆ ที่เป็นปัญหาแบบปิด (Closed Problems) หรือส่วนมากโดยทั่ว ๆ ไปใช้กิจกรรมแบบปิด ซึ่งจะไม่มีห้องเรียนเหลือไว้ให้มีความคิดสร้างสรรค์ (Pehkonen, 1997)

### 3.3.2 แนวคิดและทฤษฎีเกี่ยวกับปัญหาปลายเปิด

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ดีจะเปิดโอกาสให้นักเรียนมีความมั่นใจและขยายวงความรู้ให้กว้างออกไป และยังกระตุ้นให้เกิดการเรียนรู้ใหม่ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ส่วนมากสามารถนำเสนอผ่านปัญหาภายใต้ประสบการณ์ที่คุ้นเคยจากชีวิตจริงของนักเรียนหรือบริบททางคณิตศาสตร์ เช่น นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น ที่อาจจะมีวิธีการหลายวิธีในการปรุงอาหาร แม้ว่านักเรียนจะมีความคิดที่แตกต่างกันออกไปในการใส่ส่วนผสม แต่ครูต้องช่วยพวกเขาด้วยการชี้แนะให้เห็นความแตกต่างของแต่ละความคิดรวบยอดอย่างมีความหมาย

นักเรียนจำเป็นต้องพัฒนาขีดความสามารถของยุทธวิธีต่าง ๆ ในการแก้ปัญหา เช่น การใช้แผนผังแผนภาพ หารูปแบบหรือพยายามให้ค่าหรือหาตัวอย่างพิเศษ ซึ่งยุทธวิธีเหล่านี้จำเป็นต้องเน้นให้ความสำคัญในกิจกรรมการเรียนการสอน อย่างไรก็ดี การฝึกการแก้ปัญหาจะต้องมีอยู่ตลอดหลักสูตร นักเรียนจำเป็นต้องเรียนรู้เพื่อตรวจสอบและปรับกลวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาของตนเองด้วย

ครูเป็นผู้มีบทบาทสำคัญในการฝึกทักษะกระบวนการแก้ปัญหาของนักเรียน ครูต้องเลือกปัญหาที่มีความหมายต่อนักเรียน ต้องสร้างสถานการณ์ที่ทำให้นักเรียนได้สำรวจ ทดลอง เสี่ยง ซึ่งต้องได้รับทั้งความสำเร็จและความล้มเหลวร่วมกับบุคคลอื่น มีการถามคนอื่น ซึ่งสิ่งเหล่านี้จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาความมั่นใจที่จำเป็นต้องใช้ในการสำรวจปัญหาและความสามารถในการปรับเปลี่ยนยุทธวิธีแก้ปัญหา (NCTM, 2000)

### 3.3.3 ความหมายปัญหาปลายเปิด

Pehkonen (1997) ได้สรุปความถึงประวัติของปัญหาปลายเปิด ไว้ว่า วิธีการที่เกี่ยวข้องกับการใช้ปัญหาปลายเปิดในชั้นเรียนเพื่อส่งเสริมให้มีการอภิปรายถกเถียงกันเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ อย่างที่ถูกเรียกว่า "วิธีการแบบเปิด" ที่พัฒนาขึ้นมาในประเทศญี่ปุ่นในปี ค.ศ. 1970 (Shimada, 1977) คล้ายกันกับที่บางครั้งในประเทศอังกฤษที่ใช้ในฐานะเป็นการ

ตรวจสอบหาความจริง ที่เป็นปัญหาปลายเปิดประเภทหนึ่ง จนกระทั่งกลายมาเป็นที่นิยมในการสอนคณิตศาสตร์ (Wiliam, 1994) และแพร่หลายออกไปในหลายประเทศทั่วโลก

ปัญหาปลายเปิดพัฒนาโดยศาสตราจารย์โนดะ (Nhoda, 1987, 1991, 1994, 1995a, 1996b, 1997, 1998, 1999, 2000 อ้างถึงในไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546) แห่งมหาวิทยาลัยทสึคุบะประเทศญี่ปุ่น ปัญหาปลายเปิดนี้มีความหมายกว้างกว่าแบบฝึกหัดคณิตศาสตร์ที่ใช้กันอยู่โดยทั่วไปในโรงเรียนในเมืองไทย (Inprasitha, 1997) เพราะแบบฝึกหัดคณิตศาสตร์มีลักษณะเด่นด้านลบคือ มีคำตอบที่ถูกต้องอยู่เพียงคำตอบเดียว มีลักษณะปิดกล่าวคือไม่เปิดโอกาสให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันเข้าร่วมได้ แต่ปัญหาปลายเปิดมีลักษณะเป็นสถานการณ์ปัญหา มีทั้งคำตอบที่หลากหลาย มีกระบวนการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และสามารถพัฒนาไปเป็นปัญหาอื่นได้ ซึ่งลักษณะเด่นดังกล่าวนี้ทำให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกัน ในชั้นเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ตามความถนัด และความสนใจของตนเอง หรือกล่าวได้ว่า ปัญหาปลายเปิด เปิดโอกาสให้นักเรียนจำนวนมากสามารถแก้ปัญหาได้อย่างมีศักยภาพ เพราะนักเรียนสามารถสร้างปัญหาของตนเองได้จากสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดที่กำหนดให้ และเปิดโอกาสให้นักเรียนสามารถมีประสบการณ์ที่ยาวนานในการแก้ปัญหาแต่ละครั้งได้ ซึ่งจะทำให้เพิ่มความเชื่อมั่นของนักเรียนจำนวนมากว่าทุกคนสามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้ ซึ่งความเชื่อมั่นนี้เป็นองค์ประกอบที่สำคัญของเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งน่าจะส่งเสริมการปฏิรูปกระบวนการเรียนรู้ของนักเรียนได้ (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2546)

Becker and Shimada (1997) กล่าวถึง ปัญหาปลายเปิดและสถานการณ์ปัญหาปลายเปิดว่า ปัญหาจะถูกเรียกว่า ปัญหาปลายเปิดถ้าปัญหาถูกทำให้มีคำตอบหลายคำตอบ ในลักษณะนี้เราสามารถพบปัญหาปลายเปิดได้โดยทั่วไปในห้องเรียน กล่าวคือเมื่อนักเรียนถูกถามหาจุดเน้นของวิธีการหาคำตอบของปัญหาที่ครูให้ไปไม่ใช่แค่เพียงหาคำตอบในลักษณะนี้นักเรียนก็กำลังหาทางเข้าสู่ปัญหาปลายเปิด และกล่าวถึงความเปิดของสถานการณ์ปัญหาว่าในการเข้าสู่ปัญหาปลายเปิดนักเรียนสามารถนำเอาแง่มุมที่สำคัญของปัญหามาสู่วิธีการคิดของตนเองโดยการใช้คณิตศาสตร์ที่ตนเองเคยเรียนรู้มาก่อน ตีความปัญหาให้เป็นสถานการณ์ในทางคณิตศาสตร์และโดยประยุกต์เทคนิคต่าง ๆ ที่ตนเองเคยใช้มาก่อน

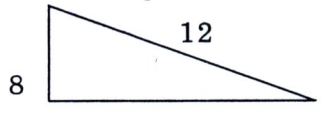
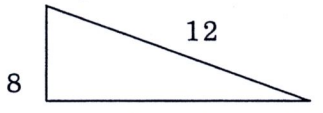
ปัญหาปลายเปิด เป็นปัญหาที่มีลักษณะเป็นสถานการณ์ปัญหา มีทั้งคำตอบที่หลากหลาย มีกระบวนการแก้ปัญหาที่หลากหลาย และสามารถพัฒนาไปเป็นปัญหาอื่นได้ ซึ่งลักษณะเด่นดังกล่าวนี้ทำให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกัน ในชั้นเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ตามความถนัด และความสนใจของตนเอง

### 3.3.4 การสร้างปัญหาปลายเปิด

Daniels & Anglileri (1995 อ้างถึงใน ศิริมาส ศรีลำดวน, 2545) และสมาคมครูคณิตศาสตร์ของอเมริกา (NCTM, 1989) กล่าวว่า โจทย์ปัญหาที่เป็นแบบฝึกหัดซึ่งนักเรียนทำอยู่เป็นประจำที่เป็นปัญหาปลายปิด ซึ่งมีคำตอบและวิธีการหาคำตอบอย่าง

เฉพาะเจาะจง สามารถปรับปรุงให้เป็นงานที่มีกระบวนการ และท้าทายยิ่งขึ้นกว่าเดิม โดยการปรับเปลี่ยนขยายให้เป็นปัญหาปลายเปิด โดยวิธีการ เช่น ตัดแปลงเงื่อนไขบางประการออกไป การย้ายคำถาม การเพิ่มข้อมูลที่ไม่จำเป็นเข้าไปดังในปัญหาตัวอย่างต่อไปนี้

**ตารางที่ 2** แสดงตัวอย่างปัญหาปลายเปิดที่พัฒนาจากปัญหาปลายปิดของ Daniels & Anglileri (1995) และสมาคมครูคณิตศาสตร์ของอเมริกา (1989)

| ปัญหาปลายปิด | ปัญหาปลายเปิด |
|---|---|
| 1. $(2+6) - 3 = \square$<br>2. $3 \times 5 = \square$<br>3. จงหาจำนวนต่อไปของลำดับ 1, 2, 4, ...<br>4. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม<br>  <br><br>5. เราเรียกรูปที่มีห้าด้านว่ารูปอะไร | 1. สร้างจำนวนใดได้บ้างจาก 2, 3 และ 6<br>2. จงสร้างคำถามให้มีคำตอบเป็น 15<br>3. จงอธิบายว่า จำนวนต่อไปของลำดับ 1, 2, 4, ... ควรจะเป็นจำนวนใด<br>4. จงสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีพื้นที่เท่ากับพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้<br>  <br><br>5. เราสามารถสร้างรูปเรขาคณิตอะไรได้บ้างจากส่วนของเส้นตรง 5 เส้น |

(อ้างถึงในศิริมาส ศรีลำดวน, 2545)

Becker and Shimada (1997) กล่าวว่าโดยทั่ว ๆ ไปเป็นการยากในการพัฒนาปัญหาให้เป็นปัญหาเปิดที่ดี และเหมาะสมกับนักเรียนในระดับที่แตกต่างกัน ผลการทำวิจัยซ้ำหลาย ๆ ครั้ง ชิมาดะได้ให้ข้อแนะนำสำหรับการสร้างปัญหาปลายเปิดในกิจกรรมการเรียนการสอนดังนี้

1) การเตรียมสถานการณ์ในเชิงกายภาพที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงปริมาณ ซึ่งสามารถสังเกตความสัมพันธ์ได้

2) การใช้คำถาม แทนที่จะถามนักเรียนให้พิสูจน์ทฤษฎีบทเหมือนกับ “ถ้า P แล้ว Q” เปลี่ยนปัญหานี้เป็น “ถ้า P แล้ว ความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ที่นักเรียนค้นพบมีอะไรบ้าง” โดยต้องกำหนดว่า “สิ่งที่แตกต่างให้เฉพาะเจาะจงขึ้น”

3) ในการสอนเกี่ยวกับทฤษฎีบท บทเรียนควรเริ่มต้นด้วยอย่างที่สอดคล้องทฤษฎีบทหลาย ๆ ตัวอย่าง เช่น ในเรขาคณิตควรเริ่มต้นด้วยการแสดงรูปเรขาคณิตที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทหลาย ๆ รูปแล้วให้นักเรียนสร้างข้อความคาดการณ์จากรูป ซึ่งจะนำไปสู่ข้อความตามทฤษฎีบท

4) แสดงรายการที่เป็นลำดับหรือตารางข้อมูลต่าง ๆ ให้นักเรียนค้นหาความสัมพันธ์หรือกฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องหรือเกี่ยวพันกัน

5) แสดงตัวอย่างข้อเท็จจริงที่แสดงให้เห็นแนวคิดกว้าง ๆ กับนักเรียน ครูยกตัวอย่างให้ข้อเท็จจริงในด้านหนึ่ง ให้นักเรียนอธิบายข้อปลีกย่อยอื่น ๆ ซึ่งมีลักษณะเช่นเดียวกับตัวอย่าง

6) แสดงตัวอย่างของแบบฝึกหัดหรือปัญหาที่คล้ายคลึงกันหลาย ๆ ตัวอย่างให้นักเรียนหาคำตอบหรือแล้วให้หาสมบัติที่ร่วมกันเท่าที่เป็นไปได้ของปัญหา เช่น ปัญหาการจัดการแข่งขันฟุตบอล การหาจำนวนคู่สายโทรศัพท์ การหาจำนวนเส้นทแยงมุมของรูปหลายเหลี่ยม

7) แสดงสถานการณ์เชิงกึ่งคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่สามารถใช้คณิตศาสตร์ช่วยอธิบายได้ เช่น ปัญหาการอยู่อย่างกระจัดกระจายของกลุ่มก้อนหินในลักษณะต่าง ๆ ให้นักเรียนอธิบายว่ากลุ่มใดมีการกระจายมากที่สุด เพราะเหตุใด ให้หาวิธีการแก้ปัญหาโดยใช้คณิตศาสตร์

8) แสดงตัวอย่างชัดเจนของโครงสร้างทางพีชคณิต เช่น โครงสร้างของกึ่งกลุ่มหรือกลุ่ม โดยแสดงตัวอย่างที่เป็นมูลเหตุเชิงตัวเลขซึ่งง่ายในการพิจารณา แล้วให้นักเรียนค้นหากฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้อง

การสร้างปัญหาปลายเปิดในงานวิจัยนี้ อาศัยหนังสือแบบเรียนของประเทศญี่ปุ่น โดยนำโจทย์ปัญหาที่นักเรียนทำอยู่มาปรับปรุงให้เป็นงานที่มีกระบวนการ และท้าทายยิ่งขึ้นกว่าเดิม โดยการปรับเปลี่ยนขยายให้เป็นปัญหาปลายเปิด โดยวิธีการ เช่น ตัดแปลงเงื่อนไขบางประการออกไป การย้ายคำถาม การเพิ่มข้อมูลที่ไม่จำเป็นเข้าไป ร่วมกันกับครู และทีมวิจัยจากศูนย์วิจัยคณิตศาสตรศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น

**3.3.5 ขั้นตอนการดำเนินกิจกรรมโดยใช้ปัญหาปลายเปิด**

Nohda (2000 อ้างถึงใน ศิริมาส ศรีลำดวน, 2545) ได้เสนอขั้นตอนของการนำปัญหาปลายเปิดมาใช้ในชั้นเรียนว่ามี 3 ขั้นตอนขึ้น คือ

**(1) กำหนดปัญหา** เป็นขั้นตอนที่ครูนำเสนอปัญหาให้นักเรียนได้เผชิญ โดยที่ครูไม่ได้แนะถึงวิธีการแก้ปัญหาให้กับนักเรียน ซึ่งลักษณะของปัญหาอยู่ในรูปของสถานการณ์ เช่น การเล่นเกมปัญหานั้นไม่สามารถหาคำตอบได้ทันที ซึ่งวิธีการแก้ปัญหานั้นจะขึ้นอยู่กับวัตถุประสงค์ของครูผู้สอนว่ามีความตั้งใจจะกำหนดปัญหาที่ครูต้องการให้นักเรียนได้แก้ไขสถานการณ์ที่กำหนดเป็นปัญหาชนิดใด ซึ่งปัญหาปลายเปิดมี 3 ชนิด คือ 1) กระบวนการเปิด คือ มีวิธีการแก้ปัญหาที่ถูกต้องได้หลายทาง 2) ผลลัพธ์เปิด คือ มีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบ และ 3) แนวทางการพัฒนาเปิด คือ สามารถที่จะพัฒนาเป็นปัญหาใหม่ได้หลากหลาย โดยการเปลี่ยนเงื่อนไขหรือคุณลักษณะ หรือวิธีที่ครูต้องการให้นักเรียนนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหามีกี่วิธี และปัญหาที่ครูต้องการให้นักเรียนสร้างขึ้นจากปัญหาเดิมเป็นปัญหาประเภทใด

**(2) การแก้ปัญหา** เป็นขั้นตอนของการหาวิธีการที่หลากหลาย เพื่อนำไปสู่การแก้ปัญหา โดยนักเรียนแต่ละคนเสนอแนวทางในการแก้ไขปัญหาของตนเองที่แตกต่างกันออกไปขึ้นอยู่กับความสามารถและประสบการณ์ของแต่ละคน และครูกระตุ้นให้นักเรียนอภิปรายถึงความเกี่ยวข้องกันของแต่ละวิธีและนำมาบูรณาการเข้าด้วยกัน

**(3) การขยายปัญหา** เป็นขั้นตอนการขยายสู่ปัญหาใหม่ ที่อาศัยฐานจากปัญหาเดิม

จากที่กล่าวมาข้างต้นเห็นได้ว่า ปัญหาปลายเปิดเป็นปัญหาที่สร้างขึ้นให้มีคำตอบที่เปิดกว้าง มีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบ หรือมีวิธีการหรือแนวทางในการหาคำตอบได้หลายวิธี นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันจะสามารถหาคำตอบและเข้าร่วมแก้ปัญหาได้ตามแนวทางที่แตกต่างกัน

### 3.3.6 ประโยชน์ของปัญหาปลายเปิด

Nohda (2000) ได้กล่าวถึงประโยชน์ของการนำปัญหาปลายเปิดมาใช้ในการเรียนการสอนไว้ดังนี้

(1) การตอบสนองความแตกต่างระหว่างบุคคลของนักเรียน ทั้งในด้านความสามารถ ความสนใจ และการพัฒนาวิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนแต่ละคน นักเรียนที่มีความสามารถจะมีส่วนร่วมในหลาย ๆ รูปแบบ ในขณะที่นักเรียนที่มีความสามารถระดับต่ำจะยังคงมีความสุข สนุกสนาน และสนใจอยู่ในการทำกิจกรรมการแก้ปัญหาปลายเปิดนี้

(2) ช่วยในการสืบค้นการกำหนดและการแก้ปัญหาของนักเรียน

ในปัจจุบันการใช้ปัญหาปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์มีหลาย ๆ ประเทศที่เจริญแล้วนำมาเป็นเครื่องมือที่ช่วยพัฒนาการคิดของนักเรียน ที่จะเป็นกำลังสำคัญต่อการพัฒนาประเทศ อย่างในสหรัฐอเมริกา กำหนดให้มีการใช้ปัญหาปลายเปิดในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ซึ่งปัญหาปลายเปิดที่ผ่านการวางแผนให้นักเรียนได้เรียนรู้อย่างละเอียดถี่ถ้วน ตามสถานการณ์ปัญหาที่ถูกกำหนด มีวิธีการหาคำตอบได้หลากหลายและสามารถสร้างเป็นปัญหาใหม่จากการขยายหรือสร้างเงื่อนไขขึ้นมา ซึ่งทำให้นักเรียนทุกคนสามารถเข้าร่วมเรียนรู้คณิตศาสตร์ตามกระบวนการทางคณิตศาสตร์

## 4. แนวคิดและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์

### 4.1 แนวคิดและทฤษฎีการวิเคราะห์วาทกรรม (Ideas and Theory of Discourse Analysis)

Foucault (1977 อ้างถึงใน ไชยรัตน์ เจริญสินโอฬาร, 2549) กล่าวว่า การวิเคราะห์วาทกรรมคือ การพยายามศึกษาและสืบค้นถึงกระบวนการ ขั้นตอน ลำดับเหตุการณ์รายละเอียดปลีกย่อยต่าง ๆ ในการสร้างเอกลักษณ์และความหมายให้กับสรรพสิ่งที่ห่อหุ้มเราอยู่ในสังคมในรูปธรรมของวาทกรรม และภาคปฏิบัติของวาทกรรมว่าด้วยเรื่องนั้น ๆ ว่ามีความเป็นมาอย่างไร มีการต่อสู้เพื่อช่วงชิงการนำ (Hegemony) ในการกำหนดกฎเกณฑ์ว่าด้วยเรื่องนั้น ๆ อย่างไรบ้าง มี

ความเกี่ยวข้องสัมพันธ์กับบุคคล สถาบัน สถานที่ เหตุการณ์อะไรบ้าง และผลกระทบที่เกิดจากการสร้าง รวมตลอดถึงการเก็บกด/ปิดกั้น สิ่งเหล่านี้มีวาทกรรมอย่างไร

กล่าวอีกนัยหนึ่ง หัวใจของการวิเคราะห์วาทกรรมอยู่ที่การพิจารณาค้นหาว่า ด้วยวิธีการหรือกระบวนการใดที่สิ่งต่าง ๆ ในสังคมถูกทำให้กลายมาเป็นวัตถุเพื่อการศึกษา/เพื่อการพูดถึงของวาทกรรม (An object of discourse/discursive object) หรือการพิจารณาภาคปฏิบัติการจริงของวาทกรรม ที่เป็นชุดของความสัมพันธ์ที่มีความสลับซับซ้อนในสังคมที่เป็นตัวกำหนดการพูดถึงสิ่งนั้น ๆ เช่น บุคคล สถาบัน ระบบเศรษฐกิจ กระบวนการทางสังคม แบบแผนพฤติกรรม จารีตปฏิบัติ เทคนิควิทยาการ การศึกษาในสังคม แต่ที่สำคัญยิ่งไปกว่านั้นก็คือ ชุดของความสัมพันธ์ที่สลับซับซ้อนนี้ มิได้ดำรงอยู่ในตัว วัตถุธรรมของวาทกรรมหรือโลกแห่งความเป็นจริง แต่อยู่ภายนอกวัตถุธรรมของความเป็นจริง และเป็นตัวกำหนดการดำรงอยู่ของวัตถุธรรมนั้น ๆ อีกต่อหนึ่งในรูปของวาทกรรม หรือที่ฟูโก เรียกว่า “A field of exteriorty” (Foucault, 1972b) หรือบรรดาเงื่อนไงต่าง ๆ ที่ก่อให้เกิดวาทกรรมขึ้นมา

การพูดถึงการก่อตัวของวัตถุธรรมของวาทกรรม/หรือสิ่งที่วาทกรรมพูดถึงก็คือ การพิจารณาศึกษาถึงชุดของความสัมพันธ์ที่เป็นตัวกำหนดภาคปฏิบัติการจริงของวาทกรรมเฉพาะด้านที่สำคัญ ๆ ในสังคม อย่างที่เป็นวาทกรรมของบรรดาผู้เชี่ยวชาญในแขนงวิชาต่าง ๆ ภาคปฏิบัติของวาทกรรมจะเป็นตัวกำหนดขอบเขตของสิ่งที่พูด/สิ่งที่ศึกษาว่าจะพูดอย่างไร พูดเรื่องอะไร ใครเป็นผู้พูด จึงจะได้ความหมาย สื่อสารกันรู้เรื่องและเป็นที่ยอมรับในสังคม

Riggenbach (1999) กล่าวถึง การวิเคราะห์วาทกรรม (Discourse Analysis) หรือการศึกษาวาทกรรม ว่าเป็นวิธีการวิเคราะห์ การพูดหรือสัญลักษณ์ของภาษาที่ใช้ จุดมุ่งหมายของการวิเคราะห์วาทกรรมเกี่ยวข้องกับวาทกรรม งานเขียน การพูดคุย การสนทนาและผลที่ได้มาจากการสื่อสาร เป็นต้น การให้คำจำกัดความวาทกรรมนั้น มีความหลากหลายขึ้นอยู่กับบริบทที่มีความสอดคล้องกันตามลำดับที่เกี่ยวข้องกับประโยค ข้อเสนอ การกล่าวปราศรัย เป็นสิ่งที่ตรงกันข้ามอย่างมากกับการใช้ภาษาศาสตร์ที่ทำสืบต่อกันมา การวิเคราะห์วาทกรรมไม่ได้เป็นแค่เพียงการศึกษาการใช้ภาษาที่อยู่นอกเหนือจากขอบเขตของประโยค แต่ก็ยังคงให้ความสำคัญเป็นลำดับแรกกับการวิเคราะห์ธรรมชาติของการใช้ภาษาที่มีอยู่และไม่ได้เป็นตัวอย่างที่ถูกสร้างขึ้นมา

การวิเคราะห์วาทกรรมเป็นสิ่งที่ทำให้เกิดขึ้นมาได้อย่างหลากหลายในสาขาความรู้ทางสังคมศาสตร์ที่ประกอบด้วย ภาษาศาสตร์ มนุษยศาสตร์ สังคมวิทยา จิตวิทยาเชิงการรู้ จิตวิทยาทางสังคม การศึกษาความสัมพันธ์ของการสื่อสาร และการศึกษาการแปลความ ซึ่งแต่ละอย่างเกี่ยวข้องกับเนื้อหาตามสมมุติฐานที่ยอมรับ มีขอบเขตของการวิเคราะห์ และมีระเบียบวิธีการ การวิเคราะห์วาทกรรมเริ่มมีใช้ครั้งแรก ในฐานะชื่อรายงานที่ถูกตีพิมพ์โดย Zellig Harris (1952) ถึงแม้ว่ารายงานนี้ไม่มีปรากฏให้เห็นเป็นระบบการวิเคราะห์เกี่ยวกับโครงสร้างทางภาษาศาสตร์ ที่อยู่นอกเหนือจากระดับของประโยคภาษา เป็นการผสมผสานสาขาวิชาขึ้นมาใหม่ การวิเคราะห์วาทกรรมเริ่มพัฒนาในท้ายทศวรรษที่ 1960 และ 1970 ส่วนมากจะอยู่ในสาขาทางด้าน

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ ห้องสมุดงานวิจัย

มนุษยศาสตร์และสังคมศาสตร์ อาจจะมีมากบ้างหรือน้อยบ้างในบางเวลา และมีความเกี่ยวพันกันกับสาขาวิชาอื่น ๆ

การวิเคราะห์วาทกรรม เป็นสิ่งที่ยากที่จะให้คำจำกัดความอย่างลำพังในฐานะที่เป็นระเบียบวิธีการวิจัย ความเป็นจริงแล้วเป็นลักษณะวิธีการที่จะเข้าไปใกล้เคียงและการคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาที่อยู่ในความหมายของคำ เป็นระเบียบวิธีการวิจัยทั้งในเชิงปริมาณและเชิงคุณภาพ สามารถทำให้แสดงให้เห็นแรงจูงใจที่ซ่อนอยู่ในเนื้อหา หรือที่อยู่เบื้องหลังตัวเลือกที่เกี่ยวข้องกับระเบียบวิธีการที่เฉพาะเจาะจงของการวิจัยไปยังการตีความเนื้อหานั้น การแสดงออกโดยใช้คำพูดมีมากขึ้นในทุกวันนี้ นิยมใช้คำศัพท์เฉพาะ การวิจารณ์หรือการวิเคราะห์วาทกรรมเป็นการพูดที่ไม่มีความสำคัญไปกว่าลดโครงสร้างการอ่านให้เป็นไปในทางสร้างสรรค์ และการตีความหมายเกี่ยวกับปัญหาหรือเนื้อหา สามารถทำให้เกิดความเข้าใจที่อยู่เบื้องหลังปัญหาที่เฉพาะเจาะจง และทำให้มันเป็นความจริงที่เป็นสาระสำคัญของปัญหานั้น และเป็นการแก้ปัญหา การพูดไม่จริงตามสมมุติฐาน ซึ่งความหลากหลายของสมมุติฐานที่สามารถคงอยู่ในปัญหานั้น โดยการคำให้สมมุติฐานนั้นมีความชัดเจน การวิเคราะห์วาทกรรมมีเป้าหมายที่จะแบ่งแยกมุมมองของปัญหาจากจุดยืนที่อยู่เหนือขึ้นไป และทำให้เนื้อหามีความครอบคลุมตามมุมมองของปัญหา และมุมมองของเราเองในความสัมพันธ์กับปัญหานั้น การวิเคราะห์วาทกรรมเป็นการให้ความหมายไปสู่การจัดหาแรงจูงใจที่ซ่อนอยู่ด้วยความตระหนักอย่างสูงของคนอื่น ๆ และตัวเราเอง ถึงแม้ว่าจะสามารถแก้ปัญหาที่เป็นรูปธรรมได้ อย่างที่ไม่ใช่การเตรียมคำตอบที่มีความชัดเจนไว้ แต่เป็นการทำขึ้นมาโดยความต้องการตอบคำถามการศึกษาเกี่ยวกับการมีอยู่และการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีของธรรมชาติและความรู้

ดังนั้น การวิเคราะห์วาทกรรม ก็คือ เป็นวิธีการวิเคราะห์การพูดหรือสัญลักษณ์ของภาษาที่ใช้ การพยายามศึกษาและสืบค้นถึงกระบวนการ ขั้นตอน ลำดับเหตุการณ์รายละเอียดปลีกย่อยต่าง ๆ ในการสร้างเอกลักษณ์และความหมายให้กับวิธีการพูดของบุคคล หรือสิ่งที่วาทกรรมพูดถึง การพิจารณาศึกษาถึงชุดของความสัมพันธ์ที่เป็นตัวกำหนดการพูดเฉพาะด้านที่สำคัญ ๆ ในสังคม อย่างที่เป็นตัวกำหนดขอบเขตของสิ่งที่พูด/สิ่งที่ศึกษาว่าจะพูดอย่างไร พูดเรื่องอะไร ใครเป็นผู้พูด จึงจะได้ความหมาย สื่อสารกันรู้เรื่องและเป็นที่ยอมรับในสังคม

### 4.2 แนวคิดและทฤษฎีการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ (Ideas and theory of mathematical discourse analysis)

Knuth and Peressini (2001) ได้ศึกษา กรอบทฤษฎีที่ใช้เพื่อตรวจสอบวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนและความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ กรอบทฤษฎีนี้เน้นไปที่ความแตกต่างของชนิดของวาทกรรมอย่างที่เป็นรู้จักกันในนักเรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามกิจกรรมที่มีความแตกต่างกันและโดยเฉพาะการเปล่งเสียงพูดอย่างที่มีความเกี่ยวพันกับการรับรู้ของผู้ฟังโดยตรงของข่าวสารที่ส่งมาจากผู้พูด และวาทกรรมของการอภิปรายกัน ที่เกี่ยวพันถึง 2 วิถีทางของการสื่อสารตามบทบทของวาทกรรม ถึงแม้ว่าวิธีการที่สำคัญของ

การศึกษาและการเรียนรู้ เป็นการรับรู้เพิ่มขึ้นตามความตั้งใจในชั้นเรียนทุกวันนี้ อย่างที่นักคณิตศาสตรศึกษาพยายามอย่างหนักที่จะเข้าใจให้ดีที่สุดตามองค์ประกอบที่นำไปสู่การเพิ่มขึ้นของการเรียนรู้ ตามความเป็นจริง นักเรียนจะมีการให้เหตุผลต่อ และเปลี่ยนแปลงความคิดเริ่มต้นที่เน้นย้ำ ตามความสำคัญจากครูและนักเรียนเริ่มที่จะคิดถึงวาทกรรมแต่ละชนิดอย่างหลากหลาย (ตัวอย่าง Ball 1991; NCTM 1991, 2000; Steinbring, Bussi, และ Sierpinska 1998) สิ่งนี้เรียกว่ามีมากกว่าความหมายของวาทกรรมเป็นพื้นฐานในสังคมตามธรรมชาติที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ มุมมองของการดำเนินการคณิตศาสตร์ในโรงเรียน มีผลสะท้อนกลับมายังทั้งเนื้อหาสาระสำคัญของการกระทำในสาขาเองและความต้องการของนักเรียนเป็นความสามารถในการสื่อสารความรู้ทางคณิตศาสตร์ของพวกเขาในสังคมเทคโนโลยี ในศตวรรษที่ 21 การปรับปรุงการสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนและการเรียนต่อไป การสร้างงานวิจัยที่สืบเสาะหาความรู้ ก่อนที่จะปฏิรูปตามการแนะนำ และบทเรียนในการเรียนรู้ที่ได้มาจากการปรับปรุงให้ดีขึ้นกว่าแต่ก่อน มาตรฐานและหลักการสำหรับคณิตศาสตร์ในระดับโรงเรียนของ NCTM (2000) ข้อเสนอที่สร้างมุมมองขึ้นใหม่ของคณิตศาสตร์ในโรงเรียน การรักษาความหมายของวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนกำหนดดำเนินต่อไปเป็นจุดศูนย์รวม สิ่งที่อธิบายตามข้อย่อยของกรอบทฤษฎีสำหรับการตรวจสอบวาทกรรมทางคณิตศาสตร์และการแสดงวิธีการที่จะนำไปประยุกต์ใช้อย่างเห็นคุณค่าตามความซับซ้อนของความสัมพันธ์ระหว่างวาทกรรมและความเข้าใจในคณิตศาสตร์ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เน้นที่ความสนใจบทบาทของวาทกรรมและความแตกต่างของวาทกรรมที่ปรากฏตัวออกมาอย่างที่นักเรียนช่วยกันแก้ปัญหาในกิจกรรม

กรอบทฤษฎีสำหรับการตรวจสอบวาทกรรมที่อยู่ในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ เน้นการช่วยเหลือครูให้ทำความเข้าใจได้ดีขึ้นและทำให้บรรลุผลสำเร็จการปฏิรูปที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานการวัดประเมินผลและการสอนคณิตศาสตร์ เป้าหมายหนึ่งที่รวมอยู่ในจุดศูนย์กลางช่วยให้ครูสร้างสิ่งที่มีความหมายมากกว่าวาทกรรมในชั้นเรียนของพวกเขา อย่างไรก็ตาม อุปสรรคสำคัญที่เกี่ยวพันกันกับเรื่องที่อภิปรายถึง ความหมายของวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ โดยพัฒนามาจากแนวคิดของ Yuri Lotman ที่ได้พัฒนากรอบทฤษฎีที่ช่วยทำความเข้าใจเกี่ยวกับบทบาทที่แตกต่างกันของการแสดงวาทกรรม ดังที่ Lotman (1988) แนะนำเกี่ยวกับวาทกรรมทั้งหมดที่เป็นการจำแนกความแตกต่าง โดยอาศัย 2 หน้าที่ที่แตกต่างกัน คือ ตามการแสดงถึงความหมายและการสร้างความหมาย Wertsch (1991) ใช้ขอบเขตของการพูดและการสนทนา ที่เกี่ยวข้องกับแต่ละบุคคลที่แสดงแทนทั้ง 2 หน้าที่นี้ วาทกรรมที่เกี่ยวกับการพูด เป็นการแสดงลักษณะพิเศษผ่านการสื่อสารในที่ซึ่งผู้ฟังสามารถรับฟังข่าวสารได้ถูกต้องแม่นยำ ที่ผู้พูดตั้งใจที่จะทำให้ผู้ฟังรับรู้ทันทีที่ผู้พูดตั้งใจที่จะให้ความหมายถ่ายทอดไป ตามตอนที่พูดเปล่งเสียงสื่อสารออกไป เป็นการพิจารณาจากการประสบผลสำเร็จในการส่ง วาทกรรมเกี่ยวกับการสนทนา เป็นสิ่งที่ตรงกันข้ามตามลักษณะพิเศษผ่านการให้และการทำการสื่อสาร ที่ผู้รับเริ่มแรกรับรู้ข่าวสารได้ถูกต้องที่ส่งมาโดยผู้พูด ณ ตำแหน่งนี้ วาทกรรมที่เกี่ยวกับการพูดจะสิ้นสุด แต่วาทกรรมที่เกี่ยวกับ

การสนทนาจะเริ่มต้น วาทกรรมที่เกี่ยวกับการสนทนาจะสร้างความหมาย โดยใช้การสนทนา อย่างที่เป็น อุปกรณ์ในการคิด (Lotman, 1988, p. 36) มุมมองของการปฏิรูปคณิตศาสตรศึกษาที่ตั้งอยู่บนรวบรวบเข้าด้วยกันของวาทกรรมที่เกี่ยวข้องกับการสนทนา ทั้งครูและนักเรียนสำหรับการอภิปรายอย่างน่าเชื่อถือได้

Sfard และ Keiran (2001a) ได้เสนอการเข้าไปใกล้ถึงของงานวิจัยในการคิดเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เป็นการศึกษาเกี่ยวกับความเข้าใจผิดและรูปแบบที่เข้าใจโดยไม่ต้องพูดถึง ทำให้เกิดการนำไปถึงการเข้าใจความหมายที่ลึกซึ้งในการสอนและการเรียนรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ แต่ก็ยังมีหลาย ๆ ปัญหาที่สำคัญที่ไม่ได้ตัดสินใจแน่วแน่ หลังจากที่ทำการค้นหา 2 ตอนอย่างใกล้ชิด ที่แสดงการเพิ่มจำนวนของข้อคำถามที่ยุ่งยาก จึงเสนอเพื่อเป็นพื้นฐานของการวิจัยที่ใช้การเปรียบเทียบว่า การคิดในฐานะที่เป็นการสื่อสาร (Thinking-as-Communicating) การสร้างกรอบความคิดนี้ ส่งผลซึ่งไม่อาจหลีกเลี่ยงได้เกี่ยวกับมุมมองด้านการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ในตำแหน่งเริ่มต้นจนถึงที่แน่ใจว่าดีแล้วจึงให้คำจำกัดความว่า วาทกรรม และคำว่าวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งที่สร้างขึ้นมาเฉพาะโดยมี 2 องค์ประกอบหลักคือ 1) การสร้างความมั่นใจที่พิเศษตามสัญลักษณ์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมา ในฐานะที่มันเป็นเครื่องมือ สื่อกลางในการสื่อสาร (Communication-mediating) และ 2) โดยเฉพาะที่เกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงวิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่กำหนดรูปแบบของการสื่อสาร การเปลี่ยนแปลงวิธีการคิดทางคณิตศาสตร์เป็นสิ่งที่ผู้สังเกตสร้างขึ้นและพวกเขาจะรู้อยู่แก่ใจอยู่ว่าให้ยังความเหมือนเดิมในการเข้าร่วมในวาทกรรม ในรายงานนี้ฉันให้เหตุผลผ่านการจำกัดเฉพาะสิ่งที่เป็นองค์ประกอบของการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สิ่งหนึ่งที่มีความเป็นไปได้ดีที่สุดเกี่ยวกับการบรรยายเพื่ออย่างน้อยที่สุดเกี่ยวกับการลดความสับสนในปรากฏการณ์ลงตามที่แสดงให้เห็นวิธีการทำงาน กลับมาที่ฉากที่นำเสนอเริ่มแรกของรายงาน เป็นการสร้างขึ้นมาใหม่ที่ทำให้แน่ใจในข้อสงสัยเกี่ยวกับการคิดในฐานะที่เป็นการสื่อสาร และจัดการกับปัญหาใหม่ที่เดิมยังมีความไม่แน่ใจด้วยการสนับสนุนจากเครื่องมือในการวิเคราะห์ที่เฉพาะ ในการนำมารวมกลุ่มกันวิเคราะห์เกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์ของชั้นเรียนที่มีปฏิสัมพันธ์กันด้วยความตั้งใจนำไปสู่การเปลี่ยนแปลงของระดับความสัมพันธ์ของการเข้าร่วม

Sfard เน้นให้ตระหนักและเห็นความสำคัญของการสนทนากันเกี่ยวกับคณิตศาสตร์เพื่อสนับสนุนการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่จะประสบผลสำเร็จ ที่พยายามแสดงให้เห็นว่ามีมากกว่าวาทกรรมที่จะได้พบจากความตั้งใจ และกำหนดให้การสื่อสารเป็นหัวใจสำคัญในคณิตศาสตรศึกษาคือ มีความเป็นไปได้ที่จะเปลี่ยนแปลงไม่แค่เพียงแต่วิธีการสอนเท่านั้น แต่เป็นวิธีคิดเกี่ยวกับการเรียนรู้และเกี่ยวกับผู้ที่จะเรียนรู้ ยิ่งไปกว่านี้ เขาให้เหตุผลว่า การสื่อสารจะเป็นแง่มุมที่ไม่ใช่ช่วยให้มองเห็นแค่เพียงการคิด แต่ยังเกือบจะเท่ากันกับเป็นตัวตนของการคิดเลย การสื่อสารที่เกือบจะเป็นการรับรู้ (Communicational approach to cognition) ซึ่งอยู่ภายใต้การตรวจสอบอย่างละเอียดในการวิจัยนี้ เป็นสิ่งที่สร้างโดยประมาณว่าสิ่งนี้เป็นพื้นฐานของหลักทฤษฎี

ความซับซ้อนของปัญหาช่วยส่งผลโดยตรงต่อแรงจูงใจจำเป็นสำหรับการค้นหาสิ่งที่ทำสืบต่อกันมาของการวิจัยเชิงการรู้ ที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานของการอุปมาเกี่ยวกับการเรียนรู้ที่อยู่ในฐานะการพัฒนาทักษะเพิ่มเติม และเพื่อแนะนำเกี่ยวกับกรอบความคิดของการวิจัยที่เป็นพื้นฐานอยู่ภายในการอุปมาถึง การเรียนรู้ที่อยู่ในฐานะการมีส่วนร่วม (Learning-as-participation) ซึ่งพื้นฐานความเชื่อเกี่ยวกับการสื่อสารที่ใกล้เคียงตรงกันกับการศึกษาการรับรู้ของมนุษย์ อย่างที่เป็นการคิดบางทีอาจจะเป็นสร้างกรอบความคิดที่อยู่ในฐานะสถานการณ์ของการสื่อสารที่เป็นการสื่อสารของคนหนึ่งกับอีกคนหนึ่ง อย่างที่หลายคนเชื่อในแนวคิดของ Vygotsky ว่าในการพัฒนาที่เกี่ยวข้องกับสิ่งที่ได้รับความสนใจมากกว่าของการสื่อสารที่เป็นการปราศรัยต่อสาธารณะจะมีมากกว่าการพูดในส่วนบุคคล (Vygotsky, 1987)

สถานการณ์ของการสื่อสาร ที่ใช้สร้างกรอบความคิดมี 2 องค์ประกอบคือ 1) เนื่องจากการสื่อสารบางทีอาจจะเทียบเท่ากับความตั้งใจของบุคคลที่จะเป็นผู้ทำการพูดคุย คิดหรือรับรู้ตามความสนใจของเขา โดยเฉพาะรูปแบบของการกระทำทั้งหมดคนเดียวและในขอบเขตที่มีเฉพาะความชำนาญจากพฤติกรรมอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับแต่ละบุคคลตามความตั้งใจในการดึงดูดความสนใจ และ 2) ภายในสิ่งที่เข้าไปใกล้ถึงการคิด (Dichotomy) ที่จะทำการสื่อสารที่ไม่ปรากฏตัวและคำกล่าวที่ไม่มีความน่าสนใจอย่างยาวนาน เทียบได้เท่ากับการเปิดหน้าต่างของจิตใจเท่านั้น อย่างที่เป็นการกระทำในลำดับต่อมาของการคิดและที่จะนำมา “แสดงออก (ทางความคิดหรือความรู้สึก) โดยใช้คำพูด” ที่คิดไว้แล้วล่วงหน้า

กรอบทฤษฎีที่ใช้ในการวิเคราะห์แง่มุมความตั้งใจของบุคคลที่สร้างขึ้นมาจากการให้คำจำกัดความของการสื่อสารที่อยู่ภายใต้การสื่อสารที่เกือบจะเทียบเท่ากัน โดยใช้ 2 ระเบียบวิธีได้แก่ที่เรียกว่า Focal analysis และ Pre-occupational analysis เป็นเครื่องมือในการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ ซึ่ง Focal analysis เป็นการตรวจสอบครั้งแรกในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับการมีประสิทธิผลของการสื่อสารที่ได้มาก่อนล่วงหน้าเป็นการรับรู้ชั่วขณะคือ การสร้างกรอบความคิดเกี่ยวกับขอบเขตของการสื่อสารที่เกี่ยวข้องกับสิ่งนั้น โดยพิจารณาจากการตัดสินใจแน่นอนแล้ว (Pronounced) และผลที่ตามมา (Attended) ส่วน Preoccupational analysis เป็นการกล่าวถึงอีกครั้งหนึ่งที่ตีความการสื่อสารจากการนิยามอย่างที่มีความตั้งใจที่จะทำให้คนอื่น ๆ กระทำหรือรับรู้ตามความสนใจของตนเอง โดยพิจารณาการมีปฏิสัมพันธ์กันของคู่สนทนาจากการรับรู้ (Object-level) และการเปลี่ยนแปลงการรับรู้ (Meta-level)

Lakatos (1976 อ้างถึงใน Worrall, J. & Zahar, E., 1976) เสนอถึงมุมมองเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่มีรูปแบบถาวร มีความแน่นอนและเกิดขึ้นมาก่อน ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ พร้อมทั้งให้คำกำจัดความของความรู้ทางคณิตศาสตร์และคำแนะนำที่อธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหา การอธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหาของ Lakatos ที่ประกอบด้วยวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการเรียนที่กระตุ้นให้ผู้เรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยตัวเอง (Heuristic) ที่จะนำไปสู่พัฒนาการของข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์

ทางคณิตศาสตร์ สิ่งเหล่านี้จะค่อย ๆ พัฒนาผ่านภาษาเฉพาะกลุ่มและเป็นตัวนำไปวิเคราะห์โดยการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่แสดงบทบาทสำคัญ ผ่านการเริ่มต้นของพวกเขาจนกระทั่งสิ้นสุด การประเมินผลงานที่เป็นไปในทางสร้างสรรค์ถ้ามันเป็นสิ่งที่มีคุณค่าสำหรับเขา

ข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ ที่เป็นการตามหาร่องรอยของการเรียนรู้การทำงานเกี่ยวกับความเข้าใจว่ามีผลต่อพฤติกรรมที่แสดงออกอย่างไร (Psychologism) แนวคิดเกี่ยวกับสัญชาตญาณ (Intuitionism) แนวคิดเกี่ยวกับประวัติศาสตร์ (Historicism) แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีการปฏิบัตินิยม (Pragmatism) แนวคิดเกี่ยวกับการคิดว่าความเห็นของตนเองถูกต้อง (Dogmatism) แนวคิดของ Kant เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ซึ่งไม่มีข้อผิดพลาด แนวคิดเกี่ยวกับการโต้แย้งและการให้เหตุผล (Refutationism) แนวคิดเกี่ยวกับการอุปนัย (Inductivism) และแนวคิดเกี่ยวกับการนิรนัย (Deductivism) ดังที่คน ๆ หนึ่งที่ถ่ายทอดลักษณะบางอย่างของเขาออกไป (Lakatos, 1976, p. 55) หรือที่พวกเขาอภิปรายกันแล้วทำการบรรจุเข้าไว้ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์

Lakatos เชื่อและคาดหวังว่าเป็นแง่มุมที่ดีและจำเป็นอย่างยิ่งสำหรับคณิตศาสตร์ ที่กระบวนการค้นหาทางคณิตศาสตร์ ตามรูปแบบดั้งเดิมทำได้ผ่านสิ่งที่เข้าใจยากและอธิบายไม่ได้โดยอาศัยเหตุผลที่เป็นกฎเกณฑ์ และเชื่อว่านักปรัชญาสามารถสร้างทฤษฎีทางคณิตศาสตร์ได้ในเรื่องที่เกี่ยวข้องกับลักษณะที่มีหลักการทางวิทยาศาสตร์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งได้รับแรงกระตุ้นจากมุมมองของ Poper ใน 2 แนวทางคือ 1) มีการให้เหตุผลเกี่ยวกับการค้นพบ อย่างที่เป็นกระบวนการสร้างขึ้นมาของข้อคาดการณ์กับแนวคิดของการพิสูจน์ (Proofs ideas) หรือการอธิบายอย่างคร่าว ๆ (Sketch) ที่เป็นเนื้อหาไปสู่กฎเกณฑ์ที่มีเหตุผล และ 2) ความแตกต่างระหว่างการค้นพบ (Discovery) กับการอ้างเหตุผล (Justification) คือ การแนะนำไปในทางที่ผิดอย่างที่มีผลกระทบกับคนอื่น ๆ อย่างเช่น แนวทางในการที่เราค้นพบข้อคาดการณ์จะกระทบกับการพิสูจน์หรือการอ้างเหตุผลของเราที่เกี่ยวของกับมันด้วย และแนวคิดของการพิสูจน์จะเป็นผลกระทบเกี่ยวกับสิ่งที่เรากำลังพิสูจน์อยู่

Lakatos แสดงให้เห็นจุดสำคัญอย่างชัดเจนไว้ 6 วิธีการ เพื่อปรับปรุงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical ideas) และนำทางไปสู่การสื่อสารได้แก่ Surrender, Monster-barring, Exception-barring, Monster-adjusting, Lemma-incorporation, และ Proofs and Refutations เป็นความสัมพันธ์กันกับการพัฒนาความคิดรวบยอด (Concept development) การพัฒนาข้อคาดการณ์ (Conjecture development) และการพัฒนาการพิสูจน์ ถึงอย่างไรก็ตามสิ่งเหล่านี้ก็ไม่ได้มีความเป็นอิสระจากกระบวนการ Lakatos ทำงานเน้นความสำคัญที่การพึ่งพาอาศัยซึ่งกันและกันตามแง่มุมที่เกี่ยวกับทฤษฎีการก่อรูปแบบ (Theory formation)

(1) วิธีการยอมรับ (The method of Surrender)

"คุณ ที่ทำให้งุนงงกับจิตใจที่สงบของฉัน การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม เพียงตัวอย่างเดียวที่โต้แย้งข้อคาดการณ์อย่างมีประสิทธิผลเท่ากันกับเป็นสิบตัวอย่าง ข้อคาดการณ์และตัวอย่างค้านการพิสูจน์ทั้งหมดจะทำให้ไม่ได้ผลตามความมุ่งหมาย ช่วยฉุดขึ้น! หน่อย คุณจำเป็นต้องมียินยอมให้" แกมม่า (Gamma) นักเรียนของ Lakatos

วิธีการยอมรับของ Lakatos เชื่อว่าอย่างน้อยที่สุดจำนวนของการเว้นช่องว่างจะนำไปจนถึงวิธีการยอมรับที่ประกอบด้วยการใช้การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมเพื่อที่จะโต้แย้งข้อคาดการณ์ เมื่อช่องว่างของรูปลูกบาศก์ถูกค้นพบ Gamma ปฏิเสธข้อคาดการณ์และข้อเสนอแนะที่พยายามเข้าไปถึงยังวิธีการใหม่โดยมูลฐาน (radically new approach) สิ่งที่เข้าไปถึงอาจจะเป็นไม่ใช่เพียงการสืบสวนหาความจริงในขณะระยะเวลานั้น

Lakatos อธิบายถึงวิธีวิธีการยอมรับและการจำแนกความแตกต่างเปรียบเทียบระหว่างสิ่งสองหนึ่ง ซึ่งใช้การพิจารณาจากการตอบคำถามที่เกี่ยวข้องกับ "เมื่อไหร่ที่เราจะยินยอมให้ตามข้อคาดการณ์?" และแนะนำ 5 แนวทางได้แก่ เมื่อไหร่มันจะพร้อมที่จะเป็นการเปลี่ยนแปลง (When it has been already been modified) เมื่อไหร่ที่มันจะไม่ได้รับความสนใจ (When it is not interesting) เมื่อไหร่ที่มันได้รับความสนใจน้อยลงกว่าข้อคาดการณ์ปกติในทฤษฎี (When it is less interesting than the average conjecture in theory) เมื่อไหร่ที่มันมีเหตุผลที่ไม่น่าจะเป็นจริง (When it is not plausible) และเมื่อไหร่ที่มันมีขอบเขตที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ (When it domain of application) ซึ่งเกี่ยวพันกันถึงข้อค้นพบทางคณิตศาสตร์ที่มีอยู่ในกระบวนการ

ตัวอย่างเช่น Burton (1985) ที่กล่าวถึงประวัติศาสตร์ของจำนวน ว่าจำนวนใดๆ ตัวของมันเองจะเป็นตัวหารร่วมของมันเอง จำนวนเต็ม 4 จำนวนนี้ 6, 28, 496 และ 8128 เป็นที่รู้จักกันของชาวกรีกโบราณ และต่อมา นักเขียนก็คาดการณ์ว่า จำนวนที่ n จะเป็นจำนวนเต็ม $P_n$ ที่ประกอบด้วย n หลักอย่างแน่นอน ข้อคาดการณ์นี้เป็นการคาดการณ์ที่ผิด เพราะว่าจำนวนที่ 5 ของจำนวนเต็มคือ 33,550,336 แสดงให้เห็นถึงการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม อย่างที่เป็นข้อคาดการณ์ซึ่งมีวิธีการยอมรับในเวลาต่อมา ถึงแม้ว่าการยอมรับที่แสดงให้เห็นครั้งแรกและอย่างน้อยที่สุดก็ช่วยให้มีพัฒนาการสร้างปฏิสัมพันธ์ขึ้นมาจากการประเมินผลงานที่เกี่ยวข้อง หรือการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม ตามข้อคาดการณ์ในแต่ละลักษณะ การปฏิบัติในเวลาต่อมาจะย้อนกลับไปยังข้อคาดการณ์และทำให้มันสำเร็จผลมากกว่าที่จะรอผลมาจากผู้รู้ อย่างวิธีการธรรมดาที่ไม่ซับซ้อนเรียกว่า วิธีการยอมรับ ทั้งการพูดและการกระทำที่ไร้เดียงสา (Naove surrender) และแนวทางต่อมาเป็นแต่เพียงที่ประกอบด้วยการจำแนกความแตกต่างระหว่างปัญหาเริ่มแรกและข้อคาดการณ์เริ่มแรก ในกรณีที่ Euler ทำการศึกษา ปัญหาเริ่มแรกเป็นการค้นหาความจริงถ้ามีความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนกับเส้น เส้นตั้งฉากกับพื้นผิวของรูปทรงหลายเหลี่ยม ที่

คล้ายคลึงกับความสัมพันธ์ที่เข้าใจว่าอยู่ในฐานะของรูปทรงหลายเหลี่ยม ที่ว่าจำนวนเส้นตั้งฉากจะเท่ากันกับจำนวนเส้น ข้อคาดการณ์เริ่มแรกคือ V - E + F = 2

สำหรับสองคำถามที่เกี่ยวข้องกับวิธีวิธีการยอมรับคือ ข้อแรกเมื่อไหร่ที่เราจะยินยอมให้ตามข้อคาดการณ์ และข้อสองอะไรที่เราควรจะทำต่อไป Lakatos ไม่ได้ให้คำตอบที่ชัดเจนไว้สำหรับคำถามข้อแรก แต่ได้บอกหลักการเป็นนัยที่ประกอบด้วย (1) ถ้าเราเชื่อว่าการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมถูกต้องตามเหตุผล (เราไม่มีเหตุผลตรงไปจนถึง Monster-barring) และ (2) ถ้าข้อคาดการณ์นั้นเป็นการแยกไว้เป็นพิเศษ อย่างเช่น เราได้ทำให้สำเร็จในวิธีการอื่น ๆ ที่มันมีขอบเขตอย่างที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ใหม่อย่างเอาจริงเอาจัง โดยการตัดทอนลง คำตอบข้อที่สองของคำถามที่เกี่ยวข้องในลำดับต่อมาจากข้อที่ (2) นี้ ดังที่เป็นปัญหาเกี่ยวกับเนื้อหาสาระ และเมื่อไหร่ที่เราจะยอมให้ตามข้อคาดการณ์? ข้อคาดการณ์ซึ่งเป็นมากกว่าการปรับปรุงให้ดีขึ้นจะกลายมาเป็น สิ่งที่ทำให้ความกระตือรือร้นลดลงหรืออย่างเฉพาะเจาะจงสิ่งที่กีดขวางระบบจากแนวทางในการสืบค้นหาความจริง ข้อคาดการณ์ที่ทำให้การยอมรับสำเร็จได้แก่ ถ้าข้อคาดการณ์นั้นเป็นไปอย่างเป็นผู้เชี่ยวชาญหรือการปรับปรุงมากขึ้น และถ้านักเรียนค้นหาข้อคาดการณ์ที่ไม่ได้รับความสนใจ หลังจากที่ตั้งใจที่จะทำให้เกิดวิธีการยอมรับ ซึ่งในทางตรงกันข้ามข้อคาดการณ์นั้นก็จะถูกสนับสนุนให้ได้รับการปรับปรุง การไม่ได้รับความสนใจ ตามวิธีการหรือแนวทางต่อไปนี้

วิธีการยอมรับ ประกอบด้วยการปฏิเสธข้อคาดการณ์หนึ่ง ๆ ด้วยการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมจนนำไปสู่ข้อค้นพบที่ข้อคาดการณ์ที่สามารถทำให้จริงได้และได้รับความสนใจ 1) จำนวนครั้งของข้อคาดการณ์ที่มีการปรับปรุง ถ้าจำนวนครั้งมากกลุ่มของผู้ใช้ข้อคาดการณ์ตามขอบเขตจนถึงการเริ่มที่จะเปลี่ยนแปลง แล้วหลังจากนั้นนักเรียนก็จะยินยอมให้ข้อคาดการณ์ถูกละทิ้งไป ในทางตรงกันข้ามข้อคาดการณ์นั้นก็จะถูกสนับสนุนให้ได้รับการปรับปรุง 2) การที่กลุ่มของผู้ใช้เน้นให้น้ำหนักกับข้อคาดการณ์นั้น ซึ่งตัดสินได้จากข้อคาดการณ์ที่ได้รับความสนใจอย่างมากเป็นพิเศษ ซึ่งผู้กระทำจะใช้การประเมินค่าของข้อคาดการณ์ต่ำกว่ากลุ่มของผู้ใช้ที่มีขีดจำกัดที่จะเปลี่ยนแปลง 3) การเปรียบเทียบกันจนนำไปสู่ข้อคาดการณ์อื่น ๆ ซึ่งข้อคาดการณ์ที่อยู่ภายใต้การอภิปรายที่ไม่ได้รับความสนใจกับที่ได้รับความสนใจอย่างมากเป็นพิเศษ 4) ข้อคาดการณ์ที่ได้รับการพิจารณาว่าเป็นไปไม่ได้ โดยผู้ที่ปฏิบัติ ตัวอย่างเช่น มันผิดพลาดจนนำไปสู่การทำให้เกิดความล่าช้าสำหรับกลุ่มผู้ใช้จากการไม่ได้รับความสนใจในตัวอย่างนั้นอีก 5) การประยุกต์ใช้ข้อคาดการณ์ตามขอบเขตหรือหลักการที่นักเรียนใช้แบ่งความสนใจออก แล้วละเลยข้อคาดการณ์ที่ไม่ได้รับการพิจารณาว่าเป็นไปไม่ได้

(2) วิธีการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ (The method of Monster-barring)

"นอกจากว่าทำไมถึงยอมรับการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม? ทำไมถึงน่าจะใช้สัจพจน์แสดงให้เห็นว่ามาจาก...? มันเป็นการวิจารณ์ที่ว่าควรจะการถอยกลับ...มันเป็นสิ่งที่แปลก

ที่ไม่ต้องการ (monster) อย่างกรณีพยาธิ ที่ไม่ใช่ตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิม" เดลต้า (Delta) นักเรียนในการศึกษา

วิธีการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ ของ Lakatos เป็นวิธีการหรือแนวทางที่เกี่ยวข้องกับการแยกออกไปสำหรับตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิมที่ไม่ต้องการจนนำไปสู่ข้อคาดการณ์ด้วยการยืนยันว่าเป็นไปตามวัตถุประสงค์ ในข้อคำถามที่ไม่ได้เป็นตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิม อย่างที่ตัวอย่างนั้นไม่ได้อยู่ในความตั้งใจที่จะนิยามความคิดรวบยอดภายในข้อคาดการณ์ ในบริบทที่วัตถุประสงค์ของปัญหายังสรุปไม่ได้ตามที่ได้ตรวจสอบ ในฐานะสิ่งที่แปลกที่ไม่ต้องการจะให้การสนับสนุนสำหรับผู้ที่เห็นว่าไม่ควรจะมีกฎเกณฑ์ ผู้ที่อาจจะไม่ต้องการอยู่เบื้องหลังของทฤษฎีซึ่งนำไปสู่ความเป็นระเบียบเรียบร้อยและความกลมกลืนของขอบเขตที่เกี่ยวข้อง ประเด็นสำคัญในวิธีการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ คือ 1) ทำให้เกิดความแตกต่างระหว่างความคิดรวบยอดอย่างเช่น การให้บทนิยามที่ไม่สมบูรณ์ (Ill-define) การรู้ขึ้นมาเอง (Intuition) ความเป็นไปได้พร้อมกับการที่ไม่ได้แสดงออก (Possibly with unexpressed) และการให้บทนิยาม อย่างเช่น ความคิดรวบยอดที่เกี่ยวข้องกับการตีความโดยเฉพาะ 2) กระบวนการที่เริ่มต้นด้วยความคิดรวบยอดที่ไม่ชัดเจนและทำให้มันลดความไม่ชัดเจนลง 3) การไม่ยอมรับความแปลกใหม่ (Monster-barring) ที่เกี่ยวพันกับการทำให้บทนิยามแคบลงมาและการแยกสิ่งที่ไม่ต้องการออกไป ถึงอย่างไรก็ตามในทางตรงกันข้ามการขยายออกของความคิดรวบยอดสามารถที่จะช่วยเหลือให้เกิดกาพัฒนาของทฤษฎีบท 4) การโต้แย้ง (Argument) เป็นการทำเพื่อบทนิยามที่แข่งขันกันบนพื้นฐานของความพอใจเกี่ยวกับการยอมรับความจริงที่แน่นอนตามเป้าหมายของปัญหาเข้าไปในขอบเขตของความคิดรวบยอดที่เกี่ยวข้อง อย่างที่เป็นความพอใจบางทีอาจจะประกอบด้วย 4.1) การแยกวัตถุประสงค์ออกไป เพื่อที่จะปกป้องหรือคัดคานข้อคาดการณ์บางอย่างที่แน่ใจ 4.2) การรวมวัตถุประสงค์เข้าไปด้วย เพื่อที่จะวิจารณ์หรือตำหนิข้อคาดการณ์บางอย่างที่แน่ใจ 4.3) การแยกวัตถุประสงค์ออกไป เนื่องจากมันแยกหลาย ๆ ข้อคาดการณ์ในทฤษฎีออก 4.4) การแยกวัตถุประสงค์ออกไป เนื่องจากมันเป็นอำนาจในการโน้มน้าววัตถุประสงค์อื่น ๆ ในทฤษฎีจนกลายาเป็นการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมตามข้อคาดการณ์ในทฤษฎี 5) มี 2 ประเด็นสำคัญในการตัดสินใจในระหว่างกระบวนการการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ คือ การตัดสินใจด้วยข้อแนะนำตามวัตถุประสงค์ของการขัดขวาง และหรือไม่ก็เป็นการตัดสินใจตามวิธีการตอบสนองไปยังข้อแนะนำแต่ละข้อ และ 6) แง่มุมเกี่ยวกับการสนทนากันที่เกี่ยวข้องกับบทนิยามที่แตกต่างกันอย่างที่เป็นการเจรจาต่อรองและการโต้แย้ง

การกำหนดให้เอกลักษณ์เป็นสิ่งใหม่ไปยังนักเรียน และเป็นข้อเสนอแนะในการยกตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิมเพื่อข้อคาดการณ์ นักเรียนจะเสนอเพื่อให้พิจารณาตรงกันกับการยกเว้นสิ่งที่ไม่ต้องการเอกลักษณ์ในกรณีต่อมาคือ ถ้าข้อคาดการณ์อยู่ภายใต้การอภิปรายกันแล้วไม่มีการยกตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิมในทฤษฎีของนักเรียน ถ้าจำนวนของข้อคาดการณ์ซึ่งเป็นการแยกออกโดยการใช้เอกลักษณ์ที่เกี่ยวกับกลุ่มของผู้ใช้การยกเว้นสิ่งที่ไม่ต้องการจำนวน

น้อยที่สุด และถ้าจำนวนการยกตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิม เพื่อให้ข้อคาดการณ์นั้นเชื่อถือได้ในทฤษฎีที่เป็นการยกตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิมไปยังข้อคาดการณ์ หรือเอกลักษณ์ที่อยู่ในข้อคำถามที่กระตุ้นให้เอกลักษณ์อื่น ๆ กลมกลืนกัน

วิธีการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ เป็นแนวทางในการแยกข้อคาดการณ์ที่ไม่ต้องการออกไป วิธีการนี้จะเริ่มต้นด้วยการแสดงข้อคิดเห็นออกมาเป็น "ตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิม (Counterexample)" ที่สามารถจะเป็นการมองข้ามไป เพราะว่าข้อคาดการณ์ที่ไม่ต้องการไม่ได้เป็นตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิม อย่างที่ข้อคาดการณ์นั้นไม่ได้อยู่ภายในการอ้างถึงความคิดรวบยอดของบทนิยาม (Concept definition)" ในทางตรงกันข้าม คำกล่าวคัดค้านที่เห็นอยู่ในฐานะที่เป็นสิ่งแปลกประหลาด ซึ่งจะไม่ได้รับอนุญาตทำให้เสียกระบวนการตามทฤษฎีที่เข้ากันได้ อย่างกรณี นักเรียนคนหนึ่งแนะนำให้รู้จักกับลูกบาศก์อย่างไม่จริงใจ (ลูกบาศก์ประกอบด้วยช่องว่างตามรูปทรงของลูกบาศก์ภายในตัวมัน) คือตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิมไปจนถึงข้อคาดการณ์ของ Euler เริ่มต้นด้วย V- E + F = 16 ˚, 24 + 12 = 4 นักเรียนคนอื่น ๆ ใช้ วิธีการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ เพื่อโต้แย้งว่าช่องว่างของลูกบาศก์ไม่ได้ทำการคุกคามไปยังข้อคาดการณ์ อย่างที่มันไม่ได้ทำให้ไม่เป็นความจริงเกี่ยวกับความเป็นรูปทรงหลายเหลี่ยม ความคิดรวบยอดเกี่ยวกับรูปทรงหลายเหลี่ยมหลังจากที่กลายมาเป็นจุดสนใจของการอภิปรายถึงด้วยคำนิยามอย่างที่เป็นการกำหนดขึ้นหรือสร้างขึ้นมาอย่างชัดเจนสำหรับช่วงเวลาแรก อย่างที่ 'รูปทรงตันจะมีพื้นผิวที่ประกอบด้วยพื้นผิวของรูปหลายเหลี่ยม' (ช่องว่างของลูกบาศก์ก็เป็นรูปหลายเหลี่ยม) และ 'พื้นผิว 1 พื้นผิวจะประกอบด้วยระบบที่เกี่ยวข้องกับรูปหลายเหลี่ยม' (ช่องว่างของลูกบาศก์เป็นไปไม่ได้ที่จะเป็นรูปทรงที่มีหลายด้าน การใช้วิธีการไม่ยอมรับความแปลกใหม่ที่เป็นข้อคาดการณ์เริ่มแรกคือ สิ่งที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลง แต่ความหมายในบริบทที่เกี่ยวข้องภายในข้อคาดการณ์นั้นบางทีอาจจะเปลี่ยนแปลง

(3) วิธีการปรับเปลี่ยนความแปลกใหม่ (The Method of Monster Adjustment)

การย้อนกลับมาตีความตามข้อคาดการณ์ที่ถูกนำเสนอขึ้นมาแล้วก่อนหน้านี้ หรือจากการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม อย่างที่แนวคิดของนักเรียนแต่ละคนจะได้ไม่ขัดกับข้อคาดการณ์ที่ต้องการ ด้วยการปรับเปลี่ยนข้อคาดการณ์ โครงสร้างของข้อยกเว้น อย่างที่มันมีความเหมาะสมตามรูปแบบ สิ่งที่ใช้บ่อย ๆ ที่เกี่ยวพันกันกับการปรับให้คำจำกัดความของโครงสร้างเดียวหรือหลาย ๆ โครงสร้าง อย่างที่มีความแปลกใหม่ที่เป็นการทำให้มีความสอดคล้องกัน ที่มีการเปลี่ยนแปลงหรือทำให้แบ่งแยกออกเป็นส่วน ๆ ภายในสิ่งที่สามารถเป็นการบรรลุข้อตกลงโดยรูปแบบที่อยู่เบื้องหลังทั้งหมด มีการย้อนกลับมาตีอย่างหลากหลายที่วิธีการพลิกแพลง ดังที่สามารถทำโดยใช้นอกเหนือจากตัวอย่าง

(4) วิธีการไม่ยอมรับข้อโต้แย้ง (The method of Exception-barring)

"...ตัวฉัน...เกี่ยวข้องกับเหตุการณ์ที่ตั้งชื่อว่า 'การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม' มันเป็นการยอมรับความจริงที่ถูกต้องพวกเขาเท่ากันกับสิ่งที่สนับสนุนตัวอย่าง แต่อย่างไรก็ตาม

การระบายสีของพวกเขาอยู่ในสีของสงคราม ดังที่เป็น...ความหวาดกลัวอย่างหนึ่งขณะอยู่ด้านหน้าของเขา และเป็นการกระตุ้นให้อยากการปลดปล่อยความสวยงามออกมา และมีความคิดสร้างสรรค์ในการพิสูจน์ทั้งหมด ไม่ พวกเขาจะต้องยอมรับ (Exceptions)" เบต้า (Beta) นักเรียนในการศึกษา

วิธีการที่ Lakatos แสดงถึงในเรื่องของการยกเว้น (Exception) คือข้อควรพิจารณาอยู่ 2 เหตุผลได้แก่ 1) การเน้นไปที่บทบาทหน้าที่ในคณิตศาสตร์ อย่างแบบดั้งเดิมที่นึกถึงเกี่ยวกับความถูกต้องแม่นยำของเนื้อหาสาระในเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับการยกเว้นที่ตั้งใจจะใช้อำนาจของนักคณิตศาสตร์ไปยังการละทิ้งจากข้อคาดการณ์ 2) Lakatos แสดงถึงวิธีการของการยกเว้น ที่ค่อนข้างจะตรงไปตรงมามากกว่าที่จะเป็นตัวอย่างที่น่ารำคาญ ที่บางทีเราอาจจะมองข้ามไปในฐานะสิ่งแปลกประหลาด ซึ่งเราสามารถนำมาเป็นการสนับสนุนไปสู่ความรู้ Lakatos กล่าวถึง 2 รูปแบบของ Exception-barring ได้แก่ Piecemeal exclusion, Strategic withdrawal และ Piecemeal exclusion ดำเนินการด้วยการยกเว้นตามการแยกออกไปจากทั้งหมดของห้องเกี่ยวกับการยกตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิม สิ่งนี้ทำไม่ได้โดยการกล่าวสรุปทั่ว ๆ ไปจากการยกตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมไปยังชั้นเรียนที่เกี่ยวข้องกับการยกตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมที่มีสมบัติแบบนี้แน่นอน ตัวอย่างเช่น นักเรียนทำการสรุปผลจากช่องว่างของลูกบาศก์ไปยังรูปทรงที่มีหลายหน้า (Polyhedra) โดยปราศจากรูโพรง V- E + F = 2 ดังนั้น การยกเว้นก็เป็นการเห็นด้วยว่าสิ่งนั้นเป็นสิ่งที่หาเหตุผลสนับสนุนได้ (อย่างรูปทรงที่มีหลายหน้า) ขณะที่ไม่เห็นด้วยกับสิ่งแปลกประหลาดและสนับสนุนตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมเพื่อปรับปรุงข้อคาดการณ์ที่ผิดพลาดให้ดีขึ้นโดยการเปลี่ยนขอบเขตของความรู้ ความคิด ความสนใจไปยังสิ่งที่อ้างถึง Strategic withdrawal เป็นวิธีการอย่างหนึ่งที่ไม่ได้ใช้การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมอย่างตรงไปตรงมาซึ่งจะใช้ตำแหน่งของตัวอย่างของข้อคาดการณ์และสรุปรวมจากสิ่งที่นำไปสู่การจัดแบ่งที่เป็นไปตามวัตถุประสงค์ และที่มีมากกว่าข้อจำกัดของเนื้อหาที่สำคัญของข้อคาดการณ์ที่นำไปสู่การจัดแบ่งนี้ ตัวอย่างเช่น นักเรียนทำการสรุปจากรูปทรงที่มีหลายหน้าที่สม่ำเสมอไปจนถึงรูปทรงที่มีหลายหน้านูนออกมา และหลังจากนั้นก็ปรับปรุงข้อคาดการณ์ของ Euler ตาม 'สำหรับรูปทรงที่มีหลายหน้านูนออกมา คือ V- E + F = 2'

1) การแยกออกไปทีละชิ้น (Piecemeal exclusion) หมายถึง การพิจารณาการยกตัวอย่างที่ค้านกับตัวอย่างเดิมและการค้นหาความคิดรวบยอดที่ครอบคลุมเพียงข้อคาดการณ์นี้ หลังจากนั้นก็ปรับปรุงข้อคาดการโดยการรวมเอกลักษณ์ที่ครอบคลุมเป็นตัวแทนของความคิดรวบยอด คำพูดที่เกี่ยวข้องกับการแยกออกไปทีละชิ้นได้แก่ ทุก ๆ อย่างเป็น, จำนวนทั้งหมด, สิ่งทั้งหมด, ทั้งสิ้น, ทั้งปวง, ทั้งหลาย, ล้วนแต่, ตลอด, ทุกคน, ทุก ๆ, ใด ๆ , มาก , นอกจาก,นอกจากว่า, เว้นแต่, ยกเว้น, เว้น, ไม่รวม, ไม่ใช่ เป็นต้น

2) ยุทธวิธีนำกลับคืนมา (Strategic withdrawal) หมายถึง การพิจารณาถึงสถานะหรือตำแหน่งของข้อคาดการณ์ การค้นหาความคิดรวบยอดซึ่งครอบคลุมเพียงข้อคาดการณ์นี้

และการจำกัดขอบเขตของข้อคาดการณ์ไปยังความคิดรวบยอด คำพูดที่เกี่ยวข้องกับยุทธวิธีนำกลับคืนมา ได้แก่ สำหรับทุก ๆ, แต่ละ, ไม่, แตกต่างกัน, เป็น, เป็นไปได้, เหมาะสม, เปลี่ยน, ปรับ, เพิ่มเติม เป็นต้น

(5) วิธีการรวบรวมข้อโต้แย้ง

วิธีการรวบรวมข้อโต้แย้ง เป็นการพิจารณาวัตถุประสงค์ อันที่เป็นการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมเหมือนกันกับข้อคาดการณ์หรือขั้นหนึ่งของการพิสูจน์ และใช้ตัวอย่างนี้ปรับปรุงอย่างใดอย่างหนึ่งในจำนวนสองอย่างของข้อคาดการณ์ สิ่งที่มีข้อผิดพลาดของการพิสูจน์หรือทั้งสองอย่าง

1) การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่เป็นกรณีทั่วไป (Global counterexample) เป็นการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมไปจนถึงข้อคาดการณ์

2) การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่เป็นกรณีเฉพาะ (Local counterexample) เป็นการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมหนึ่งตัวอย่างจากข้อคาดการณ์ในการพิสูจน์ 6 วิธีการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้ง (The method of proofs and refutations)

วิธีการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้ง เป็นวิธีการหนึ่งของวิธีการรวบรวมข้อโต้แย้ง ที่ตั้งชื่อขึ้นมาใหม่ โดยเพิ่มวิธีการค้นหาการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่ทำให้มีความชัดเจนมากขึ้น ซึ่งประกอบด้วยการใช้ทั้งการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่เป็นกรณีทั่วไปและการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่เป็นกรณีเฉพาะในโครงสร้างของการพิสูจน์ไปจนเสนอแนะการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิม โดยการค้นหาเอกลักษณ์ซึ่งไม่ได้ทำตามกฎเกณฑ์ทั้งหมด สำหรับเป้าหมายที่สมบูรณ์ วิธีการพิสูจน์และให้เหตุผลโต้แย้ง เป็นมากกว่าวิธีการของนักปรัชญาที่เกี่ยวข้องกับการค้นพบที่ประกอบด้วย 4 ขั้นตอนเริ่มแรกได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 เป็นข้อคาดการณ์พื้นฐาน ขั้นตอนที่ 2 เป็นการพิสูจน์ มีลักษณะที่เป็นทำการคิดอย่างหยาบ ๆ ผ่านประสบการณ์หรือการโต้แย้ง การแยกออกเป็นส่วน ๆ ของข้อคาดการณ์พื้นฐานไปยังข้อคาดการณ์ย่อยหรือบทแทรกที่บางครั้งซ่อนอยู่ ขั้นตอนที่ 3 เป็นการทำให้ปรากฏตัวของการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมโดยรวม การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมเป็นลักษณะโดยรวมในความรู้สึกที่จะประยุกต์ใช้ไปสู่ข้อคาดการณ์พื้นฐานทั้งที่เหมือนกันมากว่าอย่างหนึ่งของขอคาดการณ์ย่อย และขั้นตอนที่ 4 เป็นการวิเคราะห์เกี่ยวกับการพิสูจน์เพื่อที่จะค้นหาบทแทรก บางทีอาจจะซ่อนอยู่ ไปยังส่วนที่เป็นการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมเป็นลักษณะโดยรวมของการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมโดยเฉพาะ ผลของแต่ละขั้นจะเป็นการปรับปรุงข้อคาดการณ์ที่ปรากฏขึ้นมาใหม่จากความคิดรวบยอดเกี่ยวกับการพิสูจน์ทั่ว ๆ ไป

และจุดเริ่มต้นเช่นเดียวกันวิธีการรวบรวมข้อโต้แย้ง (Lemma incorporation) และเป็นการพัฒนาผ่านเกี่ยวกับการโต้แย้งด้วยเหตุผลจนกลายเป็นวิธีการพิสูจน์และให้เหตุผลโต้แย้ง (Proofs and refutations) วิธีการทำงานนี้เป็นไปตามการคาดหมายเพื่อพิสูจน์ข้อคาดการณ์ การรวบรวมข้อโต้แย้ง (Lemma incorporation) ทำได้โดยการจำแนกความแตกต่างโดยรวม

(Global) กับเฉพาะตำแหน่ง (Local) ของตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิม ก่อนหน้านี้คือตัวอย่างหนึ่งที่เป็นตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมที่นำไปสู่ส่วนสำคัญที่สุดของข้อคาดการณ์ และในเวลาต่อมาจะเป็นอีกตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมที่นำไปสู่ขั้นตอนหนึ่งของการพิสูจน์ (หรือหลาย ๆ ข้อโต้แย้ง) การยกตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมบางทีอาจจะเป็นทั้งส่วนโดยรวม (Global) และเฉพาะที่ (Local) หรือเพียงอย่างเดียวกับไม่ได้เป็นอย่างอื่นด้วย เมื่อลักษณะภายนอกกับการยกตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิม ขั้นตอนแรกเป็นการตัดสินใจกับรูปแบบที่ตัวอย่างที่ค้านตัวอย่างเดิมเป็นอยู่ถ้ามันเป็นทั้งส่วนโดยรวม (Global) และเฉพาะที่ (Local) อย่างเช่น มีปัญหาทั้งที่ประกอบด้วยการโต้แย้งและการสรุปผล หลังจากนั้นคน ๆ หนึ่งจะปรับปรุงข้อคาดการณ์โดยการรวบรวมขั้นตอนการพิสูจน์ในฐานะที่เป็นเงื่อนไขสำคัญ ถ้าเป็นตัวอย่างเฉพาะที่ไม่ใช่ตัวอย่างโดยรวม อย่างเช่น ข้อสรุปบางทีอาจจะยังคงเป็นการแก้ไขให้ถูกต้อง แต่เหตุผลสนับสนุนยังเป็นข้อบกพร่องต่อการทำให้น่าเชื่อถือ ต่อมาสิ่งหนึ่งที่ควรจะปรับปรุงขั้นตอนการพิสูจน์แต่กลับปล่อยปะละทิ้งการเปลี่ยนแปลงข้อคาดการณ์ ถ้าเป็นตัวอย่างโดยรวมที่ไม่ใช่ตัวอย่างเฉพาะที่ อย่างเช่น มีปัญหาที่ ประกอบด้วยการสรุปผล แต่ไม่ได้เข้าใจง่ายจนเกิดเป็นข้อบกพร่องในการให้เหตุผลซึ่งก่อให้เกิดการสรุปผล ต่อมาสิ่งหนึ่งที่ควรจะค้นหาคือสมมุติฐานที่ซ่อนอยู่ในขั้นตอนของการพิสูจน์ แล้วปรับเปลี่ยนการพิสูจน์และข้อคาดการณ์โดยการทำข้อคาดการณ์นั้นให้เป็นเงื่อนไขที่เข้าใจง่าย

จากแนวคิดและทฤษฎีการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์กรอบทฤษฎีที่ใช้เพื่อตรวจสอบวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนหรือของนักเรียน และความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ กรอบทฤษฎีที่เน้นไปที่ความแตกต่างของชนิดของวาทกรรมอย่างที่เป็นรู้จักกันในนักเรียนแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตามกิจกรรมที่มีความแตกต่างกัน และโดยเฉพาะการเปล่งเสียงพูดอย่างที่มีความเกี่ยวพันกับการรับรู้ของผู้ฟังโดยตรงของข่าวสารที่ส่งมาจากผู้พูด และวาทกรรมของการอภิปรายกัน เพื่อพิสูจน์และการโต้แย้งข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ที่นักเรียนแต่ละคนเสนอแนวคิดหรือให้เหตุผลสนับสนุน ในการแก้ปัญหาได้ แง่มุมที่ยังไม่ปรากฏในการวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาปลายเปิด คือ แนวคิดของ Lakatos ที่ประกอบด้วยวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการเรียนที่กระตุ้นให้ผู้เรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยตัวเอง (heuristic) ที่จะนำไปสู่พัฒนาการของข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีรูปแบบที่ใช้เกี่ยวกับวิธีการที่จะประเมินข้อคาดการณ์ แต่ไม่ใช่วิธีการที่จะสร้างข้อคาดการณ์ที่สามารถแยกออกมาจากการอาศัยความเข้าใจเกี่ยวกับจิตวิทยาและสังคมวิทยาได้ อย่างที่เกี่ยวข้องกับลักษณะของหลักการทางวิทยาศาสตร์และกระบวนการทางคณิตศาสตร์ จากมุมมองของ Poper ใน 2 แนวทางคือ 1) มีการให้เหตุผลเกี่ยวกับการค้นพบ เป็นกระบวนการสร้างขึ้นมาของข้อคาดการณ์กับแนวคิดของการพิสูจน์ (Proofs ideas) หรือการอธิบายอย่างคร่าว ๆ (Sketch) ที่เป็นเนื้อหาไปสู่กฎเกณฑ์ที่มีเหตุผล และ 2) ความแตกต่างระหว่างการค้นพบ (Discovery) กับการอ้างเหตุผล

(Justification) ตามที่ Lakatos ได้นำแนวคิดมาสร้างเป็นวิธีการพิสูจน์และให้เหตุผลโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

## 5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

### 5.1 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์

Lin et al. (2007) รูปแบบของการเรียนรู้นักเรียนในเรื่องการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ทำการศึกษาโดยการสำรวจขั้นพื้นฐานและการศึกษาเรื่องการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นเกรด 7 จนถึงเกรด 9 แสดงให้เห็นหลักฐานของการมีอยู่ของความต่อเนื่องกันระหว่างโต้แย้งในฐานะที่เป็นยุทธวิธีของการเรียนรู้และผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมาจากข้อคาดการณ์ และระหว่างประสิทธิผลของยุทธวิธีการสอน รายละเอียดในการวิเคราะห์เกี่ยวกับการโต้แย้งของนักเรียน และรูปแบบของกระบวนการโต้แย้งของนักเรียนจะเป็นการอธิบายที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานการโต้แย้งของนักเรียนและผู้ที่มีความชำนาญการคิดในกระบวนการโต้แย้ง งานวิจัยนี้ตั้งอยู่บนพื้นฐานแนวคิดการรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนโดยปกติ มีเป้าหมายที่จะสืบค้นการคิดของนักเรียนและยุทธวิธีที่ใช้ และการสนับสนุนที่แสดงให้เห็นว่าเป็นการนำมาสู่การคิดของนักเรียนที่ใช้การประยุกต์เพื่อออกแบบยุทธวิธีการสอนใหม่ สำหรับการปรับปรุงการเรียนรู้ของนักเรียนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ มุ่งความสนใจไปยังการสืบค้นการสอนและยุทธวิธีการเรียนรู้จนถึงการเชื่อมโยงการรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน เพื่อปรับปรุงการเรียนรู้เรื่องการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ที่ต้องการวิเคราะห์การรู้ในลักษณะการพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งในกลุ่มนักเรียนที่มีความเฉพาะเจาะจง ในการดำเนินการในโรงเรียน เลือกยุทธวิธีที่มีคุณภาพเด่นชัดสำหรับการปรับปรุงการเรียนรู้ และยุทธวิธีสำหรับการเรียนรู้จากการคาดการณ์ ทั้งยุทธวิธีเป็นการประหยัดและทำให้เปลี่ยนแปลงใหม่สำหรับการคิดใหม่ หลักฐานที่ใช้โต้แย้งอย่างที่เป็นยุทธวิธีการเรียนรู้ตามการเปลี่ยนแปลงใหม่ของข้อคาดการณ์ที่เป็นการแสดงให้เห็นแผนการของการวิจัยโดยวิธีการโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ ความต่อเนื่องของแผนการวิจัยมีอยู่ 2 ขั้นตอนคือ ขั้นตอนแรก (2000~03) เป็นการศึกษาที่มีระยะเวลาน้อยกว่าขั้นต่อไปแต่เน้นให้นักเรียนมีความเข้าใจเพิ่มมากขึ้นเกี่ยวกับการพิสูจน์และการตรวจสอบ ขั้นที่สอง (2003~07) เป็นการศึกษาการสอนและการเรียนรู้เกี่ยวกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ 3 ขั้นตอนที่เป็นการทำให้สำเร็จ ช่วงแรกคือ การพัฒนาเครื่องวัด ความเป็นต้นแบบในการศึกษา

และการสำรวจครั้งที่ 6 ในปี 2005 Click, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.) Proceedings of the 29 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp. 3-18. Melbourne: PME. ในการประชุม PME ครั้งที่ 1-3 มีการทำหนังสือเล่มเล็กที่ประกอบด้วยเรื่องที่เกี่ยวกับข้อคำถามทางพีชคณิตและเรขาคณิตของนักเรียนที่เรียนอยู่ในระดับเกรด 7 , 8 , และ 9 เป็นการพัฒนาการสุ่มกลุ่มตัวอย่างสำรวจระดับชาติ และการสำรวจเกรด 7 ที่มีนักเรียนเกี่ยวพันถึง 1181 เกรด 8 ที่มีนักเรียนเกี่ยวพัน

1105 และเกรด 9 ที่มีนักเรียนเกี่ยวพัน 1059 เกี่ยวข้องกับแต่ละสิ่งหรือบุคคลจาก 61, 60 และ 61 ห้องเรียนในการสุ่มมา 18 โรงเรียน รายการที่สำรวจส่วนใหญ่พัฒนามาจากการการศึกษาในภาษาอังกฤษ (Healy & Hoyles, 1998) เป็นการเลือกใช้และปรับเปลี่ยนตามพื้นฐานการตอบสนองของนักเรียนไตหวัน (Taiwan) ในการศึกษาก่อนการนำร่องระหว่างขั้นตอนที่ 1 ของช่วงเวลาแรก ในส่วนที่เพิ่มเติมเป็นกิจกรรมใหม่ที่ค่อย ๆ พัฒนามาจากการสัมภาษณ์ ซึ่งทำให้มีความเป็นไปได้ที่จะทำให้เห็นลักษณะสำคัญของการให้เหตุผลนักเรียนก่อนที่จะมีรูปแบบไปยังการทำด้วยวิธีการในส่วนทั้งที่เป็นเครื่องมือวัดและระบบการเข้ารหัส ช่วงที่สอง การเรียนและการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ เป็นสิ่งที่ประกอบด้วยการผสมผสานกันของโครงการและ 4 โครงการย่อยที่เน้นเกี่ยวกับพีชคณิต (Lin, et al., 2004) เรขาคณิต (Cheng & Lin, 2005) ซึ่งใช้การอ่านในการทำความเข้าใจเกี่ยวกับการพิสูจน์ทางเรขาคณิต (Yang & Lin, 2005) และการเรียนกับการสอนตามความมีเหตุผลของเงื่อนไขเกี่ยวกับคำพูด (Yu Wu et al., 2004) การศึกษาที่มีอิทธิพลอย่างมากผ่านการทำงานของนักวิจัยหลาย ๆ คนในปัจจุบัน อย่างเช่น การแยกแยะในเรื่องรายการที่นักเรียนจะทำการพิสูจน์ (Harel & Sowder, 1998) และความเกี่ยวข้องกันของครูสายการศึกษา (Harel, 2002) การวิเคราะห์การรู้จากการโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ (Duval, 1998, 1999, 2002) กรอบของการพิสูจน์และการตรวจสอบ (Healy & Hoyles, 1998) ความสลับซับซ้อนเกี่ยวกับการตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน (Balacheff, 1987) หน้าที่และคุณค่าของการพิสูจน์ (Hanna, 1996, de Villiers, 1991, Hanna & Jahnke, 1993) และความเกี่ยวพันของทฤษฎีการให้เหตุผลที่มีความคล้ายคลึงกันในโรงเรียน (Garuit, Boero & Lemut, 1998)

ขั้นตอนหนึ่งที่จะนำเข้ามาใกล้ถึงการยอมรับได้ของการพิสูจน์ กลุ่มของนักเรียนที่มีการพิสูจน์ไม่สมบูรณ์เมื่อทำการสำรวจในระดับชาติเป็นการดำเนินการในเดือน ธันวาคม 2002 เกรด 9 ที่ได้เรียนรู้การพิสูจน์อย่างมีแบบแผนในเรขาคณิต จำนวน 3 เดือน ขณะที่เกรด 7 และเกรด 8 ไม่ได้เรียน ตามพื้นฐานการเข้ารหัสตามแผนการของนักเรียนที่เป็นการทำให้การตรวจสอบทางเรขาคณิตบรรลุผลสำเร็จเป็นการจัดกลุ่มใหม่อีก 4 กลุ่มคือ ความสามารถในการยอมรับ (acceptable) ความไม่สมบูรณ์ (incomplete) ความไม่เหมาะสม (improper) และการพิสูจน์ตามสัญชาตญาณ (intuitive proof) ความผิดพลาดของนักเรียนในขั้นแรกเป็นการให้เหตุผลแบบอนุมานที่เป็นตัวอย่างของการพิสูจน์ที่ไม่สมบูรณ์ การให้เหตุผลของนักเรียนที่ไม่ใช่การอนุมานหรือตั้งอยู่บนพื้นฐานคุณสมบัติที่ไม่ถูกต้อง ดังในขอบเขตของ “ความสามารถในการยอมรับการพิสูจน์” กำเนิดมาจากคำกล่าวของ Clark and Invanik (1997) ที่ว่า “การเขียนของนักเรียนและนักวิจัย ไม่ได้เป็นเพียงที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารเนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องกับคณิตศาสตร์เท่านั้น แต่เป็นสิ่งที่เกี่ยวข้องกับการสื่อสารด้วยตัวผู้อ่านแต่ละคน การประเมินค่าทั้งการพิสูจน์ที่เป็นความสามารถในการยอมรับหรือไม่ยอมรับ นักเรียนที่อยู่ในการแยกประเภทที่ทำการพิสูจน์ได้ไม่สมบูรณ์ เป็นการมีความสามารถที่จะยอมรับได้เป็นบางองค์ประกอบที่มี

ความสำคัญมาก สำหรับการให้เหตุผลของพวกเขา (Kuchemann & Hoyles, 2002) พวกเขาจะสามารถจำแนกความแตกต่างที่สามารถสร้างจากส่วนสุดท้ายในการกำหนดกิจกรรม โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ในระยะที่ 2 การพิสูจน์ตามรายการที่พวกเขามีจิตใจจดจ่อที่จะตรวจสอบเงื่อนไขของการประยุกต์ทฤษฎี ตัวอย่างเช่น การให้เหตุผลเล็ก ๆ (Duval, 1999.) พวกเขาจะยังคงสามารถที่จะรวบรวมขึ้นมาเป็นคำกล่าว การเสนอสมมติฐาน

การแสดงออกของนักเรียนที่มีทั้งยุทธวิธีและไม่มียุทธวิธีในการเรียนรู้ นักเรียนจะแสดงด้วยความต้องการที่จะไปถึงความสามารถในการยอมรับการพิสูจน์ จนถึงความสำเร็จที่เปลี่ยนตำแหน่งก่อนหรือหลังจากทีเกิดเพียงการอ่านและกลวิธีการใช้สี ตั้งแต่นั้นมาก็เป็นกระบวนการโดยธรรมชาติ ความต้องการการรู้ของผู้เรียนสำหรับยุทธวิธีนี้มากกว่าการใช้การวิเคราะห์ยุทธวิธีในการถาม ซึ่งต้องการค่อนข้างจะทั้งหมดวิเคราะห์การคิดทั้งหมด

ผลของยุทธวิธีการใช้สี ในระหว่างขั้นตอนนักเรียนไม่เคยชินในข้อใหม่ที่เป็นพัฒนาสำหรับผู้มีส่วนร่วมใหม่ ก่อนที่จะเกิดการอ่านและยุทธวิธีใช้สี จนสามารถทำได้ นับเป็นความสามารถในการพิสูจน์จนสามารถยอมรับได้ และตำแหน่งที่ ไม่สามารถทำให้ยอมรับได้ ตัวอย่างเช่น ความไม่สมบูรณ์ หรือถูกต้องเหมาะสม หรือไม่มีผลตอบรับ ผู้เข้าร่วมได้ทำงานบางครั้ง หลังจากการสอดแทรกขึ้นมาด้วยการอ่านและยุทธวิธีการใช้สี มีความก้าวหน้าจนถึงความสามารถยอมรับการพิสูจน์ได้

การตัดสินใจตามข้อคาดการณ์ที่ผิดพลาด ในบางข้อของหนังสือเล่มเล็กเป็นการเชื่อมโยงไปยังวิธีการให้เหตุผลของนักเรียนที่ทำให้พวกเขาตัดสินใจตามที่แสดงถึงข้อคาดการณ์ที่ผิดพลาด นักเรียนต้องการที่จะถามถึงการตัดสินใจระหว่างตัวเลือกที่เห็นด้วย กับไม่เห็นด้วย หรือที่ไม่มีความมั่นใจ (ข้อที่เกี่ยวกับพีชคณิต) และหลังจากที่ให้การอธิบายตามตัวเลือกของพวกเขา ความเป็นเอกภาพของรหัสรายการที่เป็นการค่อย ๆ พัฒนาสำหรับทั้งที่เป็นพีชคณิตและเรขาคณิตจากการสำรวจ ความเข้าใจรหัสเป็นการใช้วิเคราะห์การทำให้บรรลุผลสำเร็จของนักเรียน ที่ตั้งอยู่บนพื้นฐานของความเข้าใจรหัสที่เป็นรูปแบบของการโต้แย้ง จะเป็นการอภิปราย

บทสรุป บนพื้นฐานการศึกษาของเรา มีหลักฐานที่แสดงถึงการมีอยู่ของความต่อเนื่องในแง่มุมที่แตกต่างกันที่เกี่ยวกับคณิตศาสตรศึกษา ในมุมมองการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ค่อนข้างจะมีเปอร์เซ็นต์สูงของนักเรียน เป็นความสามารถที่ได้ผลมาจากข้อคาดการณ์ที่ถูกต้อง เมื่อทำการโต้แย้ง ตามกิจกรรมที่เกิดข้อคาดการณ์ สิ่งนี้แสดงให้เห็นว่าการมีอยู่อย่างต่อเนื่องระหว่างกระบวนการโต้แย้งและผลที่เกิดมาจากการพูดความจริง สำหรับนักเรียนบางคน ความต่อเนื่องนี้สามารถทำให้ขยายออกไปสู่กระบวนการพิสูจน์ของพวกเขา โดยแท้จริงแล้ว นักเรียนบางคนพร้อมที่จะหาตัวอย่างมาค้านตัวอย่างเดิมด้วยการวิเคราะห์หรือการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ไปยังการโต้แย้งของข้อคาดการณ์ที่ผิดพลาด ในแง่มุมการสอนคณิตศาสตร์ ผลที่เกิดจากการอ่านและกลวิธีการใช้สีของรูปเรขาคณิตในขั้นการพิสูจน์ขั้นที่ 2 แสดงให้เห็นว่าครูสามารถรักษาการวิธีสอนแบบเดิมของตัวเองไว้ได้ ซึ่งพวกเขาสามารถกระตุ้นให้นักเรียน แสดงเครื่องหมายของข้อมูลที่มี

ความหมายพร้อมด้วยการให้ข้อเสนอสนับสนุนการสรุปสมมติฐานและข้อสรุป และการค้นหาการเชื่อมโยงระหว่างการอ้างหลักฐานและข้อสรุป แต่ข้อแนะนำของนักเรียนตามการใช้สีวาดสำหรับเครื่องหมาย ครูสามารถกระตุ้นความสามารถในการพิสูจน์ของนักเรียนได้ อิทธิพลของความต่อเนื่องระหว่างผลกระทบจากยุทธวิธีของการสอนและยุทธวิธีของการสอนแบบเดิม การสร้างความก้าวหน้าอย่างไม่หยุดยั้งของการค้นหาประเด็นสำคัญของการคิดอย่างละเอียด จนเป็นการเชื่อมโยงด้วยการสะท้อนตามขั้นตอนที่อยู่ก่อนนี้ การทำให้สำเร็จมากกว่าการทดสอบตาม ผลสะท้อนจากกิจกรรมการโต้แย้งด้วยข้อคาดการณ์จะสร้างกลุ่มของความสมดุลเกี่ยวกับกิจกรรมที่เป็นข้อคาดการณ์ที่มีความเหมาะสมสำหรับทำให้เกิดความแตกต่างของข้อสรุปวินิจฉัย

จากการศึกษาของ Lin et al. (2005) และงานวิจัยชิ้นอื่น ๆ ลักษณะและองค์ประกอบของชั้นเรียนที่ยังไม่ได้ทำการศึกษาคือ การพิสูจน์ด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน อย่างที่เป็นวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ในบริบทของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ใช้ปัญหาปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเป็นเครื่องมือกระตุ้นให้นักเรียนเกิด วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน

**5.2 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์, การโต้แย้งให้เหตุผล และการสื่อสารในชั้นเรียนคณิตศาสตร์**

Sekiguchi (2002) ทำการศึกษาเกี่ยวกับความสัมพันธ์ระหว่างการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และการให้เหตุผลโต้แย้งที่เป็นการอ้างเหตุผลจากมุมทางวัฒนธรรมในชั้นเรียนญี่ปุ่น สิ่งแรกเป็นรูปแบบการสื่อสารในวัฒนธรรมญี่ปุ่นที่อธิบายถึงการเปรียบเทียบกับของวัฒนธรรมตะวันตก และการให้เหตุผลโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในโรงเรียนของญี่ปุ่นที่มีการพิจารณาตรวจสอบ มุ่งเน้นไปที่วิธีการที่ทั้งสองอย่างเกี่ยวโยงไปยังรูปแบบทั่วไปของการสื่อสารในวัฒนธรรมของญี่ปุ่น เป็นการอ้างเหตุผลที่จะทำให้เป็นวัฒนธรรมที่แตกต่างสำหรับญี่ปุ่นจนถึงทำให้การให้เหตุผลโต้แย้งเป็นจริงในชั้นเรียน และเพื่อการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในฐานะที่เป็นกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับการโต้แย้ง นับตั้งแต่ Imre Lakatos แสดงให้เห็นเกี่ยวกับมุมมอง การโต้แย้งให้เหตุผลของการพัฒนาเกี่ยวกับความรู้ทางคณิตศาสตร์ในงานของเขาคือ Proofs and Refutations (1976) แนวคิดเกี่ยวกับกระบวนการโต้แย้งให้เหตุผลที่เป็นไปตามความจริงในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่ตรวจสอบหาความจริงของการตั้งข้อพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในบริบทของชั้นเรียนที่มีการโต้แย้งให้เหตุผล ในการเปลี่ยนแปลงของข้อคาดการณ์ การอภิปราย การอ้างเหตุผล และการโต้แย้งกันระหว่างนักเรียน (Balacheff, 1987, 1991a, 1991b; Sekiguchi, 1991) เมื่อเร็ว ๆ Balacheff แนะนำถึงอุปสรรคของการใช้การโต้แย้งให้เหตุผลในบริบทของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และมุ่งไปที่มีความเป็นช่องว่างของการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีของธรรมชาติและความรู้ระหว่าง การให้เหตุผลโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์: "การให้เหตุผลโต้แย้งประกอบด้วยอุปสรรคของการศึกษาเกี่ยวกับทฤษฎีของธรรมชาติและความรู้ไปยังการเรียนรู้ของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ และยิ่งกว่ารูปแบบทั่วไปของ

การพิสูจน์ในคณิตศาสตร์ " สำหรับวัตถุประสงค์ของการวิจัยนี้เพื่อเสนอความคิดรวบยอดของการสื่อสารในฐานะที่รวมกรอบทั้งหมด ที่พิจารณาว่า (1) แง่มุมทางวัฒนธรรมเป็นผลสะท้อนที่ดีในรูปแบบของ การสื่อสาร (2) การโต้แย้งให้เหตุผลเป็นรูปแบบหนึ่งของการสื่อสารด้วยการพูด และ (3) การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นองค์ประกอบที่สำคัญของการสื่อสารในชุมชนคณิตศาสตร์

การสื่อสารและการโต้แย้งให้เหตุผลในวัฒนธรรมของญี่ปุ่น ดังที่ Barnlund (1975) มุ่งความสนใจไปที่วัฒนธรรมดั้งเดิมของญี่ปุ่นที่เป็นสิ่งที่มีคุณค่าสูงมากในเรื่องการสื่อสารทางการพูดที่ทำให้การสื่อสารอย่างมีชีวิตชีวา เป้าหมายของการสื่อสารในสาธารณะแสดงถึงความสามัคคี ("wa") ในระหว่างอยู่ร่วมกัน ด้วยเหตุนี้ ผู้คนจึงหลีกเลี่ยงการแสดงออกที่ปรากฏชัดเจนเกี่ยวกับความรู้สึกที่ไม่เห็นด้วยในที่สาธารณะ ความสามัคคีเป็นสัญลักษณ์ที่ปรากฏให้เห็นพฤติกรรมการแสดงออกด้วยคำพูดและอย่างอื่น ๆ ในชุมชน ที่เน้นความรับผิดชอบตามหน้าที่ทางสังคม ("gimu" "giri" "tatemae") การทำงานร่วมกันจะมีมากกว่าการแข่งขันกันทำงานเป็นสิ่งที่มีคุณค่าสูงมากในชุมชน แม้กระทั่งในการประชุมทางวิชาการ คนญี่ปุ่นเขาจะไม่เปิดเผยข้อโต้แย้งพร้อมกันกับคนอื่น การแสดงการคัดค้านออกมาโดยตรงเป็นการพิจารณาแล้วว่าเป็นสิ่งที่ไม่สุภาพ การคัดค้านตามปกติจะเป็นการทำอย่างอ้อมค้อมหรือการใช้ถ้อยคำหรือภาษาที่สุภาพนุ่มนวลลดความรุนแรงลงแสดงออกมา (Nakayama, 1989) การสื่อสารรูปแบบนี้ของคนญี่ปุ่นบางทีอาจจะเรียกว่า เป็นแบบ "กลุ่ม" (Befu, 1980)

ตารางที่ 3 แสดงความแตกต่างของรูปแบบการสื่อสารระหว่างคนญี่ปุ่นกับคนอเมริกัน

| | คนญี่ปุ่น | คนอเมริกัน |
|---|---|---|
| เป้าหมาย | ความสามัคคีกันในสังคม ("wa") | ความถูกต้องของข้อสรุป |
| เนื้อหาสาระ | เจตคติระหว่างบุคคล (human relations) | ความคิดเห็นของบุคคล |
| ความหมาย | สัญชาติญาณที่ตั้งอยู่บนการแลกเปลี่ยน | การพูดโต้แย้ง |
| ความคิดเห็นที่แตกต่างกัน | เป็นความพยายามหลีกเลี่ยง | มีคุณค่าสูงมาก |

การโต้แย้งและการพิสูจน์ในชั้นเรียนญี่ปุ่น ในโรงเรียนของญี่ปุ่นกระบวนการของชั้นเรียนเป็นแบบทั้งที่มีรูปแบบและไม่มีรูปแบบที่เกิดโอกาสที่ดี ในความเข้าใจของวัฒนธรรมทั่วไปของคนญี่ปุ่น บทเรียนในชั้นเรียนปกติจะประกอบด้วยเรื่องที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการ

เปลี่ยนแปลงความคิดทั้งชั้นเรียนหรือเป็นกลุ่มเล็ก เรียกว่า “hanashi-ai” เทียบได้กับสังคมผู้ใหญ่ "hanashi-ai" ที่อยู่ในชั้นเรียนทั้งชั้น ดูเหมือนจะทำตามรูปแบบของกลุ่มและ "hanashi-ai" ในกลุ่มเล็กๆ ดูเหมือนจะทำตามรูปแบบของการเปลี่ยนแปลงทางสังคม

วัฒนธรรมของคนญี่ปุ่นการเผชิญหน้ากับการโต้แย้งของใครสักคนในที่สาธารณะเป็นสิ่งที่ไม่ได้รับการสนับสนุน การคัดค้านจะไม่เกิดขึ้นโดยตรงหรือถูกแสดงออกด้วยการใช้ถ้อยคำหรือภาษาที่สุภาพนุ่มนวลลดความรุนแรงลง ในโรงเรียนนักเรียนไม่ได้รับการสอนให้อยู่รวมกันเป็นสังคมทั้งหมด เพื่อไปยังวัฒนธรรมผู้ใหญ่จากระยะเริ่มแรก แต่บางทีพวกเขาจะแสดงการคัดค้านออกมาโดยตรงหรือไม่เห็นด้วยในการพูดคุยที่อยู่ในห้องเรียน และอาจจะทำให้อยู่ในอันตรายกับความสามัคคีกันในชั้นเรียน บทบทของครูเป็นสิ่งสำคัญที่จะแสดงบทบาทชั้นเรียนนี้ โดยทั่วๆ ไป การแสดงออกของครูจะเป็นความเอาใจใส่ไปยังความคิดของนักเรียนแต่ละคน ไม่ว่าพวกเขาจะผิดหรือไม่ ครูพยายามที่จะใช้ความขัดแย้งระหว่างการกล่าวอ้างของนักเรียนเป็นโอกาสที่ดีที่จะทำให้นักเรียนเข้าใจได้ลึกยิ่งขึ้นในเรื่องประเด็นคำถาม สิ่งนี้เป็นสิ่งที่ครูลงมือทำให้เกิดความขัดแย้งไม่เพียงเป็นปัญหาระหว่างนักเรียนที่เกี่ยวพันถึง แต่เพิ่มกรอบของปัญหาของทั้งชั้นจากความขัดแย้งนั้น ความขัดแย้งที่เป็นการแลกเปลี่ยนกันในระหว่างการมีส่วนร่วมในชั้นเรียน และกลายมาเป็นปัญหาของพวกเรา (ตัวอย่างเช่น Lewis, 1995, pp. 125-130) ครูจะคอยกระตุ้นให้กำลังใจทั้งชั้นเรียนเพื่อให้คิดเกี่ยวกับปัญหาและให้ข้อเสนอแนะ สมาชิกทุกคนในชั้นเรียนจะคาดการณ์เพื่อการทำงานตลอดเวลา เพื่อนำไปเป็นความตั้งใจอย่างแน่วแน่ในการแก้ปัญหา ดังที่ค้นหาผลของการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นการฟื้นคืนสู่สภาพปกติของความสามัคคีในชุมชนของชั้นเรียน

ครูญี่ปุ่นจะถามคำถามด้วยปัญหาปลายเปิดเป็นบางครั้งในการเปิดหรือเริ่มต้นของบทเรียน (ตัวอย่างเช่น Becker et al., 1990) ครูจะกระตุ้นนักเรียนให้แสดงความคิดของตัวเองเพื่อหาวิธีการในการแก้ปัญหา ในบทเรียนครูจะถามนักเรียนเพื่อที่จะทำ “hanashi-ai” ในกลุ่มย่อย หรือทั้งชั้นเรียน บ่อยครั้งที่นักเรียนคาดการณ์ผิดในการคิด และกระบวนการทำที่ผิดพลาด ยิ่งไปกว่านั้น นักเรียนบางทีจะมีผลลัพธ์ของวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ครูจะกระตุ้นให้พวกเขาเปรียบเทียบความคิดกับวิธีการของคนอื่นๆ ที่เป็นสาเหตุให้เกิดการยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมบางทีอาจจะผิดพลาด การโต้แย้งกับตัวอย่างเดิมบางทีอาจจะปรากฏขึ้นมา ครูตั้งใจที่จะใช้โอกาสอย่างนี้กระตุ้นการคิดของนักเรียน คนญี่ปุ่นมีประเพณีดั้งเดิมที่ทำให้อยู่ในระเบียบวินัยเป็นผลมาจากความเชื่อที่ผสมปนเปกันหรือกับศาสนาพุทธ ในท้องถิ่นที่เน้นการสะท้อน “hansei” ของคนๆ หนึ่งที่ทำผิดพลาดและการยกย่องการเผยแพร่ของคนอื่นๆ ซึ่งสนับสนุนการร่วมมือกันระหว่างนักเรียน ดังที่อาจจะ “hanashi-ai” ในที่สุดก็สรุปด้วยวิธีการแก้ปัญหาที่ดีที่สุด ที่ถูกต้องมีประสิทธิภาพ การกระทำที่มีส่วนผสมระหว่างความเรียบง่าย ทักษะและความสวยงาม การแข่งขันระหว่างนักเรียนเป็นสิ่งธรรมดาทั่วไปที่ทำให้หมดกำลังใจ เพราะฉะนั้น ในหลักการพื้นฐาน จะไม่มีผู้ชนะหรือผู้สูญเสียอยู่ใน “hanashi-ai,” ไม่เหมือนรูปแบบการโต้แย้งของชาวตะวันตก

การโต้แย้งเป็นพื้นฐานของเราที่ตั้งอยู่บนการสังเกตในชั้นเรียนของญี่ปุ่น ที่ใช้วิธีการเกี่ยวกับการพิสูจน์ การวิเคราะห์หนังสือ และวัฒนธรรมตามสัญชาติญาณที่เป็นของคนญี่ปุ่น เพราะฉะนั้น การโต้แย้งนี้จะเป็นการพิจารณาจากการทำงานตามสมมุติฐานการศึกษาในอนาคต ความคิดรวบยอดของการพิสูจน์ บทเรียนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนญี่ปุ่นจะเน้นความเข้าใจ "wakaru" (understanding) ของความคิดทางคณิตศาสตร์ การจดจำสูตรและทักษะที่มีผู้พาทำที่ไม่ได้เป็นการพิจารณาไปยังศูนย์กลางของเรื่องการเรียนรู้ คณิตศาสตร์ในโรงเรียน ครูจะเป็นคนกระตุ้นให้นักเรียนเข้าใจเหตุผลของการใช้คณิตศาสตร์ เหตุผล (Reasons) เป็นขอบเขตที่ทำให้ตื่นตัวหรือ (riyu) กิจกรรมของการค้นหาและกาอธิบายทำให้เกิดความตื่นตัวที่จะพิจารณาได้ง่าย ๆ สำหรับการเรียนรู้การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในญี่ปุ่น

การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในญี่ปุ่นเรียกว่า "shoumei" โรงเรียนในญี่ปุ่น ขอบเขตของคำว่า "shoumei" เป็นการแนะนำครั้งแรกให้นักเรียนได้รู้จักกับบทเรียนเรขาคณิตในคณิตศาสตร์ระดับเกรด 8 หลังจากนั้น "shoumei" เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่ถูกกล่าวถึงจะเป็นปกติที่จะใช้ให้คำจำกัดความอย่างที่แสดงอยู่ว่าสิ่งที่กล่าวถึงเป็นความจริง ใช้การให้เงื่อนไข และเตรียมการยอมรับสิ่งต่าง ๆ ว่าเป็นจริง และ "shoumei" เป็นการยอมรับเกี่ยวกับ อย่างเฉพาะตามชนิดของ "setsumei," ลักษณะของคณิตศาสตร์

การสอนในเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ดูเหมือนจะเป็นความเข้าใจดั้งเดิมเกี่ยวกับการพูดถึงรูปแบบกลุ่มที่ดีกว่าของการสื่อสารของคนญี่ปุ่น เป้าหมายของการพิสูจน์เป็นการค้นหาที่มีข้อสรุปเป็นเอกฉันท์ ซึ่งจะช่วยให้เกิดความสำเร็จในการสร้างความสามัคคีในชุมชน การพิสูจน์ต้องการที่จะทำตามการยอมรับข้อเสนอสนับสนุนการสรุปสมมติฐานในชุมชน ซึ่งช่วยรักษาความสามัคคีของสมาชิกในชุมชน การพิสูจน์อาศัยสิ่งที่แลกเปลี่ยนกันในชุมชน ได้แก่ "Hanashi-ai" ในรูปแบบกลุ่มที่อาศัยการแลกเปลี่ยนความรู้สึกและความคิดในชุมชน การใช้สมบัติของสิ่งเหล่านี้ที่ไม่ได้เป็นเพียงการยอมรับ ("proved") เป็นสิ่งที่ไม่อนุญาตในการพิสูจน์ สิ่งที่เป็นความถูกต้องไม่ได้เป็นเนื้อหาของความคิด เพราะฉะนั้น ความแตกต่างกันของความคิดไม่ได้มีคุณค่าในการพิสูจน์ อย่างที่ "hanashi-ai" ในรูปแบบกลุ่ม การให้คำนิยาม ใช้ตรวจสอบความหมายของบริบททางคณิตศาสตร์ในลำดับต่อมาที่หลีกเลี่ยงความสับสนหลาย ๆ อย่างระหว่างสมาชิก

กระบวนการพิสูจน์ตามรูปแบบกลุ่มของการสื่อสารในที่สาธารณะของคนญี่ปุ่น มีความน่าสนใจที่สาระสำคัญของวัฒนธรรม "wa" ในญี่ปุ่นการสอนการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์และโครงสร้างของ "hanashi-ai" ในชั้นเรียนญี่ปุ่นดูเหมือนมีมากกว่าความสอดคล้องกันกับประเพณีเดิมของรูปแบบการสื่อสารของคนญี่ปุ่นกว่ารูปแบบของ Toulmin แนวคิดที่เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้ในเรื่องการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จะเป็นตำแหน่งในบริบทของกิจกรรมที่มีการโต้แย้งดูเหมือนจะมีอคติสูงมากจากวัฒนธรรมตะวันตก การเขียนสำหรับการพิสูจน์ การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นการกระทำจากผลของการเขียนเนื้อหาอย่างที่มีแง่มุมที่แตกต่างกันอย่างขัดเจน

(Ernest, 1998, p.168) รูปแบบของการสื่อสารดูเหมือนจะนำไปเขียนเป็นรูปแบบของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ต่อไป

ในสหรัฐอเมริกา 2 รูปแบบแนวตั้งเป็นรูปแบบปกติสำหรับการเขียนพิสูจน์ในเรขาคณิตระดับมัธยมศึกษา และบางครั้งก็มีในพีชคณิต ตามรูปแบบนี้การพิสูจน์ดูเหมือนกระดาษคำนวณ แนวคิดหนึ่งที่เขียนแผนผังนำไปสู่การอธิบายด้วยตัวอย่างที่ให้ข้อมูลและรายการในขอบเขตของแผนผังที่ให้ข้อมูลและคำพูดในการพิสูจน์ หลังจากนั้น แนวคิดหนึ่งที่เขียนตามความยาวในแนวนอนและแนวตั้งลดต่ำลงมาถึงกึ่งกลาง สร้าง 2 แถวในแนวตั้งขึ้นมาภายในเส้นแนวนอน ในคอลัมน์ด้านซ้าย มีจำนวนหนึ่งที่เขียนหักลบไปตามลำดับของคำพูดที่นำไปสู่การพูดเพื่อพิสูจน์ ที่มีจำนวนในแต่ละคำพูด สำหรับในแต่ละขั้นตอนของการอนุมานคน ๆ หนึ่งที่เขียนในคอลัมน์ด้านขวามีเหตุผลสำหรับการอนุมานที่มีความคล้ายกันกับจำนวน เพราะว่ารูปแบบที่จัดเตรียมการพิสูจน์ใน 2 คอลัมน์ มันเป็นสิ่งที่เรียกว่า 2 รูปแบบคอลัมน์ในหนังสือ รูปแบบนี้จะกระตุ้นให้มีการแสดงออกอย่างชัดเจนเกี่ยวกับการให้เหตุผล ทุก ๆ คำพูดที่ประกอบกับเหตุผลที่กำหนดในตาราง ดังที่เป็นความลำบากไปยังการกระโดดข้ามไปสู่การตัดสินใจ ที่ปราศจากข้อสังเกต ในส่วนที่เพิ่มเติมสมมุติฐาน การให้คำจำกัดความ และทฤษฎีที่สมบูรณ์สำหรับการตัดสินใจที่เป็นสมมุติฐานที่มีความชัดเจนในหนังสือ วิธีการเขียนนี้จะทำให้การพิสูจน์มีความสมบูรณ์ดีกว่าความเชื่อทางตะวันตกที่โต้แย้งว่าเป็นสิ่งที่มีคุณค่าสูง

ในทางตรงกันข้าม การพิสูจน์ในทางเรขาคณิตในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ปกติจะเป็นการเขียนใน “รูปแบบของการแบ่งเป็นหน้า” รูปแบบการเขียนเป็นไปอย่างง่าย ๆ ตามการดำเนินชีวิต ในรูปแบบนี้ นักเรียนจะไม่ได้มีการเขียนเป็นเหตุผลสำหรับทุก ๆ คำพูด ดังนั้นไม่ได้เป็นข้อสมมุติฐาน การให้คำจำกัดความ และทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการพิสูจน์ เป็นสมมุติฐานในหนังสือ มันเป็นการพิจารณาที่พอเพียง ถ้าการพิสูจน์การสื่อสารมันเป็นแนวคิดหลัก มันเป็นอุปสรรคอย่างมากสำหรับนักเรียนในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้น ที่เขียนเหตุผลตามลำดับขั้นตอน แน่นอนว่า มันเป็นสิ่งที่รู้ดีว่า การพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นหัวข้อหนึ่งของเนื้อหาคณิตศาสตร์ในโรงเรียนมัธยมศึกษาตอนต้นในญี่ปุ่น รูปแบบการสื่อสารของการสื่อสารของคนญี่ปุ่นกระตุ้นให้นักเรียนนำไปสู่ความห่างไกลน้อยลงที่จะแสดงการให้เหตุผลอย่างมีตรรกะกว่าแนวคิดทางตะวันตกอย่างที่เริ่มทำการอภิปรายกัน รูปแบบกลุ่มที่จัดเตรียมให้มีแรงกระตุ้นเล็กน้อยสำหรับนักเรียนที่จะเรียนรู้วิธีการแสดงออกด้วยการให้เหตุผลในรูปแบบของการเขียน

บทสรุปข้อคิดเห็น รายงานนี้ทำการตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างการโต้แย้งและการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์จากมุมมองด้านวัฒนธรรม และสรุปผลที่เป็นแนวคิดเกี่ยวกับการหาตำแหน่งการเรียนรู้ของการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ในบริบทของการโต้แย้งที่เป็นความโน้มเอียงตามวัฒนธรรมตะวันตก

ส่วนท้ายสุดของข้อเสนอแนะที่มันเป็นอุปสรรคทางวัฒนธรรมสำหรับที่จะนำไปสู่ความเป็นจริงด้วยการโต้แย้งจากรูปแบบของ Toulmin ในชั้นเรียน และดังที่ทำการสอนการพิสูจน์ทาง

คณิตศาสตร์อย่างที่เป็นการกระทำด้วยการโต้แย้ง ตามความเป็นจริงแล้ว การยกระดับการโต้แย้งในชั้นเรียนญี่ปุ่นเป็นสิ่งที่ทำได้ไม่ง่ายเหมือนอย่างทั่ว ๆ ไป อย่างที่ Barnlund มองไปที่ การสื่อสารในวัฒนธรรมตะวันตกสามารถที่จะอธิบายอย่างที่ไกลประเด็นการมีอำนาจเหนือกว่าและเกี่ยวกับการโต้แย้งด้วยเหตุผลในรูปแบบ มันประกอบด้วยการค้นพบประเด็นจากการผลัดเปลี่ยนกันเสนอและลำดับของคำตอบของคำถาม ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นมาจากความสัมพันธ์กันและความชัดเจนของคำถาม และบนความถูกต้องและความสมบูรณ์ของคำตอบ รูปแบบที่ปรากฏในชั้นเรียน การตั้งเป็นกฎ ตัวตนของรัฐสภา คณะกรรมการการอภิปราย ในการสนทนากันตามธรรมดา แต่มันไม่ได้เป็นที่มีอำนาจเหนือกว่าหน้าที่ในญี่ปุ่น นี่เป็นคำถามโดยตรงเป็นบ่อยครั้งที่พิจาณาอย่างที่ทำให้แตกออกเป็นวิธีการกระทำ คนที่ไม่ใช่สมาชิกที่สอนในญี่ปุ่นจะค้นหาว่าที่ยกคำถามขึ้นมา การเปิดของกฎ ตัวตนที่เกี่ยวข้องกับรัฐสภา คณะกรรมการการอภิปราย ในการสนทนาเบื้องต้น แต่มันเป็นหน้าที่ที่มีอำนาจในญี่ปุ่น ที่นี่คำถามโดยตรงถูกเพ่งเล็งว่าเป็นการทำให้ความแตกแยกเสียมารยาท บุคคลที่อยู่ภายนอกของวิธีการสอนในญี่ปุ่นจะพบว่ามีการหยิบยกคำถามในชั้นเรียนที่ผิดพลาดไปสู่การกระตุ้นให้กระตือรือร้นที่จะอภิปรายกัน (Barnlund, 1975, p.135) จะเห็นได้ว่า การศึกษาของ Sekiguchi (2002) ในบริบทวัฒนธรรมของญี่ปุ่นจะนำนักเรียนไปสู่ความสามัคคี พร้อมใจกันเรียนรู้คณิตศาสตร์มากกว่าการที่จะหาข้อยุติของปัญหาทางคณิตศาสตร์ในฐานะเครื่องมือการเรียนรู้ นักเรียนมีโอกาสแสดงวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของตัวเองต่อเพื่อนและครูในชั้นเรียน เป็นแนวคิดที่น่าจะนำมาใช้ในการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ประเทศเทศไทย ดังนั้นผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะนำแนวคิดจากการศึกษาของ Sekiguchi มาใช้เป็นบริบทของการวิจัยในประเทศไทย ที่ยังไม่มีการวิจัยเกี่ยวกับ วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาปลายเปิด

จากการศึกษาแนวคิด ทฤษฎี วรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องผู้วิจัยได้วางแผนในการทำการวิจัยเกี่ยวกับกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ (Mathematical Learning Process) ในแง่มุมที่เป็นวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งเป็นสิ่งที่สำคัญที่ครูผู้สอนต้องทำให้นักเรียนมีวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ อย่างที่นักเรียนสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างคล่องแคล่ว พูดอธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหาได้สมเหตุสมผลและสื่อสารกับคนอื่น ๆ ได้ด้วยความเข้าใจ การทำให้นักเรียนเกิดกระบวนการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบนี้ทำได้โดยใช้บริบทของชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่เป็นชั้นเรียนของการศึกษาชั้นเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนพูดแสดงแนวคิดของตนเองอย่างแท้จริงและได้วางแผนให้ผู้เรียนเกิดประสบการณ์จริง ด้วยวิธีการแบบเปิด ที่ใช้กลไกสำคัญของปัญหาปลายเปิดเป็น บริบทที่กระตุ้นให้นักเรียนแสดงวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ออกมา เป็นกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างที่ได้จากการแก้ปัญหา การพิสูจน์และการให้เหตุผล และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ในฐานะที่เป็นการเรียนรู้คณิตศาสตร์

การจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์แนวทางหนึ่งควรจัดให้มีลักษณะ อย่างที่ Ernest (1991) กล่าวไว้ว่า การที่ครูผู้สอนเปิดโอกาสให้นักเรียนได้พูดแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ได้

พิสูจน์และโต้แย้งข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีการแลกเปลี่ยนความคิดหรือวิธีการแก้ปัญหาปลายเปิดจนนำไปสู่ข้อสรุปและเข้าใจคณิตศาสตร์เพิ่มขึ้น และการพูดอธิบายเหตุผลสนับสนุนหรือการพิสูจน์และให้เหตุผลโต้แย้งตามข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน (Lin, 2007) การจัดการเรียนการสอนที่ทำให้นักเรียนเกิดวาทกรรมทางคณิตศาสตร์นี้เป็นการสร้างประสบการณ์การเรียนรู้ที่นักเรียนได้ใช้กระบวนการที่สำคัญทางคณิตศาสตร์หรือส่งเสริมให้นักเรียนมีการแก้ปัญหา การสื่อสารและการพิสูจน์และให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ดังนั้น การที่จะรู้ว่านักเรียนสามารถแก้ปัญหาปลายเปิดได้อย่างชำนาญหรือเรียนรู้คณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ สามารถทำได้วิธีการหนึ่งคือ การวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาปลายเปิด เพื่อเป็นสิ่งสำคัญที่จะช่วยให้เข้าใจในวาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในการแก้ปัญหาปลายเปิด และยังเป็นแนวทางในการส่งเสริมผู้เรียนสามารถแก้ปัญหาปลายเปิดได้ตามธรรมชาติการเรียนรู้ของเขาเอง

การวิเคราะห์วาทกรรมทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนในสถานการณ์การแก้ปัญหาปลายเปิด ในรูปแบบที่นักเรียนพูด อธิบายแสดงความคิดเห็นของตนเองประกอบเหตุผลสนับสนุน มีการพิสูจน์และโต้แย้งข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้ปัญหา แนวคิดหนึ่งที่ใช้ในการวิเคราะห์การเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียนลักษณะนี้ Lakatos (1976) ได้เสนอกรอบทฤษฎีในการวิเคราะห์การให้เหตุผลด้วยการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์ ไว้ 6 วิธีการได้แก่ การยอมรับ การไม่ยอมรับความแปลกใหม่ การไม่ยอมรับข้อโต้แย้ง การปรับเปลี่ยนความแปลกใหม่ การรวบรวมข้อโต้แย้ง การพิสูจน์ด้วยการโต้แย้ง ซึ่งการอธิบายถึงวิธีการแก้ปัญหาตามแนวคิดของ Lakatos ที่ประกอบด้วยวิธีการที่เกี่ยวข้องกับการเรียนที่กระตุ้นให้ผู้เรียนค้นหาวิธีแก้ปัญหาต่าง ๆ ด้วยตัวเอง ที่จะนำไปสู่พัฒนาการของข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ ความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ และการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ สิ่งเหล่านี้จะค่อย ๆ พัฒนาผ่านภาษาเฉพาะกลุ่ม การยกตัวอย่างค้านกับตัวอย่างเดิมที่แสดงบทบาทสำคัญ ผ่านการเริ่มต้นของพวกเขาจนกระทั่งสิ้นสุด การประเมินผลงานที่เป็นไปในทางสร้างสรรค์ถ้ามันเป็นสิ่งที่มีคุณค่าสำหรับเขาและข้อคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ จะเป็นการตามหาร่องรอยของการเรียนรู้การทำงานเกี่ยวกับความเข้าใจว่ามีผลต่อพฤติกรรมที่แสดงออกอย่างไร ดังที่คน ๆ หนึ่งที่ถ่ายทอดลักษณะบางอย่างของเขาออกไป หรือที่พวกเขาอภิปรายกันแล้วทำการบรรจุเข้าไว้ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์