



วิทยานิพนธ์

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดทั่วไป
สำหรับคานาทิมอเชนโก

**GENERALIZED LEAST SQUARES FINITE ELEMENT
METHODS FOR TIMOSHENKO BEAMS**

นางสาวรัตนสุดา แนวนเงินดี

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พ.ศ. 2551



ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

ปริญญา

วิศวกรรมเครื่องกล

วิศวกรรมเครื่องกล

สาขา

ภาควิชา

เรื่อง ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดทั่วไปสำหรับคานาทิมอเชนโก

Generalized Least Squares Finite Element Methods for Timoshenko Beams

นามผู้วิจัย นางสาวรัตนสุดา แนวเงินดี

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

ประธานกรรมการ

(อาจารย์ประพจน์ ขุนทอง, Ph.D.)

กรรมการ

(อาจารย์อัญชญา วงษ์โต, Ph.D.)

กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์พิพัฒน์ ภูริปัญญาคูณ, วศ.ม.)

หัวหน้าภาควิชา

(รองศาสตราจารย์ชวลิต กิตติชัยการ, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญจนา วีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดทั่วไปสำหรับคานาทิมอเชนโก

Generalized Least Squares Finite Element Methods for Timoshenko Beams

โดย

นางสาวรัตนสุดา แนวเงินดี

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)

พ.ศ. 2551

รัตนสุดา แนวเงินดี 2551: ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดทั่วไปสำหรับ
คานาติโมเซนโก ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมเครื่องกล)
สาขาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกล
อาจารย์ประพจน์ ขุนทอง, Ph.D. 123 หน้า

ในงานวิจัยนี้ได้ศึกษาการพัฒนาวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของกาเลอร์คินสำหรับการ
การสั้นในสถานะคงตัวของคานาติโมเซนโกเพื่อลดความคลาดเคลื่อนของการกระจายตัว โดยเฉพาะ
ตักข้างของสมการอนุพันธ์ครอบคลุมในรูปแบบเกรเดียนต์กำลังสองน้อยสุดได้ถูกเพิ่มเข้าไปใน
สมการการแปรผันมาตรฐานทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของกาเลอร์คิน โดยเลือกพารามิเตอร์เกรเดียนต์
กำลังสองน้อยสุดสำหรับการประมาณภายในแบบเชิงเส้นและแบบสมการกำลังสองของ
การตอบสนองเพื่อให้เทอมอันดับต่ำในอนุกรมเทย์เลอร์ที่ได้จากความสัมพันธ์ของการกระจายตัว
ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับความสัมพันธ์ของการกระจายตัวที่ได้จากการวิเคราะห์ ซึ่งวิธีการ
นี้ทำให้ได้วิธีการแปรผันที่มีความสอดคล้องเพื่อใช้ในการปรับปรุงความแม่นยำของเอลิเมนต์
คานาติโมเซนโก เมื่อเปรียบเทียบผลความสัมพันธ์การกระจายตัวทางไฟไนต์เอลิเมนต์พบว่าวิธี
กำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาเลอร์คินดีกว่าวิธีมาตรฐานของกาเลอร์คินและวิธีที่ใช้การเลือกลด
อันดับการอินทิเกรตของกาเลอร์คิน ซึ่งตัวอย่างเชิงตัวเลขสำหรับการกระจายตัวของคลื่นใน
คานาติโมเซนโกได้นำมาแสดงเพื่อพิสูจน์ให้เห็นว่าความแม่นยำได้เพิ่มขึ้นในวิธีกำลังสองน้อยสุด
ทั่วไปของกาเลอร์คิน

Rattanasuda Naewngerndee 2008: Generalized Least Squares Finite Element Methods for Timoshenko Beams. Master of Engineering (Mechanical Engineering),
Major Field: Mechanical Engineering, Department of Mechanical Engineering.
Thesis Advisor: Mr. Prapot Kunthong, Ph.D. 123 pages.

In this work, Galerkin finite element formulation for the steady-state vibration of Timoshenko beams is modified to reduce dispersion error. The residual of governing differential equation in gradient least-squares form is appended to the standard Galerkin finite element variational equation. The gradient least-squares parameters for linear and quadratic interpolations of the responses are selected such that the lower-order terms in Taylor series expansions of the finite element dispersion relations match the analytical dispersion relations. This technique provides a consistent variational framework for enhancing the accuracy of Timoshenko beam elements. Comparisons of finite element dispersion relations demonstrate the superiority of the Galerkin Generalized Least Squares methods over standard Galerkin method and Galerkin method with selective reduced integration. Numerical example for wave propagation in Timoshenko beams is presented to demonstrate the improved accuracy of the Galerkin Generalized Least Squares methods.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

____ / ____ / ____

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จได้ด้วยความกรุณาช่วยเหลืออย่างค้ำจุนจาก อ.ดร.ประพจน์ ชุนทอง ประธานกรรมการที่ปรึกษา ซึ่งท่านได้กรุณาให้คำแนะนำและข้อคิดต่างๆ ในการวิจัยมาด้วยดีตลอด นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ อ.ดร.อัญชนา วงษ์โต กรรมการที่ปรึกษาวิชาเอก ผศ.พิพัฒน์ ภูริปัญญาคูณ กรรมการที่ปรึกษาวิชาการ และ รศ.ดร.พิชิต สุขเจริญพงษ์ ผู้แทนบัณฑิตวิทยาลัย ซึ่งกรุณาให้คำปรึกษา ข้อชี้แนะ และความรู้อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการจัดทำเล่มวิทยานิพนธ์ ตลอดจนตรวจทานแก้ไขเล่มวิทยานิพนธ์จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง มา ณ ที่นี้

ขอขอบพระคุณอาจารย์ภาควิชาวิศวกรรมเครื่องกลทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนและมอบความรู้อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการนำไปใช้ประโยชน์ต่อไป

ขอบคุณและขอบใจ น้องชาย และเพื่อนนิสิตปริญญาโท ที่ได้ให้คำแนะนำและความช่วยเหลือมาโดยตลอด จนทำให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้สำเร็จลุล่วงด้วยดี

ท้ายสุดนี้ คุณความดีและคุณประโยชน์ที่พึงบังเกิดจากวิทยานิพนธ์เล่มนี้ ขอมอบแด่ อาจารย์ทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอนให้ความรู้ และคุณพ่อคุณแม่ที่ได้อบรม ให้กำลังใจและเป็นผู้มอบทุกสิ่งทุกอย่างให้แก่ผู้วิจัย ขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

รัตนสุดา แนวเงินดี

เมษายน 2551

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(3)
คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ	(7)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	2
การตรวจเอกสาร	3
อุปกรณ์และวิธีการ	45
อุปกรณ์	45
วิธีการ	45
ผลและวิจารณ์	64
ผล	64
วิจารณ์	81
สรุปและข้อเสนอแนะ	83
สรุป	83
ข้อเสนอแนะ	84
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	85
ภาคผนวก	88
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	123

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	น้ำหนักและตำแหน่งของจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต	16
2	อันดับของฟังก์ชันและจำนวนจุดเกาส์	17
3	ตัวประกอบแก้ไขสำหรับความเค้นเฉือน (κ) สำหรับพื้นที่หน้าตัดต่างๆ	20
4	ค่าความคลาดเคลื่อนของจำนวนคลื่น (k) ที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์	66
5	จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้เมื่อต้องการให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนของ $L_2 \leq 1\%$	79

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	ลักษณะการกระจายเชิงเส้นตรงบนเอลิเมนต์และฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เชิงเส้นตรง	12
2	ฟังก์ชันการประมาณภายในบนพิกัดธรรมชาติแบบ 2 จุดต่อ	13
3	ฟังก์ชันการประมาณภายในบนพิกัดธรรมชาติแบบ 3 จุดต่อ	14
4	การอินทิเกรตฟังก์ชันในพิกัดหนึ่งมิติ	15
5	การเคลื่อนตัวของคานตามทฤษฎีของเบอร์นูลลี-ออยเลอร์ (a) และทฤษฎีของทิโมเชนโก (b)	18
6	เอลิเมนต์คานทิโมเชนโกแบบ 2 จุดต่อ โดยแสดงถึงการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน	21
7	เอลิเมนต์คานทิโมเชนโกแบบ 3 จุดต่อ โดยแสดงถึงการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน	25
8	ฟังก์ชันแบ่งที่เท่ากันของระยะห่างในแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ที่มีความยาวของเอลิเมนต์เท่ากับ h สำหรับคานที่มีความยาวอนันต์สำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ	32
9	ฟังก์ชันแบ่งที่เท่ากันของระยะห่างในแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ที่มีความยาวของเอลิเมนต์เท่ากับ h สำหรับคานที่มีความยาวอนันต์สำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ	34
10	เอลิเมนต์คานทิโมเชนโกแบบ 2 จุดต่อในพิกัดธรรมชาติ	47
11	เอลิเมนต์คานทิโมเชนโกแบบ 3 จุดต่อในพิกัดธรรมชาติ	51
12	รูปแบบคานที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์	59
13	ความสัมพันธ์การกระจายตัวที่เกิดขึ้นจริง (exact) ระหว่างจำนวนคลื่นที่เป็นจำนวนจริงและจำนวนจินตภาพเทียบกับความถี่	67
14	ความสัมพันธ์การกระจายตัวระหว่างจำนวนคลื่นที่เป็นจำนวนจริงเทียบกับความถี่	68
15	ความสัมพันธ์การกระจายตัวระหว่างจำนวนคลื่นที่เป็นจำนวนจินตภาพเทียบกับความถี่	68

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
16	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$	69
17	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$	69
18	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$	70
19	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$	70
20	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$	71
21	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	71
22	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	72
23	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	72
24	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	73
25	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	73

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
26	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	74
27	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	74
28	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	75
29	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	75
30	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$	76
31	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$	76
32	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$	77
33	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$	77
34	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$	78

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
35	การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$	78
36	เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน L_2 (Normalized L_2 error) ที่ $f = 1671 \text{ Hz}$	79
37	เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน L_2 (Normalized L_2 error) ที่ $f = 7550 \text{ Hz}$	80

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

E	=	สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของยัง (Young's modulus)
G	=	สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของความเค้นเฉือน (shear modulus)
ν	=	อัตราส่วนปัวซอง (Poisson's ratio)
I	=	โมเมนต์ความเฉื่อย
h	=	ความยาวของเอลิเมนต์
A	=	พื้นที่หน้าตัดของคาน
κ	=	ตัวประกอบแก้ไขสำหรับความเค้นเฉือน (shear correction factor)
α	=	ตัวประกอบรูปร่างสำหรับความเค้นเฉือน
v	=	การเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement)
θ	=	การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน (rotation)
ρ	=	ความหนาแน่นของมวล (mass density)
L	=	ความยาวของคาน
F	=	แรงที่ใส่เข้าไป
t	=	ความสูงของคาน
b	=	ความหนาของคาน
M	=	โมเมนต์รอบแกนสะเทิน (moment about neutral axis)
Q	=	แรงเฉือน (shear force)
k	=	จำนวนคลื่น (wavenumber)
k^h	=	ผลเฉลยทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของจำนวนคลื่น
$[k^e]$	=	เมตริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์
$[K]$	=	เมตริกซ์แข็งเกร็งรวมของชิ้นส่วนที่นำมาวิเคราะห์
$[m^e]$	=	เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์
$[M]$	=	เมตริกซ์มวลรวมของชิ้นส่วนที่นำมาวิเคราะห์
$\{d_n\}$	=	คือ เวกเตอร์การเคลื่อนตัวที่สัมพันธ์กับจุดต่อ n
A_1, A_2	=	แอมพลิจูด (amplitudes)
i	=	$\sqrt{-1}$
f	=	ความถี่ (frequency), ความถี่ของแรงภายนอก
ω	=	ความถี่ (frequency), ความถี่ของแรงภายนอก = $2\pi f$

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ (ต่อ)

σ	=	ความเค้น
ε	=	ความเครียด
π_G	=	พลังงานศักย์ต่ำสุดที่ได้จากวิธีการแปรผัน
π_{GLS}	=	พลังงานศักย์ต่ำสุดที่ได้จากเทอมกำลังสองน้อยสุดของกาเลอร์กิน
π_{GGLS}	=	ผลรวมพลังงานศักย์ต่ำสุดที่ได้จากวิธีการแปรผันและวิธีกำลังสองน้อยสุดของกาเลอร์กิน
N_i^e	=	ฟังก์ชันการประมาณภายในของลากราน
$N_{i,x}$	=	อนุพันธ์ของ N_i เทียบกับ x หรือ $\frac{dN_i}{dx}$
EXACT	=	ค่าจริง, ค่าที่ได้จากวิธีการวิเคราะห์
TI2	=	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานาทิโมเชนโก
SRI2	=	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต
GGLS2	=	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด
TI3	=	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของคานาทิโมเชนโก
SRI3	=	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต
GGLS3	=	แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด

ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดทั่วไปสำหรับคานาทิมอเชนโก

Generalized Least Squares Finite Element Methods for Timoshenko Beams

คำนำ

ในวิทยานิพนธ์นี้ได้ศึกษาถึงวิธีกำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาลอ์คิน (Galerkin Generalized Least Squares Methods) สำหรับการสั่นในสภาวะคงตัวของคานาทิมอเชนโก (Timoshenko Beam) ซึ่งในการใช้วิธีการเลือกการลดอันดับการอินทิเกรต (Selective Reduced Integration) โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นที่เป็นที่นิยมใช้นั้นเพื่อให้ได้ความแม่นยำในการวิเคราะห์มากขึ้นจำเป็นต้องอาศัยการแบ่งอัตราส่วนขนาดของเอลิเมนต์ต่อขนาดความยาวช่วงคลื่น (Wavelength) ที่มีค่าน้อยมากๆ ซึ่งไม่เป็นการเหมาะสมเพราะทำให้เป็นการเพิ่มภาระในการคำนวณทางคอมพิวเตอร์ นอกจากนี้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตที่นำมาใช้จะทำให้เกิดการปลอม (Spurious) ขึ้นมาในการจำลองการเคลื่อนตัวของคานาทิมอเชนโก

ในการที่จะปรับปรุงความแม่นยำของวิธีการกาลอ์คิน (Galerkin Method) จะนำเทคนิควิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทั่วไปของกาลอ์คินมาประยุกต์ใช้กับบริเวณความถี่ที่ใช้ได้สำหรับการจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของคานาทิมอเชนโก ซึ่งพารามิเตอร์การออกแบบที่เหมาะสมสำหรับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทั่วไปของกาลอ์คินได้มาจากการพิจารณาความสัมพันธ์การแพร่ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของจำนวนคลื่นเชิงซ้อน (Complex Wave Number) โดยพารามิเตอร์ได้ถูกเลือกเพื่อให้ความสัมพันธ์การแพร่ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับความสัมพันธ์การแพร่ที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical) และมีการใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตมาเปรียบเทียบผลที่วิเคราะห์ได้ด้วย โดยในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นและแบบสมการกำลังสอง

งานวิจัยนี้ได้ศึกษาและพัฒนาขั้นตอนระเบียบวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ในการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวของคานาทิมอเชนโกอันเนื่องมาจากแรงที่กระทำต่อโครงสร้าง โดยจะศึกษาโครงสร้างคานในช่วงไม่เกินขีดจำกัดความยืดหยุ่นของวัสดุ และนำผลที่ได้จากการวิเคราะห์มาเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากทฤษฎีและผลการวิจัยที่มีผู้วิจัยได้ทำการศึกษาไว้

วัตถุประสงค์

1. เพื่อพัฒนาขั้นตอนและวิธีการวิเคราะห์การเคลื่อนตัว (deflection) ของคานาทิโมเชน โท โดยระเบียบวิธีทางไฟไนต์เอลิเมนต์

2. สร้างขั้นตอนวิธี (Algorithm) ทางไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อใช้ในการวิเคราะห์คานาทิโมเชน โท และเปรียบเทียบความแม่นยำของขั้นตอนวิธีที่สร้างขึ้นกับผลการวิเคราะห์ที่มีผู้วิจัยทำการศึกษาไว้

การตรวจเอกสาร

Loula et al. (1987) ได้กำหนดวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อจำลองการตอบสนองทางสถิตยศาสตร์ของคานาทิโมเชนโก โดยการใช้เอลิเมนต์ของ Petrove-Galerkin ต่อมา Hughes และ Franca (1988) ได้พัฒนาเอลิเมนต์ผสมของ ไรส์เนอร์-มินด์ลิน (Reissner-Mindlin) สำหรับสภาวะสถิต ซึ่งในการวิจัยนี้ได้ใช้วิธีการกำลังสองน้อยสุดแบบทั่วไปของกาเลอร์กิน โดยเพิ่มรูปแบบของเศษตกค้างเข้าไปในสมการสมดุลมาตรฐานของกาเลอร์กินเพื่อเพิ่มความแม่นยำ

Franca and Do Carmo (1989) เป็นผู้วิจัยแรกที่ได้ใช้วิธีการเกรเดียนต์กำลังสองน้อยสุดของกาเลอร์กิน (Galerkin Gradient Least Square) โดยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ถูกนำมาใช้เพื่อแก้ปัญหาการแพร่ในวิธีการนี้ได้ใช้การเพิ่มวิธิตามมาตรฐานของกาเลอร์กินซึ่งได้มาจากรูปแบบกำลังสองน้อยสุดของเกรเดียนต์ในสมการออยเลอร์-ลากรานจ์ (Euler-Lagrange) สำหรับปัญหาเอกพันธ์ในหนึ่งมิติ (one dimensional homogeneous) วิธีการนี้ได้ถูกออกแบบมาเพื่อพัฒนาผลเฉลยแม่นยำตรงที่จุดต่อ โดยจากการประมาณค่าความคลาดเคลื่อนแสดงให้เห็นว่าวิธีการนี้ให้ผลลู่เข้าทุกค่าพารามิเตอร์ และผลเชิงตัวเลขแสดงให้เห็นถึงการมีเสถียรภาพที่ดีและคุณสมบัติที่แม่นยำของวิธีการนี้

Rokowski (1990) ได้แสดงปรากฏการณ์การยึดเนื่องจากแรงเฉือนที่เกิดขึ้นภายในคานาทิโมเชนโก จากพื้นฐานของเมตริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์เงื่อนไขความสมดุลสำหรับคานาได้ถูกพิสูจน์ในรูปแบบของสมการคู่เข้าสู่รูปแบบของอนุพันธ์การวิเคราะห์สำหรับคานาที่มีความต่อเนื่อง ซึ่งในการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายใน (shape function) แบบเชิงเส้นมีแนวโน้มที่จะทำให้เกิดความไม่ยึดหยุ่นในเอลิเมนต์ของมินด์ลินเพราะการประมาณภายในลู่เข้าสู่ผลเฉลยของสมการสมดุลที่แตกต่างออกไปจากเมตริกซ์แข็งเกร็งของค่าแม่นยำตรง (exactly) และเอลิเมนต์ของการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตแบบเชิงเส้นและแบบสมการกำลังสอง โดยใช้เงื่อนไขความสมดุลที่แตกต่างกัน ได้ถูกนำมาพิสูจน์และเปรียบเทียบกับสมการแม่นยำตรงในปัญหาการดัดของคานาสำหรับเอลิเมนต์แต่ละแบบ

Kosmatka (1995) ได้นำเสนองานวิจัยซึ่งเป็นการพัฒนาเมตริกซ์ของความแข็งแรงต่อการโค้งงอเชิงเส้น (linear flexural stiffness), อินคริเมนทอลสติฟเนส (incremental stiffness), มวลและแรงยึดเหนี่ยว สำหรับชิ้นส่วนอย่างง่ายที่มี 2 จุดต่อของคานาของ Timoshenko โดยใช้หลักการของ

Hamilton เมตริกซ์ของความแข็งแรงต่อการโค้งงอที่ได้มานี้สอดคล้องกับเมตริกของความแข็งแรงของคานของ Timoshenko แบบ 2 จุดต่อ โดยผู้วิจัยพบว่าเมตริกที่ได้มานี้สามารถทำนายภาระการโก่งและความถี่ธรรมชาติของแรงที่กระทำตามแนวคานได้อย่างแม่นยำทั้งคานแบบไอโซทรอปิก (isotropic beam) และคานประกอบ (composite beam) รวมทั้งยังสามารถใช้ได้กับคานในหลายระยะและหลายปัญหาค่าขอบ เมตริกนี้ยังสามารถใช้กับไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element) และพฤติกรรมการสั่นของคานสั้นที่มีแรงกระทำตามแนวคาน

Grosh and Pinsky (1996) ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทั่วไปของกาลอร์คิน (Galerkin Generalized Least Squares methods) เพื่อพัฒนาและประยุกต์ใช้กับแบบจำลองที่มีการตอบสนองในสภาวะคงตัวในคานทิโมเชนโก โดยวิธีการที่เหมาะสมที่สุดในการออกแบบคือการใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นของการตอบสนองเพื่อทำให้ค่าการกระจายของความคลาดเคลื่อนทางไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นศูนย์ ซึ่งวิธีการแบบดั้งเดิมที่ใช้การเลือกลดอันดับการอินทิเกรตได้แสดงให้เห็นว่าเกิดการด้อยประสิทธิภาพเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบทั่วไปของกาลอร์คิน และเป้าหมายของวิธีการใหม่นี้คือลดภาระการคำนวณเพื่อให้ได้มาซึ่งระดับความแม่นยำที่ต้องการในแต่ละช่วงความถี่ ดังนั้นเป็นไปได้ที่จะนำมาใช้คำนวณในช่วงที่มีความถี่สูงขึ้น

Tong (1999) ได้ศึกษาความเค้นพันทางแบบ 4 จุดต่อสำหรับแผ่นบาง (plate) โดยพัฒนามาจาก หลักการการแปรผันของ Hellinger-Reissner โดยประยุกต์ใช้กับทอมกำลังสองน้อยสุดเพื่อให้ได้ผลที่ถูกต้องแม่นยำของการสั่นและการกระจายตัวของช่วงคลื่นในแผ่นบางของ Reissner-Mindlin นอกจากนี้ยังได้สร้างระเบียบวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบพันทางสำหรับคานแบบ Timoshenko ด้วย ซึ่งตัวกำหนดของกำลังสองน้อยสุดจะเป็นสัดส่วนโดยตรงกับน้ำหนักการอินทิเกรตของตัวกำหนดอนุพันธ์ซึ่งมีผลต่อเสถียรภาพสำหรับสมการการเคลื่อนที่ในสภาวะคงตัว โดยในการเลือกตัวแปรเพื่อการออกแบบที่เหมาะสมสำหรับการปรับปรุงกำลังสองน้อยสุดจะต้องสอดคล้องกับการปรับปรุงความแม่นยำของการรวมเอลิเมนต์ในแผ่นบางของไรส์เนอร์-มินด์ลิน (Reissner-Mindlin) และเอลิเมนต์ของคานทิโมเชนโก (Timoshenko) เพื่อไม่ให้เกิดการยึดเนื่องจากรวมหรือรูปแบบปลอม (Spurious) ของการวิเคราะห์

Grohmann et al. (2001) ได้ศึกษาและพัฒนาเสถียรภาพของวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการคำนวณในสภาวะชั่วครู่ (transient computational analysis) ของการเคลื่อนที่แบบยึดหยุ่นในคานทิโมเชนโก โดยในการใช้การประมาณภายในจะเป็นแบบต่อเนื่องใน space และ

เวลาในแต่ละชั้นของเวลา แต่ไม่ต่อเนื่องในชั้นของเวลาที่อยู่ติดกัน เพื่อยับยั้งการปลอมแปลงของผลเชิงตัวเลขที่มีค่าไม่คงที่เมื่อใกล้ช่วงที่ไม่ต่อเนื่อง โดยวิธีกำลังสองน้อยสุด (least squares) ของกาลเลอร์คินได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้ เนื่องจากวิธีการนี้ช่วยลดเฟส (phase) และแอมพลิจูด (amplitude) ของความคลาดเคลื่อนทางไฟไนต์เอลิเมนต์ ทำให้ mesh แบบหยาบสามารถใช้ได้โดยที่ไม่สูญเสียความแม่นยำ

Antes (2003) ได้ใช้ทฤษฎีคานของทิโมเชนโกซึ่งได้รวมการเคลื่อนตัวเนื่องจากแรงเฉือนและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนเนื่องจากแรงเฉือนเพื่อศึกษาถึงการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก, การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน, โมเมนต์คด และแรงเฉือนภายในคาน นอกจากนี้ยังได้พิสูจน์ผลเฉลยของสมการอนุพันธ์อันดับสองในสมการตามทฤษฎีของทิโมเชนโก เช่น การเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน (θ) เนื่องจากแรงที่ใส่เข้าไป

Laulusa and Reddy (2004) ได้ศึกษาการเคลื่อนตัวของคานทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้มาจากพื้นฐานการจำลองกลศาสตร์การเคลื่อนไหวแบบไม่เชิงเส้นสำหรับก่อนการบิดงอ (pretwisted) ของคานผสม เอลิเมนต์นี้ได้พัฒนาขึ้นโดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้น (linear), สมการกำลังสอง (quadratic) และสมการกำลังสาม (cubic) โดยเทคนิคการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตได้ถูกนำมาใช้เพื่อหาการยึด (locking) ของการเฉือนสำหรับเอลิเมนต์แต่ละแบบ กฎการอินทิเกรตเชิงตัวเลขต่าง ๆ ได้นำมาใช้เพื่อคำนวณหาหลักการการอินทิเกรตที่ดีที่สุด และผลเชิงตัวเลขได้ถูกนำมาแสดงในขอบเขตที่หลากหลายของปัญหาคานเพื่อประเมินค่าประสิทธิภาพของเอลิเมนต์ทั้งสามแบบ และได้ผลการทดลองเชิงตัวเลข ดังนี้

1. สำหรับเอลิเมนต์แบบเชิงเส้น การยึดเนื่องจากการเฉือนจะวิกฤติมากที่สุด ถ้าพลังงานการเฉือนไม่ต่ำกว่าการอินทิเกรต (under-integrated) แบบหนึ่งจุดในกฎของเกาส์ ผลที่ได้จะไม่แม่นยำ เมื่อใช้การอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดและจะเกิดการยึดขึ้นในส่วนของพลังงานที่ขยายออกมา แต่เมื่อใช้การอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดจะไม่เกิดการยึด แต่เมื่อใช้การอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 1 จุดจะให้ผลที่ดีกว่าแบบ 2 จุด

2. สำหรับเอลิเมนต์แบบสมการกำลังสอง การยึดเนื่องจากการเลื่อนจะน้อยกว่าแบบเชิงเส้น แต่อย่างไรก็ตามการยึดก็ยังมีผลเมื่อนำมาใช้กับเอลิเมนต์ที่มีจำนวนน้อย โดยใช้การอินทิเกรทแบบ 2 จุดจะให้ผลที่ดีที่สุด

3. สำหรับเอลิเมนต์แบบสมการกำลังสาม การยึดจะน้อยกว่าแบบสมการกำลังสองและแบบเชิงเส้น ในปัญหาบางแบบการยึดจะมีค่าน้อยมาก และการอินทิเกรทแบบ 3 จุดจะให้ผลที่ดีที่สุด

Lee and Schultz (2004) ได้ศึกษาการสั่นแบบอิสระของคานาโทโมเซนโกและแผ่นบางของมินด์ลิน (Mindlin plates) โดยอาศัยพื้นฐานมาจากวิธีการจำลองสเปกตรัมของ Chebyshev ซึ่งนิยมใช้ในการแก้ปัญหาทางกลศาสตร์ของไหล เงื่อนไขขอบสำหรับคานาโทโมเซนโกแบบต่าง ๆ ซึ่งได้แก่ คานาที่มีการจับยึด (clamped), คานาช่วงเดียวหรือคานาแบบง่าย (simply supported) และคานาที่เลื่อนไถลได้ (sliding) ได้ถูกนำมาศึกษา ผลเชิงตัวเลขนี้ได้ถูกนำมาแสดงสำหรับอัตราส่วนความหนาต่อความยาวที่แตกต่างกันของคานา

Dadfarinia, Jalili and Esmailzadeh (2005) ได้ใช้การประมาณภายในของกาเลอร์คิน (Galerkin approximation) ที่เหมือนและแตกต่างกันของฟังก์ชันเวลา (time function) สำหรับการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนของพื้นที่หน้าตัดคานา โดยสมการการเคลื่อนตัวสำหรับฟังก์ชันเวลาที่เหมือนกันจะได้มาจากการใช้เงื่อนไขตั้งฉาก (orthogonality conditions) สำหรับฟังก์ชันเวลาที่แตกต่างกันในการประมาณภายในของกาเลอร์คิน สมการการเคลื่อนตัวจะได้มาจากการพิสูจน์โดยใช้ Lagrangian approach ซึ่งเงื่อนไขขอบทั้งสองแบบ คือ คานาช่วงเดียวหรือคานาแบบง่าย (simply supported- simply supported) และคานาที่มีการจับยึดด้านหนึ่งส่วนอีกด้านเป็นแบบฐานเชิงเดียว (clamped-simply supported) ได้ถูกนำมาพิจารณาสำหรับการจำลองเชิงตัวเลข โดยผลเชิงตัวเลขได้พิสูจน์ให้เห็นว่าความสัมพันธ์ของฟังก์ชันเวลาในแต่ละกรณีเกือบเหมือนกันและผลความคลาดเคลื่อนจากการสมมุติฟังก์ชันเวลาที่เหมือนกันสามารถละทิ้งได้

Tsai and Kelly (2005) ได้พัฒนาทฤษฎีของคานาที่ใช้ในการวิเคราะห์เสถียรภาพของคานาสั่นซึ่งรวมเอาการเคลื่อนตัวอันเนื่องมาจากความเค้นเฉือนและการบิดงอของพื้นที่หน้าตัดมาวิเคราะห์ด้วย ผู้วิจัยได้ให้การบิดงอของพื้นที่หน้าตัดเกิดจากปริมาณอิสระทางกลและได้อธิบายผลลัพธ์ของแรงที่เกี่ยวข้อง สำหรับคานาที่ถูกแรงภายนอกกระทำที่ปลายผู้วิจัยได้ใช้สมการสมดุลที่มาจากหลักพลังงานเสมือน (principle of virtual work) ผู้วิจัยได้หาการเคลื่อนตัวด้านข้าง, มุมบิด

ของพื้นที่หน้าตัด และตัวคูณของรูปร่างที่บิดงอไปตลอดทั้งคานในรูปของค่าโก่งเคี้ยวและแสดง การเคลื่อนตัวต่างๆนี้ที่ปลายของคาน

Ozturk and Sabuncu (2005) ได้ศึกษาเสถียรภาพทางสถิตศาสตร์และกลศาสตร์ของคานยื่น ที่ประกอบเป็นชั้นๆและมีจุดรองรับยึดหยุ่นทั้งในแนวการเคลื่อนที่และการบิดตัว จากนั้นทดสอบ โดยใส่แรงกระทำที่เป็นคาบลงไป โดยสมมติให้เป็นคานแบบ Euler แล้วทำการจำลองโดยใช้วิธี ไฟไนต์เอลิเมนต์ แบบจำลองนี้พิจารณาคานในแบบสมมาตรและไม่สมมาตร นอกจากนี้ยัง วิเคราะห์ผลของมอดุลัสการคด (flexural modulus) ของคาน ผู้วิจัยใช้หลักการพลังงานร่วมกับวิธี ของ Bolotin และทดลองโดยใช้ช่วงความถี่ต่างๆกระทำกับคาน จากนั้นทดสอบผลของการ เปลี่ยนแปลงพื้นที่หน้าตัดใน 1 มิติ, อัตราส่วนของความยาวต่อความหนา, มุมที่หมุนไป, ตัวแปร ทางสถิตศาสตร์และกลศาสตร์, ความแข็งแรงของจุดรองรับที่มีความยืดหยุ่น และตำแหน่งของจุด รองรับที่คานยังมีเสถียรภาพ ผลการทดสอบที่ได้รับจะถูกบันทึกแล้วนำมาเขียนกราฟ นอกจากนี้ ยังนำผลของความถี่ธรรมชาติมูลฐานและค่าวิกฤติของการ โกงมาเปรียบเทียบกับงานวิจัยก่อนหน้า นี้ ด้วย

Wieckowski and Golubiewski (2007) ได้ศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาการ โกง (buckling) ของคานเบอร์นูลลี-ออยเลอร์ (Bernoulli-Euler) และคานทิโมเชนโก (Timoshenko) โดยวิธีการทาง ไฟไนต์เอลิเมนต์ ซึ่งวิธีที่ใช้ในการปรับปรุงความแม่นยำคือการแทนที่ฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องของ โมเมนต์การคด (bending moment) ซึ่งสัมพันธ์กับการประมาณภายในของฟังก์ชันเจาะจงที่ได้จาก วิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ฟังก์ชัน smoothed ในผลหารของ Rayleigh ซึ่งฟังก์ชัน smoothed นี้ได้มาจากการ fitting ความไม่ต่อเนื่องโดยใช้เทคนิคกำลังสองน้อยสุด

Tang (2008) ได้ศึกษาเพื่อหาวิธีการคำนวณการตอบสนองในสถานะชั่วครู่ (transient response) ของคาน โดยแบ่งเอลิเมนต์คานของทิโมเชนโกออกเป็นหลาย ๆ ความต่อเนื่อง และรวม เมตริกซ์ของพลศาสตร์แข็งแรงทั้งหมดเข้าด้วยกัน และเปรียบเทียบกับการใช้สมการเมตริกซ์มวล และเมตริกซ์แข็งแรงทั้งหมดที่ได้มาจากการพิสูจน์สมการของ Leung และพบว่าการใช้สมการ เมตริกซ์มวลและเมตริกซ์แข็งแรงมีความเหมาะสมในการนำมาวิเคราะห์การตอบสนองมากกว่า การใช้เมตริกซ์ของพลศาสตร์แข็งแรง โดยผลเฉลยที่คำนวณได้จากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ได้ ถูกนำมาเปรียบเทียบกับกรณีวิเคราะห์ทางทฤษฎี และพบว่าวิธีการที่คิดขึ้นได้ใหม่นี้มีความแม่นยำ สูงในการนำมาใช้ในปัญหาของแรงการสั่นภายในโครงสร้าง

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

1. หลักการทั่วไปทางไฟไนต์เอลิเมนต์

การวิเคราะห์การเคลื่อนตัว, ความเค้น-ความเครียดในชิ้นส่วนเครื่องจักรกลหรือโครงประกอบของเครื่องจักรกลด้วยวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นที่นิยมใช้กันมากขึ้นในปัจจุบัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งชิ้นส่วนหรือ โครงประกอบที่มีความซับซ้อนที่ไม่สามารถวิเคราะห์ด้วยวิธีธรรมดาได้ ประกอบกับปัจจุบันเครื่องคอมพิวเตอร์ได้รับการพัฒนาให้มีขีดความสามารถในการคำนวณมากขึ้น จึงทำให้การวิเคราะห์ปัญหาดังกล่าวด้วยวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ทำได้ละเอียด, ถูกต้อง, รวดเร็ว และประหยัดค่าใช้จ่าย

ในการวิเคราะห์ปัญหาทางวิศวกรรมนั้นมักต้องมีแบบจำลองทางเลขคณิตซึ่งประกอบด้วย สมการอนุพันธ์และสภาวะกำหนดเงื่อนไข โดยที่แบบจำลองจะมีสมมุติฐานเพื่อให้ปัญหาง่ายขึ้น และในที่สุดแบบจำลองก็จะใช้เป็นตัวบ่งบอกถึงพฤติกรรมของระบบที่จะทำการวิเคราะห์ ทั้งนี้ สมการอนุพันธ์ดังกล่าวมักมีความยุ่งยากในการหาผลลัพธ์ซึ่งแสดงพฤติกรรมของปัญหานั้น ๆ ดังนั้นด้วยความก้าวหน้าทางเทคโนโลยีของคอมพิวเตอร์ทำให้มีการพัฒนาวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลข (numerical solution technique) เพื่อหาผลลัพธ์โดยประมาณจากสมการอนุพันธ์ดังกล่าว วิธีไฟไนต์เอลิเมนต์เป็นวิธีการหาผลเฉลยเชิงตัวเลขที่นิยมมากวิธีหนึ่งเพราะสามารถเขียน Algorithm ให้คอมพิวเตอร์ทำการคำนวณได้ง่าย โดยเฉพาะในปัญหาที่มีความซับซ้อนของรูปร่าง และสภาวะที่ถูกกำหนด วิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์จะทำการแบ่งปัญหาออกเป็นชิ้นส่วนย่อยซึ่งปัญหาที่จะทำการวิเคราะห์ก็จะประกอบขึ้นจากการรวมชิ้นส่วนต่างๆเข้าด้วยกันนั่นเอง กระบวนการวิเคราะห์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถแบ่งได้ ดังนี้ (ปิยวิทย์, 2544)

1. ทำการวางรูปแบบของชิ้นส่วนต่างๆในปัญหาที่ต้องการวิเคราะห์
2. ทำการรวม (assemble) คุณสมบัติของชิ้นส่วนต่าง ๆ เข้าด้วยกัน
3. หาผลลัพธ์ของระบบสมการ (algebraic equation) แทนการหาผลลัพธ์จากสมการอนุพันธ์

ความแม่นยำของผลลัพธ์ที่ได้จากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์นั้นจะขึ้นกับจำนวน รูปร่างของชิ้นส่วนและวิธีการที่ใช้สร้างชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ปัญหา โดยที่การสร้างชิ้นส่วนนั้นจะ

ขึ้นอยู่กับหลักการแปรผัน (Variational principles) ที่ใช้ โดยทั่วไปแล้วระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) ในการวิเคราะห์โครงสร้างนั้นจะอยู่บนพื้นฐานของการสมมุติการเคลื่อนตัวในแต่ละชิ้นส่วนและอาศัยหลักการงานเสมือน หรือหลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดในการสร้างเมตริกซ์แข็งเกร็งของแต่ละชิ้นส่วน

ในการเลือกใช้ชิ้นส่วนในการวิเคราะห์ตามระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ต่างกัน ชิ้นส่วนที่ดีนั้นควรมีคุณสมบัติดังนี้

1. ไม่มีรูปแบบปลอม (Spurious) ของการกระจัด
2. มีคุณสมบัติยืนยง (invariant)
3. มีประสิทธิภาพทางการคำนวณ
4. ไม่เป็นชิ้นส่วนที่แข็งเกร็งเกินไป (overly rigid)
5. ให้ค่าความเค้นที่แม่นยำ

ชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีการกระจัดนั้นมักจะสามารมีคุณสมบัติในสามข้อแรกข้างต้น คือ ชิ้นส่วนตามระเบียบวิธีการกระจัดที่ทำการสมมุติการกระจัดเพียงอย่างเดียวซึ่งจะใช้หลักการพลังงานศักย์ต่ำสุดนั้นจะมีการสร้างชิ้นส่วนที่ง่ายโดยเฉพาะในปัญหาที่การกระจัดต้องการความต่อเนื่องอันดับศูนย์ซึ่งสามารถใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในอย่างง่ายที่เขียนในรูปพิกัดธรรมชาติ ทั้งนี้จากการที่เขียนในรูปพิกัดธรรมชาติทำให้ชิ้นส่วนมีความยืนยงด้วยเช่นกัน แต่อย่างไรก็ตาม ชิ้นส่วนการกระจัดก็มีข้อด้อยคือ ในปัญหาที่ต้องการความต่อเนื่องอันดับหนึ่ง ตัวอย่างเช่นในปัญหาคานของออยเลอร์ ซึ่งเป็นการยากที่จะสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในที่ยังคงมีความต่อเนื่องของอนุพันธ์ตั้งฉาก (normal derivatives) ตามขอบเชื่อมต่อระหว่างชิ้นส่วน ทั้งนี้หากว่าไม่มีความต่อเนื่องระหว่างชิ้นส่วนแล้วจะจำเป็นต้องมีการทดสอบแบบหย่อม (patch test) เพื่อทดสอบการลู่เข้าสู่คำตอบ การแก้ปัญหาในข้อนี้อาจทำได้โดยรวมความเครียดเฉือนตั้งฉาก หรือมุมหมุน ในการกระจัดตามทฤษฎี ทฤษฎีการผิดรูปจากแรงเฉือนอันดับแรก (First order Shear-Deformation Theory) ในการสร้างชิ้นส่วน แต่อย่างไรก็ตามปัญหาการยึดตัวเนื่องจากแรงเฉือนนั้นก็ยังมีอยู่นอกจากนี้การขจัดปัญหานี้อาจทำได้โดยใช้การเลือกลดอันดับการอินทิเกรตในการสร้างชิ้นส่วน แต่เช่นกันการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตนั้นก็จะมีข้อบกพร่องคือจะทำให้เกิดรูปแบบปลอมของการกระจัด

2. ทฤษฎีความต่อเนื่องของเอลิเมนต์

ในการประดิษฐ์สมการไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับปัญหาทางด้านของแข็งในรูปแบบของสมการที่ประกอบด้วยค่าเคลื่อนตัวที่ไม่รู้ค่าที่จุดต่อ นั่นคือจะสมมุติการกระจายของการเคลื่อนตัวบนเอลิเมนต์ ซึ่งในวิธีการนี้ต้องมั่นใจว่าลักษณะการกระจายของการเคลื่อนตัวบนเอลิเมนต์ที่สมมุติขึ้นมาจะก่อให้เกิดผลลัพธ์ที่ลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่ถูกต้อง (converged solution) หลังจากทำการแบ่งเอลิเมนต์ให้มีขนาดย่อยเล็กลงไป ปรากฏการณ์เช่นนี้จะเกิดขึ้นได้ต่อเมื่อ (Zienkiewicz, 1989)

1. ในกรณีพลังงานศักย์รวมประกอบด้วยพจน์ที่เป็นอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (first-order derivative) ของค่าเคลื่อนตัว ลักษณะการกระจายของค่าเคลื่อนตัวนั้นจำเป็นต้องมีความต่อเนื่อง (compatibility) ตลอดรอยต่อของเอลิเมนต์ที่ติดกัน จะเรียกความต่อเนื่องชนิดนี้ว่าความต่อเนื่องแบบ C^0 ซึ่งในสมการการเคลื่อนตัวของคานาโทโมเซนโกจำเป็นต้องสมมุติลักษณะการกระจายของค่าเคลื่อนตัวให้มีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์เนื่องจากค่าความเค้นที่ปรากฏอยู่ในสมการคืออนุพันธ์อันดับหนึ่งของค่าเคลื่อนตัว ส่วนในสมการการเคลื่อนตัวของคานาออยเลอร์-เบอร์นูลลีพบว่าในสมการพลังงานศักย์รวมจะประกอบไปด้วยพจน์ที่เป็นอนุพันธ์อันดับสองของค่าเคลื่อนตัว ซึ่งในกรณีเช่นนี้ทั้งค่าเคลื่อนตัวและค่าความชัน (slope) ของค่าเคลื่อนตัวนั้นจำเป็นต้องมีความต่อเนื่องระหว่างเอลิเมนต์ ผลลัพธ์ที่ได้จึงจะลู่เข้าหาผลลัพธ์ที่ถูกต้องหลังจากใช้จำนวนเอลิเมนต์เพิ่มมากขึ้น เรียกความต่อเนื่องชนิดหลังนี้ว่าความต่อเนื่องแบบ C^1

2. ลักษณะการกระจายของค่าเคลื่อนตัวที่สมมุติบนเอลิเมนต์นั้นจำเป็นต้องมีความบริบูรณ์ (completeness) ซึ่งหมายถึงว่าการกระจายดังกล่าวสามารถก่อให้เกิดค่าความเครียดที่มีค่าคงที่บนเอลิเมนต์นั้นได้สำหรับกรณีที่น่าเอลิเมนต์เช่นนี้ไปใช้กับปัญหาที่เกิดภาวะจริงเช่นนั้น เช่น เหล็กท่อนถูกดึงที่ปลายทั้งสองด้วยแรงที่คงที่ซึ่งก่อให้เกิดความเครียดที่คงที่ตลอดความยาวของเหล็กท่อนนั้น

ข้อบังคับสองข้อนี้มีความสำคัญมาก โดยเฉพาะในกรณีที่ต้องทำการสมมุติลักษณะการกระจายของค่าเคลื่อนตัวแบบใหม่ ๆ ขึ้นมาเอง ซึ่งอาจจะขัดกับข้อบังคับข้อใดข้อหนึ่งในสองข้อนี้ ซึ่งผลเสียที่จะตามมาก็คือ เอลิเมนต์ที่ประดิษฐ์ขึ้นมาใหม่นี้ไม่สามารถประยุกต์ใช้กับปัญหาโดยทั่วไปได้หรือผลลัพธ์ที่ได้จากการใช้เอลิเมนต์ดังกล่าวจะไม่ลู่เข้าสู่ผลลัพธ์ที่ถูกต้องหลังจากเพิ่มจำนวนเอลิเมนต์ให้มากขึ้น

3. ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์

ขั้นตอนที่สำคัญขั้นตอนหนึ่งในวิธีการไฟไนต์เอลิเมนต์ก็คือ การเลือกลักษณะของฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ (element interpolation functions) การเลือกฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เหมาะสมสามารถเพิ่มความแม่นยำของผลลัพธ์ที่คำนวณได้และหากผู้ใช้มีความเข้าใจในลักษณะของปัญหานั้นๆ ได้โดยถ่องแท้ก็สามารถประดิษฐ์ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เพื่อก่อให้เกิดผลลัพธ์เป็นผลเฉลยแม่นยำตรงได้สำหรับปัญหาในบางกรณี การสร้างฟังก์ชันการประมาณภายในนี้ ในบางกรณีจำเป็นต้องใช้การอินทิเกรตเชิงตัวเลข (Numerical Integration) เพื่อการคำนวณหาเอลิเมนต์เมตริกซ์เหล่านี้

ฟังก์ชันการประมาณภายในของลากรานจ์หรือลากรานจ์พอลิโนเมียล (Lagrange polynomials) จะมีความสัมพันธ์กับจุดต่อ i โดยมีนิยาม (Krishnamoorthy, 1995) คือ

$$N_i(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_n)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_n)} \quad (1)$$

เมื่อฟังก์ชัน N_i สอดคล้องกับคุณสมบัติ คือ

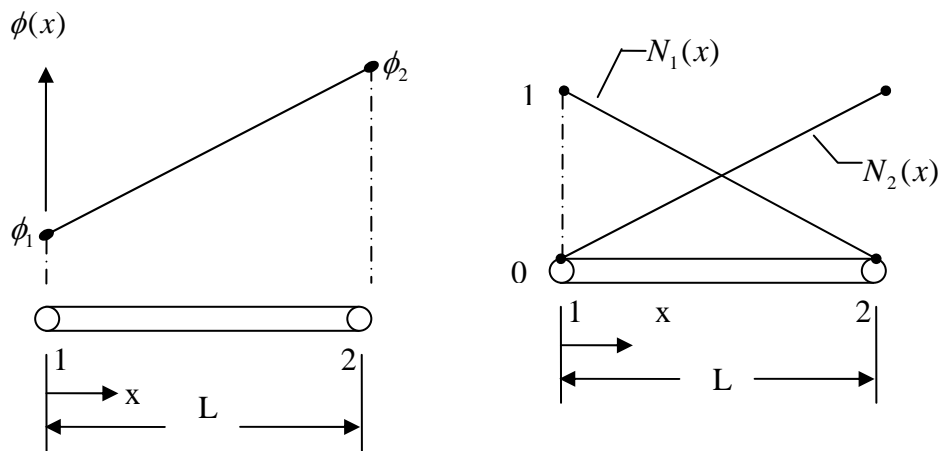
$$N_i(\xi_j) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases} \quad (2)$$

3.1 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ของเอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติที่มีความยาว L และประกอบด้วย 2 จุดต่อ ฟังก์ชันดังกล่าวก่อให้เกิดลักษณะการกระจายของผลเฉลยโดยประมาณในเชิงเส้นตรงตลอดความยาวของเอลิเมนต์นั้น ซึ่งอยู่ในรูปแบบดังนี้คือ

$$\varphi(x) = N_1(x)\phi_1 + N_2(x)\phi_2 \quad (3)$$

โดย ϕ_1 และ ϕ_2 คือค่าของผลเฉลยที่จุดต่อ 1 และ 2 ตามลำดับ และ $N_1(x)$ และ $N_2(x)$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ที่มีลักษณะเชิงเส้นตรงดังแสดงในภาพที่ 1



ภาพที่ 1 ลักษณะการกระจายเชิงเส้นตรงบนเอลิเมนต์และฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์เชิงเส้นตรง

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{และ} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} \quad (4)$$

และมีคุณสมบัติที่ว่า

$$N_i = 1 \text{ ที่จุดต่อ } i \text{ และ } N_i = 0 \text{ ที่จุดต่ออื่นๆ} \quad (5)$$

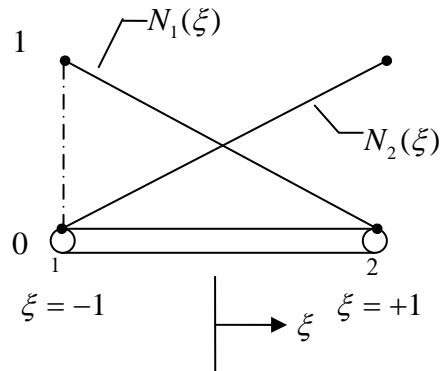
จากภาพที่ 1 หากตั้งพิกัด (Coordinate) ใหม่ โดยเปลี่ยนจากพิกัด x ไปเป็น ξ พิกัด ξ ใหม่นี้เรียกว่าพิกัดธรรมชาติ (Natural Coordinate) ของเอลิเมนต์โดยมีความสัมพันธ์กับพิกัด x เก่าคือ

$$x = \frac{1}{2}L(1 + \xi) \quad (6)$$

นั่นคือ ที่ $x = 0$ ณ ตำแหน่งของจุดต่อหมายเลข 1 ค่า $\xi = -1$ และที่ $x = L$ ณ ตำแหน่งของจุดต่อหมายเลข 2 ค่า $\xi = +1$ ดังนั้นลักษณะของการกระจายของผลเฉลย โดยประมาณดังแสดงในสมการ (3) สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของพิกัด ξ ได้คือ

$$\varphi(\xi) = N_1(\xi)\varphi_1 + N_2(\xi)\varphi_2 \quad (7)$$

โดย $N_1(\xi)$ และ $N_2(\xi)$ คือ ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์ ดังแสดงในภาพที่ 2
 ดังนี้



ภาพที่ 2 ฟังก์ชันการประมาณภายในบนพิกัดธรรมชาติแบบ 2 จุดต่อ

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (8)$$

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (9)$$

ซึ่งมีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับที่แสดงในสมการ (5) นั่นคือ

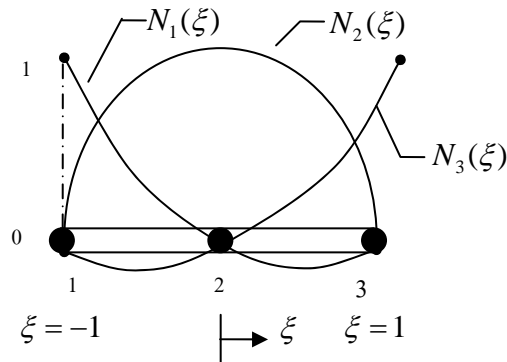
$$N_i = 1 \text{ ที่จุดต่อ } i \text{ และ } N_i = 0 \text{ ที่จุดต่ออื่นๆ} \quad (10)$$

และ $\sum N_i = 1$ โดย $i = 1$ จนถึงจำนวนจุดต่อทั้งหมดของเอลิเมนต์

ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 2 จุดต่อดังแสดงในสมการ (8) และสมการ (9) เป็นชุดของฟังก์ชันการประมาณภายในของลากราง (Lagrange family of interpolation functions) ซึ่งสามารถขยายนำไปใช้ได้กับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วยหลายจุดต่อ

3.2 ฟังก์ชันการประมาณภายในเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

ฟังก์ชันการประมาณภายในของลากรานสำหรับเอลิเมนต์ที่ประกอบด้วย 3 จุดต่อ แสดงในภาพที่ 3 จะมีค่าฟังก์ชันการประมาณภายในดังนี้



ภาพที่ 3 ฟังก์ชันการประมาณภายในบนพิกัดธรรมชาติแบบ 3 จุดต่อ

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad (11)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (12)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad (13)$$

โดยมีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับที่แสดงในสมการ (10)

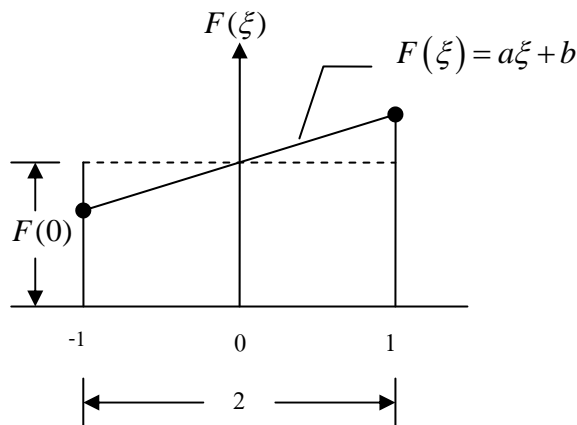
4. สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ (Gauss-Legendre)

สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ สามารถนำไปใช้ในการอินทิเกรตไฟไนต์เอลิเมนต์ เมตริกซ์ได้อย่างถูกต้อง สามารถศึกษาขั้นตอนการอินทิเกรต โดยเริ่มจากตัวอย่างของปัญหาใน 1 มิติ ดังต่อไปนี้

เมื่อต้องการหาผลการอินทิเกรตของ $\int_a^b F(x)dx$ โดยใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ในหนึ่งมิติเมื่อกำหนดให้

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^1 F(\xi)d\xi \quad (14)$$

เมื่อต้องการหาค่า $\int_{-1}^1 F(\xi)d\xi$ เมื่อฟังก์ชัน $F(\xi) = a\xi + b$ มีลักษณะการกระจายในเชิงเส้นตรงโดย a และ b เป็นค่าคงตัว ดังแสดงในภาพที่ 4



ภาพที่ 4 การอินทิเกรตฟังก์ชันในพิกัดหนึ่งมิติ

ผลของ $\int_{-1}^1 F(\xi)d\xi$ ก็คือ พื้นที่ใต้ฟังก์ชัน $F(\xi)$ นั้น ซึ่งในที่นี้ก็คือ พื้นที่ใต้เส้น $F(\xi)$ ดังแสดงในภาพที่ 4 ในขณะที่เดียวกันก็มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นประ ซึ่งเท่ากับสองคูณกับค่าของฟังก์ชัน $F(\xi)$ นั้น ที่ $\xi = 0$ นั่นคือ

$$\int_{-1}^1 F(\xi)d\xi = 2 F(0) \quad (15)$$

ในสมการ (15) เราจะเรียกค่าหมายเลข 2 นี้ว่าน้ำหนัก (Weight) และตำแหน่งที่ $\xi = 0$ ว่าเป็นตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss point location) ซึ่งก็คือตำแหน่งที่ใช้หาค่าของฟังก์ชัน F ซึ่งลักษณะของผลลัพธ์จากการอินทิเกรตดังแสดงในสมการ (15) นี้เองสามารถนำมาเขียนเป็นสมการโดยทั่วไปในการอินทิเกรตที่เรียกว่า สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ ได้ดังนี้

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^{NG} W_i F(\xi_i) \quad (16)$$

โดย NG = จำนวนของจุดเกาส์ (Number of Gauss points)

W_i = น้ำหนัก (Weights)

ξ_i = ตำแหน่งของจุดเกาส์ (Gauss point locations)

สูตรการอินทิเกรตนี้ใช้ได้กับฟังก์ชัน $F(\xi)$ ทั่วไป ซึ่งผลจากการอินทิเกรตที่ได้จะแม่นยำมากน้อยเพียงใด ขึ้นอยู่กับลักษณะของฟังก์ชัน $F(\xi)$ ที่กำหนดมาให้และจำนวนจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรตนั้น นอกจากนั้นค่าน้ำหนักและตำแหน่งของจุดเกาส์ต่างๆ จะแตกต่างกันออกไป โดยขึ้นอยู่กับจำนวนของจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต

ตารางที่ 1 น้ำหนักและตำแหน่งของจุดเกาส์ที่ใช้ในการอินทิเกรต

จำนวนจุดเกาส์ (NG)	ตำแหน่งของจุดเกาส์ (ξ_i)	น้ำหนัก (W_i)
1	0	2
2	$\pm 1/\sqrt{3} = \pm 0.5773502692$	1
3	$\left\{ \begin{array}{l} \pm \sqrt{3/5} = \pm 0.7745966692 \\ 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 5/9 = 0.5555555556 \\ 8/9 = 0.8888888889 \end{array} \right.$

ที่มา: ปราโมทย์ (2542)

ตารางที่ 2 อันดับของฟังก์ชันและจำนวนจุดเกาส์

จำนวนจุดเกาส์ (NG)	อันดับของฟังก์ชัน $F(\xi)$ $2NG - 1$	ลักษณะฟังก์ชัน $F(\xi)$
1	1	เชิงเส้นตรง
2	3	อันดับ 3 (Cubic)
3	5	อันดับ 5 (5^{th} order)

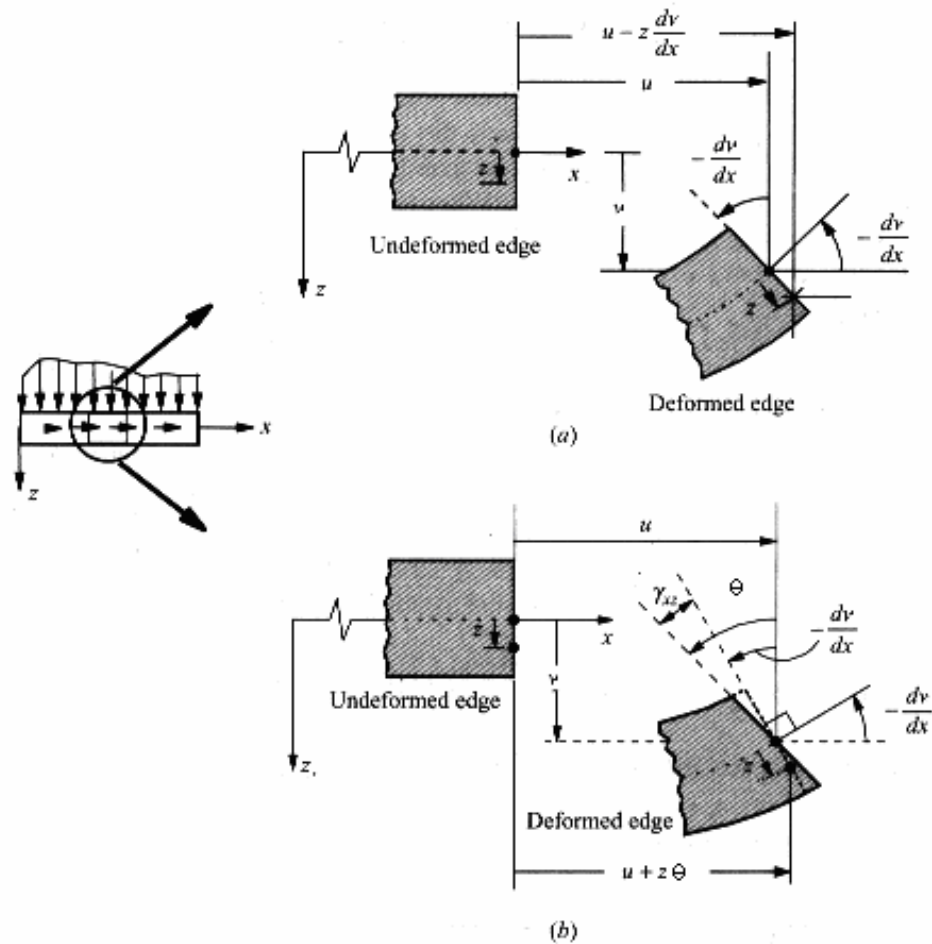
ที่มา: ปราโมทย์ (2542)

หากใช้จำนวนของจุดเกาส์เท่ากับ NG ตำแหน่งและค่าน้ำหนักของจุดเกาส์ต่างๆ เช่นดังแสดงในตารางที่ 2 จะก่อให้เกิดผลเฉลยแม่นยำตรงจากการอินทิเกรตฟังก์ชัน $F(\xi)$ ซึ่งอยู่ในรูปของฟังก์ชันพหุนาม (Polynomial Function) ที่มีอันดับ $2NG - 1$ หรือต่ำกว่านั้น ซึ่งหมายความว่า หากฟังก์ชัน $F(\xi)$ มีการกระจายแบบเชิงเส้นตรง จะได้ผลเฉลยแม่นยำตรงจากการอินทิเกรตโดยใช้จำนวนจุดเกาส์เพียงแค่จุดเดียว หากฟังก์ชัน $F(\xi)$ มีการกระจายแบบพหุนามอันดับ 2 หรือ 3 จะได้ผลเฉลยแม่นยำตรงจากการอินทิเกรตโดยใช้จำนวนจุดเกาส์ 2 จุด

ทฤษฎีคาน

โดยทั่วไปแล้วในการวิเคราะห์คานที่ใช้รับแรงดัดจะใช้เอลิเมนต์แบบหนึ่งมิติ โดยจะพิจารณาแรงในแนวตั้งฉากและโมเมนต์ที่เกิดขึ้นในแนวแกนสะเทิน (neutral axis) ซึ่งในทฤษฎีคานทิโมเชนโก (Timoshenko) ได้รวมการเคลื่อนตัวเนื่องจากแรงเฉือนเข้ามาด้วย ทำให้สามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้ทั้งกับคานยาวและคานสั้นหรือคานหนา ส่วนทฤษฎีคานของเบอร์นูลลี-ออยเลอร์ (Bernoulli-Euler) ไม่มีความแม่นยำและไม่สามารรถนำมาใช้ได้เมื่อทำการออกแบบคานสั้นและไม่สามารถจำลองพลศาสตร์การตอบสนองของช่วงคลื่นการโค้งงอที่ความถี่สูงๆ ได้ นอกจากนี้ทฤษฎีคานของเบอร์นูลลี-ออยเลอร์ต้องการความต่อเนื่อง C^1 ส่วนทฤษฎีคานทิโมเชนโกต้องการความต่อเนื่อง C^0 ดังนั้นการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical deflection, $v(x)$) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนหรือความชันเนื่องจากการดัด (rotation, $\theta(x)$) ต่างก็มีผลเฉลยเป็นตัวแปรอิสระที่ไม่ขึ้นแก่กัน โดยทฤษฎีคานทิโมเชนโกมีพื้นฐานมาจากการสมมุติกล

ศาสตร์การเคลื่อนไหวภายใต้การค้ำ โดยที่หน้าตัดของคานายังคงเป็นหน้าตัดเดิมหลังการเคลื่อนตัว โดยที่ไม่จำเป็นต้องตั้งฉากกับแกนสะเทิน ดังแสดงในภาพที่ 5



ภาพที่ 5 การเคลื่อนตัวของคานาตามทฤษฎีของเบอร์นูลลี-ออยเลอร์ (a) และทฤษฎีของทิโมเซนโก (b)

ที่มา: Reddy (2006)

1. หลักการการแปรผัน

จากหลักการพื้นฐานของการกระจัดเสมือน (principle of virtual displacement) ซึ่งเทียบเท่าได้กับหลักการของพลังงานศักย์ต่ำสุด (principle of minimum potential energy) ฟังก์ชันของ

พลังงานศักย์ต่ำสุดสำหรับคานาทวิโมเชนโกภายใต้แรงกระทำฮาร์มอนิก-เวลา (time-harmonic) (Tong, 1999) คือ

$$\pi = \frac{1}{2} \int_0^h \{\varepsilon^*\}^T [C^*] \{\varepsilon^*\} dx - \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^h \{u^*\}^T [D^*] \{u^*\} dx - \int_0^h \{u^*\}^T \{f^*\} dx \quad (17)$$

เมื่อ $\{u^*\}$ คือ แถวลำดับของการเคลื่อนตัว (displacement array)

$$\{u^*\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ \theta(x) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$\{\varepsilon^*\}$ คือ แถวลำดับซึ่งเป็นผลจากความเครียด (strain resultants array)

$$\{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{dv}{dx} - \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_{,x} \\ v_{,x} - \theta \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$[D^*]$ คือ เมตริกซ์ซึ่งมีนิยามคือ

$$[D^*] = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix} \quad (20)$$

$\{\sigma^*\}$ คือ แถวลำดับซึ่งเป็นผลจากความเค้น (stress resultants array)

$$\{\sigma^*\} = \begin{Bmatrix} M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GA\kappa \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{K} \\ \gamma \end{Bmatrix} = [C^*] \{\varepsilon^*\} \quad (21)$$

κ คือ ตัวประกอบแก้ไขสำหรับความเค้นเฉือน (shear correction factor)

ตารางที่ 3 ตัวประกอบแก้ไขสำหรับความเค้นเฉือน (κ) สำหรับพื้นที่หน้าตัดต่างๆ

รูปร่างของพื้นที่หน้าตัด	α	$\kappa = 1/\alpha$
1. สี่เหลี่ยมผืนผ้า	6/5	5/6
2. รูปตัวไอ, รูปกล่อง, ช่อง	A/A_{web}	A_{web}/A
3. วงกลม	10/9	9/10
4. ผนังบางรูปวงกลม	2	1/2

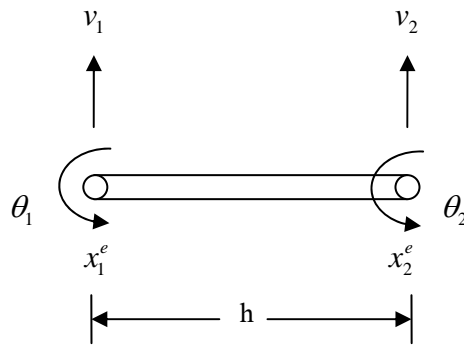
หมายเหตุ A = พื้นที่หน้าตัดทั้งหมด, A_{web} = พื้นที่หน้าตัดของคาน (ความสูงของคาน \times ความหนาของคาน)

ที่มา: Ugural and Fenster (1995)

พจน์แรกทางขวามือของสมการ (17) มีความสอดคล้องกับพลังงานภายในของความเครียดเสมือน (internal virtual strain energy) และพจน์ที่สองสอดคล้องกับงานเสมือนที่มาจากผลความเฉื่อยของก้อนมวล (mass inertia effects) พจน์ที่สามคือแรงเสมือนภายนอกที่มาจากแรงกระจายที่ใส่เข้าไป (apply distributed forces)

2. เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อสำหรับคานทิโมเชนโก

เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อสำหรับคานทิโมเชนโกที่แต่ละจุดต่อจะมี 2 ระดับขั้นความเสรี (degrees of freedom) ได้แก่ การเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนหรือความชันเนื่องจากการคด (rotation, θ)



ภาพที่ 6 เอลิเมนต์คานทวิโมเชน โทแบบ 2 จุดต่อ โดยแสดงถึงการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน

เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อนี้จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้น (linear) สำหรับการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนหรือความชันเนื่องจากการคด โดยมีพื้นฐานมาจากวิธีมาตรฐานกาลเลอร์กิน (Standard Galerkin Method) โดย เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อเป็นเอลิเมนต์ที่ง่ายในการนำมาใช้โดยได้ผลของสมการในพิกัดฉากคือ

$$v(x) = N_1^e(x)v_1 + N_2^e(x)v_2 \quad (22)$$

$$\theta(x) = N_1^e(x)\theta_1 + N_2^e(x)\theta_2 \quad (23)$$

และได้ผลของสมการในพิกัดธรรมชาติคือ

$$v(\xi) = N_1^e(\xi)v_1 + N_2^e(\xi)v_2 \quad (24)$$

$$\theta(\xi) = N_1^e(\xi)\theta_1 + N_2^e(\xi)\theta_2 \quad (25)$$

เมื่อ $N_1^e(\xi)$ และ $N_2^e(\xi)$ คือฟังก์ชันการประมาณภายในของลากรางแบบมาตรฐานเชิงเส้น ซึ่งมีนิยามในพิกัดธรรมชาติ $\xi \in [-1, 1]$ จะได้

$$N_1^e(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (26)$$

$$N_2^e(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (27)$$

จากสมการการแปรผัน สมการ (17) และสมการที่ได้จากการประมาณภายใน สมการ (22) และสมการ (23)

$$K^h = \theta_{,x}^h = \sum_{i=1}^n N_{i,x}^e \theta_i^e \quad (28)$$

$$\gamma^h = v_{,x}^h - \theta^h = \sum_{i=1}^n N_{i,x}^e v_i^e - \sum_{i=1}^n N_i^e \theta_i^e \quad (29)$$

สำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ จะได้ $n = 2$

$$K^h = \theta_{,x}^h = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & N_{2,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [B_b] \{d^e\} \quad (30)$$

$$\gamma^h = v_{,x}^h - \theta^h = \begin{bmatrix} N_{1,x} & -N_1 & N_{2,x} & -N_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [B_s] \{d^e\} \quad (31)$$

เมตริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์ $[k^e]$ สำหรับวัสดุที่มีคุณสมบัติเหมือนกันทุกทิศทาง (isotropic material) เมตริกซ์แข็งเกร็ง $[k^e]$ ที่ได้จากส่วนของการตัดและการเชื่อมสามารถเขียนได้เป็น

$$[k^e] = \int_{x_1^e}^{x_2^e} [B_b]^T EI [B_b] dx + \int_{x_1^e}^{x_2^e} [B_s]^T GA \kappa [B_s] dx \quad (32)$$

$$[k^e] = [k_b^e] + [k_s^e] \quad (33)$$

เมื่อ $[k_b^e]$ คือเมตริกซ์แข็งเกร็งจากการตัด และ $[k_s^e]$ คือเมตริกซ์แข็งเกร็งจากการเนียน

$$[k^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{h} & 0 & -\frac{EI}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{EI}{h} & 0 & \frac{EI}{h} \end{bmatrix} + GA\kappa \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{h} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{h}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{h}{6} \\ \frac{-1}{h} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{h} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{h}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{h}{3} \end{bmatrix} \quad (34)$$

ทำการหาเมตริกซ์มวลโดยเริ่มจากสมการ (22) และสมการ (23) จะได้

$$v^h = [N_1 \quad 0 \quad N_2 \quad 0] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N_v] \{d^e\} \quad (35)$$

$$\theta^h = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad N_2] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = [N_\theta] \{d^e\} \quad (36)$$

กำหนดให้

$$[N] = \begin{Bmatrix} N_v \\ N_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ สามารถเขียนได้เป็น

$$[m^e] = \int_{x_1^e}^{x_2^e} [N]^T [D^*] [N] dx \quad (38)$$

$$[m^e] = \begin{bmatrix} \frac{\rho Ah}{3} & 0 & \frac{\rho Ah}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\rho Ih}{3} & 0 & \frac{\rho Ih}{6} \\ \frac{\rho Ah}{6} & 0 & \frac{\rho Ah}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\rho Ih}{6} & 0 & \frac{\rho Ih}{3} \end{bmatrix} \quad (39)$$

3. การเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ (2 node Selective Reduce Integration) เป็นเอลิเมนต์คานทิโมเซนโกที่ใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้น (linear) โดยมีพื้นฐานมาจากวิธีมาตรฐานกาลเลอร์กิน (Standard Galerkin Method) โดยใช้เทคนิคการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเพื่อจัดการยึดเนื่องจากแรงเฉือน (shear locking) เอลิเมนต์ของการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อเป็นเอลิเมนต์ที่ง่ายในการนำมาใช้

ในสูตรการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อนี้จะใช้การประมาณภายในเอลิเมนต์แบบเชิงเส้นสำหรับการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน โดยได้ผลของสมการดังเช่นในสมการ (24) และสมการ (25) และใช้ฟังก์ชันการประมาณภายใน ในสมการ (26) และสมการ (27)

เพื่อจัดการยึดเนื่องจากแรงเฉือนในส่วนของเมตริกซ์แข็งเกร็งจะใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แบบ 1 จุด โดย ตำแหน่งของจุดเกาส์ $\xi = 0$ และน้ำหนัก $W = 2$ และกำหนดให้ EI และ GAK เป็นค่าคงที่ การอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แบบ 1 จุด จะให้ผลการอินทิเกรตแบบแม่นยำตรง (exactly integrates) สำหรับส่วนของการคด $[k_b^e]$ และให้ผลต่ำกว่าผลการอินทิเกรต (underintegrates) สำหรับส่วนของการเฉือน $[k_s^e]$

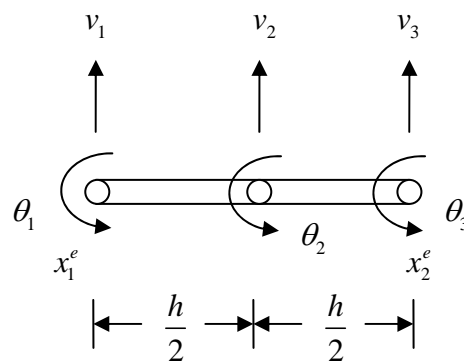
จะได้เมตริกซ์แข็งเกร็ง $[k^e]$ สำหรับวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ คือ

$$[k^e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{h} & 0 & \frac{-EI}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-EI}{h} & 0 & \frac{EI}{h} \end{bmatrix} + GA_K \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{h} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{h}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{h}{4} \\ \frac{-1}{h} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{h} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{h}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{h}{4} \end{bmatrix} \quad (40)$$

เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตจะเหมือนกับเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานาทิโมเซนโก

4. เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อสำหรับคานาทิโมเซนโก

เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อสำหรับคานาทิโมเซนโกที่แต่ละจุดต่อจะมี 2 ระดับขั้นความเสรี (degrees of freedom) ได้แก่ การเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนหรือความชันเนื่องจากการคด (rotation, θ) เช่นเดียวกันกับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ



ภาพที่ 7 เอลิเมนต์คานาทิโมเซนโกแบบ 3 จุดต่อ โดยแสดงถึงการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน

เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อนี้จะใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในที่เป็นสมการกำลังสอง (quadratic) สำหรับการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน โดย

มีพื้นฐานมาจากวิธีมาตรฐานกาลेरคิน (Standard Galerkin Method) โดยเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อจะ
ได้ผลของสมการในพิกัดฉากคือ

$$v(x) = N_1^e(x)v_1 + N_2^e(x)v_2 + N_3^e(x)v_3 \quad (41)$$

$$\theta(x) = N_1^e(x)\theta_1 + N_2^e(x)\theta_2 + N_3^e(x)\theta_3 \quad (42)$$

และได้ผลของสมการในพิกัดธรรมชาติคือ

$$v(\xi) = N_1^e(\xi)v_1 + N_2^e(\xi)v_2 + N_3^e(\xi)v_3 \quad (43)$$

$$\theta(\xi) = N_1^e(\xi)\theta_1 + N_2^e(\xi)\theta_2 + N_3^e(\xi)\theta_3 \quad (44)$$

เมื่อ N_1^e , N_2^e และ N_3^e คือฟังก์ชันการประมาณภายในของลากราน ซึ่งมียามในพิกัด
ธรรมชาติ $\xi \in [-1, 1]$ จะได้

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad (45)$$

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (46)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad (47)$$

จากสมการการแปรผัน สมการ (17) และสมการที่ได้จากการประมาณภายใน สมการ (43)
และสมการ (44) สำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ จะได้ $n = 3$

$$\mathbf{K}^h = \boldsymbol{\theta}_{,x}^h = \begin{bmatrix} 0 & N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_b] \{d^e\} \quad (48)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^h = v_{,x}^h - \boldsymbol{\theta}^h = \begin{bmatrix} N_{1,x} & -N_1 & N_{2,x} & -N_2 & N_{3,x} & -N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = [\mathbf{B}_s] \{d^e\} \quad (49)$$

จากสมการ (32) จะได้ เมทริกซ์แข็งเกร็งจากการตัดและเมทริกซ์แข็งเกร็งจากการเฉือน สำหรับเอลิเมนต์คานทิโมเซน โทแบบ 3 จุดต่อ คือ

$$[\mathbf{k}^e] = \frac{EI}{3h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 7 \end{bmatrix} + GA\kappa \begin{bmatrix} \frac{7}{3h} & \frac{1}{2} & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3h} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2h}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{15} & \frac{1}{6} & \frac{-h}{30} \\ \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{16}{3h} & 0 & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{h}{15} & 0 & \frac{8h}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{15} \\ \frac{1}{3h} & \frac{1}{6} & \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{7}{3h} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-h}{30} & \frac{2}{3} & \frac{h}{15} & \frac{-1}{2} & \frac{2h}{15} \end{bmatrix} \quad (50)$$

ทำการหาเมทริกซ์มวลโดยเริ่มจากสมการ (43) และสมการ (44) จะได้

$$[\mathbf{N}] = \begin{Bmatrix} N_v \\ N_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (51)$$

จากสมการ (38) และสมการ (51) เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ สามารถเขียนได้
เป็น

$$[m^e] = \begin{bmatrix} \frac{2\rho Ah}{15} & 0 & \frac{\rho Ah}{15} & 0 & \frac{-\rho Ah}{30} & 0 \\ 0 & \frac{2\rho Ih}{15} & 0 & \frac{\rho Ih}{15} & 0 & \frac{-\rho Ih}{30} \\ \frac{\rho Ah}{15} & 0 & \frac{8\rho Ah}{15} & 0 & \frac{\rho Ah}{15} & 0 \\ 0 & \frac{\rho Ih}{15} & 0 & \frac{8\rho Ih}{15} & 0 & \frac{\rho Ih}{15} \\ \frac{-\rho Ah}{30} & 0 & \frac{\rho Ah}{15} & 0 & \frac{2\rho Ah}{15} & 0 \\ 0 & \frac{-\rho Ih}{30} & 0 & \frac{\rho Ih}{15} & 0 & \frac{2\rho Ih}{15} \end{bmatrix} \quad (52)$$

5. การเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ (3 node Selective Reduce Integration) จะใช้เทคนิคการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเพื่อจัดการขีดเนื่องจากแรงเฉือน (shear locking) ในสูตรการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อนี้จะใช้การประมาณภายในเอลิเมนต์ที่เป็นสมการกำลังสอง สำหรับการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน โดยได้ผลของสมการดังเช่นในสมการ (43) และสมการ (44) และใช้ฟังก์ชันการประมาณภายใน ในสมการ (45) - (47)

เพื่อจัดการขีดเนื่องจากแรงเฉือนในส่วนของเมตริกซ์แข็งเกร็งจะใช้สูตรการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์ แบบ 2 จุด โดยใช้ตำแหน่งของจุดเกาส์ $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ น้ำหนัก $W = 1$ และกำหนดให้ EI และ GAK เป็นค่าคงที่ จะได้เมตริกซ์แข็งเกร็ง $[k^e]$ สำหรับวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ คือ

$$\left[k^e \right] = \frac{EI}{3h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 7 \end{bmatrix} + GAk \begin{bmatrix} \frac{7}{3h} & \frac{1}{2} & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3h} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{h}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{9} & \frac{1}{6} & \frac{-h}{18} \\ \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{16}{3h} & 0 & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{h}{9} & 0 & \frac{4h}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{9} \\ \frac{1}{3h} & \frac{1}{6} & \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{7}{3h} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-h}{18} & \frac{2}{3} & \frac{h}{9} & \frac{-1}{2} & \frac{h}{9} \end{bmatrix} \quad (53)$$

การวิเคราะห์การกระจายตัว

การวิเคราะห์การกระจายตัว (Dispersion Analysis) จะบอกถึงความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนคลื่น (wave number) และความถี่ (frequency) สำหรับผลเฉลยของสมการการเคลื่อนที่เชิงพลศาสตร์ในโครงสร้าง โดยทั่วไปแล้วจะมีจำนวนคลื่น 3 รูปแบบ ซึ่งก็คือ การกระจายตัว (propagation), การหายไปอย่างรวดเร็ว (evanescent), การลดระดับการสั่น (oscillatory-decaying) จำนวนคลื่นจินตภาพจะเกี่ยวข้องกับการหายไปอย่างรวดเร็วของคลื่น และทั้งการหายไปอย่างรวดเร็วและการลดระดับของจำนวนคลื่นถูกสร้างจากความไม่ต่อเนื่องของโครงสร้างหรือเทอมแรงเฉพาะที่ (localized forcing terms) โดยคลื่นแต่ละแบบนี้แสดงถึงกฎที่สำคัญของการสั่นในโครงสร้าง สำหรับปัญหาการสั่นของโครงสร้างและการกระจายตัวของคลื่นต่างก็มีความสำคัญในการจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เพื่อให้แสดงผลที่น่าเชื่อถือของแต่ละชนิดคลื่นในระบบ โดยการวิเคราะห์การกระจายตัวเป็นเครื่องมือที่มีประสิทธิภาพในการประเมินความน่าเชื่อถือของการจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้แสดงคลื่นของการกระจายตัวในระบบจริง

ความสัมพันธ์ของการกระจายตัวเชิงตัวเลข (numerical dispersion) ได้จากการศึกษาความเป็นไปได้ของผลเฉลยคลื่นที่ยอมรับได้จากสมการไฟไนต์เอลิเมนต์ สิ่งนี้สามารถสัมฤทธิ์ผลได้จากการพิจารณาการแบ่งขอบเขต (discretized domain) อนันต์ ในแต่ละสมการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และสามารถนำมาเขียนซ้ำได้ในแต่ละจุดต่อ โดยความสัมพันธ์ของการวิเคราะห์การกระจายตัวเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและสัมพันธ์กับจำนวนคลื่นที่แต่ละความถี่สำหรับความถี่ที่เป็นไปได้ทั้งหมด แต่ความสัมพันธ์ของการกระจายตัวเชิงตัวเลขที่คล้ายกันจะเป็นฟังก์ชันคาบ (periodic functions)

การวิเคราะห์การกระจายตัวที่ได้จากการวิเคราะห์และที่ได้จากไฟไนต์เอลิเมนต์จะได้ผลเฉลยที่สมมุติขึ้นในรูปของเลขชี้กำลังฮาร์มอนิกเวลา (time harmonic exponential) กับการแปรตามพื้นที่ (spatial dependence) คือ Ae^{ikx} โดย A คือแอมพลิจูดของคลื่น และ k คือ จำนวนคลื่น ถ้า k คือ จำนวนจริงเท่านั้น จะเหมือนกับคลื่นของการกระจายตัว แต่ถ้า k คือ จำนวนเชิงซ้อน จะเหมือนกับคลื่นของการลดระดับการสั่น

การกระจายตัวของคลื่นผ่านคานคือการกระจายตัว เช่น จำนวนคลื่นไม่เป็นแบบเชิงเส้นที่ขึ้นกับความถี่ โดยความสัมพันธ์การกระจายตัวขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์และคุณสมบัติทางเรขาคณิตของวัสดุ ซึ่งในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์การกระจายตัวสำหรับคานทิโมเชนโกสามารถหาได้ ดังนั้นผลเฉลยทางไฟไนต์เอลิเมนต์สามารถเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์และคำนวณค่าคลาดเคลื่อนของการกระจายตัวได้

1. ความสัมพันธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ของจำนวนคลื่นกับความถี่

สมการครอบคลุมของการเคลื่อนที่สำหรับคานทิโมเชนโกที่มีคุณสมบัติคงที่ตลอดทั้งคานคือ (Timoshenko et al., 1990)

$$EI \frac{d^2\theta}{dx^2} - GAk \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) - \rho I \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0 \quad (54)$$

$$GAk \left(\frac{d\theta}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} \right) + \rho A \frac{d^2v}{dt^2} = 0 \quad (55)$$

เมื่อ v คือ การเคลื่อนที่ในแนวตั้งฉาก, θ คือ การเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน

จะได้ผลเฉลยของสมการครอบคลุมในรูปแบบของสมการที่อยู่ในรูปของเลขชี้กำลัง คือ

$$v = A_1 e^{i(kx - \omega t)} \quad (56)$$

$$\theta = A_2 e^{i(kx - \omega t)} \quad (57)$$

เมื่อ k คือ จำนวนคลื่น (wavenumber)
 ω คือ ความถี่ (frequency)
 A_1, A_2 คือ แอมพลิจูด (amplitudes)

แทนค่า v และ θ จากสมการ (56) และสมการ (57) ลงในสมการ (54) และสมการ (55) จะ
 ได้

$$\begin{bmatrix} GAkk^2 - \rho A \omega^2 & iGAkk \\ iGAkk & -GAk - EI k^2 + \rho I \omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (58)$$

กำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ในสมการ (58) เป็น 0 จะได้ความสัมพันธ์ของการ
 กระจายตัวเชิงวิเคราะห์สำหรับคานาทิมochen โก คือ

$$-\frac{\rho I}{GkA} \omega^4 + \omega^2 + \frac{I}{A} \left(1 + \frac{E}{Gk}\right) k^2 \omega^2 - \frac{EI}{\rho A} k^4 = 0 \quad (59)$$

ทำการแก้สมการ จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ $\pm k$ สำหรับแต่ละ ω ชุดหนึ่งของ $\pm k$ คือ
 จำนวนจริงซึ่งสมนัย (corresponds) กับการกระจายตัวของคลื่น (propagating wave) และอีกชุดหนึ่ง
 ของ $\pm k$ เป็นจำนวนจินตภาพซึ่งสมนัยกับการหายไปอย่างรวดเร็วของคลื่น (evanescent wave)

2. ความสัมพันธ์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของจำนวนคลื่นกับความถี่

เพื่อให้ได้มาซึ่งความสัมพันธ์ของการกระจายตัวเชิงตัวเลข ระบบรวมของสมการ ได้ถูก
 รวมเข้าสำหรับคานยาวที่เป็นเอกพันธ์อนันต์ (homogeneous infinite long beam)

เมื่อสมมุติให้ไม่มีแรงวัตถุ (body force) สมการไฟไนต์เอลิเมนต์ของกาลอร์คิน (Galerkin)
 สำหรับคานที่มีความยาวอนันต์สามารถแสดงได้ คือ

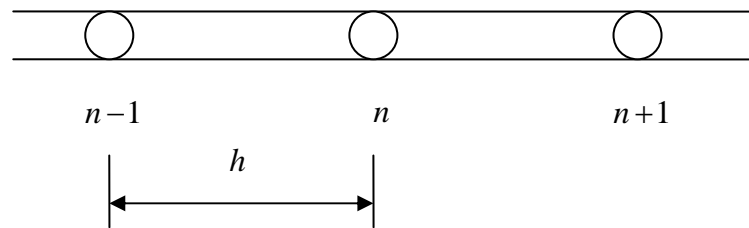
$$[K]\{d\} + [M]\{\ddot{d}\} = 0 \quad (60)$$

$$\text{เมื่อ } [K] = \Sigma [k^e] \text{ และ } [M] = \Sigma [m^e]$$

สำหรับปัญหาทางด้านฮาร์มอนิก-เวลาที่สมมุติการตอบสนองเป็น $e^{i\omega t}$ สมการด้านบนสามารถเขียนได้เป็น

$$([K] - \omega^2 [M])\{d\} = 0 \quad (61)$$

2.1 ความสัมพันธ์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของจำนวนคลื่นกับความถี่สำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ



ภาพที่ 8 ผังการแบ่งที่เท่ากันของระยะห่างในแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ที่มีความยาวของเอลิเมนต์เท่ากับ h สำหรับคานที่มีความยาวอนันต์สำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

เมื่อนิยามให้ $[z^e] = [k^e] - \omega^2 [m^e]$ และ z_{ij} คือ เอลิเมนต์แถวที่ i หลักที่ j ของเมตริกซ์ $[z^e]$ จะทำให้เราได้การทำซ้ำ (stencils) ที่แต่ละจุดต่อ สำหรับที่จุดต่อ n การทำซ้ำสามารถเขียนได้ดังนี้

$$[Q_{n-1}]\{d_{n-1}\} + [Q_n]\{d_n\} + [Q_{n+1}]\{d_{n+1}\} = 0 \quad (62)$$

เมื่อ

$$[Q_{n-1}] = \begin{bmatrix} z_{13} & z_{23} \\ z_{14} & z_{24} \end{bmatrix} \quad [Q_n] = \begin{bmatrix} 2z_{11} & 0 \\ 0 & 2z_{22} \end{bmatrix} \quad [Q_{n+1}] = [Q_{n-1}]^T \quad (63)$$

และ $\{d_{n-1}\}$, $\{d_n\}$ และ $\{d_{n+1}\}$ คือ เวกเตอร์การกระจัดที่สัมพันธ์กับจุดต่อ $n-1$, จุดต่อ n และจุดต่อ $n+1$ ตามลำดับ ผลเฉลยเลขชี้กำลังถูกสมมุติขึ้นสำหรับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ n คือ

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} v_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} e^{ik^h n h} \quad (64)$$

เมื่อ k^h คือ ผลเฉลยทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของจำนวนคลื่น

นำตัวไม่รู้ค่าด้านบนใส่ลงไปในการสมการการทำซ้ำ จะได้

$$\begin{bmatrix} G_{11} & iG_{12} \\ -iG_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (65)$$

$$\text{เมื่อ} \quad G_{11} = z_{11} + z_{13} \cos(k^h h) \quad (66)$$

$$G_{12} = z_{14} \sin(k^h h)$$

$$G_{22} = z_{22} + z_{24} \cos(k^h h)$$

เพื่อหลีกเลี่ยงการได้ผลเฉลยไม่ชัด (non-trivial solution) ของผลเฉลย A_1 และ A_2 ดังนั้นจึงกำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ $[G]$ เท่ากับศูนย์ จะได้ผลของสมการลักษณะเฉพาะที่ให้ ความสัมพันธ์การกระจายตัวทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

$$\alpha_1 \cos^2(k^h h) + \alpha_2 \cos(k^h h) + \alpha_3 = 0 \quad (67)$$

เมื่อ α_1 , α_2 และ α_3 เป็นฟังก์ชันของ z_{ij}

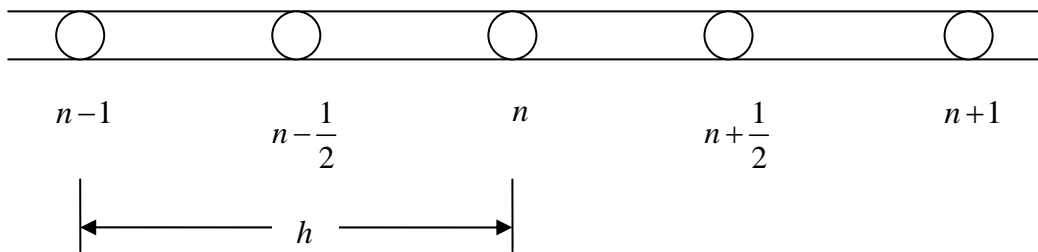
$$\alpha_1 = z_{13}z_{24} + z_{14}^2 \quad (68)$$

$$\alpha_2 = z_{11}z_{24} + z_{13}z_{22}$$

$$\alpha_3 = z_{11}z_{22} - z_{14}^2$$

ทำการแก้สมการ (67) จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ k^h ชุดหนึ่งเป็นจำนวนจริงและอีกชุดหนึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

2.2 ความสัมพันธ์ทางไฟไนต์เอลิเมนต์ของจำนวนคลื่นกับความถี่สำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ



ภาพที่ 9 ผังการแบ่งที่เท่ากันของระยะห่างในแต่ละจุดต่อของเอลิเมนต์ที่มีความยาวของเอลิเมนต์เท่ากับ h สำหรับคานที่มีความยาวอนันต์สำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

เมื่อนิยามให้ $[z^e] = [k^e] - \omega^2 [m^e]$ และ z_{ij} คือ เอลิเมนต์แถวที่ i หลักที่ j ของเมตริกซ์ $[z^e]$ จะทำให้เราได้การทำซ้ำ (stencils) ที่แต่ละจุดต่อ สำหรับที่จุดต่อ n การทำซ้ำสามารถเขียนได้ดังนี้

$$[Q_{n-1}]\{d_{n-1}\} + [Q_{n-\frac{1}{2}}]\left\{d_{n-\frac{1}{2}}\right\} + [Q_n]\{d_n\} + [Q_{n+\frac{1}{2}}]\left\{d_{n+\frac{1}{2}}\right\} + [Q_{n+1}]\{d_{n+1}\} = 0 \quad (69)$$

เมื่อ

$$[Q_{n-1}] = \begin{bmatrix} z_{51} & z_{52} \\ z_{61} & z_{62} \end{bmatrix} \quad [Q_n] = \begin{bmatrix} 2z_{11} & 0 \\ 0 & 2z_{22} \end{bmatrix} \quad [Q_{n+1}] = [Q_{n-1}]^T \quad (70)$$

$$[Q_{n-\frac{1}{2}}] = \begin{bmatrix} z_{53} & z_{54} \\ z_{63} & z_{64} \end{bmatrix} \quad [Q_{n+\frac{1}{2}}] = \begin{bmatrix} z_{13} & z_{14} \\ z_{23} & z_{24} \end{bmatrix}$$

และ $\{d_{n-1}\}$, $\{d_{n-\frac{1}{2}}\}$, $\{d_n\}$, $\{d_{n+\frac{1}{2}}\}$ และ $\{d_{n+1}\}$ คือ เวกเตอร์การกระจัดที่สัมพันธ์กับ จุดต่อ $n-1$, จุดต่อ $n-\frac{1}{2}$, จุดต่อ n , จุดต่อ $n+\frac{1}{2}$ และจุดต่อ $n+1$ ตามลำดับ ผลเฉลยเลขชี้กำลัง ถูกสมมุติขึ้นสำหรับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ n คือ

$$\{d_n\} = \begin{Bmatrix} v_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} e^{ik^h n h} \quad (71)$$

ผลเฉลยเลขชี้กำลังถูกสมมุติขึ้นสำหรับตัวไม่รู้ค่าที่จุดต่อ $n-\frac{1}{2}$ และจุดต่อ $n+\frac{1}{2}$ ซึ่งเป็น จุดต่อภายในเอลิเมนต์ คือ

$$\left\{ d_{n\pm\frac{1}{2}} \right\} = \begin{Bmatrix} v_{n\pm\frac{1}{2}} \\ \theta_{n\pm\frac{1}{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} e^{ik^h (n\pm\frac{1}{2})h} \quad (72)$$

นำตัวไม่รู้ค่าด้านบนไปใส่ลงในสมการการทำซ้ำ จะได้

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (73)$$

$$\text{เมื่อ} \quad G_{11} = z_{51}e^{-ik^h h} + z_{55} + z_{11} + z_{15}e^{ik^h h} \quad (74)$$

$$G_{12} = z_{52}e^{-ik^h h} + z_{56} + z_{12} + z_{16}e^{ik^h h}$$

$$G_{13} = z_{53}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{13}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{14} = z_{54}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{14}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{21} = z_{61}e^{-ik^h h} + z_{65} + z_{21} + z_{25}e^{ik^h h}$$

$$G_{22} = z_{62}e^{-ik^h h} + z_{66} + z_{22} + z_{26}e^{ik^h h}$$

$$G_{23} = z_{63}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{23}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{24} = z_{64}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{24}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{31} = z_{31}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{35}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{32} = z_{32}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{36}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{33} = z_{33}$$

$$G_{34} = z_{34} = G_{43} = 0$$

$$G_{41} = z_{41}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{45}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{42} = z_{42}e^{-\frac{1}{2}ik^h h} + z_{46}e^{\frac{1}{2}ik^h h}$$

$$G_{44} = z_{44}$$

เพื่อหลีกเลี่ยงการได้ผลเฉลยไม่ชัด (non-trivial solution) ของผลเฉลย A_1, A_2, A_3 และ A_4 ดังนั้นจึงกำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $[G]$ เท่ากับศูนย์ จะได้ผลของสมการลักษณะเฉพาะที่ให้ความสัมพันธ์การกระจายตัวทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

จากนั้นทำการแก้สมการ จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ k^h ชุดหนึ่งเป็นจำนวนจริงและอีกชุดหนึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดสำหรับคานาโทโมเซนโก

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงวิธีการใช้เทอมกำลังสองน้อยสุดของกาเลอร์คินเพื่อเพิ่มเข้าไปในสมการการแปรผันซึ่งเป็นสมการพลังงานศักย์ต่ำสุด โดยเทอมกำลังสองน้อยสุดของกาเลอร์คินจะถูกเพิ่มเข้าไปในฟังก์ชันของพลังงานศักย์ต่ำสุด ซึ่งเทอมกำลังสองน้อยสุดเป็นส่วนสำคัญกับการอินทิเกรตของตัวกำหนดอนุพันธ์ในเสตคคางของสมการอนุพันธ์ครอบคลุม และพารามิเตอร์การออกแบบที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว ที่มีอยู่ในเทอมกำลังสองน้อยสุดได้ถูกสร้างขึ้น โดยความสัมพันธ์การกระจายตัวของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อได้ถูกทำให้ตรงกันกับความสัมพันธ์การกระจายตัวที่ได้จากการวิเคราะห์

จากสมการอนุพันธ์ครอบคลุม (Governing Differential Equation) สำหรับการสั่นฮาร์มอนิก-เวลาของคานาโทโมเซนโกซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{dM}{dx} + Q + \rho I \omega^2 \theta = 0 \quad (75)$$

$$\frac{dQ}{dx} + \rho A \omega^2 v = 0 \quad (76)$$

สำหรับวัสดุที่มีความยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์และแรงเฉือนกับความเครียด (strain) สามารถเขียนให้อยู่ในรูป

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} \quad (77)$$

$$Q = GkA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \quad (78)$$

1. วิธีการกำลังสองน้อยสุดสำหรับคานาทิโมเชนโก

เริ่มจากสมการการแปรผันซึ่งเป็นสมการพลังงานศักย์ต่ำสุดสำหรับพลศาสตร์สถานะคงตัว โดยเทอมกำลังสองน้อยสุดจะถูกเพิ่มเข้าไปในฟังก์ชันของพลังงานศักย์ต่ำสุด โดยเทอมกำลังสองน้อยสุดเป็นสัดส่วนกับน้ำหนักการอินทิเกรตของตัวกำหนดอนุพันธ์ในเศษตกค้างของสมการอนุพันธ์ครอบคลุม ฟังก์ชันพลังงานศักย์ต่ำสุดสำหรับหนึ่งเอลิเมนต์สามารถเขียนได้เป็น

$$\pi_{GGLS} = \pi_G + \pi_{GLS} \quad (79)$$

$$\pi_{GGLS} = \pi_G + \tau_1 \int_0^h \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{dQ}{dx} + \rho A \omega^2 v \right) \right]^2 dx + \tau_2 \int_0^h \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{dM}{dx} + Q + \rho I \omega^2 \theta \right) \right]^2 dx \quad (80)$$

เมื่อ τ_1 และ τ_2 เป็นพารามิเตอร์การออกแบบที่ไม่ทราบค่า ซึ่งสามารถคำนวณได้จากการวิเคราะห์การกระจาย (dispersion analysis)

π_G ได้มาจากพลังงานศักย์ต่ำสุดสำหรับคานาทิโมเชนโกภายใต้แรงกระทำฮาร์มอนิก-เวลา (time-harmonic) ในสมการ (17)

π_{GLS} คือส่วนของพลังงานศักย์ต่ำสุดที่ได้จากวิธีการกำลังสองน้อยสุดของกาลเลอร์คิน

จากสมการอนุพันธ์ครอบคลุมสำหรับการสั่นฮาร์มอนิกเวลาของคานาทิโมเชนโกในสมการ (75) และสมการ (76) จะได้

$$\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d\theta}{dx} \right) + GkA \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) + \omega^2 \rho I \theta = 0 \quad (81)$$

$$\frac{d}{dx} \left[GA\kappa \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \right] + \omega^2 \rho A v = 0 \quad (82)$$

และสมมติให้ ρA และ ρI เป็นค่าคงที่ดังนั้นจะได้ π_{GLS} สำหรับแต่ละเอลิเมนต์เป็น

$$\begin{aligned} \pi_{LS} = & \int_0^h \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d}{dx} \left[GA\kappa \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \right] + \rho A \omega^2 v \right) \cdot \tau_1 \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d}{dx} \left[GA\kappa \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) \right] + \rho A \omega^2 v \right) \right\} dx \\ & + \int_0^h \left\{ \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d}{dx} \left[EI \frac{d\theta}{dx} \right] + GA\kappa \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) + \rho I \omega^2 \theta \right) \cdot \tau_2 \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d}{dx} \left[EI \frac{d\theta}{dx} \right] + GA\kappa \left(\frac{dv}{dx} - \theta \right) + \rho I \omega^2 \theta \right) \right\} dx \end{aligned} \quad \dots(83)$$

เมื่อ n คือ เลขชี้กำลังสูงสุดของฟังก์ชันการประมาณภายใน

2. เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อ

เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ ($n=1$) จากสมการ (82) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \pi_{GLS} = & \int_0^h \left\{ \frac{d}{dx} (\rho A \omega^2 v) \cdot \tau_1 \frac{d}{dx} (\rho A \omega^2 v) \right\} dx \\ & + \int_0^h \left\{ \frac{d}{dx} (-GA\kappa\theta + \rho I \omega^2 \theta) \cdot \tau_2 \frac{d}{dx} (-GA\kappa\theta + \rho I \omega^2 \theta) \right\} dx \end{aligned} \quad (84)$$

$$\pi_{GLS} = (\rho A \omega^2)^2 \int_0^h \left\{ \frac{dv}{dx} \cdot \tau_1 \frac{dv}{dx} \right\} dx + (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2 \int_0^h \left\{ \frac{d\theta}{dx} \cdot \tau_2 \frac{d\theta}{dx} \right\} dx \quad (85)$$

$$\pi_{GLS} = \tau_1 (\rho A \omega^2)^2 \int_0^h \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 dx + \tau_2 (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2 \int_0^h \left[\frac{d\theta}{dx} \right]^2 dx \quad (86)$$

$$\text{จะได้} \quad \pi_{GLS} = r_1 \int_0^h \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 dx + r_2 \int_0^h \left[\frac{d\theta}{dx} \right]^2 dx \quad (87)$$

$$\text{เมื่อ} \quad r_1 = \tau_1 (\rho A \omega^2)^2 \quad (88)$$

$$r_2 = \tau_2 (-GAk + \rho I \omega^2)^2 \quad (89)$$

โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 \quad (90)$$

$$\theta(x) = N_1(x)\theta_1 + N_2(x)\theta_2 \quad (91)$$

จะได้เมตริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุด

$$[k_{LS}^e] = r_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{h} & 0 & -\frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & -\frac{1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h} & 0 & \frac{1}{h} \end{bmatrix} \quad (92)$$

$$[k_{LS}^e] = \begin{bmatrix} \frac{r_1}{h} & 0 & -\frac{r_1}{h} & 0 \\ 0 & \frac{r_2}{h} & 0 & -\frac{r_2}{h} \\ -\frac{r_1}{h} & 0 & \frac{r_1}{h} & 0 \\ 0 & -\frac{r_2}{h} & 0 & \frac{r_2}{h} \end{bmatrix} \quad (93)$$

กำหนดให้ $R_1 = \frac{r_1}{h}$ และ $R_2 = \frac{r_2}{h}$ จะได้เมตริกซ์ $[k_{LS}^e]$ ในเทอมของตัวแปร 2 ตัวคือ R_1 และ R_2 ซึ่งเป็นเมตริกซ์สมมาตร

$$[k_{LS}^e] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_1 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_2 \\ -R_1 & 0 & R_1 & 0 \\ 0 & -R_2 & 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

การเลือกพารามิเตอร์การออกแบบ

ในการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบ (selecting design parameters) มีจุดประสงค์เพื่อออกแบบเอลิเมนต์ของคานาโทโมเซนโกซึ่งทำให้พจน์อันดับต่ำของ k (wavenumber) รอบ ω (frequency) ในอนุกรมเทย์เลอร์ตรงกันกับ k รอบ ω ที่ได้จากการวิเคราะห์

โดยจะนิยามให้ $[s^e]$ เป็นพลศาสตร์เมตริกซ์แข็งเกร็ง (dynamic stiffness matrix) ของวิธีกำลังสองน้อยสุด

$$[s^e] = [k^e] - \omega^2 [m^e] + [k_{LS}^e] = [z^e] + [k_{LS}^e] \quad (95)$$

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว คือ τ_1 และ τ_2 ซึ่งในการเลือกจะอาศัยพื้นฐานจากการวิเคราะห์การกระจายตัวในสมการ (65) และทำการปรับปรุงเพิ่มเติมกำลังสองน้อยสุด

$$\left(\begin{bmatrix} G_{11} & iG_{12} \\ -iG_{12} & G_{22} \end{bmatrix} + R_1 \begin{bmatrix} \tilde{G}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + R_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{G}_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (96)$$

$$\text{เมื่อ} \quad \tilde{G}_{11} = \tilde{G}_{22} = 1 - \cos(k^h h) \quad (97)$$

และ G_{ij} ได้ถูกนิยามไว้ในสมการ (66) เพื่อหลีกเลี่ยงการได้ผลเฉลยไม่ชัดของผลเฉลย A_1 และ A_2 ดังนั้นจึงกำหนดให้ดีเทอร์มิแนนต์ของเมตริกซ์ $[G]$ เท่ากับศูนย์

$$c_1 R_1 R_2 + c_2 R_1 + c_3 R_2 + c_4 = 0 \quad (98)$$

เมื่อ

$$c_1 = \tilde{G}_{11}\tilde{G}_{22} \quad (99)$$

$$c_2 = \tilde{G}_{11}G_{22}$$

$$c_3 = G_{11}\tilde{G}_{22}$$

$$c_4 = G_{11}G_{22} - G_{12}^2$$

เมื่อทำการแก้สมการ (98) จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ k^h ชุดหนึ่งเป็นจำนวนจริงและอีกชุดหนึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

3. เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดแบบ 3 จุดต่อ

เอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ ($n = 2$) จากสมการ (82) จะได้

$$\begin{aligned} \pi_{GLS} = & \int_0^h \left\{ \frac{d^2}{dx^2}(\rho A \omega^2 v) \cdot \tau_1 \frac{d^2}{dx^2}(\rho A \omega^2 v) \right\} dx \\ & + \int_0^h \left\{ \frac{d^2}{dx^2}(-GA\kappa\theta + \rho I \omega^2 \theta) \cdot \tau_2 \frac{d^2}{dx^2}(-GA\kappa\theta + \rho I \omega^2 \theta) \right\} dx \end{aligned} \quad (100)$$

$$\pi_{GLS} = (\rho A \omega^2)^2 \int_0^h \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} \cdot \tau_1 \frac{d^2 v}{dx^2} \right\} dx + (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2 \int_0^h \left\{ \frac{d^2 \theta}{dx^2} \cdot \tau_2 \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right\} dx \quad (101)$$

$$\pi_{GLS} = \tau_1 (\rho A \omega^2)^2 \int_0^h \left\{ \frac{d^2 v}{dx^2} \right\}^2 dx + \tau_2 (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2 \int_0^h \left\{ \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right\}^2 dx \quad (102)$$

จะได้

$$\pi_{GLS} = r_1 \int_0^h \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 dx + r_2 \int_0^h \left[\frac{d\theta}{dx} \right]^2 dx \quad (103)$$

เมื่อ

$$r_1 = \tau_1 (\rho A \omega^2)^2 \quad (104)$$

$$r_2 = \tau_2 (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2$$

โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)v_2 + N_3(x)v_3 \quad (105)$$

$$\theta(x) = N_1(x)\theta_1 + N_2(x)\theta_2 + N_3(x)\theta_3 \quad (106)$$

จะได้เมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุด

$$[k_{LS}^e] = r_1 \begin{bmatrix} \frac{16}{h^3} & 0 & \frac{-32}{h^3} & 0 & \frac{16}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-32}{h^3} & 0 & \frac{64}{h^3} & 0 & \frac{-32}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{16}{h^3} & 0 & \frac{-32}{h^3} & 0 & \frac{16}{h^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{h^3} & 0 & \frac{-32}{h^3} & 0 & \frac{16}{h^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-32}{h^3} & 0 & \frac{64}{h^3} & 0 & \frac{-32}{h^3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{16}{h^3} & 0 & \frac{-32}{h^3} & 0 & \frac{16}{h^3} \end{bmatrix} \quad (107)$$

การเลือกพารามิเตอร์การออกแบบ

ในการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบ (selecting design parameters) มีจุดประสงค์เพื่อออกแบบเอลิเมนต์ของคานาโทโมเซนโกซึ่งทำให้พจน์อันดับต่ำของ k (wavenumber) รอบ ω (frequency) ในอนุกรมเทย์เลอร์ตรงกันกับ k รอบ ω ที่ได้จากการวิเคราะห์

โดยจะนิยามให้ $[s^e]$ เป็นพลศาสตร์เมทริกซ์แข็งเกร็ง (dynamic stiffness matrix) ของวิธีกำลังสองน้อยสุด

$$[s^e] = [k^e] - \omega^2 [m^e] + [k_{LS}^e] = [z^e] + [k_{LS}^e] \quad (108)$$

ในส่วนนี้จะกล่าวถึงการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบที่ไม่ทราบค่า 2 ตัว คือ τ_1 และ τ_2 ซึ่งในการเลือกจะอาศัยพื้นฐานจากการวิเคราะห์การกระจายตัวในสมการ (73) และทำการปรับปรุงเพิ่มเติมกำลังสองน้อยสุดเช่นเดียวกับที่ทำในเอลิเมนต์กำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อ

เมื่อทำการแก้สมการ จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ k^h ชุดหนึ่งเป็นจำนวนจริงและอีกชุดหนึ่งเป็นจำนวนจินตภาพ

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

1. เครื่องคอมพิวเตอร์
2. โปรแกรมสำเร็จรูป MAPLE Version 11

วิธีการ

1. ความสัมพันธ์ของจำนวนคลื่นกับความถี่ของแบบจำลองที่ได้จากการวิเคราะห์

จากสมการ (59)

$$-\frac{\rho I}{G\kappa A}\omega^4 + \omega^2 + \frac{I}{A}\left(1 + \frac{E}{G\kappa}\right)k^2\omega^2 - \frac{EI}{\rho A}k^4 = 0 \quad (109)$$

ทำการแก้สมการแล้วจะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ $\pm k$ สำหรับแต่ละ ω ชุดหนึ่งของ $\pm k$ คือจำนวนจริง และอีกชุดหนึ่งของ $\pm k$ เป็นจำนวนจินตภาพ

$\pm k$ ที่เป็นจำนวนจริง ได้แก่

$$k = \frac{1}{\sqrt{2G\kappa EI}} \left((\omega G\kappa\rho I + \omega\rho EI + \sqrt{\omega^2 G^2 \kappa^2 \rho^2 I^2 - 2\omega^2 G\kappa\rho^2 I^2 E + \omega^2 \rho^2 I^2 E^2 + 4G^2 \kappa^2 E I A \rho}) \omega \right)^{1/2} \quad (110)$$

$$k = -\frac{1}{\sqrt{2G\kappa EI}} \left((\omega G\kappa\rho I + \omega\rho EI + \sqrt{\omega^2 G^2 \kappa^2 \rho^2 I^2 - 2\omega^2 G\kappa\rho^2 I^2 E + \omega^2 \rho^2 I^2 E^2 + 4G^2 \kappa^2 E I A \rho}) \omega \right)^{1/2} \quad (111)$$

$\pm k$ ที่เป็นจำนวนจินตภาพ ได้แก่

$$k = \frac{1}{\sqrt{2G\kappa EI}} ((\omega G\kappa\rho I + \omega\rho EI - \sqrt{\omega^2 G^2 \kappa^2 \rho^2 I^2 - 2\omega^2 G\kappa\rho^2 I^2 E + \omega^2 \rho^2 I^2 E^2 + 4G^2 \kappa^2 EIA\rho})\omega)^{1/2} \quad (112)$$

$$k = -\frac{1}{\sqrt{2G\kappa EI}} ((\omega G\kappa\rho I + \omega\rho EI - \sqrt{\omega^2 G^2 \kappa^2 \rho^2 I^2 - 2\omega^2 G\kappa\rho^2 I^2 E + \omega^2 \rho^2 I^2 E^2 + 4G^2 \kappa^2 EIA\rho})\omega)^{1/2} \quad (113)$$

2. แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานาทิโมเชนโก

สมการการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน (rotation, θ) ในพิกัดฉากสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ คือ

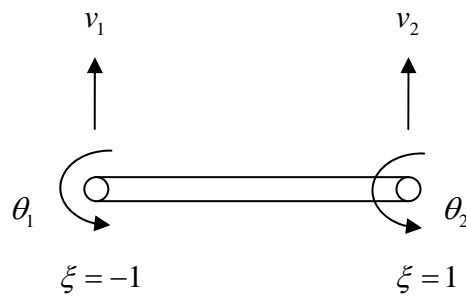
$$v(x) = N_1^e(x)v_1 + N_2^e(x)v_2 \quad (114)$$

$$\theta(x) = N_1^e(x)\theta_1 + N_2^e(x)\theta_2 \quad (115)$$

จะได้สมการการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน (rotation, θ) ในพิกัดธรรมชาติสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ คือ

$$v(\xi) = N_1^e(\xi)v_1 + N_2^e(\xi)v_2 \quad (116)$$

$$\theta(\xi) = N_1^e(\xi)\theta_1 + N_2^e(\xi)\theta_2 \quad (117)$$



ภาพที่ 10 เอลิเมนต์คานทวิโมเมนต์แบบ 2 จุดต่อในพิกัดธรรมชาติ

โดยที่
$$N_1 = N_1^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (118)$$

$$N_2 = N_2^e(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (119)$$

และ
$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2^e - x_1^e}{1 - (-1)} = \frac{h}{2} \quad (120)$$

จะได้
$$[B_b] = \left[0 \quad \frac{dN_1}{d\xi} \left(\frac{2}{h} \right) \quad 0 \quad \frac{dN_2}{d\xi} \left(\frac{2}{h} \right) \right] \quad (121)$$

$$[B_s] = \left[\frac{dN_1}{d\xi} \left(\frac{2}{h} \right) \quad -N_1 \quad \frac{dN_2}{d\xi} \left(\frac{2}{h} \right) \quad -N_2 \right] \quad (122)$$

และ
$$[k^e] = \int_{-1}^1 [B_b]^T EI [B_b] \left(\frac{h}{2} \right) d\xi + \int_{-1}^1 [B_s]^T GA\kappa [B_s] \left(\frac{h}{2} \right) d\xi \quad (123)$$

ดังนั้นจะได้เมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{GA\kappa}{h} & \frac{GA\kappa}{2} & \frac{-GA\kappa}{h} & \frac{GA\kappa}{2} \\ \frac{GA\kappa}{2} & \frac{GA\kappa h}{3} + \frac{EI}{h} & \frac{-GA\kappa}{2} & \frac{GA\kappa h}{6} - \frac{EI}{h} \\ \frac{-GA\kappa}{h} & \frac{-GA\kappa}{2} & \frac{GA\kappa}{h} & \frac{-GA\kappa}{2} \\ \frac{GA\kappa}{2} & \frac{GA\kappa h}{6} - \frac{EI}{h} & \frac{-GA\kappa}{2} & \frac{GA\kappa h}{3} + \frac{EI}{h} \end{bmatrix} \quad (124)$$

จาก $[D^*] = \begin{bmatrix} \rho A & 0 \\ 0 & \rho I \end{bmatrix}$ (125)

$$[N] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\xi) & 0 & \frac{1}{2}(1+\xi) \end{bmatrix} \quad (126)$$

จะได้ $[m^e] = \int_{-1}^1 [N]^T [D^*] [N] \left(\frac{h}{2}\right) d\xi$ (127)

จะได้เมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ คือ

$$[m^e] = \begin{bmatrix} \frac{\rho Ah}{3} & 0 & \frac{\rho Ah}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\rho Ih}{3} & 0 & \frac{\rho Ih}{6} \\ \frac{\rho Ah}{6} & 0 & \frac{\rho Ah}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\rho Ih}{6} & 0 & \frac{\rho Ih}{3} \end{bmatrix} \quad (128)$$

ทำการรวมเมทริกซ์แข็งเกร็งและเมทริกซ์มวลของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{e1} & k_{12}^{e1} & k_{13}^{e1} & k_{14}^{e1} & 0 & 0 \\ k_{21}^{e1} & k_{22}^{e1} & k_{23}^{e1} & k_{24}^{e1} & 0 & 0 \\ k_{31}^{e1} & k_{32}^{e1} & k_{33}^{e1} + k_{11}^{e2} & k_{34}^{e1} + k_{12}^{e2} & k_{13}^{e2} & k_{14}^{e2} \\ k_{41}^{e1} & k_{42}^{e1} & k_{43}^{e1} + k_{21}^{e2} & k_{44}^{e1} + k_{22}^{e2} & k_{23}^{e2} & k_{24}^{e2} \\ 0 & 0 & k_{31}^{e2} & k_{32}^{e2} & k_{33}^{e2} & k_{34}^{e2} \\ 0 & 0 & k_{41}^{e2} & k_{42}^{e2} & k_{43}^{e2} & k_{44}^{e2} \end{bmatrix} \quad (129)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^{e1} & m_{12}^{e1} & m_{13}^{e1} & m_{14}^{e1} & 0 & 0 \\ m_{21}^{e1} & m_{22}^{e1} & m_{23}^{e1} & m_{24}^{e1} & 0 & 0 \\ m_{31}^{e1} & m_{32}^{e1} & m_{33}^{e1} + m_{11}^{e2} & m_{34}^{e1} + m_{12}^{e2} & m_{13}^{e2} & m_{14}^{e2} \\ m_{41}^{e1} & m_{42}^{e1} & m_{43}^{e1} + m_{21}^{e2} & m_{44}^{e1} + m_{22}^{e2} & m_{23}^{e2} & m_{24}^{e2} \\ 0 & 0 & m_{31}^{e2} & m_{32}^{e2} & m_{33}^{e2} & m_{34}^{e2} \\ 0 & 0 & m_{41}^{e2} & m_{42}^{e2} & m_{43}^{e2} & m_{44}^{e2} \end{bmatrix} \quad (130)$$

$$\text{เมื่อ} \quad [Z] = [K] - \omega^2 [M] \quad (131)$$

และเมทริกซ์ของการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนคือ

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} A_1 e^{ik^h h(n-1)} \\ A_2 e^{ik^h h(n-1)} \\ A_1 e^{ik^h hn} \\ A_2 e^{ik^h hn} \\ A_1 e^{ik^h h(n+1)} \\ A_2 e^{ik^h h(n+1)} \end{Bmatrix} \quad (132)$$

นำแถวที่ 3 กับแถวที่ 4 ของ $[Z]$ คูณกับ $\{D\}$ ทำให้เราได้การทำซ้ำ (stencils) ที่แต่ละจุดต่อ สำหรับที่จุดต่อ n การทำซ้ำ คือ

$$\begin{bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} \{D\} = 0 \quad (133)$$

และจัดรูปสมการ (133) ให้อยู่ในรูป

$$[\hat{Z}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (134)$$

และทำการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $[\hat{Z}]$ โดยกำหนดให้เท่ากับ 0

$$\det([\hat{Z}]) = 0 \quad (135)$$

ทำการแก้สมการ (135) จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω ชุดหนึ่งของ k คือ จำนวนจริง และอีกชุดหนึ่งของ k เป็นจำนวนจินตภาพ

3. แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต

จากสมการ (32) และสมการ (121)-(122) สำหรับวิธีการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์แบบ 1 จุด โดยตำแหน่งของจุดเกาส์ $\xi = 0$ และน้ำหนัก $W = 2$ และกำหนดให้ EI และ GAK เป็นค่าคงที่

$$[k^e] = 2 \left\{ [B_b]^T EI [B_b] + [B_s]^T GAK [B_s] \right\} \Big|_{\xi=0} \quad (136)$$

จะได้เมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \frac{GAK}{h} & \frac{GAK}{2} & \frac{-GAK}{h} & \frac{GAK}{2} \\ \frac{GAK}{2} & \frac{GAKh}{4} + \frac{EI}{h} & \frac{-GAK}{2} & \frac{GAKh}{4} - \frac{EI}{h} \\ \frac{-GAK}{h} & \frac{-GAK}{2} & \frac{GAK}{h} & \frac{-GAK}{2} \\ \frac{GAK}{2} & \frac{GAKh}{4} - \frac{EI}{h} & \frac{-GAK}{2} & \frac{GAKh}{4} + \frac{EI}{h} \end{bmatrix} \quad (137)$$

เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตจะเหมือนกับเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานทิโมเซนโก

จากนั้นใช้วิธีการเช่นเดียวกันกับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานทิโมเซนโกเพื่อทำการหาผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω

4. แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของคานทิโมเซนโก

สมการการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน (rotation, θ) ในพิกัดฉากสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ คือ

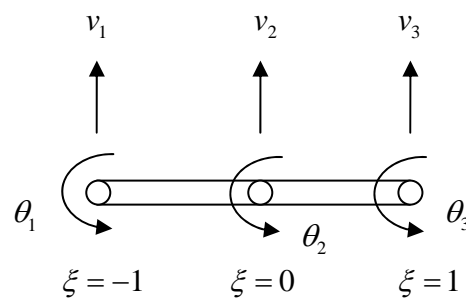
$$v(x) = N_1^e(x)v_1 + N_2^e(x)v_2 + N_3^e(x)v_3 \quad (138)$$

$$\theta(x) = N_1^e(x)\theta_1 + N_2^e(x)\theta_2 + N_3^e(x)\theta_3 \quad (139)$$

จะได้สมการการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน (rotation, θ) ในพิกัดธรรมชาติสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ คือ

$$v(\xi) = N_1^e(\xi)v_1 + N_2^e(\xi)v_2 + N_3^e(\xi)v_3 \quad (140)$$

$$\theta(\xi) = N_1^e(\xi)\theta_1 + N_2^e(\xi)\theta_2 + N_3^e(\xi)\theta_3 \quad (141)$$



ภาพที่ 11 เอลิเมนต์คานทิโมเซนโกแบบ 3 จุดต่อในพิกัดธรรมชาติ

โดยที่ $N_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi)$ (142)

$$N_2(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (143)$$

$$N_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad (144)$$

และ $\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2^e - x_1^e}{1 - (-1)} = \frac{h}{2}$ (145)

จะได้ $[B_b] = \left[0 \quad \frac{dN_1}{d\xi}\left(\frac{2}{h}\right) \quad 0 \quad \frac{dN_2}{d\xi}\left(\frac{2}{h}\right) \quad 0 \quad \frac{dN_3}{d\xi}\left(\frac{2}{h}\right) \right]$ (146)

$$[B_s] = \left[\frac{dN_1}{d\xi}\left(\frac{2}{h}\right) \quad -N_1 \quad \frac{dN_2}{d\xi}\left(\frac{2}{h}\right) \quad -N_2 \quad \frac{dN_3}{d\xi}\left(\frac{2}{h}\right) \quad -N_3 \right] \quad (147)$$

และ $[k^e] = \int_{-1}^1 [B_b]^T EI [B_b] \left(\frac{h}{2}\right) d\xi + \int_{-1}^1 [B_s]^T GA\kappa [B_s] \left(\frac{h}{2}\right) d\xi$ (148)

ดังนั้นจะได้เมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

$$[k^e] = \frac{EI}{3h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 7 \end{bmatrix} + GA\kappa \begin{bmatrix} \frac{7}{3h} & \frac{1}{2} & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3h} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{2h}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{15} & \frac{1}{6} & \frac{-h}{30} \\ \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{16}{3h} & 0 & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{h}{15} & 0 & \frac{8h}{15} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{15} \\ \frac{1}{3h} & \frac{1}{6} & \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{7}{3h} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-h}{30} & \frac{2}{3} & \frac{h}{15} & \frac{-1}{2} & \frac{2h}{15} \end{bmatrix} \quad (149)$$

เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

$$[m^e] = \begin{bmatrix} \frac{2\rho Ah}{15} & 0 & \frac{\rho Ah}{15} & 0 & \frac{-\rho Ah}{30} & 0 \\ 0 & \frac{2\rho lh}{15} & 0 & \frac{\rho lh}{15} & 0 & \frac{-\rho lh}{30} \\ \frac{\rho Ah}{15} & 0 & \frac{8\rho Ah}{15} & 0 & \frac{\rho Ah}{15} & 0 \\ 0 & \frac{\rho lh}{15} & 0 & \frac{8\rho lh}{15} & 0 & \frac{\rho lh}{15} \\ \frac{-\rho Ah}{30} & 0 & \frac{\rho Ah}{15} & 0 & \frac{2\rho Ah}{15} & 0 \\ 0 & \frac{-\rho lh}{30} & 0 & \frac{\rho lh}{15} & 0 & \frac{2\rho lh}{15} \end{bmatrix} \quad (150)$$

ทำการรวมเมตริกซ์แข็งเกร็งและเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{e1} & k_{12}^{e1} & k_{13}^{e1} & k_{14}^{e1} & k_{15}^{e1} & k_{16}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^{e1} & k_{22}^{e1} & k_{23}^{e1} & k_{24}^{e1} & k_{25}^{e1} & k_{26}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^{e1} & k_{32}^{e1} & k_{33}^{e1} & k_{34}^{e1} & k_{35}^{e1} & k_{36}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^{e1} & k_{42}^{e1} & k_{43}^{e1} & k_{44}^{e1} & k_{45}^{e1} & k_{46}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{51}^{e1} & k_{52}^{e1} & k_{53}^{e1} & k_{54}^{e1} & k_{55}^{e1} + k_{11}^{e2} & k_{56}^{e1} + k_{12}^{e2} & k_{13}^{e2} & k_{14}^{e2} & k_{15}^{e2} & k_{16}^{e2} \\ k_{61}^{e1} & k_{62}^{e1} & k_{63}^{e1} & k_{64}^{e1} & k_{65}^{e1} + k_{21}^{e2} & k_{66}^{e1} + k_{22}^{e2} & k_{23}^{e2} & k_{24}^{e2} & k_{25}^{e2} & k_{26}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^{e2} & k_{32}^{e2} & k_{33}^{e2} & k_{34}^{e2} & k_{35}^{e2} & k_{36}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^{e2} & k_{42}^{e2} & k_{43}^{e2} & k_{44}^{e2} & k_{45}^{e2} & k_{46}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51}^{e2} & k_{52}^{e2} & k_{53}^{e2} & k_{54}^{e2} & k_{55}^{e2} & k_{56}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61}^{e2} & k_{62}^{e2} & k_{63}^{e2} & k_{64}^{e2} & k_{65}^{e2} & k_{66}^{e2} \end{bmatrix} \quad (151)$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m_{11}^{e1} & m_{12}^{e1} & m_{13}^{e1} & m_{14}^{e1} & m_{15}^{e1} & m_{16}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21}^{e1} & m_{22}^{e1} & m_{23}^{e1} & m_{24}^{e1} & m_{25}^{e1} & m_{26}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31}^{e1} & m_{32}^{e1} & m_{33}^{e1} & m_{34}^{e1} & m_{35}^{e1} & m_{36}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41}^{e1} & m_{42}^{e1} & m_{43}^{e1} & m_{44}^{e1} & m_{45}^{e1} & m_{46}^{e1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{51}^{e1} & m_{52}^{e1} & m_{53}^{e1} & m_{54}^{e1} & m_{55}^{e1} + m_{11}^{e2} & m_{56}^{e1} + m_{12}^{e2} & m_{13}^{e2} & m_{14}^{e2} & m_{15}^{e2} & m_{16}^{e2} \\ m_{61}^{e1} & m_{62}^{e1} & m_{63}^{e1} & m_{64}^{e1} & m_{65}^{e1} + m_{21}^{e2} & m_{66}^{e1} + m_{22}^{e2} & m_{23}^{e2} & m_{24}^{e2} & m_{25}^{e2} & m_{26}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{31}^{e2} & m_{32}^{e2} & m_{33}^{e2} & m_{34}^{e2} & m_{35}^{e2} & m_{36}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{41}^{e2} & m_{42}^{e2} & m_{43}^{e2} & m_{44}^{e2} & m_{45}^{e2} & m_{46}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{51}^{e2} & m_{52}^{e2} & m_{53}^{e2} & m_{54}^{e2} & m_{55}^{e2} & m_{56}^{e2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{61}^{e2} & m_{62}^{e2} & m_{63}^{e2} & m_{64}^{e2} & m_{65}^{e2} & m_{66}^{e2} \end{bmatrix} \quad (152)$$

$$\text{เมื่อ} \quad [Z] = [K] - \omega^2 [M] \quad (153)$$

และเมตริกซ์ของการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนคือ

$$\{D\} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 e^{ik^h h(n-1)} \\ A_2 e^{ik^h h(n-1)} \\ A_3 e^{ik^h h\left(n-\frac{1}{2}\right)} \\ A_4 e^{ik^h h\left(n-\frac{1}{2}\right)} \\ A_1 e^{ik^h hm} \\ A_2 e^{ik^h hm} \\ A_3 e^{ik^h h\left(n+\frac{1}{2}\right)} \\ A_4 e^{ik^h h\left(n+\frac{1}{2}\right)} \\ A_1 e^{ik^h h(n+1)} \\ A_2 e^{ik^h h(n+1)} \end{array} \right\} \quad (154)$$

นำแถวที่ 5 ถึงแถวที่ 8 ของ $[Z]$ คูณกับ $\{D\}$ ทำให้เราได้การทำซ้ำ (stencils) ที่แต่ละจุดต่อ สำหรับที่จุดต่อ n และ $n + \frac{1}{2}$ การทำซ้ำคือ

$$\begin{bmatrix} Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \end{bmatrix} \{D\} = 0 \quad (155)$$

และจัดรูปสมการ (155) ให้อยู่ในรูป

$$[\hat{Z}] \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (156)$$

และทำการหาดีเทอร์มิแนนต์ของ $[\hat{Z}]$ โดยกำหนดให้เท่ากับ 0

$$\det([\hat{Z}]) = 0 \quad (157)$$

ทำการแก้สมการ (157) จะได้ผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω ชุดหนึ่งของ k คือ จำนวนจริง และอีกชุดหนึ่งของ k เป็นจำนวนจินตภาพ

5. แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต

จากสมการ (32) และสมการ (146)-(147) สำหรับวิธีการอินทิเกรตของเกาส์-เลอจองด์แบบ 2 จุด โดยตำแหน่งของจุดเกาส์ $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ และน้ำหนัก $W = 1$ และกำหนดให้ EI และ GAk เป็นค่าคงที่

$$[k^e] = \left\{ [B_b]^T EI [B_b] + [B_s]^T GAk [B_s] \right\} \Big|_{\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left\{ [B_b]^T EI [B_b] + [B_s]^T GAk [B_s] \right\} \Big|_{\xi=-\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \dots(158)$$

จะได้เมทริกซ์แข็งเกร็งของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต

$$[k^e] = \frac{EI}{3h} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 7 \end{bmatrix} + GA\kappa \begin{bmatrix} \frac{7}{3h} & \frac{1}{2} & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3h} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{h}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{9} & \frac{1}{6} & \frac{-h}{18} \\ \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{16}{3h} & 0 & \frac{-8}{3h} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{h}{9} & 0 & \frac{4h}{9} & \frac{-2}{3} & \frac{h}{9} \\ \frac{1}{3h} & \frac{1}{6} & \frac{-8}{3h} & \frac{-2}{3} & \frac{7}{3h} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-h}{18} & \frac{2}{3} & \frac{h}{9} & \frac{-1}{2} & \frac{h}{9} \end{bmatrix} \quad (159)$$

เมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตจะเหมือนกับเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของคานาโทโมเซนโก

จากนั้นใช้วิธีการเช่นเดียวกันกับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของคานาโทโมเซนโกเพื่อทำการหาผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω

6. แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด

$$\text{เมื่อกำหนดให้} \quad \tau_1 = \frac{c_1}{\omega^2 \rho A} \quad (160)$$

$$\tau_2 = \frac{c_2}{(-GA\kappa + \rho I \omega^2)} \quad (161)$$

$$[C_{LS}] = \begin{bmatrix} (\omega^2 \rho A)^2 \cdot \tau_1 & 0 \\ 0 & (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2 \cdot \tau_2 \end{bmatrix} \quad (162)$$

$$\frac{d[N]}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\zeta} \left(\frac{2}{h} \right) & 0 & \frac{dN_2}{d\zeta} \left(\frac{2}{h} \right) & 0 \\ 0 & \frac{dN_1}{d\zeta} \left(\frac{2}{h} \right) & 0 & \frac{dN_2}{d\zeta} \left(\frac{2}{h} \right) \end{bmatrix} \quad (163)$$

$$\text{จะได้} \quad [k_{LS}] = \int_{-1}^1 \left(\frac{d[N]}{dx} \right)^T [C_{LS}] \left(\frac{d[N]}{dx} \right) \left(\frac{h}{2} \right) d\xi \quad (164)$$

เพื่อให้ได้เมตริกซ์ $[K_{LS}]$ ต้องทำการรวมเมตริกซ์กำลังสองน้อยสุดของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2 เช่นเดียวกันกับการรวมเมตริกซ์แข็งเกร็งและเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2

จากสมการ $[Z] = [K] - \omega^2 [M]$ เมื่อเพิ่มเทอมกำลังสองน้อยสุด $[K_{LS}]$ ลงไปในสมการจะได้

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] + [K_{LS}] \quad (165)$$

โดย $[K]$ และ $[M]$ คือเมตริกซ์ที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานทิโมเซนโก และเมตริกซ์ $[K_{LS}]$ หาได้จากการรวมเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2 ของ $[k_{LS}^e]$

จากนั้นใช้วิธีการเช่นเดียวกันกับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานทิโมเซนโกเพื่อทำการหาผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω

ในการแก้สมการของแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดจะใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) มาช่วยในการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบ (τ_1 และ τ_2) โดยกำหนดให้หาอนุกรมเทย์เลอร์ของ k (Wavenumber) รอบ ω (ความถี่) และทำการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบที่ทำให้เทอมอันดับต่ำของ k ในอนุกรมเทย์เลอร์ที่ได้จากความสัมพันธ์ของการกระจายตัวทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับความสัมพันธ์ของการกระจายตัวที่ได้จากการวิเคราะห์

ผลเฉลยที่ได้จะติดตัวแปรไม่ทราบค่าคือ c_1 และ c_2 โดยสามารถหาค่า c_1 และ c_2 ได้จากการนำค่าผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์แล้วทำการคำนวณเพื่อให้ได้ค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ผลเฉลยของ k ที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับผลเฉลยของ k ที่ได้จากการวิเคราะห์ในอนุกรมเทย์เลอร์ในเทอมอันดับต่ำ

7. แบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด

$$\text{เมื่อกำหนดให้} \quad \tau_1 = \frac{c_1}{\omega^2 \rho A} \quad (166)$$

$$\tau_2 = \frac{c_2}{(-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2} \quad (167)$$

$$[C_{LS}] = \begin{bmatrix} (\omega^2 \rho A)^2 \cdot \tau_1 & 0 \\ 0 & (-GA\kappa + \rho I \omega^2)^2 \cdot \tau_2 \end{bmatrix} \quad (168)$$

$$\frac{d^2 [N]}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \left(\frac{4}{h^2} \right) & 0 & \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \left(\frac{4}{h^2} \right) & 0 & \frac{d^2 N_3}{d\xi^2} \left(\frac{4}{h^2} \right) & 0 \\ 0 & \frac{d^2 N_1}{d\xi^2} \left(\frac{4}{h^2} \right) & 0 & \frac{d^2 N_2}{d\xi^2} \left(\frac{4}{h^2} \right) & 0 & \frac{d^2 N_3}{d\xi^2} \left(\frac{4}{h^2} \right) \end{bmatrix} \quad \dots(169)$$

$$\text{จะได้} \quad [k_{LS}] = \int_{-1}^1 \left(\frac{d^2 [N]}{dx^2} \right)^T [C_{LS}] \left(\frac{d^2 [N]}{dx^2} \right) \left(\frac{h}{2} \right) d\xi \quad (170)$$

เพื่อให้ได้เมตริกซ์ $[K_{LS}]$ ต้องทำการรวมเมตริกซ์กำลังสองน้อยสุดของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2 เช่นเดียวกันกับการรวมเมตริกซ์แข็งเกร็งและเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2

จากสมการ $[Z] = [K] - \omega^2 [M]$ เมื่อเพิ่มเทอมกึ่งกำลังสองน้อยสุด $[K_{LS}]$ ลงไปในสมการจะได้

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] + [K_{LS}] \quad (171)$$

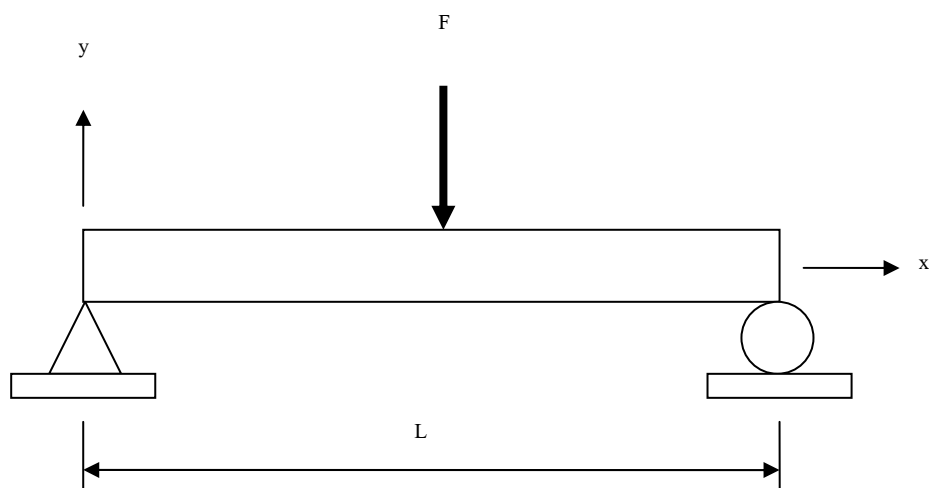
โดย $[K]$ และ $[M]$ คือเมตริกซ์ที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของคานทิโมเซนโก และเมตริกซ์ $[K_{LS}]$ หาได้จากการรวมเมตริกซ์ของเอลิเมนต์ 1 กับเอลิเมนต์ 2 ของ $[k_{LS}^e]$

จากนั้นใช้วิธีการเช่นเดียวกันกับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อของคานาทีโมเซนโกเพื่อทำการหาผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω

ในการแก้สมการของแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดจะใช้อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) มาช่วยในการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบ (τ_1 และ τ_2) โดยกำหนดให้หาอนุกรมเทย์เลอร์ของ k (Wavenumber) รอบ ω (ความถี่) และทำการเลือกพารามิเตอร์การออกแบบที่ทำให้เทอมอันดับต่ำของ k ในอนุกรมเทย์เลอร์ที่ได้จากความสัมพันธ์ของการกระจายตัวทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับความสัมพันธ์ของการกระจายตัวที่ได้จากการวิเคราะห์

ผลเฉลยที่ได้จะติดตัวแปรไม่ทราบค่าคือ c_1 และ c_2 โดยสามารถหาค่า c_1 และ c_2 ได้จากการนำค่าผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω ไปเปรียบเทียบกับผลเฉลยที่ได้จากการวิเคราะห์แล้วทำการคำนวณเพื่อให้ได้ค่า c_1 และ c_2 ที่ทำให้ผลเฉลยของ k ที่ได้จากวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับผลเฉลยของ k ที่ได้จากการวิเคราะห์ในอนุกรมเทย์เลอร์ในเทอมอันดับต่ำ

การหาค่าเคลื่อนตัว (Displacement)



ภาพที่ 12 รูปแบบคานาที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์

1. การหาค่าเคลื่อนตัวที่ได้จากการวิเคราะห์

สำหรับการหาค่าเคลื่อนตัวโดยการวิเคราะห์การเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉาก (vertical displacement, v) และการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนหรือความชันเนื่องจากการดัด (rotation, θ) หาได้จากผลเฉลยแม่นยำตรง (Exact Solution) (Pilli, 1998)

$$v = P_1 A_0 e^{-ik_1 x} + P_2 B_0 e^{-ik_2 x} - P_1 C_0 e^{ik_1 x} - P_2 D_0 e^{ik_2 x} \quad (172)$$

$$\theta = A_0 e^{-ik_1 x} + B_0 e^{-ik_2 x} + C_0 e^{ik_1 x} + D_0 e^{ik_2 x} \quad (173)$$

เมื่อ
$$P_1 = i \left(\frac{EI k_1^2 + GA\kappa - \rho I \omega^2}{GA\kappa k_1} \right) \quad (174)$$

$$P_2 = i \left(\frac{EI k_2^2 + GA\kappa - \rho I \omega^2}{GA\kappa k_2} \right) \quad (175)$$

โดย k_1 และ k_2 ได้จากการวิเคราะห์

ทำการกำหนดเงื่อนไขขอบ (boundary condition) เพื่อทำการหาค่า A_0 , B_0 , C_0 และ D_0

$$v \text{ ที่ } x=0 \text{ คือ} \quad v|_{x=0} = 0 \quad (176)$$

$$\theta \text{ ที่ } x=0 \text{ คือ} \quad \theta|_{x=0} = 0 \quad (177)$$

$$\theta \text{ ที่ } x = \frac{L}{2} \text{ คือ} \quad \theta|_{x=\frac{L}{2}} = 0 \quad (178)$$

$$Q_1 \text{ ที่ } x = \frac{L}{2} \text{ คือ} \quad GA\kappa \left(\theta - \frac{dv}{dx} \right) \Big|_{x=\frac{L}{2}} = -1 \quad (179)$$

ทำการแก้สมการ (176) – (179) จะได้ค่า A_0 , B_0 , C_0 และ D_0 จากนั้นแทนค่าลงไป ในสมการ (168) และ (169) จะได้สมการการเคลื่อนตัวและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุน สำหรับผลเฉลยแม่นยำ

2. การหาค่าเคลื่อนตัวสำหรับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อและ 3 จุดต่อ

การหาค่าเคลื่อนตัวสำหรับแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อและ 3 จุดต่อ ทำได้โดยการรวมเมตริกซ์แข็งเกร็งและเมตริกซ์มวลของเอลิเมนต์ทั้งหมดเข้าด้วยกัน

สำหรับคานาโทโมเซนโกทั่วไปและแบบการเลือกลดการอินทิเกรท

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] \quad (180)$$

สำหรับวิธีกำลังสองน้อยสุด

$$[Z] = [K] - \omega^2 [M] + [K_{LS}] \quad (181)$$

จาก $[Z]\{d\} = \{F\}$ (182)

จะได้ $\{d\} = \frac{\{F\}}{[Z]}$ (183)

เมื่อ $\{d\}$ คือ เมตริกซ์ของการเคลื่อนตัว (displacement)
 $\{F\}$ คือ เมตริกซ์แรงที่กระทำต่อโครงสร้าง

ค่าความคลาดเคลื่อนของ L_2 และกฎการแบ่งค่าต่อเนื่องออกเป็นช่วงย่อยๆ (discretization rule)

ในการวัดปริมาณของความคลาดเคลื่อนจะใช้ نرم L_2 (L_2 norm) โดยความคลาดเคลื่อนในการเคลื่อนตัวในแนวตั้งฉากและการเปลี่ยนแปลงรูปร่างที่เกิดจากการหมุนมีนิยามคือ

$$e_v = v^h - v \quad (184)$$

และ
$$e_\theta = \theta^h - \theta \quad (185)$$

เมื่อ v และ θ คือผลเฉลยแม่นยำ ส่วน v^h และ θ^h คือการประมาณที่ได้จากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ และจะได้โนอร์ม L_2 คือ

$$\|v\| = \left(\int_0^L v^2 dx \right)^{1/2} \quad (186)$$

จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนในโนอร์ม L_2 คือ

$$e_{L_2} = \left(\int_{x_1^e}^{x_2^e} (v^h - v)^2 dx \right)^{1/2} \quad (187)$$

% ความคลาดเคลื่อนในโนอร์ม L_2 คือ

$$\% e_{L_2} = 100 \frac{e_{L_2}}{\|v\|} \quad (188)$$

คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการคำนวณ

คุณสมบัติของวัสดุที่ใช้ในการคำนวณ (Grosh และ Pinsky, 1996) ได้แก่

ความหนาของคาน	$b = 1 \text{ cm}$
ความสูงของคาน	$t = 0.15 \text{ cm}$
ความยาวของคาน	$L = 100 \text{ cm}$
ความยาวของเอลิเมนต์	$h = 1, \frac{2}{3}$ และ 2 cm
พื้นที่หน้าตัด	$A = bt \text{ cm}^2$

โมเมนต์ความเฉื่อย	$I = \frac{bt^3}{12}$
สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของยัง	$E = 210(10)^{10} \text{ dynes/cm}^2$
อัตราส่วนปัวส์ซอง (Poisson's ratio)	$\nu = 0.29$
สัมประสิทธิ์ความยืดหยุ่นของความเค้นเฉือน	$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
ความหนาแน่นของมวล	$\rho = 7.8 \text{ g/cm}^3$
ตัวประกอบแก้ไขสำหรับความเค้นเฉือน	$\kappa = \frac{5}{6}$
แรงที่ใส่เข้าไป	$F = 2e^{-i\omega t}$
ความถี่	$f = 1671 \text{ Hz}$ และ $f = 7550 \text{ Hz}$
	$\omega = 2\pi f \text{ rad/sec}$

ผลและวิจารณ์

ผล

1. ผลที่ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์ของ k (Wavenumber) รอบ ω (ความถี่)

ผลของอนุกรมเทย์เลอร์ที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical)

$$k_{\text{Real}} = \frac{\sqrt{A\rho}}{\sqrt{EI}} \omega + \left(\frac{\rho}{2G\kappa} + \frac{\rho}{2E} \right) \omega^2 + \left(\frac{\sqrt{I}\rho^{3/2} (G^2\kappa^2 - 2G\kappa E + E^2)}{8E^{3/2}\sqrt{AG^2\kappa^2}} \right) \omega^3 - \frac{(I^{3/2}\rho^{5/2} (G^4\kappa^4 - 4G^3\kappa^3 E + 6G^2\kappa^2 E^2 - 4G\kappa E^3 + E^4))}{128E^{5/2}A^{3/2}G^4\kappa^4} \omega^5 + O(\omega^7)$$

..... (189)

$$k_{\text{Imaginary}} = -\frac{\sqrt{A\rho}}{\sqrt{EI}} \omega + \left(\frac{\rho}{2G\kappa} + \frac{\rho}{2E} \right) \omega^2 - \left(\frac{\sqrt{I}\rho^{3/2} (G^2\kappa^2 - 2G\kappa E + E^2)}{8E^{3/2}\sqrt{AG^2\kappa^2}} \right) \omega^3 + \frac{(I^{3/2}\rho^{5/2} (G^4\kappa^4 - 4G^3\kappa^3 E + 6G^2\kappa^2 E^2 - 4G\kappa E^3 + E^4))}{128E^{5/2}A^{3/2}G^4\kappa^4} \omega^5 + O(\omega^7)$$

.....(190)

พารามิเตอร์การออกแบบ (τ_1 และ τ_2)

เมื่อทำการเทียบอนุกรมเทย์เลอร์ของ k (Wavenumber) รอบ ω (ความถี่) ที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์และผลที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical) เพื่อหาพารามิเตอร์การออกแบบ (τ_1 และ τ_2) ที่ทำให้ k ที่ได้จากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับที่ได้จากการวิเคราะห์ พบว่า

1. วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อ

จะได้ผลเฉลย คือ
$$\tau_1 = \frac{-h^2}{4\omega^2 \rho A} \quad (191)$$

$$\tau_2 = \frac{h^2}{12(-GA\kappa + \rho I\omega^2)} \quad (192)$$

2. วิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 3 จุดต่อ

จะได้ผลเฉลย คือ

$$\tau_1 = \frac{-h^4}{240\omega^2 \rho A} \quad (193)$$

$$\tau_2 = \frac{-h^4 GA\kappa}{720(-GA\kappa + \rho I\omega^2)^2} \quad (194)$$

ค่าความคลาดเคลื่อนของจำนวนคลื่นที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์

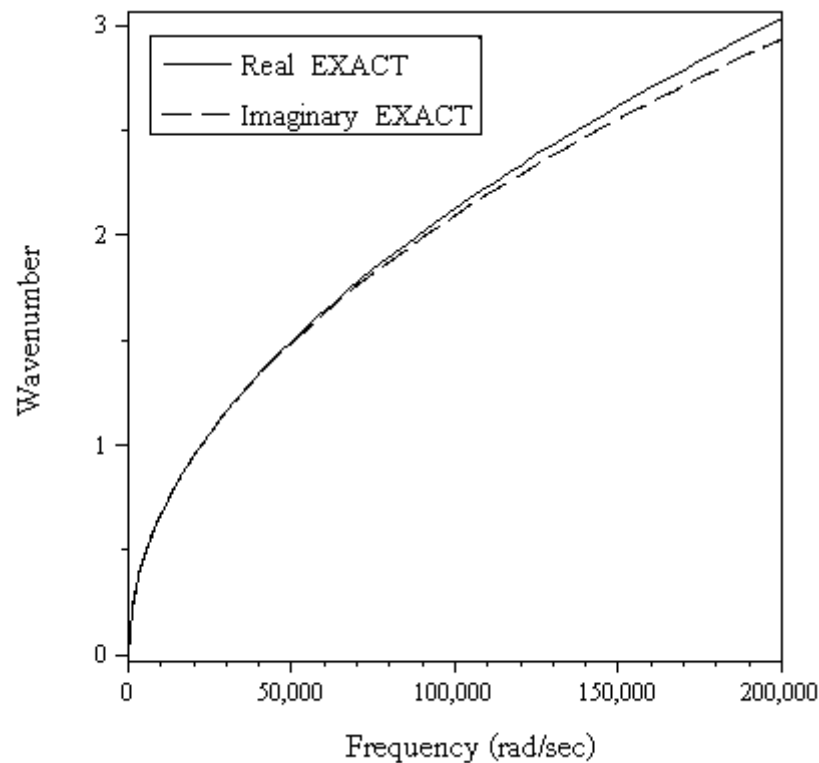
โดยหาได้จากผลต่างของอนุกรมเทย์เลอร์ของจำนวนคลื่น (Wavenumber) k รอบ ω (ความถี่) ที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์และผลที่ได้จากการวิเคราะห์ (Analytical)

ตารางที่ 4 ค่าความคลาดเคลื่อนของจำนวนคลื่น (k) ที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์

	อันดับ (order) ของ ω	สัมประสิทธิ์
SRI2	k_{Real}	2 $\left(\frac{h^2 \rho A}{8EI} \right)$
	$k_{Imaginary}$	2 $\left(\frac{h^2 \rho A}{8EI} \right)$
GGLS2	k_{Real}	3 $-\left(\frac{\rho^{3/2} h^2 \sqrt{A}}{720 G \kappa E^{3/2} I^{3/2}} \right) (-7h^2 G A \kappa - 60 G \kappa I + 60 EI)$
	$k_{Imaginary}$	3 $\left(\frac{\rho^{3/2} h^2 \sqrt{A}}{720 G \kappa E^{3/2} I^{3/2}} \right) (-7h^2 G A \kappa - 60 G \kappa I + 60 EI)$
SRI3	k_{Real}	3 $\left(\frac{h^4 \rho^{3/2} A^{3/2}}{480 E^{3/2} I^{3/2}} \right)$
	$k_{Imaginary}$	3 $-\left(\frac{h^4 \rho^{3/2} A^{3/2}}{480 E^{3/2} I^{3/2}} \right)$
GGLS3	k_{Real}	4 $-\left(\frac{h^4 \rho^2 A}{30240 G \kappa E^2 I^2} \right) (-21 G \kappa I + 42 EI - 2h^2 G A \kappa)$
	$k_{Imaginary}$	4 $-\left(\frac{h^4 \rho^2 A}{30240 G \kappa E^2 I^2} \right) (-21 G \kappa I + 42 EI - 2h^2 G A \kappa)$

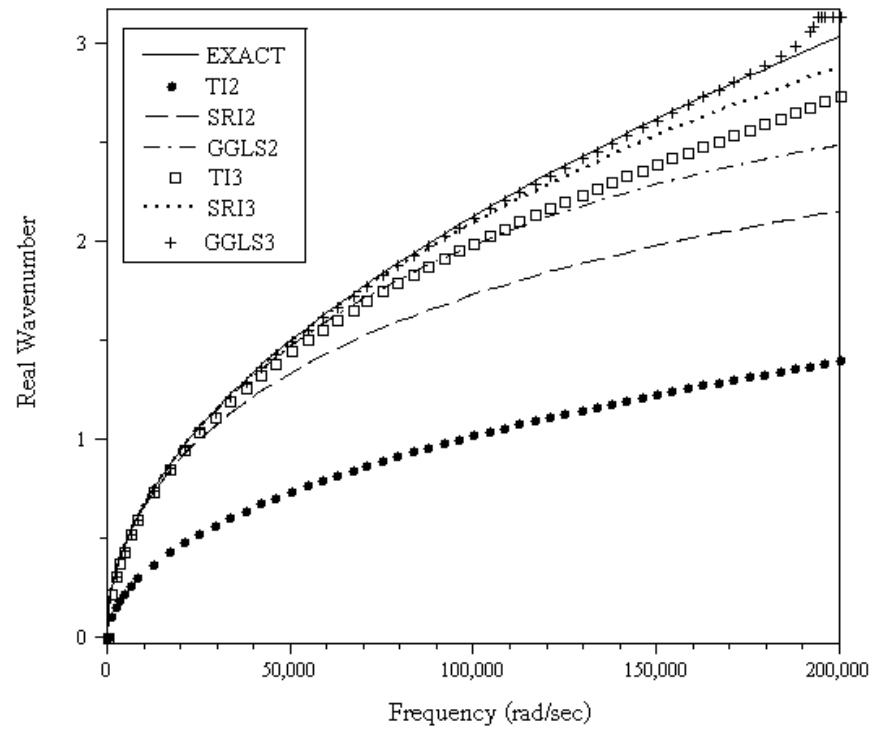
2. ผลที่ได้จากความสัมพันธ์การกระจายตัว

เมื่อทำการแก้สมการเพื่อหาค่าผลเฉลย 2 ชุดของ $\pm k$ สำหรับแต่ละ ω ของแบบจำลองที่ได้จากการวิเคราะห์ จากนั้นนำมาเขียนกราฟระหว่าง $\pm k$ เทียบกับ ω จะได้ผล คือ

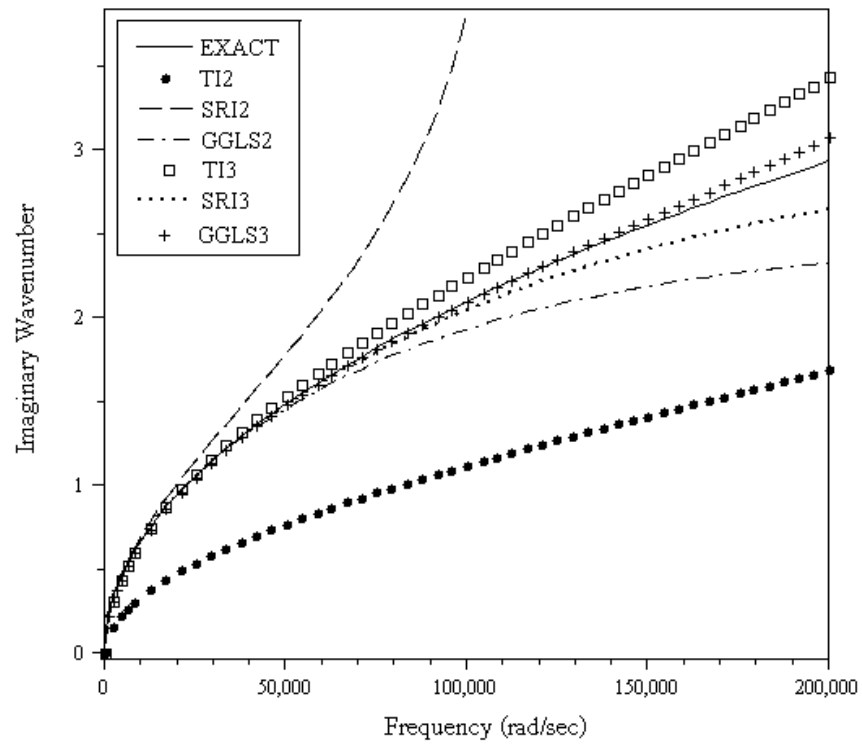


ภาพที่ 13 ความสัมพันธ์การกระจายตัวที่เกิดขึ้นจริง (exact) ระหว่างจำนวนคลื่นที่เป็นจำนวนจริง และจำนวนจินตภาพเทียบกับความถี่

เมื่อทำการแก้สมการเพื่อหาค่าผลเฉลย 2 ชุดของ k สำหรับแต่ละ ω ของแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์จากนั้นนำมาเขียนกราฟระหว่าง k เทียบกับ ω และเปรียบเทียบผลที่ได้กับแบบจำลองที่ได้จากการวิเคราะห์จะได้ผล คือ

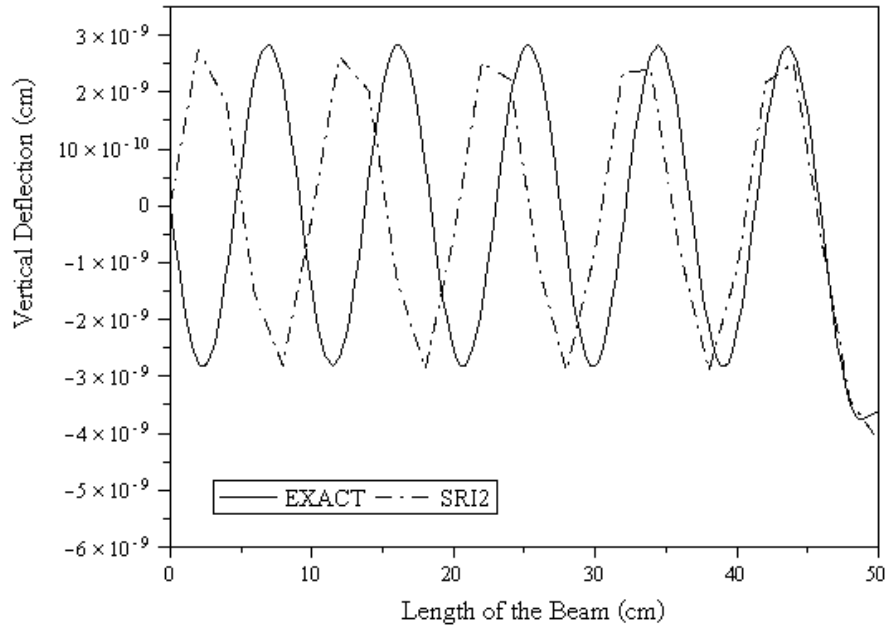


ภาพที่ 14 ความสัมพันธ์การกระจายตัวระหว่างจำนวนคลื่นที่เป็นจำนวนจริงเทียบกับความถี่

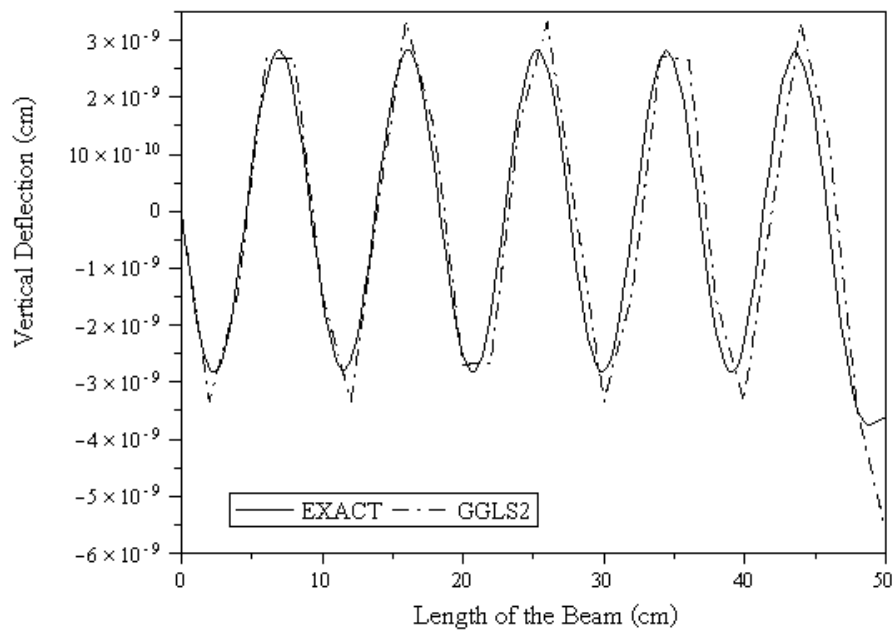


ภาพที่ 15 ความสัมพันธ์การกระจายตัวระหว่างจำนวนคลื่นที่เป็นจำนวนจินตภาพเทียบกับความถี่

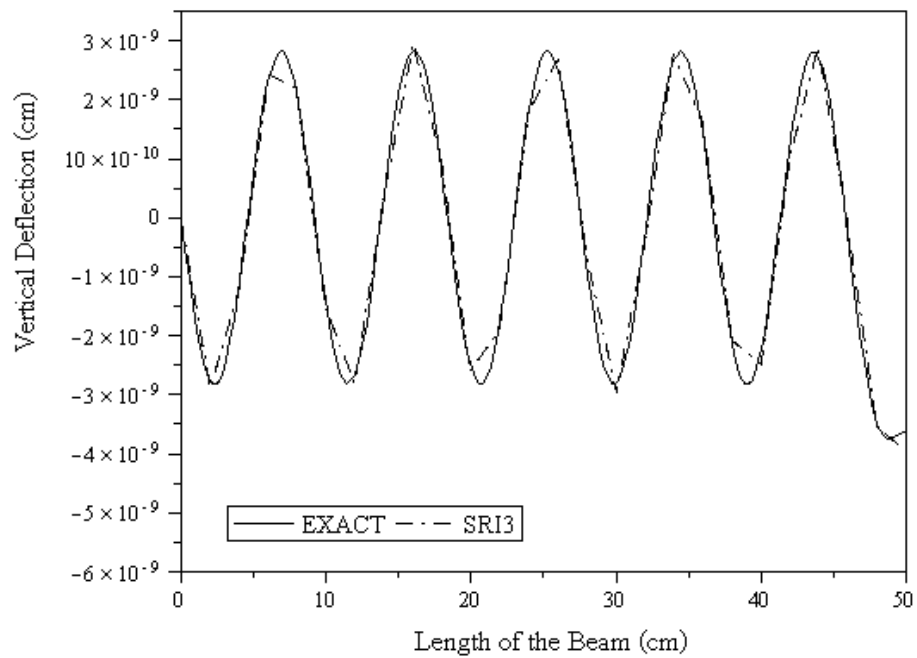
3. ผลที่ได้จากการหาค่าเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริง
ที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2$



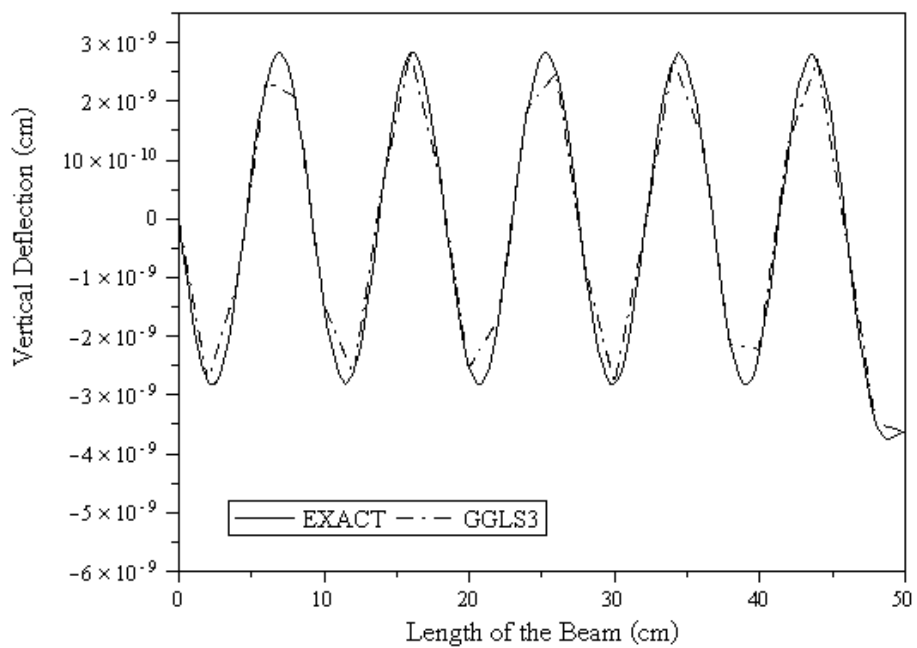
ภาพที่ 16 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการ
เลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$



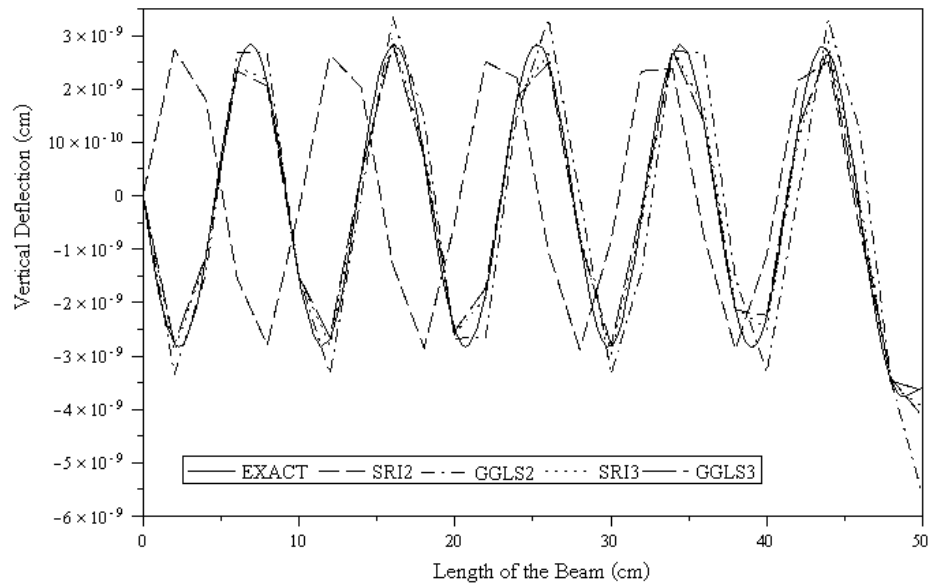
ภาพที่ 17 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลัง
สองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$



ภาพที่ 18 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$

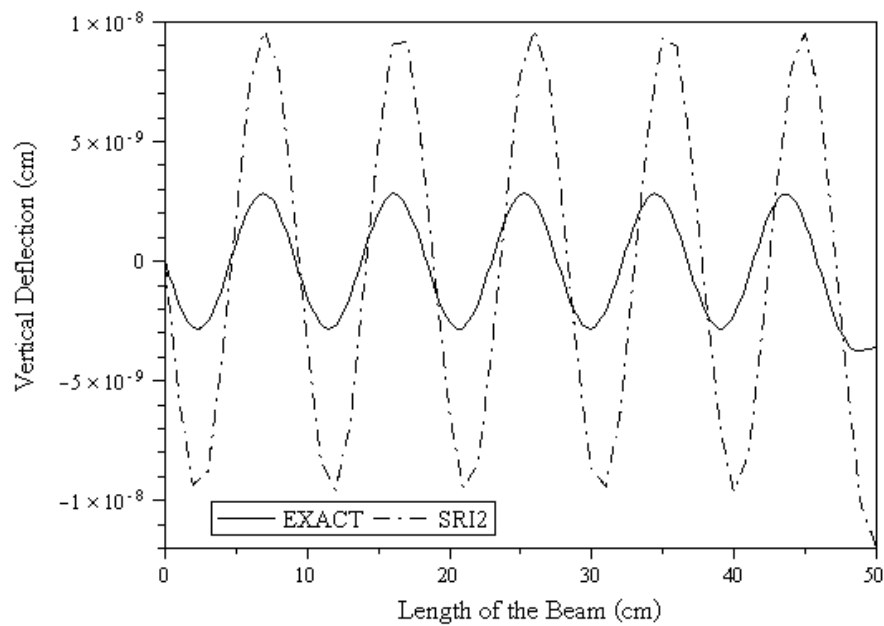


ภาพที่ 19 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$

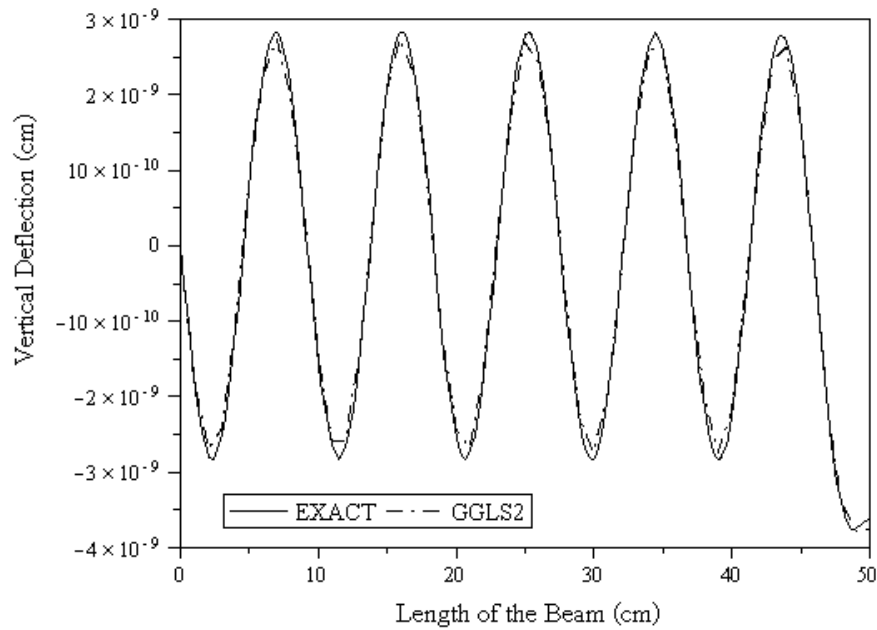


ภาพที่ 20 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 2 \text{ cm}$

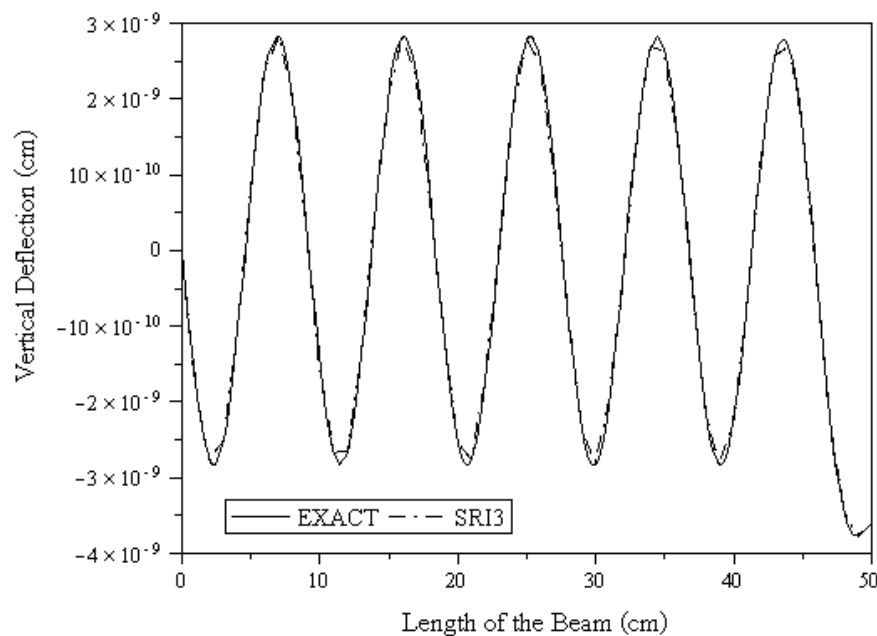
4. ผลที่ได้จากการหาค่าเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1$



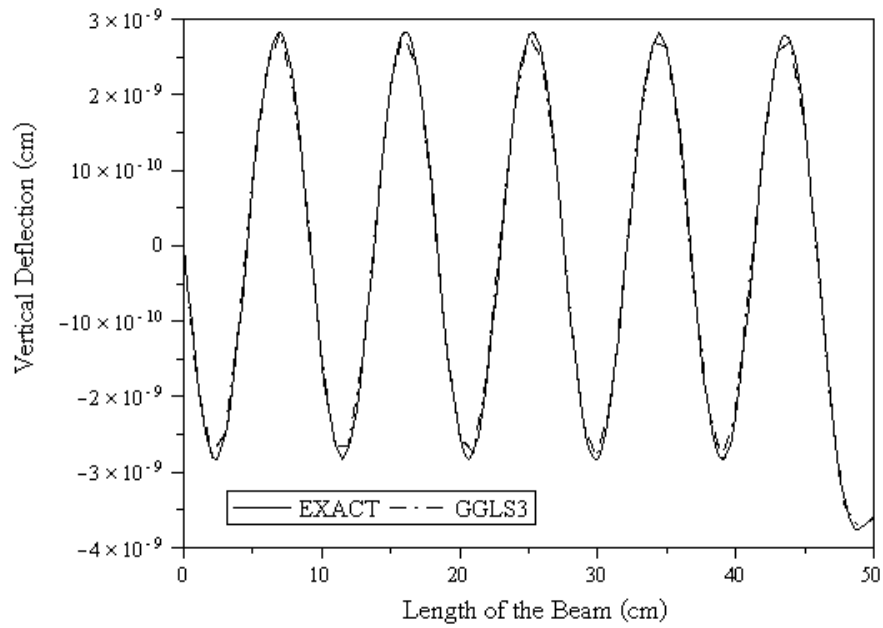
ภาพที่ 21 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$



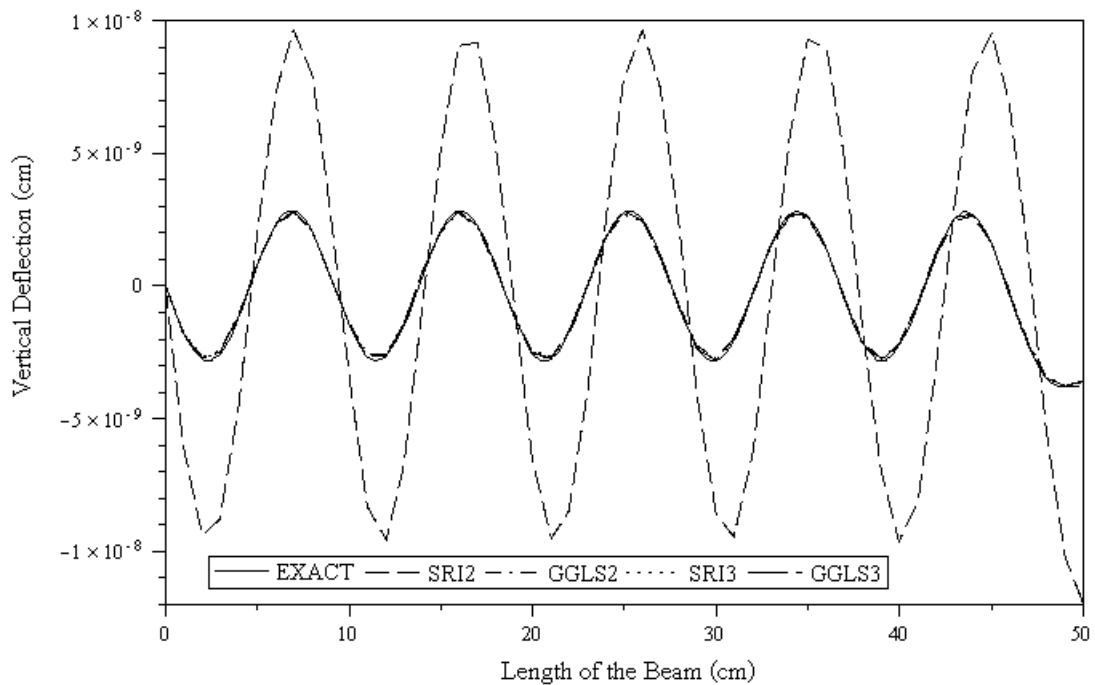
ภาพที่ 22 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$



ภาพที่ 23 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$

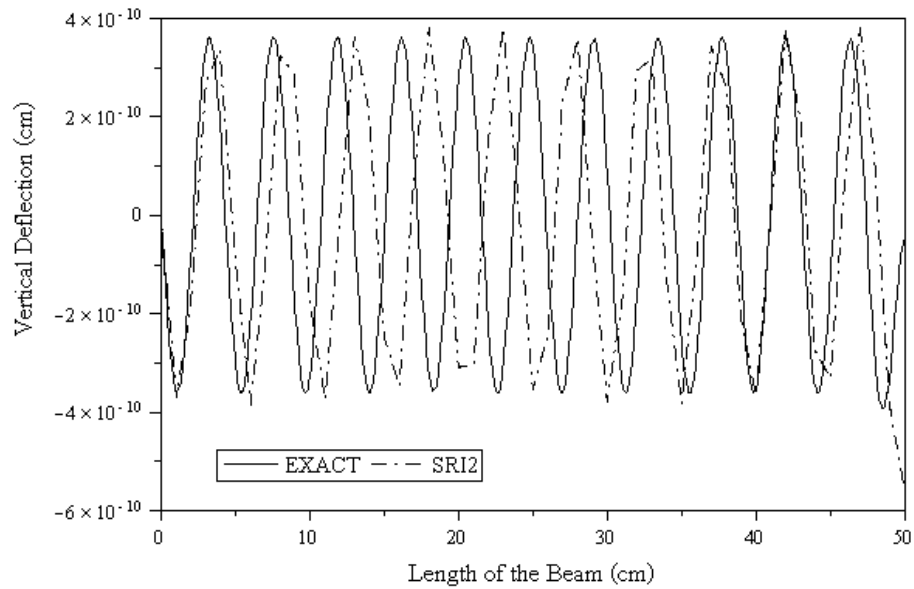


ภาพที่ 24 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$

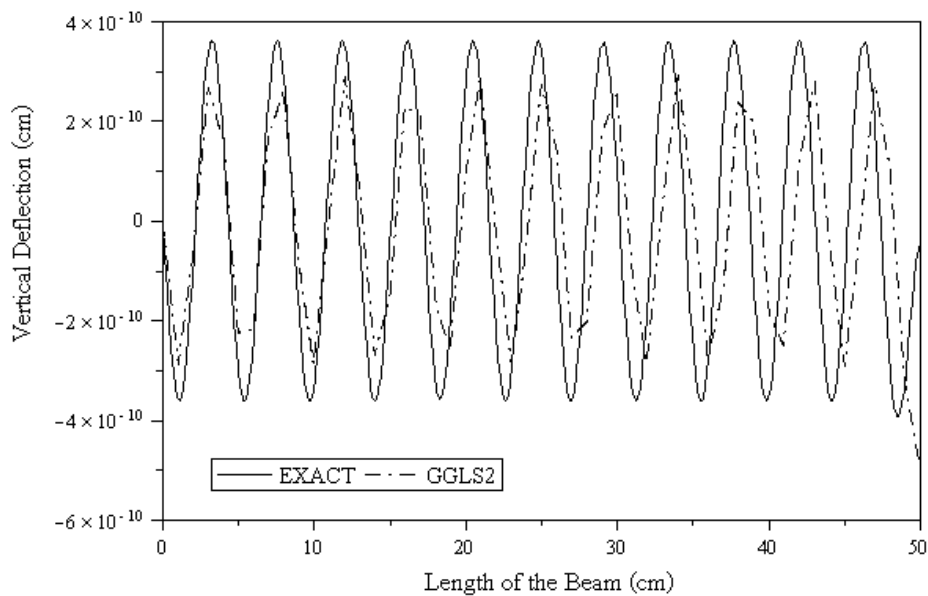


ภาพที่ 25 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$

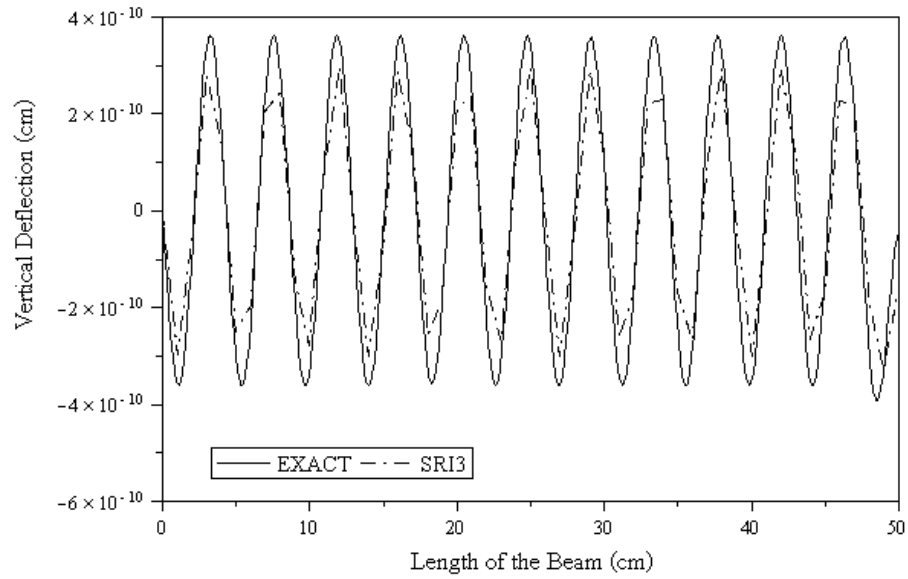
5. ผลที่ได้จากการหาค่าเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริง
ที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1$



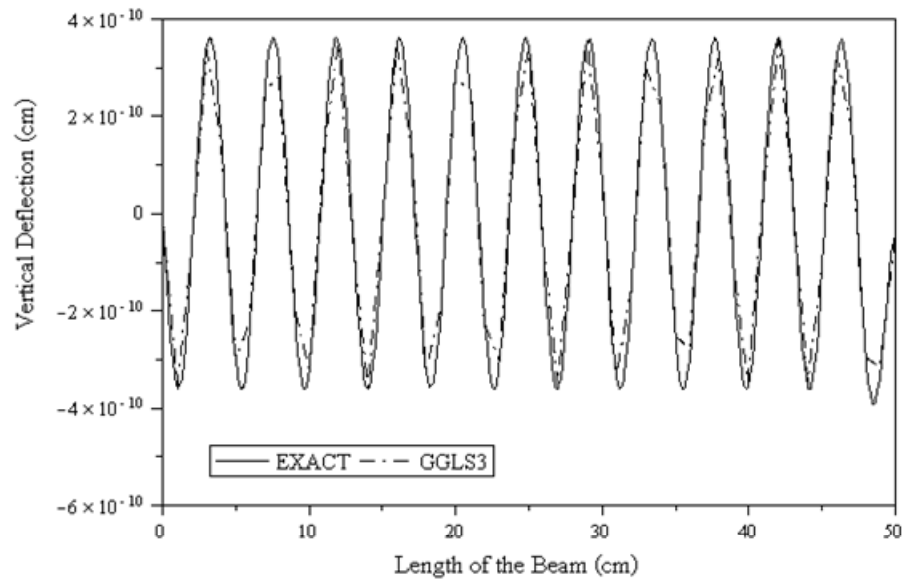
- ภาพที่ 26 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการ
เลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$



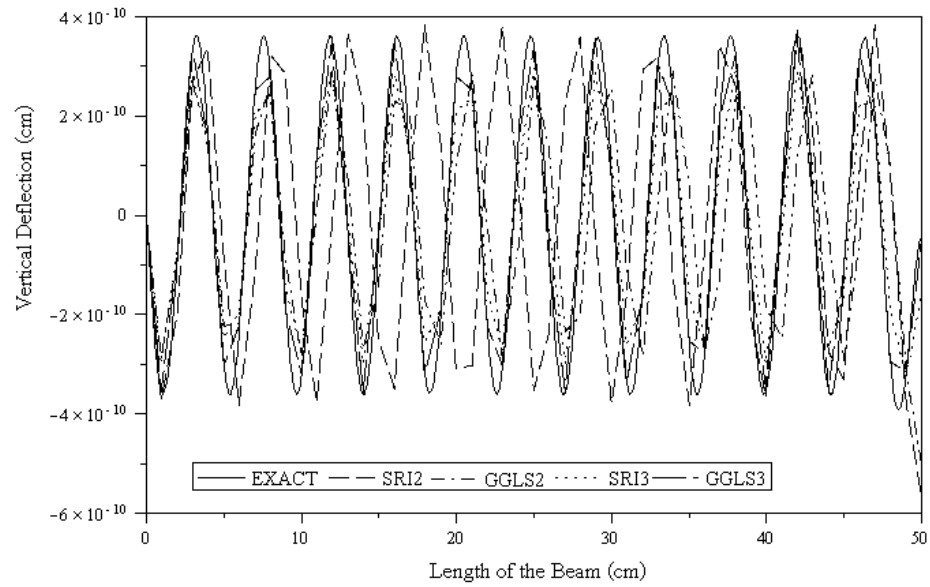
- ภาพที่ 27 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลัง
สองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$



ภาพที่ 28 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$



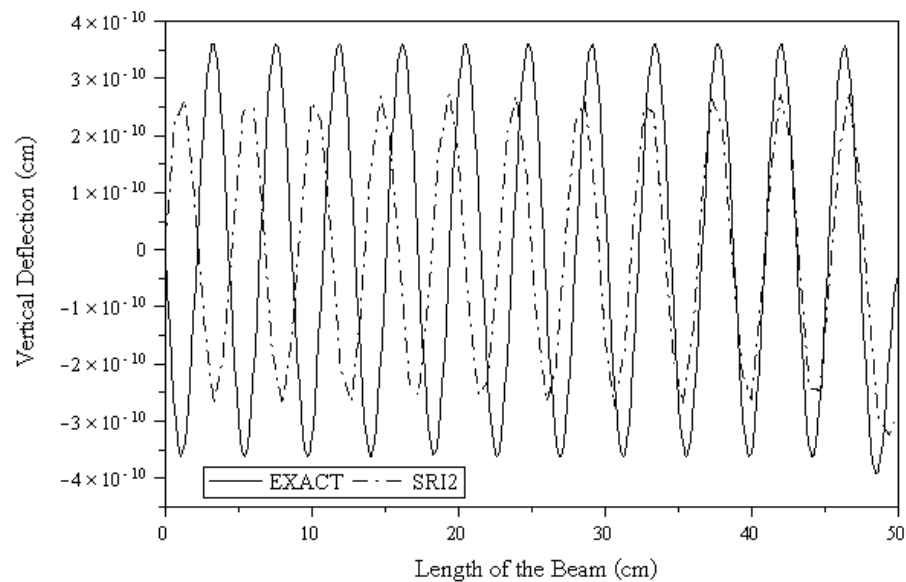
ภาพที่ 29 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$



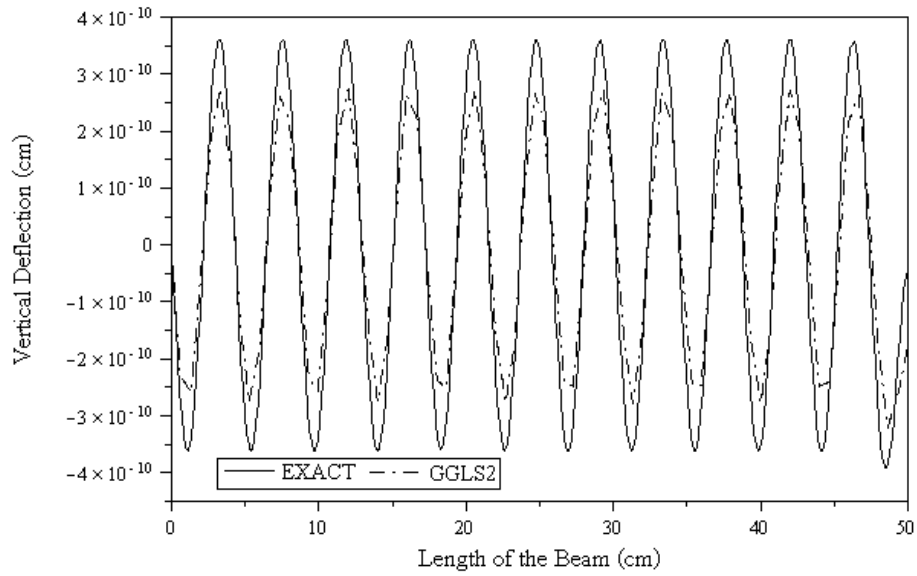
ภาพที่ 30 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = 1 \text{ cm}$

6. ผลที่ได้จากการหาค่าเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริง

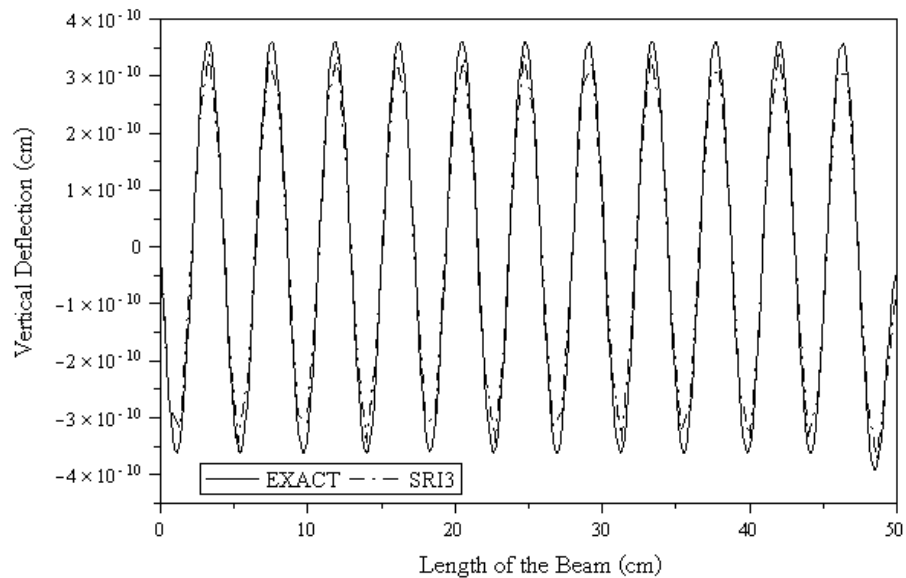
ที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3}$



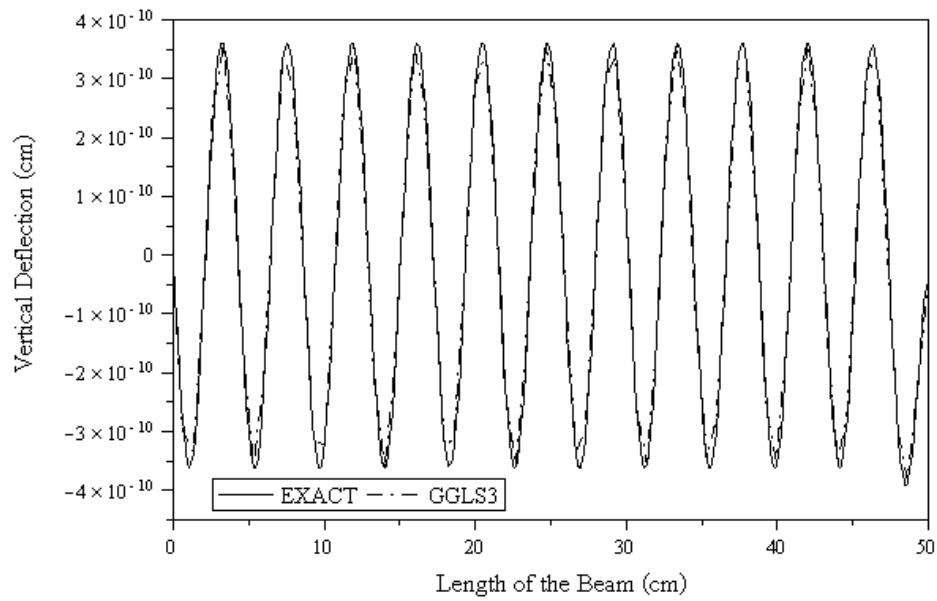
ภาพที่ 31 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$



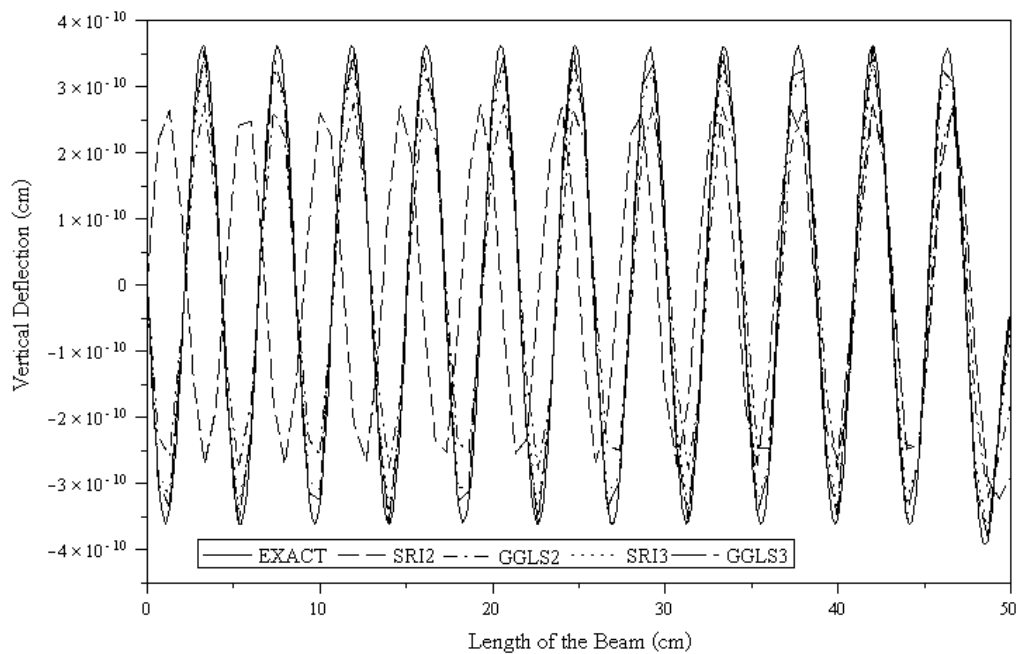
ภาพที่ 32 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$



ภาพที่ 33 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$



ภาพที่ 34 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลัง
สองน้อยสุดเปรียบเทียบกับค่าจริงที่ $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$

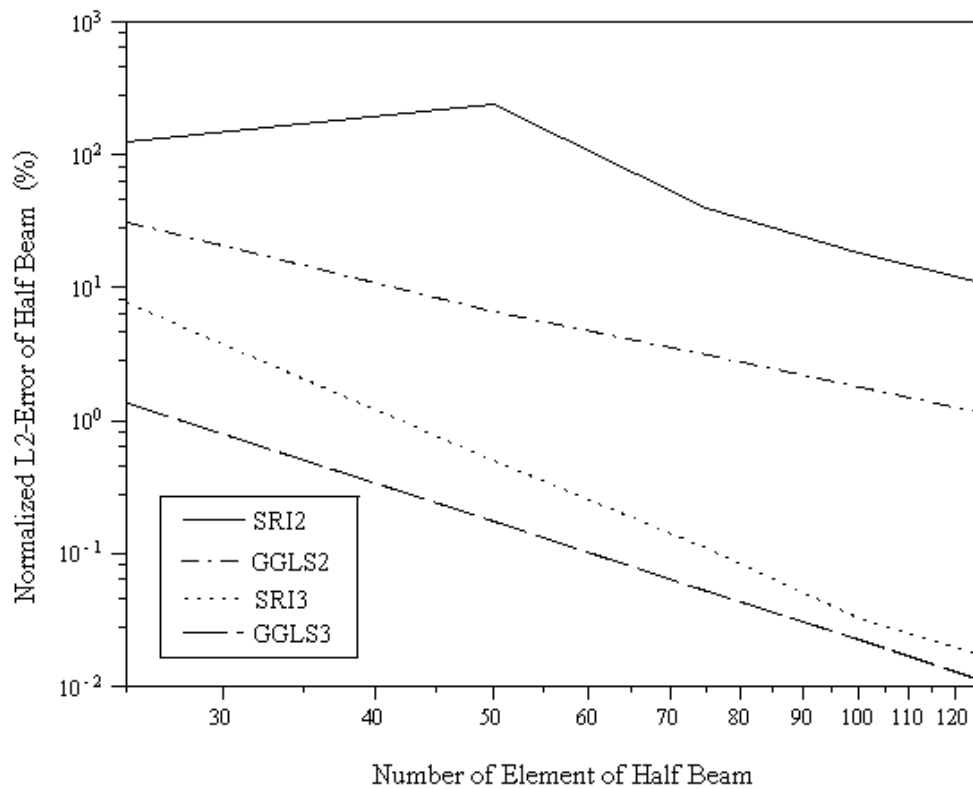


ภาพที่ 35 การเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าจริงที่
 $f = 7550 \text{ Hz}$ และ $h = \frac{2}{3} \text{ cm}$

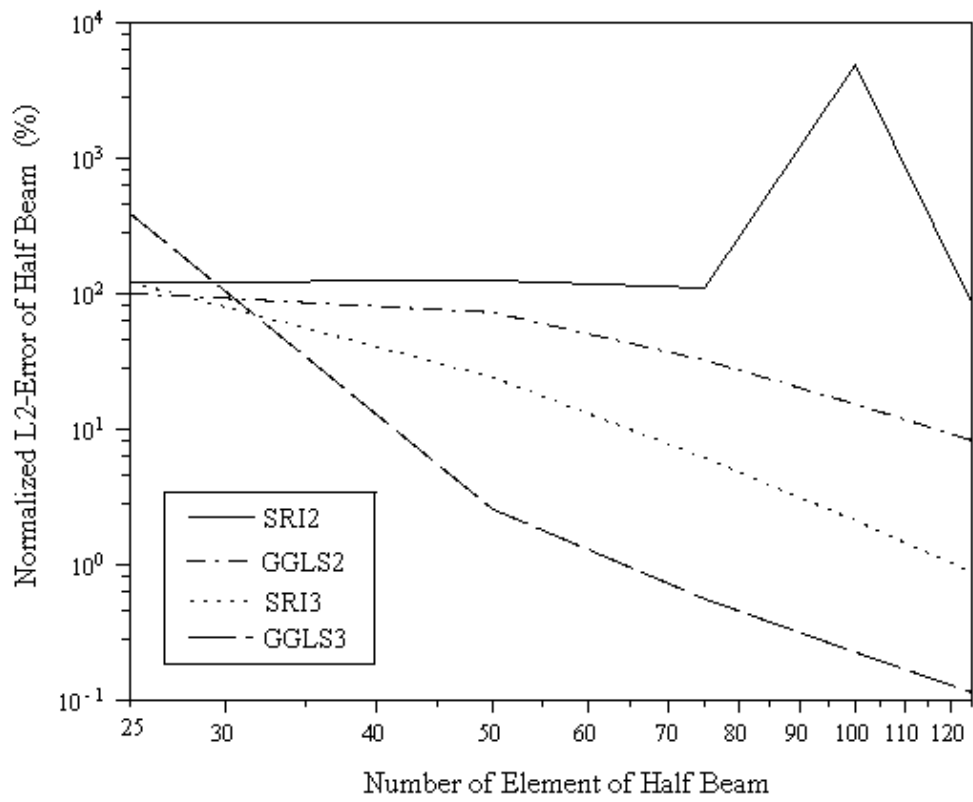
7. ผลที่ได้จากการหาค่าความคลาดเคลื่อนของ L_2 ของคานาทิโมเชนโกที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์

ตารางที่ 5 จำนวนเอลิเมนต์ที่ใช้เมื่อต้องการให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อนของ $L_2 \leq 1\%$

วิธีการ	ที่ความถี่ 1671 Hz	ที่ความถี่ 7550 Hz
SRI	> 1000	> 1000
GLS	160	290
QSRI	42	120
QLS	28	64



ภาพที่ 36 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน L_2 (Normalized L_2 error) ที่ $f = 1671 \text{ Hz}$



ภาพที่ 37 เปรียบเทียบเปอร์เซ็นต์ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน L_2 (Normalized L_2 error) ที่ $f = 7550 \text{ Hz}$

วิจารณ์

ผลการวิจัยที่ได้แสดงให้เห็นว่าวิธีกำลังสองน้อยสุดสามารถลดค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจายตัว (dispersion error) สำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อของคานาโทโมเซนโกได้และเมื่อนำไปใช้กับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนของการกระจายตัวที่ลดลง นั่นคือเมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่เท่ากันเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อจะจำลองการเคลื่อนตัวของคานาโทโมเซนโกใกล้เคียงกับการเคลื่อนตัวจริงได้มากกว่า

การจำลองการเคลื่อนตัวที่ได้จากแบบจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์เปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์พบว่าวิธีกำลังสองน้อยสุดสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อจะแสดงค่าเคลื่อนตัวที่ใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการวิเคราะห์มากที่สุด และวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อและวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อจะให้ผลที่แม่นยำรองลงมา ส่วนวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อมีความคลาดเคลื่อนของการเคลื่อนตัวมากที่สุด ซึ่งทั้งนี้เป็ผลเนื่องมาจากความคลาดเคลื่อนของจำนวนคลื่นของวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อมีค่ามากกว่าวิธีการอื่นดังแสดงค่าความคลาดเคลื่อนที่ได้จากอนุกรมเทย์เลอร์ในตารางที่ 4 และความสัมพันธ์การกระจายตัวระหว่างจำนวนคลื่นเทียบกับความถี่ในภาพที่ 14 และ 15

จากตารางที่ 5 แสดงให้เห็นว่าถ้าต้องการให้ได้ค่าความคลาดเคลื่อน L_2 ต่ำกว่า 1% ที่ความถี่ 1671 Hz จำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดจะเป็น 2:3 ของจำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการสำหรับวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต และที่ความถี่ 7550 Hz จำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการสำหรับเอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดจะเป็น 8:15 ของจำนวนเอลิเมนต์ที่ต้องการสำหรับวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต เช่นเดียวกันสำหรับเอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดจะให้ผลที่ดีกว่าวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต

จากผลการวิจัยแสดงให้เห็นว่าในการนำไปวิเคราะห์เพื่อจำลองการเคลื่อนตัวของคานาโทโมเซนโกหากเลือกใช้เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ วิธีกำลังสองน้อยสุดจะให้ค่าความคลาดเคลื่อน L_2 ต่ำกว่าวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต ดังแสดงในภาพที่ 36 และ 37 นั่นคือเมื่อใช้จำนวนเอลิเมนต์ที่เท่ากันในการจำลองการเคลื่อนตัววิธีกำลังสองน้อยสุดจะแสดงผลที่แม่นยำมากกว่า และหาก

เลือกใช้อิเล็กเมนต์แบบ 3 จุดต่อ วิธีกำลังสองน้อยสุดจะให้ผลการจำลองที่แม่นยำมากกว่าวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตเช่นเดียวกันกับผลการจำลองที่ได้จากอิเล็กเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

จากผลการวิจัยที่ความถี่ คือ $f = 1671 \text{ Hz}$ และ $f = 7550 \text{ Hz}$ เมื่อใช้ขนาดอิเล็กเมนต์ $h = 1 \text{ cm}$ ที่ความถี่ 1671 Hz จะได้ค่าใกล้เคียงกับค่าจริงมากกว่าที่ความถี่ 7550 Hz ดังนั้นเมื่อความถี่ของแรงที่กระทำต่อโครงสร้างเพิ่มมากขึ้น จำเป็นต้องลดขนาดของอิเล็กเมนต์เพื่อช่วยเพิ่มความแม่นยำให้แก่แบบจำลองทางไฟไนต์อิเล็กเมนต์

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

งานวิจัยนี้วิธีกำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาเลอร์กินได้ถูกนำมาใช้เพื่อเพิ่มความแม่นยำในการจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์สำหรับการตอบสนองของการสั่นในสถานะคงตัวของคานทิโมเซนโก โดยเริ่มจากสมการการแปรผันมาตรฐานทางไฟไนต์เอลิเมนต์ จากนั้นได้เพิ่มเสถียรภาพของสมการอนุพันธ์ครอบคลุมในรูปแบบเกรเดียนต์กำลังสองน้อยสุดทั่วไปเพื่อเพิ่มความแม่นยำในการจำลองทางไฟไนต์เอลิเมนต์

พารามิเตอร์เกรเดียนต์กำลังสองน้อยสุดสำหรับการประมาณภายในแบบเชิงเส้นและแบบสมการกำลังสองของการตอบสนองได้ถูกเลือกเพื่อทำให้ทอมอันดับต่ำในอนุกรมเทย์เลอร์ที่ได้จากความสัมพันธ์ของการกระจายตัวทางไฟไนต์เอลิเมนต์ตรงกันกับความสัมพันธ์ของการกระจายตัวที่ได้จากการวิเคราะห์

ผลทางไฟไนต์เอลิเมนต์ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาเลอร์กินและวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตได้ถูกนำมาเปรียบเทียบกับผลที่ได้จากการวิเคราะห์เพื่อหาวิธีการที่เหมาะสมที่สุดเพื่อใช้ในการจำลองพฤติกรรมของโครงสร้างคานทิโมเซนโกต่อการตอบสนองในสถานะคงตัว

แบบจำลองที่นำมาใช้เปรียบเทียบในงานวิจัยนี้คือคานช่วงเดียวหรือคานแบบง่าย (simply supported beam) ซึ่งผลที่ได้จากวิธีการทางไฟไนต์เอลิเมนต์โดยใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบสมการกำลังสองที่ใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาเลอร์กินแสดงผลของการเคลื่อนตัวของคานทิโมเซนโกได้ใกล้เคียงกับการเคลื่อนตัวที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงมากกว่าวิธีวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต และเมื่อใช้ฟังก์ชันการประมาณภายในแบบเชิงเส้นโดยใช้วิธีกำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาเลอร์กินจะแสดงผลของการเคลื่อนตัวที่แม่นยำมากกว่าวิธีการเลือกลดอันดับการอินทิเกรต

จากตัวอย่างการทดสอบความแม่นยำของ Algorithm ที่พัฒนาขึ้นพบว่า เมื่อเพิ่มจำนวนชิ้นส่วนในแบบจำลองของโครงสร้างทำให้ผลการคำนวณที่ได้มีค่าใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการ

วิเคราะห์มากขึ้น แต่ทำให้การคำนวณมีความยุ่งยากขึ้นและใช้เวลามากขึ้น ดังนั้นในการเลือกจำนวนชิ้นส่วนที่ใช้ในการคำนวณจึงขึ้นอยู่กับขอบเขตของเปอร์เซ็นต์ความผิดพลาดที่สามารถยอมรับได้ เพื่อประหยัดเวลาที่ใช้ในการคำนวณ

ข้อเสนอแนะ

วิธีการกำลังสองน้อยสุดทั่วไปของกาลอร์กินที่ใช้ในงานวิจัยนี้สามารถนำไปเป็นพื้นฐานเพื่อประยุกต์ใช้ในการวิเคราะห์แผ่นบาง (plate) เพื่อทำการวิจัยต่อไปได้

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

- ปราโมทย์ เดชะอำไพ. 2542. ไฟไนต์เอลิเมนต์ในงานวิศวกรรม. สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.
- ปียวิทย์ ศรีชุมพวง. 2544. การเปรียบเทียบชิ้นส่วนความเค้นพันทางและชิ้นส่วนผสมสำหรับแผ่นพื้นต่างวัสดุที่ซ้อนเป็นชั้น. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- Antes, H. 2003. Fundamental Solution and Integral Equations for Timoshenko Beams. **Computer and Structures**. 81: 383-396.
- Dadfarnia, M., N. Jalili and E. Esmailzadeh. 2005. A Comparative Study of the Galerkin Approximation Utilized in the Timoshenko Beam Theory. **Journal of Sound and Vibration**. 280: 1132-1142.
- Franca, L.P. and E.G. Dutra do Carmo. 1989. The Galerkin Gradient Least-Squares Method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 74: 41-54.
- Grohmann, B. A., T. Wallmersperger and B.H. Kroplin. 2001. Time-Discontinuous Stabilized Space-Time Finite Element for Timoshenko Beams. **AIAA Journal**. 39: 2158-2167.
- Grosh, K. and P.M. Pinsky. 1996. Design of Galerkin Least Squares Methods for Timoshenko Beams. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 132: 1-16.
- Hughes, T.J.R. and L.P. Franca. 1988. A Mixed Finite Element Method Formulation for Reissner-Mindlin Plate Theory: Uniform Convergence of All Higher-Order Spaces. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 67: 223-240.

- Kosmatka, J.B. 1995. An Improved Two –Node Finite Element for Stability and Natural Frequencies of Axial-Loaded Timoshenko Beams. **Computer & Structures**. 57: 141-149.
- Krishnamoorthy, C. S. 1995. **Finite element analysis: theory and programming**. 2nd ed. Tata McGraw-Hill, New Delhi.
- Laulusa, A. and J.N. Reddy. 2003. On Shear and Extensional Locking in Nonlinear Composite Beams. **Engineering Structures**. 26: 151-170.
- Lee, J. and W.W. Schultz. 2004. Eigenvalue Analysis of Timoshenko Beams and Axisymmetric Mindlin Plates by the Pseudospectral Method. **Journal of Sound and Vibration**. 269: 609-621.
- Loula, A.F.D., T.J.R. Hughes, L.P. Franca and I. Miranda. 1987. Mixed Petrov-Galerkin Methods for the Timoshenko Beam Problem. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**. 63: 133-154.
- Ozturk, H. and M. Sabuncu. 2005. Stability Analysis of a Cantilever Composite Beam on Elastic Supports. **Composites Science and Technology**. 65: 1982-1995.
- Pilli, L. 1998. **High-Order Accurate Timoshenko Beam Elements for Wave Propagation**. M.S. thesis, Clemson University.
- Rakowski, J. 1990. The Interpretation of the Shear Locking in Beam Elements. **Computers & Structures**. 37: 969-776.
- Reddy, J.N. 2006. **An Introduction to The Finite Element Method**. 3rd ed. McGraw-Hill, New York.

- Tang, B. 2008. Combined Dynamic Stiffness Matrix and Precise Time Integration Method for Transient Force Vibration Response Analysis of Beams. **Jouranal of Sound and Vibration**. 309: 868-876.
- Timoskenko, S.P., D.H. Young and W.Jr. Weaver. 1990. **Vibration Problem in Engineering**, 5th ed. Wiley, New York.
- Tong, Y. 1999. **Hybrid Least Squares Finite Element Methods for Timoshenko Beams and Reissner-Mindlin Plates**. M.S. thesis, Clemson University.
- Tsai, H.C. and J.M. Kelly 2005. Buckling of Short Beams with Warping Effect Included. **International Journal of Solids and Structures**. 42: 239-253.
- Ugural, A.C. and S.K. Fenster. 1995. **Advanced Strength and Applied Elasticity**. 2nd ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Wieckowski, Z. and M. Golubiewski. 2007. Improvement in Accuracy of the Finite Element Method in Analysis of Stability of Euler-Bernouli and Timoshenko Beams. **Thin-Walled Structures**. 45: 950-954.
- Zienkiewicz, O.C. and R.L. Taylor. 1989. **The Finite Element Method**. 4th ed. Vol.1, McGraw-Hill, London.

ภาคผนวก

Algorithm Maple ที่ใช้ในการคำนวณ

Algorithm ที่ใช้ในการหาความสัมพันธ์ที่ได้จากการวิเคราะห์ของจำนวนคลื่นกับความถี่

```

บรรทัด คำสั่ง
1 restart;
2 with(linalg): with(plots):
3 v:=A1*exp(I*(k*x-omega*t));
  theta:=A2*exp(I*(k*x-omega*t));
4 eq1:=simplify(G*Kappa*A*(diff(v,x)-theta)+E*J*diff(diff(theta,x),x))
  - rho*J*diff(diff(theta,t),t) = 0;
  eq2:=simplify(G*Kappa*A*(diff(theta,x)-diff(diff(v,x),x))+rho*A*diff(diff(v,t),t))
  = 0;
5 Lambda:=map(expand,matrix(2,2,[coeff(lhs(eq2),A1)/(exp((k*x-omega*t)*I)),
  coeff(lhs(eq2),A2)/(exp((k*x-omega*t)*I)),coeff(lhs(eq1),A1)/(exp((k*x-
  omega*t)*I)),coeff(lhs(eq1),A2)/(exp((k*x-omega*t)*I))]);
6 eq3:=det(Lambda)=0;
7 kk:=solve(eq3,k);
8 # #K1,K2= real, K3,K4=Imaginary, Choose K1=Real, K3=Imaginary for plotting
  k1:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
  Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, eval(kk[1]]));
  k2:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
  Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, eval(kk[2]]));
  k3:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
  Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, eval(kk[3]]));
  k4:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
  Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, eval(kk[4]]));
9 p1:=plot((Re(k1)),omega=0..200000,color=red,axes=boxed);
  p3:=plot((Im(k3)),omega=0..200000,color=green,axes=boxed);
10 display({p1,p3});

```

```

11  ## Take Series
      kk1:=simplify(kk[1]);
      kk3:=simplify(kk[3]);

12  serie_exact_re:=eval(expand(series(kk1^2,omega,7)));
      serie_exact_im:=eval(expand(series(kk3^2,omega,7)));

```

Algorithm ที่ใช้ในการคำนวณจำนวนคลื่นกับความถี่แบบการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับ
 เอลิเมนต์แบบ 2 จุดต่อ

```

บรรทัด คำสั่ง
1  restart;
2  with(linalg): with(plots):
3  N1:=interp([-1,1],[1,0],xi);
      N2:=interp([-1,1],[0,1],xi);
      N:=matrix(2,4,[N1,0,N2,0,0,N1,0,N2]);
4  dN:=matrix(2,4,[0,diff(2/h*N1,xi),0,diff(2/h*N2,xi),diff(2/h*N1,xi),-
      N1,diff(2/h*N2,xi),-N2]);
      C1:=matrix(2,2,[E*J,0,0,G*A*Kappa]);
      C2:=matrix(2,2,[rho*A,0,0,rho*J]);
5  me:=map(int,evalm(transpose(N)*C2*N*h/2),xi=-1..1);
6  kk:=evalm(transpose(dN)*C1*dN*h/2);
7  ke:=matrix(4,4,0);
8  for i from 1 by 1 to 4 do
      for j from 1 by 1 to 4 do
          ke[i,j] := subs(xi=0,eval(kk[i,j]*2));
      end do;
    end do;
9  evalm(ke);

```

```

10  s[3,3]:=s[1,1]: s[4,4]:=s[2,2]:
    s[1,4]:=s[1,2]: s[2,1]:=s[1,2]: s[2,3]:=-s[1,2]: s[3,2]:=-s[1,2]: s[3,4]:=-s[1,2]:
    s[4,1]:=s[1,2]: s[4,3]:=-s[1,2]:
    s[3,1]:=s[1,3]: s[4,2]:=s[2,4]:
11  nelem:=2:
    S0:=matrix(2*nelem+2,2*nelem+2,0): Phi0:=matrix(2*nelem+2,1,0):
    for i from 1 by 2 to 2*nelem do
      for ii from 1 by 1 to 4 do
        for jj from 1 by 1 to 4 do
          S0[ii+i-1,jj+i-1]:=S0[ii+i-1,jj+i-1] + s[ii,jj];
          Phi0[ii+i-1,1]:=phi[ii+i-1,1];
        end do;
      end do;
    end do;
12  S:=evalm(S0): Phi:=evalm(Phi0);
13  SP:=map(collect,evalm(subs(phi[1,1]=A1*exp(I*k*h*(n-
    1)),phi[2,1]=A2*exp(I*k*h*(n-
    1)),phi[3,1]=A1*exp(I*k*h*n),phi[4,1]=A2*exp(I*k*h*n),phi[5,1]=A1*exp(I*k*h*(
    n+1)),phi[6,1]=A2*exp(I*k*h*(n+1)),evalm(S&*Phi))),rho);
14  ST:=map(simplify,evalm(1/2*exp(-I*h*k*n)*submatrix(SP,3..4,1..1)));
15  SC:=evalc(map(simplify,matrix(2,2,[coeff(ST[1,1],A1),coeff(ST[1,1],A2),coeff(ST[2
    ],1),A1),coeff(ST[2,1],A2)])));
16  eq1:=collect(simplify(det(SC)),cos(k*h))=0;
17  s:=(evalm(ke-omega^2*me));
18  sol:=solve(eq1,k);
19  kh1:=subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
    Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, sol[1]);
    kh2:=subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
    Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, sol[2]);

```

```

20  p1:=plot(Re(kh2),omega=0..200000,color=red,axes=BOXED):
      p2:=plot(Im(kh1),omega=0..100000,color=blue,axes=BOXED):
21  display({p1,p2});

```

Algorithm ที่ใช้ในการคำนวณจำนวนคลื่นกับความถี่แบบการเลือกลดอันดับการอินทิเกรตสำหรับ
 เอลิเมนต์แบบ 3 จุดต่อ

บรรทัด	คำสั่ง
1	restart;
2	with(linalg): with(plots):
3	<u>##Shape Functions:</u> N1:=interp([-1,0,1],[1,0,0],xi); N2:=interp([-1,0,1],[0,1,0],xi); N3:=interp([-1,0,1],[0,0,1],xi);
4	N:=matrix(2,6,[N1,0,N2,0,N3,0,0,N1,0,N2,0,N3]); dN:=matrix(2,6,[0,diff(2/h*N1,xi),0,diff(2/h*N2,xi),0,diff(2/h*N3,xi),diff(2/h*N1,xi) ,-N1,diff(2/h*N2,xi),-N2,diff(2/h*N3,xi),-N3]);
5	C1:=matrix(2,2,[E*J,0,0,G*A*Kappa]); C2:=matrix(2,2,[rho*A,0,0,rho*J]);
6	me:=map(int,evalm(transpose(N)*C2*N*h/2),xi=-1..1);
7	kk:=evalm(transpose(dN)*C1*dN*h/2);
8	ke:=matrix(6,6,0); for i from 1 by 1 to 6 do for j from 1 by 1 to 6 do ke[i,j]:=subs(xi=1/sqrt(3),eval(kk[i,j]))+subs(xi=-1/sqrt(3),eval(kk[i,j])); end do; end do;
9	simplify(evalm(ke));

```

10  nelem:=2:
    nnode:=2*nelem+1:
    nn:=nnode-2:
    S0:=matrix(2*nn+4,2*nn+4,0): Phi0:=matrix(2*nn+4,1,0):
    for i from 1 by 4 to 2*nn do
        for ii from 1 by 1 to 6 do
            for jj from 1 by 1 to 6 do
                S0[ii+i-1,jj+i-1]:=S0[ii+i-1,jj+i-1] + s[ii,jj];
                Phi0[ii+i-1,1]:=phi[ii+i-1,1];
            end do;
        end do;
    end do;
11  S:=evalm(S0): Phi:=evalm(Phi0);
12  SP:=map(collect,evalm(subs(phi[1,1]=A1*exp(I*k*h*(n-1)),
    phi[2,1]=A2*exp(I*k*h*(n-1)),phi[3,1]=A3*exp(I*k*h*(n-1/2)),
    phi[4,1]=A4*exp(I*k*h*(n-1/2)),phi[5,1]=A1*exp(I*k*h*(n)),
    phi[6,1]=A2*exp(I*k*h*(n)),phi[7,1]=A3*exp(I*k*h*(n+1/2)),
    phi[8,1]=A4*exp(I*k*h*(n+1/2)),phi[9,1]=A1*exp(I*k*h*(n+1)),
    phi[10,1]=A2*exp(I*k*h*(n+1)),evalm(S&*Phi))),rho);
13  ST56:=map(simplify,evalm((1/2)*exp(-I*h*k*n)*submatrix(SP,5..6,1..1)));
    ST78:=map(simplify,evalm((1/2)*exp(-I*h*k*n)*exp(-
    I*h*k/2)*submatrix(SP,7..8,1..1)));
14  SC:=evalc(map(simplify,matrix(4,4,[coeff(ST56[1,1],A1),coeff(ST56[1,1],A2),
    coeff(ST56[1,1],A3),coeff(ST56[1,1],A4),coeff(ST56[2,1],A1),coeff(ST56[2,1],A2),
    coeff(ST56[2,1],A3),coeff(ST56[2,1],A4),coeff(ST78[1,1],A1),coeff(ST78[1,1],A2),
    coeff(ST78[1,1],A3),coeff(ST78[1,1],A4),coeff(ST78[2,1],A1),coeff(ST78[2,1],A2),
    coeff(ST78[2,1],A3),coeff(ST78[2,1],A4)])));
15  s:=simplify(evalm(ke-(omega^2)*me));
16  eq1:=eval(collect(simplify(det(SC)),cos(k*h))=0):
17  sol:=eval(solve(eq1,k)):

```

```

18 kh1:=subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
    Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, sol[1]);
19 kh2:=subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
    Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, sol[2]);
20 p1:=plot(Re(kh2),omega=0..200000,color=red,axes=BOXED):
    p2:=plot(Im(kh1),omega=0..200000,color=blue,axes=BOXED):
21 display({p1,p2});

```

Algorithm ที่ใช้ในการคำนวณหาพารามิเตอร์การออกแบบสำหรับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อ

บรรทัด	คำสั่ง
1	restart;
2	with(linalg): with(plots):
3	N1:=interp([-1,1],[1,0],xi); N2:=interp([-1,1],[0,1],xi);
4	N:=matrix(2,4,[N1,0,N2,0,0,N1,0,N2]); dN:=matrix(2,4,[0,diff(2/h*N1,xi),0,diff(2/h*N2,xi),diff(2/h*N1,xi),-N1, diff(2/h*N2,xi),-N2]);
5	C1:=matrix(2,2,[E*J,0,0,G*A*Kappa]); C2:=matrix(2,2,[rho*A,0,0,rho*J]);
6	me:=map(int,evalm(transpose(N)*C2*N*h/2),xi=-1..1);
7	ke:=map(expand,map(int,evalm(transpose(dN)*C1*dN*h/2),xi=-1..1));
8	tau1:=c10; tau2:=c20;
9	C3:=matrix(2,2,[tau1*(omega^2*rho*A),0,0,tau2*(-G*A*Kappa+rho*J*omega^2)]);
10	dN_LS:=matrix(2,4,[diff(2/h*N1,xi), 0, diff(2/h*N2,xi), 0, 0, diff(2/h*N1,xi), 0,diff(2/h*N2,xi)]);
11	k_LS:=map(expand,map(int,evalm(transpose(dN_LS)*C3*dN_LS*h/2), xi=-1..1));

```

12  nelem:=2:
    S0:=matrix(2*nelem+2,2*nelem+2,0): Phi0:=matrix(2*nelem+2,1,0):
    for i from 1 by 2 to 2*nelem do
        for ii from 1 by 1 to 4 do
            for jj from 1 by 1 to 4 do
                S0[ii+i-1,jj+i-1]:=S0[ii+i-1,jj+i-1] + s[ii,jj];
                Phi0[ii+i-1,1]:=phi[ii+i-1,1];
            end do;
        end do;
    end do;
13  S:=evalm(S0); Phi:=evalm(Phi0);
14  SP:=map(collect,evalm(subs(phi[1,1]=A1*exp(I*k*h*(n-
    1)),phi[2,1]=A2*exp(I*k*h*(n-
    1)),phi[3,1]=A1*exp(I*k*h*n),phi[4,1]=A2*exp(I*k*h*n),
    phi[5,1]=A1*exp(I*k*h*(n+1)),phi[6,1]=A2*exp(I*k*h*(n+1)),
    evalm(S&*Phi)),rho);
15  ST:=map(simplify,evalm(exp(-I*h*k*n)*submatrix(SP,3..4,1..1)));
16  SC:=evalc(map(simplify,matrix(2,2,[coeff(ST[1,1],A1),coeff(ST[1,1],A2),
    coeff(ST[2,1],A1),coeff(ST[2,1],A2)])));
17  s:=factor(evalm(ke-(omega^2)*me+k_LS));
18  eq1:=simplify(det(SC))=0;
19  sol:=(solve(evala(eq1),k));
20  ###Find the Imaginary and Real for solve for Series ### c10=0, c20=0 ###
    kk1:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
    Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, c10=0, c20=0, eval(sol[1])));
    kk2:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
    Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, c10=0, c20=0, eval(sol[2])));
21  pk1:=plot((Im(kk1)),omega=0..200000,color=red,axes=boxed):
    pk2:=plot((Re(kk2)),omega=0..200000,color=blue,axes=boxed):
22  display({pk1,pk2});

```

```

23  ##Solve for Series from sol[1]=Imaginary, sol[2]=Real
    khim:=simplify(sol[1]);
    khre:=simplify(sol[2]);
24  khim_series:=factor(simplify(series(((khim)^2),omega,3)));
    khre_series:=factor(simplify(series(((khre)^2),omega,3)));
25  coeff_numer_im_omega:=simplify(coeff(khim_series,(omega)));
    coeff_numer_re_omega:=simplify(coeff(khre_series,(omega)));
26  coeff_exact_im_omega:=-sqrt(G^2*Kappa^2*E*J*A*rho)/(G*Kappa*E*J);
    coeff_exact_re_omega:=sqrt(G^2*Kappa^2*E*J*A*rho)/(G*Kappa*E*J);
27  eq3:=coeff_exact_im_omega-coeff_numer_im_omega=0;
    eq4:=coeff_exact_re_omega-coeff_numer_re_omega=0;
28  sol3:=simplify(solve(eq3,c20));
    sol4:=simplify(solve(eq4,c20));
29  coeff_numer_im_omega2:=simplify(subs(c20=(1/12)*h^2,
    coeff(khim_series,(omega^(2)))));
    coeff_numer_re_omega2:=simplify(subs(c20=(1/12)*h^
    2, coeff(khre_series,(omega^(2)))));
30  coeff_exact_im_omega2:=(1/2)*rho/(G*Kappa)+(1/2)*rho/E;
    coeff_exact_re_omega2:=(1/2)*rho/(G*Kappa)+(1/2)*rho/E;
31  eq5:=coeff_exact_im_omega2-coeff_numer_im_omega2=0;
    eq6:=coeff_exact_re_omega2-coeff_numer_re_omega2=0;
32  sol5:=simplify(solve(eq5,c10));
    sol6:=simplify(solve(eq6,c10));

```

หมายเหตุ: ในการคำนวณจำนวนคลื่นกับความถี่ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อ จะใช้คำสั่งเดียวกันกับที่ใช้ใน Algorithm คำนวณหาพารามิเตอร์การออกแบบสำหรับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 2 จุดต่อ โดยเปลี่ยนค่า $\tau_1=c10$; $\tau_2=c20$; ในบรรทัดที่ 8 เป็น $\tau_1=-1/4*h^2$; และ $\tau_2=1/12*h^2$;

Algorithm ที่ใช้ในการคำนวณหาพารามิเตอร์การออกแบบสำหรับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 3 จุดต่อ

```

บรรทัด คำสั่ง
1 restart;
2 with(linalg): with(plots):
3 ##Shape Functions:
   N1:=interp([-1,0,1],[1,0,0],xi);
   N2:=interp([-1,0,1],[0,1,0],xi);
   N3:=interp([-1,0,1],[0,0,1],xi);
4 N:=matrix(2,6,[N1,0,N2,0,N3,0,0,N1,0,N2,0,N3]);
   dN:=matrix(2,6,[0,diff(2/h*N1,xi),0,diff(2/h*N2,xi),0,diff(2/h*N3,xi),
   diff(2/h*N1,xi),-N1,diff(2/h*N2,xi),-N2,diff(2/h*N3,xi),-N3]);
5 C1:=matrix(2,2,[E*J,0,0,G*A*Kappa]);
   C2:=matrix(2,2,[rho*A,0,0,rho*J]);
6 me:=map(int,evalm(transpose(N)*C2*N*h/2),xi=-1..1);
7 ke:=map(expand,map(int,evalm(transpose(dN)*C1*dN*h^2/4),xi=-1..1));
8 tau1:=c10;
   tau2:=c20;
9 C3:=matrix(2,2,[tau1*(omega^2*rho*A),0,0,tau2]);
10 ddN_LS:=matrix(2,6,[diff(diff((4/h^2)*N1,xi),xi), 0, diff(diff((4/h^2)*N2,xi),xi), 0,
   diff(diff((4/h^2)*N3,xi),xi), 0, 0, diff(diff((4/h^2)*N1,xi),xi),0,
   diff(diff((4/h^2)*N2,xi),xi),0,diff(diff((4/h^2)*N3,xi),xi)]);
11 k_LS:=map(expand,map(int,evalm(transpose(ddN_LS)*C3*ddN_LS*h/2),
   xi=-1..1));
12 nelem:=2:
   nnode:=2*nelem+1:
   nn:=nnode-2:
   S0:=matrix(2*nn+4,2*nn+4,0): Phi0:=matrix(2*nn+4,1,0):
   for i from 1 by 4 to 2*nn do
     for ii from 1 by 1 to 6 do

```

```

    for jj from 1 by 1 to 6 do
      S0[ii+i-1,jj+i-1]:=S0[ii+i-1,jj+i-1] + s[ii,jj];
      Phi0[ii+i-1,1]:=phi[ii+i-1,1];
    end do;
  end do;
end do;
13 S:=evalm(S0); Phi:=evalm(Phi0);
14 SP:=map(collect,evalm(subs(phi[1,1]=A1*exp(I*k*h*(n-1)),
  phi[2,1]=A2*exp(I*k*h*(n-1)),phi[3,1]=A3*exp(I*k*h*(n-1/2)),
  phi[4,1]=A4*exp(I*k*h*(n-1/2)),phi[5,1]=A1*exp(I*k*h*(n)),
  phi[6,1]=A2*exp(I*k*h*(n)),phi[7,1]=A3*exp(I*k*h*(n+1/2)),
  phi[8,1]=A4*exp(I*k*h*(n+1/2)),phi[9,1]=A1*exp(I*k*h*(n+1)),
  phi[10,1]=A2*exp(I*k*h*(n+1)),evalm(S&*Phi))),rho):
15 ST56:=map(simplify,evalm((1/2)*exp(-I*h*k*n)*submatrix(SP,5..6,1..1)));
  ST78:=map(simplify,evalm((1/2)*exp(-I*h*k*n)*exp(-I*h*k/2)
  *submatrix(SP,7..8,1..1)));
16 SC:=evalc(map(simplify,matrix(4,4,[coeff(ST56[1,1],A1),coeff(ST56[1,1],A2),
  coeff(ST56[1,1],A3),coeff(ST56[1,1],A4),coeff(ST56[2,1],A1),coeff(ST56[2,1],A2),
  coeff(ST56[2,1],A3),coeff(ST56[2,1],A4),coeff(ST78[1,1],A1),coeff(ST78[1,1],A2),
  coeff(ST78[1,1],A3),coeff(ST78[1,1],A4),coeff(ST78[2,1],A1),coeff(ST78[2,1],A2),
  coeff(ST78[2,1],A3),coeff(ST78[2,1],A4)])));
17 s:=(evalm(ke-(omega^2)*me+k_LS));
18 eq1:=simplify((collect(simplify(det(SC)),cos(k*h))=0)):
19 sol:=solve(eval(eq1),k):
20 ###Find the Imaginary and Real for solve for Series ### c10=0, c20=0 ###
  kh1:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
  Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, c10=0, c20=0, eval(sol[1])));
  kh2:=(subs(G=E/(2*(1+nu)), A=b*t, J=(b*t^3)/12, E=210*10^10, nu=0.29, rho=7.8,
  Kappa=5/6, b=1, t=0.15, h=1, c10=0, c20=0, eval(sol[2])));

```

```

21  pq1:=plot(Re(kh2),omega=0..200000,color=red,axes=BOXED,style=point,
      symbol=cross,numpoints=75,legend="kq2"):
      pq2:=plot(Im(kh1),omega=0..200000,color=blue,axes=BOXED,style=point,
      symbol=cross,numpoints=75,legend="kq1"):
22  display({pq1,pq2});
23  ##Solve for Series from sol[1]=Imaginary, sol[2]=Real
      khim:=simplify(sol[1]):
      khre:=simplify(sol[2]):
24  khim_series:=factor(simplify(series(((khim)^2),omega,7),power,symbolic)):
      khre_series:=factor(simplify(series(((khre)^2),omega,7),power,symbolic)):
25  coeff_numer_im_omega:=simplify(coeff(khim_series,(omega)),power,symbolic);
      coeff_numer_re_omega:=simplify(coeff(khre_series,(omega)),power,symbolic);
26  coeff_exact_im_omega:=simplify(-
      sqrt(G^2*Kappa^2*E*J*A*rho)/(G*Kappa*E*J),power,symbolic);
      coeff_exact_re_omega:=simplify(sqrt(G^2*Kappa^2*E*J*A*rho)/(G*Kappa*E*J),
      power,symbolic);
27  coeff_numer_im_omega2:=simplify(coeff(khim_series,(omega^2)),power,symbolic);
      coeff_numer_re_omega2:=simplify(coeff(khre_series,(omega^2)),power,symbolic);
28  coeff_exact_im_omega2:=(1/2)*rho/(G*Kappa)+(1/2)*rho/E;
      coeff_exact_re_omega2:=(1/2)*rho/(G*Kappa)+(1/2)*rho/E;
29  eq3:=coeff_exact_im_omega2-coeff_numer_im_omega2=0;
      eq4:=coeff_exact_re_omega2-coeff_numer_re_omega2=0;
30  sol3:=expand(simplify(eval(solve(eq3,c20)),power,symbolic));
      sol4:=simplify(eval(solve(eq4,c20)),power,symbolic);
31  coeff_numer_im_omega3:=simplify(subs(c20=sol3,coeff(khim_series,(omega^(3)))));
      coeff_numer_re_omega3:=simplify(subs(c20=sol4,coeff(khre_series,(omega^(3)))));

```

```

32  coeff_exact_im_omega3:= -(1/8)*sqrt(J)*rho^(3/2)*(G^2*Kappa^2-
    2*G*Kappa*E+E^2)/(E^(3/2)*sqrt(A)*G^2*Kappa^2);

    coeff_exact_re_omega3:= (1/8)*sqrt(J)*rho^(3/2)*(G^2*Kappa^2-
    2*G*Kappa*E+E^2)/(E^(3/2)*sqrt(A)*G^2*Kappa^2);

33  eq5:=coeff_exact_im_omega3-coeff_numer_im_omega3=0:
    eq6:=coeff_exact_re_omega3-coeff_numer_re_omega3=0:

34  sol5:=expand(simplify(eval(solve(eq5,c10)),power,symbolic));
    sol6:=simplify(eval(solve(eq6,c10)),power,symbolic);

```

หมายเหตุ: ในการคำนวณจำนวนคลื่นกับความถี่ที่ได้จากวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 3 จุดต่อ จะใช้คำสั่งเดียวกันกับที่ใช้ใน Algorithm คำนวณหาพารามิเตอร์การออกแบบสำหรับวิธีกำลังสองน้อยสุดแบบ 3 จุดต่อ โดยเปลี่ยนค่า $\tau_1=c10$; $\tau_2=c20$; ในบรรทัดที่ 8 เป็น

```

tau1:= -h^4/240;
tau2:= -h^4/720*( G*A*Kappa);

```

Algorithm ที่ใช้ในการคำนวณค่าเคลื่อนตัว

```

บรรทัด คำสั่ง
1  restart:
2  with(linalg): with(plots):
3  #####Properties of Beam and Loading#####
    E:=210*10^10: nu:=0.29: rho:=7.8: Kappa:=5/6: b:=1: t:=0.15: L:=100:
    l:=L/2: F:=2:
    f:=1671:
4  omega:=2*Pi*f;
    J:=(b*t^3)/12;
    A:=b*t;
    G:=E/(2*(1+nu));
5  n:=25;    h:=l/n;

```

```

6  #####Exact Solution#####
   v:=P1*A0*exp(-I*K1*x)+P2*B0*exp(-I*K2*x)-P1*C0*exp(I*K1*x)
   -P2*D0*exp(I*K2*x);
   theta:=A0*exp(-I*K1*x)+B0*exp(-I*K2*x)+C0*exp(I*K1*x)+D0*exp(I*K2*x);
7  P1:=(I*((E*J*K1^2+G*A*Kappa-rho*J*omega^2)/(G*A*Kappa*K1)));
   P2:=(I*((E*J*K2^2+G*A*Kappa-rho*J*omega^2)/(G*A*Kappa*K2)));
8  K1:=evalf((1/2)*sqrt(2)*sqrt(G*Kappa*E*J*(omega*G*Kappa*rho*J+omega*rho*E
   *J+sqrt(omega^2*G^2*Kappa^2*rho^2*J^2-2*omega^2*G*Kappa*rho^2*J^2*E
   +omega^2*rho^2*E^2*J^2+4*G^2*Kappa^2*E*J*A*rho))*omega)/(G*Kappa*E*J
   ));
   K2:=evalf((1/2)*sqrt(2)*sqrt(G*Kappa*E*J*(omega*G*Kappa*rho*J+omega*rho*E
   *J-sqrt(omega^2*G^2*Kappa^2*rho^2*J^2-2*omega^2*G*Kappa*rho^2*J^2*E
   +omega^2*rho^2*E^2*J^2+4*G^2*Kappa^2*E*J*A*rho))*omega)/(G*Kappa*E*J
   ));
9  P1:=eval(P1);
   P2:=eval(P2);
10 ##Apply the boundary conditions to determine the coefficient A0, B0, C0 and D0.
   v0:=simplify(subs(x=0,eval(v)));
   M0:=simplify(subs(x=0,eval(E*J*diff(theta,x))));
   theta1:=simplify(subs(x=1,eval(theta)));
   V1:=simplify(subs(x=1,eval(G*A*Kappa*(theta-diff(v,x))));
11 eqns:={v0=0, M0=0, theta1=0, V1=(-1)};
12 sols:=solve(eqns);
13 ##The exact solution are:
   v:=subs(sols,v);
   theta:=subs(sols,theta);
14 v_ex:=evalc(Re(v));
15 pv:=plot(v_ex,x=0..1,color=black,axes=BOXED,legend="EX",style=line,
   symbol=soliddiamond,linestyle=solid):

```

```

16  display({pv},labels=['Length_of_the_beam','Dispacement']);
17  theta0:=simplify(subs(x=0,eval(theta)));

18  #####Finite Element Solutions using SRI#####
19  ##Stiffness Matrix:
    k_SRI:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
    (1, 3) = -G*A*Kappa/h, (1, 4) = (1/2)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,
    (2, 2) = h*(E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa), (2, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa,
    (2, 4) = h*(-E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa), (3, 1) = -G*A*Kappa/h,
    (3, 2) = -(1/2)*G*A*Kappa, (3, 3) = G*A*Kappa/h, (3, 4) = -(1/2)*G*A*Kappa,
    (4, 1) = (1/2)*G*A*Kappa, (4, 2) = h*(-E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa),
    (4, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa, (4, 4) = h*(E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa)});
20  K_SRI:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(K_SRI):
21  for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do
      for ii from 1 to 4 do
        for jj from 1 to 4 do
          K_SRI[ii+i,jj+i]:=K_SRI[ii+i,jj+i]+k_SRI[ii,jj]:
        od: od: od:
22  ##Mass Matrix:
    m_SRI:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = (1/3)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/6)*h*rho*A,
    (1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (1/3)*h*rho*J, (2, 3) = 0, (2, 4) = (1/6)*h*rho*J,
    (3, 1) = (1/6)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (1/3)*h*rho*A, (3, 4) = 0, (4, 1) = 0,
    (4, 2) = (1/6)*h*rho*J, (4, 3) = 0, (4, 4) = (1/3)*h*rho*J});
23  M_SRI:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(M_SRI):
24  for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do
      for ii from 1 to 4 do
        for jj from 1 to 4 do
          M_SRI[ii+i,jj+i]:=M_SRI[ii+i,jj+i]+m_SRI[ii,jj]:
        od: od: od:

```

```

25  ##Force Vector:
    F:=matrix(2*(n+1),1,0):
    F[2*n+1,1]:=1:
26  ##Nodal Displacement:
    KK_SRI:=evalm(K_SRI-(evalm((omega^2)*M_SRI))):
    KKK_SRI:=submatrix(KK_SRI,2..2*n+1,2..2*n+1):
27  FF:=submatrix(F,2..2*n+1,1..1):
28  d_SRI:=linsolve(KKK_SRI,evalm(FF)):
29  dd_SRI:=augment([0],evalm(transpose(d_SRI)),[0]):
30  p_SRI:=plot([seq([h*i,dd_SRI[1,2*i+1]],i=0..n)],color=black,axes=BOXED,
    legend="SRI2",linestyle=dash):
31  display({pv,p_SRI},labels=['Length_of_the_beam','Dispacement']);

32  #####Finite Element Solution using GGLS#####
33  ##Stiffness Matrix:
    k_TI:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
    (1, 3) = -G*A*Kappa/h, (1, 4) = (1/2)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,
    (2, 2) = (1/3)*h*G*A*Kappa+E*J/h, (2, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa,
    (2, 4) = (1/6)*h*G*A*Kappa-E*J/h, (3, 1) = -G*A*Kappa/h,
    (3, 2) = -(1/2)*G*A*Kappa, (3, 3) = G*A*Kappa/h, (3, 4) = -(1/2)*G*A*Kappa,
    (4, 1) = (1/2)*G*A*Kappa, (4, 2) = (1/6)*h*G*A*Kappa-E*J/h,
    (4, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa, (4, 4) = (1/3)*h*G*A*Kappa+E*J/h});
34  k_LS:=matrix([[1/4*h*omega^2*rho*A, 0, 1/4*h*omega^2*rho*A, 0],
    [0, -1/12*h*G*A*Kappa+1/12*h*rho*J*omega^2, 0,
    1/12*h*G*A*Kappa-1/12*h*rho*J*omega^2], [1/4*h*omega^2*rho*A, 0,
    -1/4*h*omega^2*rho*A, 0], [0, 1/12*h*G*A*Kappa-1/12*h*rho*J*omega^2,
    0, -1/12*h*G*A*Kappa+1/12*h*rho*J*omega^2]]);
35  k_GLS:=evalm(k_TI+k_LS);
36  K_GLS:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(K_GLS):

```

```

37   for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do
      for ii from 1 to 4 do
          for jj from 1 to 4 do
K_GLS[ii+i, jj+i]:=K_GLS[ii+i, jj+i]+k_GLS[ii, jj]:
      od: od: od:
38   ##Mass Matrix:
      m_GLS:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = (1/3)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/6)*h*rho*A,
(1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (1/3)*h*rho*J, (2, 3) = 0, (2, 4) = (1/6)*h*rho*J,
(3, 1) = (1/6)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (1/3)*h*rho*A, (3, 4) = 0, (4, 1) = 0,
(4, 2) = (1/6)*h*rho*J, (4, 3) = 0, (4, 4) = (1/3)*h*rho*J});
39   M_GLS:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(M_GLS):
40   for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do
      for ii from 1 to 4 do
          for jj from 1 to 4 do
M_GLS[ii+i, jj+i]:=M_GLS[ii+i, jj+i]+m_GLS[ii, jj]:
      od: od: od:
41   ##Force Vector:
      F:=matrix(2*(n+1),1,0):
      F[2*n+1,1]:=1:
42   ##Nodal Displacement:
      KK_GLS:=evalm(K_GLS-(evalm((omega^2)*M_GLS))):
      KKK_GLS:=submatrix(KK_GLS,2..2*n+1,2..2*n+1):
43   FF:=submatrix(F,2..2*n+1,1..1):
44   d_GLS:=linsolve(KKK_GLS,evalm(FF)):
45   dd_GLS:=augment([0],evalm(transpose(d_GLS)),[0]):
46   p_GLS:=plot([seq([h*i, dd_GLS[1, 2*i+1]], i=0..n)], color=black, axes=BOXED,
      legend="GGLS2", style=line, linestyle=dashdot):
47   display({pv, p_GLS}, labels=['Length_of_the_beam', 'Displacement']);

48   #####Finite Element Solution using QSRI#####

```

```

49  ##Stiffness Matrix:
kQ_SRI:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (7/3)*G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
(1, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (1, 4) = (2/3)*G*A*Kappa,
(1, 5) = (1/3)*G*A*Kappa/h, (1, 6) = -(1/6)*G*A*Kappa,
(2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa, (2, 2) = (1/9)*(21*E*J+G*A*Kappa*h^2)/h,
(2, 3) = -(2/3)*G*A*Kappa, (2, 4) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h,
(2, 5) = (1/6)*G*A*Kappa, (2, 6) = (1/18)*(6*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h,
(3, 1) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (3, 2) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(3, 3) = (16/3)*G*A*Kappa/h, (3, 4) = 0, (3, 5) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(3, 6) = (2/3)*G*A*Kappa, (4, 1) = (2/3)*G*A*Kappa,
(4, 2) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (4, 3) = 0,
(4, 4) = (4/9)*(12*E*J+G*A*Kappa*h^2)/h, (4, 5) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(4, 6) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (5, 1) = (1/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 2) = (1/6)*G*A*Kappa, (5, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 4) = -(2/3)*G*A*Kappa, (5, 5) = (7/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 6) = -(1/2)*G*A*Kappa, (6, 1) = -(1/6)*G*A*Kappa,
(6, 2) = (1/18)*(6*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (6, 3) = (2/3)*G*A*Kappa,
(6, 4) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (6, 5) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(6, 6) = (1/9)*(21*E*J+G*A*Kappa*h^2)/h});

50  KQ_SRI:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evalm(KQ_SRI):
51  for i from 0 by 4 to 4*n-4 do
      for ii from 1 to 6 do
          for jj from 1 to 6 do
              KQ_SRI[ii+i, jj+i]:=KQ_SRI[ii+i, jj+i]+kQ_SRI[ii, jj]:
          od: od: od:
52  ##Mass Matrix:
mq:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (2/15)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/15)*h*rho*A,
(1, 4) = 0, (1, 5) = -(1/30)*h*rho*A, (1, 6) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (2/15)*h*rho*J,
(2, 3) = 0, (2, 4) = (1/15)*h*rho*J, (2, 5) = 0, (2, 6) = -(1/30)*h*rho*J,

```

```

(3, 1) = (1/15)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (8/15)*h*rho*A, (3, 4) = 0,
(3, 5) = (1/15)*h*rho*A, (3, 6) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (1/15)*h*rho*J, (4, 3) = 0,
(4, 4) = (8/15)*h*rho*J, (4, 5) = 0, (4, 6) = (1/15)*h*rho*J, (5, 1) = -(1/30)*h*rho*A,
(5, 2) = 0, (5, 3) = (1/15)*h*rho*A, (5, 4) = 0, (5, 5) = (2/15)*h*rho*A, (5, 6) = 0,
(6, 1) = 0, (6, 2) = -(1/30)*h*rho*J, (6, 3) = 0, (6, 4) = (1/15)*h*rho*J, (6, 5) = 0,
(6, 6) = (2/15)*h*rho*J});
53 MQ:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evalm(MQ):
54 for i from 0 by 4 to 4*n-4 do
    for ii from 1 to 6 do
        for jj from 1 to 6 do
            MQ[ii+i,jj+i]:=MQ[ii+i,jj+i]+mq[ii,jj]:
        od: od: od:
55 ###Force Vector:
    F:=matrix((4*n+2),1,0):
    F[(4*n+1),1]:=1:
56 ###Nodal Displacement:
    KK_QSRI:=evalm(KQ_SRI-(evalm((omega^2)*MQ))):
    KKK_QSRI:=submatrix(KK_QSRI,2..4*n+1,2..4*n+1):
57 FF:=submatrix(F,2..4*n+1,1..1):
58 d_QSRI:=linsolve(KKK_QSRI,evalm(FF)):
59 dd_QSRI:=augment([0],evalm(transpose(d_QSRI)),[0]):
60 p_QSRI:=plot([seq([h*i,dd_QSRI[1,4*i+1]],i=0..n)],color=black,axes=BOXED,legen
    d="SRI3",style=line,linestyle=dot):
61 display({pv,p_QSRI},labels=['Length_of_the_beam','Dispacement']);

62 #####Finite Element Solution using QLS#####
63 ###Stiffness Matrix:
    kq:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (7/3)*G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
    (1, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (1, 4) = (2/3)*G*A*Kappa,
    (1, 5) = (1/3)*G*A*Kappa/h, (1, 6) = -(1/6)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,

```

```

(2, 2) = (2/15)*h*G*A*Kappa+(7/3)*E*J/h, (2, 3) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(2, 4) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (2, 5) = (1/6)*G*A*Kappa,
(2, 6) = -(1/30)*h*G*A*Kappa+(1/3)*E*J/h, (3, 1) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(3, 2) = -(2/3)*G*A*Kappa, (3, 3) = (16/3)*G*A*Kappa/h, (3, 4) = 0,
(3, 5) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (3, 6) = (2/3)*G*A*Kappa, (4, 1) = (2/3)*G*A*Kappa,
(4, 2) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (4, 3) = 0,
(4, 4) = (8/15)*h*G*A*Kappa+(16/3)*E*J/h, (4, 5) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(4, 6) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (5, 1) = (1/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 2) = (1/6)*G*A*Kappa, (5, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 4) = -(2/3)*G*A*Kappa, (5, 5) = (7/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 6) = -(1/2)*G*A*Kappa, (6, 1) = -(1/6)*G*A*Kappa,
(6, 2) = -(1/30)*h*G*A*Kappa+(1/3)*E*J/h, (6, 3) = (2/3)*G*A*Kappa,
(6, 4) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (6, 5) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(6, 6) = (2/15)*h*G*A*Kappa+(7/3)*E*J/h});
64 kqls:= Matrix(6, 6, {(1, 1) = -(1/15)*h*omega^2*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) =
(2/15)*h*omega^2*rho*A, (1, 4) = 0, (1, 5) = -(1/15)*h*omega^2*rho*A, (1, 6) = 0,
(2, 1) = 0, (2, 2) = -(1/45)*h*G*A*Kappa, (2, 3) = 0, (2, 4) = (2/45)*h*G*A*Kappa,
(2, 5) = 0, (2, 6) = -(1/45)*h*G*A*Kappa, (3, 1) = (2/15)*h*omega^2*rho*A, (3, 2)
= 0, (3, 3) = -(4/15)*h*omega^2*rho*A, (3, 4) = 0, (3, 5) =
(2/15)*h*omega^2*rho*A, (3, 6) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (2/45)*h*G*A*Kappa, (4, 3)
= 0, (4, 4) = -(4/45)*h*G*A*Kappa, (4, 5) = 0, (4, 6) = (2/45)*h*G*A*Kappa, (5, 1)
= -(1/15)*h*omega^2*rho*A, (5, 2) = 0, (5, 3) = (2/15)*h*omega^2*rho*A, (5, 4) =
0, (5, 5) = -(1/15)*h*omega^2*rho*A, (5, 6) = 0, (6, 1) = 0, (6, 2) = -
(1/45)*h*G*A*Kappa, (6, 3) = 0, (6, 4) = (2/45)*h*G*A*Kappa, (6, 5) = 0, (6, 6) = -
(1/45)*h*G*A*Kappa});
65 kQ_LS:=evalm(kq+kqls);
66 KQ_LS:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evalm(KQ_LS):
67 for i from 0 by 4 to 4*(n-1) do
    for ii from 1 to 6 do
        for jj from 1 to 6 do

```

```

KQ_LS[ii+i, jj+i]:=KQ_LS[ii+i, jj+i]+kQ_LS[ii, jj]:
od: od: od:
68  ###Mass Matrix:
mq:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (2/15)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/15)*h*rho*A,
(1, 4) = 0, (1, 5) = -(1/30)*h*rho*A, (1, 6) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (2/15)*h*rho*J,
(2, 3) = 0, (2, 4) = (1/15)*h*rho*J, (2, 5) = 0, (2, 6) = -(1/30)*h*rho*J,
(3, 1) = (1/15)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (8/15)*h*rho*A, (3, 4) = 0,
(3, 5) = (1/15)*h*rho*A, (3, 6) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (1/15)*h*rho*J, (4, 3) = 0,
(4, 4) = (8/15)*h*rho*J, (4, 5) = 0, (4, 6) = (1/15)*h*rho*J, (5, 1) = -(1/30)*h*rho*A,
(5, 2) = 0, (5, 3) = (1/15)*h*rho*A, (5, 4) = 0, (5, 5) = (2/15)*h*rho*A, (5, 6) = 0,
(6, 1) = 0, (6, 2) = -(1/30)*h*rho*J, (6, 3) = 0, (6, 4) = (1/15)*h*rho*J, (6, 5) = 0,
(6, 6) = (2/15)*h*rho*J});
69  MQ:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evalm(MQ):
70  for i from 0 by 4 to 4*(n-1) do
      for ii from 1 to 6 do
          for jj from 1 to 6 do
MQ[ii+i, jj+i]:=MQ[ii+i, jj+i]+mq[ii, jj]:
od: od: od:
71  ###Force Vector:
F:=matrix((4*n+2),1,0):
F[(4*n+1),1]:=1:
72  ###Nodal Displacement:
KK_QLS:=evalm(KQ_LS-(evalm((omega^2)*MQ))):
KKK_QLS:=submatrix(KK_QLS,2..4*n+1,2..4*n+1):
73  FF:=submatrix(F,2..4*n+1,1..1):
74  d_QLS:=linsolve(KKK_QLS,evalm(FF)):
75  dd_QLS:=augment([0],evalm(transpose(d_QLS)),[0]):
76  p_QLS:=plot([seq([h*i, dd_QLS[1, 4*i+1]], i=0..n)], color=black, axes=BOXED,
legend="GGLS3", style=line, linestyle=longdash):

```

```

77 display({pv,p_QLS},labels=['Length_of_the_beam','Displacement']);
78 display({pv,p_SRI,p_GLS,p_QLS,p_QSRI},
labels=['Length_of_the_beam','Displacement']);

```

หมายเหตุ: จาก Algorithm คำนวณหาค่าการเคลื่อนตัวนี้สามารถกำหนด ความถี่ (f) และ จำนวนเอลิเมนต์ (n) โดยทำการเปลี่ยนค่า f ในบรรทัดที่ 3 และค่า n ในบรรทัดที่ 5

Algorithm ที่ใช้ในการคำนวณหาค่าความคลาดเคลื่อนของ L_2

```

บรรทัด คำสั่ง
1 restart:
2 with(linalg): with(plots):
3 #####Properties of Beam and Loading#####
E:=210*10^10: nu:=0.29: rho:=7.8: Kappa:=5/6: b:=1: t:=0.15:
L:=100: l:=L/2: F:=2: f:=1671:
4 omega:=2*Pi*f:
J:=(b*t^3)/12;
A:=b*t;
G:=E/(2*(1+nu));
5 mcase:=5:
6 #####Exact Solution#####
v:=P1*A0*exp(-I*K1*x)+P2*B0*exp(-I*K2*x)-P1*C0*exp(I*K1*x)
-P2*D0*exp(I*K2*x);
theta:=A0*exp(-I*K1*x)+B0*exp(-I*K2*x)+C0*exp(I*K1*x)+D0*exp(I*K2*x);
7 P1:=(I*((E*J*K1^2+G*A*Kappa-rho*J*omega^2)/(G*A*Kappa*K1)));
P2:=(I*((E*J*K2^2+G*A*Kappa-rho*J*omega^2)/(G*A*Kappa*K2)));

```

```

8      K1:=evalf((1/2)*sqrt(2)*sqrt(G*Kappa*E*J*(omega*G*Kappa*rho*J+omega*rho*E
      *J+sqrt(omega^2*G^2*Kappa^2*rho^2*J^2-
      2*omega^2*G*Kappa*rho^2*J^2*E+omega^2*rho^2*E^2*J^2+4*G^2*Kappa^2*E
      *J*A*rho))*omega)/(G*Kappa*E*J));
      K2:=evalf((1/2)*sqrt(2)*sqrt(G*Kappa*E*J*(omega*G*Kappa*rho*J+omega*rho*E
      *J-sqrt(omega^2*G^2*Kappa^2*rho^2*J^2-
      2*omega^2*G*Kappa*rho^2*J^2*E+omega^2*rho^2*E^2*J^2+4*G^2*Kappa^2*E
      *J*A*rho))*omega)/(G*Kappa*E*J));

9      P1:=eval(P1);
      P2:=eval(P2);

10     ##Apply the boundary conditions to determine the coefficient A0, B0, C0 and D0.
      v0:=simplify(subs(x=0,eval(v)));
      M0:=simplify(subs(x=0,eval(E*J*diff(theta,x))));
      theta1:=simplify(subs(x=1,eval(theta)));
      V1:=simplify(subs(x=1,eval(G*A*Kappa*(theta-diff(v,x))));

11     eqns:={v0=0, M0=0, theta1=0, V1=(-1)};

12     sols:=solve(eqns);

13     ##The exact solution are
      v:=subs(sols,v);
      theta:=subs(sols,theta);

14     v_ex:=evalc(Re(v));

15     norm_v_ex:=Re(sqrt(int(v_ex^2,x=0..1)));

16     #####Finite Element Solutions using SRI#####
17     for mn from 1 to mcase do
          n:=25*mn;
          h:=1/n;

      ## Stiffness Matrix:

```

```

k_SRI:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
(1, 3) = -G*A*Kappa/h, (1, 4) = (1/2)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,
(2, 2) = h*(E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa), (2, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(2, 4) = h*(-E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa), (3, 1) = -G*A*Kappa/h,
(3, 2) = -(1/2)*G*A*Kappa, (3, 3) = G*A*Kappa/h, (3, 4) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(4, 1) = (1/2)*G*A*Kappa, (4, 2) = h*(-E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa),
(4, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa, (4, 4) = h*(E*J/h^2+(1/4)*G*A*Kappa)});

```

```

K_SRI:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(K_SRI):

```

```

for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do

```

```

    for ii from 1 to 4 do

```

```

        for jj from 1 to 4 do

```

```

            K_SRI[ii+i,jj+i]:=K_SRI[ii+i,jj+i]+k_SRI[ii,jj]:

```

```

        od: od: od:

```

```

## Mass Matrix:

```

```

m_SRI:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = (1/3)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/6)*h*rho*A,
(1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (1/3)*h*rho*J, (2, 3) = 0, (2, 4) = (1/6)*h*rho*J,
(3, 1) = (1/6)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (1/3)*h*rho*A, (3, 4) = 0, (4, 1) = 0,
(4, 2) = (1/6)*h*rho*J, (4, 3) = 0, (4, 4) = (1/3)*h*rho*J});

```

```

M_SRI:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(M_SRI):

```

```

for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do

```

```

    for ii from 1 to 4 do

```

```

        for jj from 1 to 4 do

```

```

            M_SRI[ii+i,jj+i]:=M_SRI[ii+i,jj+i]+m_SRI[ii,jj]:

```

```

        od: od: od:

```

```

## Force Vector:
F:=matrix(2*(n+1),1,0):
F[2*n+1,1]:=1:

## Nodal Displacement:
KK_SRI:=evalm(K_SRI-(evalm((omega^2)*M_SRI))):
KKK_SRI:=submatrix(KK_SRI,2..2*n+1,2..2*n+1):
FF:=submatrix(F,2..2*n+1,1..1):
d_SRI:=linsolve(KKK_SRI,evalm(FF)):
dd_SRI:=augment([0],evalm(transpose(d_SRI)),[0]):

## Displacement Approximation:
vh_SRI:=matrix(n,1,0):
for i from 0 to n-1 do
  x1:=i*h:
  x2:=(i+1)*h:
  N1:=(x2-x)/h:
  N2:=(x-x1)/h:

  vh_SRI[i+1,1]:=N1*dd_SRI[1,2*i+1]+N2*dd_SRI[1,2*i+3]:
od:

## Error in L2 Norm:
L2_SRI[mn]:=0:
for i from 0 to n-1 do
  xe1:=i*h:
  xe2:=(i+1)*h:

  L2_SRI[mn]:=L2_SRI[mn]+Re(int((vh_SRI[i+1,1]-v_ex)^2,x=xe1..xe2)):
od:

```

```

eL2_SRI[nn]:=sqrt(L2_SRI[nn]):

## Normalized an Error:
NE_SRI[nn]:=simplify(eval(100*eL2_SRI[nn]/norm_v_ex)):
NN[nn]:=n:

od:

18 p_SRI:=loglogplot([seq([NN[i],NE_SRI[i]],i=1..mcase)],color=black,axes=BOXED,1
legend="SRI2",style=line,linestyle=solid):

19 #####Finite Element Solutions using GGLS#####
20 for nn from 1 to mcase do
    n:=25*nn:
    h:=1/n:

## Stiffness Matrix:
k_TI:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
(1, 3) = -G*A*Kappa/h, (1, 4) = (1/2)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,
(2, 2) = (1/3)*h*G*A*Kappa+E*J/h, (2, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(2, 4) = (1/6)*h*G*A*Kappa-E*J/h, (3, 1) = -G*A*Kappa/h,
(3, 2) = -(1/2)*G*A*Kappa, (3, 3) = G*A*Kappa/h, (3, 4) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(4, 1) = (1/2)*G*A*Kappa, (4, 2) = (1/6)*h*G*A*Kappa-E*J/h,
(4, 3) = -(1/2)*G*A*Kappa, (4, 4) = (1/3)*h*G*A*Kappa+E*J/h});

k_LS:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = -(1/4)*h*omega^2*rho*A, (1, 2) = 0,
(1, 3) = (1/4)*h*omega^2*rho*A, (1, 4) = 0, (2, 1) = 0,
(2, 2) = -(1/12)*h*G*A*Kappa+(1/12)*h*rho*J*omega^2, (2, 3) = 0,
(2, 4) = (1/12)*h*G*A*Kappa-(1/12)*h*rho*J*omega^2,
(3, 1) = (1/4)*h*omega^2*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = -(1/4)*h*omega^2*rho*A,

```

```
(3, 4) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (1/12)*h*G*A*Kappa-(1/12)*h*rho*J*omega^2,
(4, 3) = 0, (4, 4) = -(1/12)*h*G*A*Kappa+(1/12)*h*rho*J*omega^2});
```

```
k_GLS:=evalm(k_TI+k_LS);
```

```
K_GLS:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(K_GLS):
```

```
for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do
```

```
  for ii from 1 to 4 do
```

```
    for jj from 1 to 4 do
```

```
      K_GLS[ii+i, jj+i]:=K_GLS[ii+i, jj+i]+k_GLS[ii, jj]:
```

```
    od: od: od:
```

```
## Mass Matrix:
```

```
m_GLS:=Matrix(4, 4, {(1, 1) = (1/3)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/6)*h*rho*A,
(1, 4) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (1/3)*h*rho*J, (2, 3) = 0, (2, 4) = (1/6)*h*rho*J,
(3, 1) = (1/6)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (1/3)*h*rho*A, (3, 4) = 0, (4, 1) = 0,
(4, 2) = (1/6)*h*rho*J, (4, 3) = 0, (4, 4) = (1/3)*h*rho*J});
```

```
M_GLS:=matrix(2*(n+1),2*(n+1),0): evalm(M_GLS):
```

```
for i from 0 by 2 to 2*(n-1) do
```

```
  for ii from 1 to 4 do
```

```
    for jj from 1 to 4 do
```

```
      M_GLS[ii+i, jj+i]:=M_GLS[ii+i, jj+i]+m_GLS[ii, jj]:
```

```
    od: od: od:
```

```
## Force Vector:
```

```
F:=matrix(2*(n+1),1,0):
```

```
F[2*n+1,1]:=1:
```

```

## Nodal Displacement:
KK_GLS:=evalm(K_GLS-(evalm((omega^2)*M_GLS)));
KKK_GLS:=submatrix(KK_GLS,2..2*n+1,2..2*n+1):
FF:=submatrix(F,2..2*n+1,1..1):
d_GLS:=linsolve(KKK_GLS,evalm(FF)):
dd_GLS:=augment([0],evalm(transpose(d_GLS)),[0]):

## Displacement Approximation
vh_GLS:=matrix(n,1,0):
for i from 0 to n-1 do
  x1:=i*h:
  x2:=(i+1)*h:
  N1:=(x2-x)/h:
  N2:=(x-x1)/h:

  vh_GLS[i+1,1]:=N1*dd_GLS[1,2*i+1]+N2*dd_GLS[1,2*i+3]:
od:

## Error in L2 Norm:
L2_GLS[nn]:=0:
for i from 0 to n-1 do
  xe1:=i*h:
  xe2:=(i+1)*h:

  L2_GLS[nn]:=L2_GLS[nn]+Re(int((vh_GLS[i+1,1]-v_ex)^2,x=xe1..xe2)):
od:
eL2_GLS[nn]:=sqrt(L2_GLS[nn]):

## Normalized an Error:
NE_GLS[nn]:=simplify(eval(100*eL2_GLS[nn]/norm_v_ex)):

```

```

NN[nn]:=n:

od:
21 p_GLS:=loglogplot([seq([NN[i],NE_GLS[i]],i=1..mcase)],color=black,
axes=BOXED,legend="GGLS2",style=line,linestyle=dashdot):

22 #####Finite Element Solutions using QSRI#####
23 for mn from 1 to mcase do
    n:=25*mn:
    h:=l/n:
    ## Stiffness Matrix:
    kQ_SRI:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (7/3)*G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
(1, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (1, 4) = (2/3)*G*A*Kappa,
(1, 5) = (1/3)*G*A*Kappa/h, (1, 6) = -(1/6)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,
(2, 2) = (1/9)*(21*E*J+G*A*Kappa*h^2)/h, (2, 3) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(2, 4) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (2, 5) = (1/6)*G*A*Kappa,
(2, 6) = (1/18)*(6*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (3, 1) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(3, 2) = -(2/3)*G*A*Kappa, (3, 3) = (16/3)*G*A*Kappa/h, (3, 4) = 0,
(3, 5) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (3, 6) = (2/3)*G*A*Kappa, (4, 1) = (2/3)*G*A*Kappa,
(4, 2) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (4, 3) = 0, (4, 4) =
(4/9)*(12*E*J+G*A*Kappa*h^2)/h, (4, 5) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(4, 6) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (5, 1) = (1/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 2) = (1/6)*G*A*Kappa, (5, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 4) = -(2/3)*G*A*Kappa, (5, 5) = (7/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 6) = -(1/2)*G*A*Kappa, (6, 1) = -(1/6)*G*A*Kappa,
(6, 2) = (1/18)*(6*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (6, 3) = (2/3)*G*A*Kappa,
(6, 4) = -(1/9)*(24*E*J-G*A*Kappa*h^2)/h, (6, 5) = -(1/2)*G*A*Kappa,
(6, 6) = (1/9)*(21*E*J+G*A*Kappa*h^2)/h});

KQ_SRI:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evam(KQ_SRI):

```

```

for i from 0 by 4 to 4*(n-1) do
  for ii from 1 to 6 do
    for jj from 1 to 6 do
      KQ_SRI[ii+i,jj+i]:=KQ_SRI[ii+i,jj+i]+kQ_SRI[ii,jj]:
    od: od: od:

## Mass Matrix:

mq:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (2/15)*h*rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/15)*h*rho*A,
(1, 4) = 0, (1, 5) = -(1/30)*h*rho*A, (1, 6) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (2/15)*h*rho*J,
(2, 3) = 0, (2, 4) = (1/15)*h*rho*J, (2, 5) = 0, (2, 6) = -(1/30)*h*rho*J,
(3, 1) = (1/15)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (8/15)*h*rho*A, (3, 4) = 0,
(3, 5) = (1/15)*h*rho*A, (3, 6) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (1/15)*h*rho*J, (4, 3) = 0,
(4, 4) = (8/15)*h*rho*J, (4, 5) = 0, (4, 6) = (1/15)*h*rho*J, (5, 1) = -(1/30)*h*rho*A,
(5, 2) = 0, (5, 3) = (1/15)*h*rho*A, (5, 4) = 0, (5, 5) = (2/15)*h*rho*A, (5, 6) = 0,
(6, 1) = 0, (6, 2) = -(1/30)*h*rho*J, (6, 3) = 0, (6, 4) = (1/15)*h*rho*J, (6, 5) = 0,
(6, 6) = (2/15)*h*rho*J});
MQ:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evalm(MQ):

for i from 0 by 4 to 4*(n-1) do
  for ii from 1 to 6 do
    for jj from 1 to 6 do
      MQ[ii+i,jj+i]:=MQ[ii+i,jj+i]+mq[ii,jj]:
    od: od: od:

## Force Vector:
F:=matrix((4*n+2),1,0):
F[(4*n+1),1]:=1:

```

```

## Nodal Displacement:
KK_QSRI:=evalm(KQ_SRI-(evalm((omega^2)*MQ)));
KKK_QSRI:=submatrix(KK_QSRI,2..4*n+1,2..4*n+1);
FF:=submatrix(F,2..4*n+1,1..1);
d_QSRI:=linsolve(KKK_QSRI,evalm(FF));
dd_QSRI:=augment([0],evalm(transpose(d_QSRI)),[0]);

## Displacement Approximation

vh_QSRI:=matrix(n,1,0);
for i from 0 to n-1 do
  x1:=i*h;
  x2:=(i+(1/2))*h;
  x3:=(i+1)*h;
  N1:=(x-x2)*(x-x3)/((x1-x2)*(x1-x3));
  N2:=(x-x1)*(x-x3)/((x2-x1)*(x2-x3));
  N3:=(x-x1)*(x-x2)/((x3-x1)*(x3-x2));
  vh_QSRI[i+1,1]:=N1*dd_QSRI[1,4*i+1]+N2*dd_QSRI[1,4*i+3]+N3*dd_QSRI[1,4
*i+5];
od;

## Error in L2 Norm:

L2_QSRI[nn]:=0;
for i from 0 to n-1 do
  xe1:=i*h;
  xe2:=(i+1)*h;
  L2_QSRI[nn]:=L2_QSRI[nn]+Re(int((vh_QSRI[i+1,1]-v_ex)^2,x=xe1..xe2));
od;

```

```

## Normalized an Error:
eL2_QSRI[nn]:=sqrt(L2_QSRI[nn]):
NE_QSRI[nn]:=simplify(eval(100*eL2_QSRI[nn]/norm_v_ex)):
NN[nn]:=n:

od:
24 p_QSRI:=loglogplot([seq([NN[i],NE_QSRI[i]],i=1..mcase)],color=black,
axes=BOXED,legend="SRI3",style=line,linestyle=dot):

25 #####Finite Element Solutions using QLS#####
26 for nn from 1 to mcase do
    n:=25*nn:
    h:=1/n:

## Stiffness Matrix:

kq:=Matrix(6, 6, {(1, 1) = (7/3)*G*A*Kappa/h, (1, 2) = (1/2)*G*A*Kappa,
(1, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (1, 4) = (2/3)*G*A*Kappa,
(1, 5) = (1/3)*G*A*Kappa/h, (1, 6) = -(1/6)*G*A*Kappa, (2, 1) = (1/2)*G*A*Kappa,
(2, 2) = (2/15)*h*G*A*Kappa+(7/3)*E*J/h, (2, 3) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(2, 4) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (2, 5) = (1/6)*G*A*Kappa,
(2, 6) = -(1/30)*h*G*A*Kappa+(1/3)*E*J/h, (3, 1) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(3, 2) = -(2/3)*G*A*Kappa, (3, 3) = (16/3)*G*A*Kappa/h, (3, 4) = 0,
(3, 5) = -(8/3)*G*A*Kappa/h, (3, 6) = (2/3)*G*A*Kappa, (4, 1) = (2/3)*G*A*Kappa,
(4, 2) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (4, 3) = 0,
(4, 4) = (8/15)*h*G*A*Kappa+(16/3)*E*J/h, (4, 5) = -(2/3)*G*A*Kappa,
(4, 6) = (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (5, 1) = (1/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 2) = (1/6)*G*A*Kappa, (5, 3) = -(8/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 4) = -(2/3)*G*A*Kappa, (5, 5) = (7/3)*G*A*Kappa/h,
(5, 6) = -(1/2)*G*A*Kappa, (6, 1) = -(1/6)*G*A*Kappa,

```

$$\begin{aligned} (6, 2) &= -(1/30)*h*G*A*Kappa+(1/3)*E*J/h, (6, 3) = (2/3)*G*A*Kappa, \\ (6, 4) &= (1/15)*h*G*A*Kappa-(8/3)*E*J/h, (6, 5) = -(1/2)*G*A*Kappa, \\ (6, 6) &= (2/15)*h*G*A*Kappa+(7/3)*E*J/h); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} kqls:= & \text{Matrix}(6, 6, \{(1, 1) = -(1/15)*h*\omega^2*\rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = \\ & (2/15)*h*\omega^2*\rho*A, (1, 4) = 0, (1, 5) = -(1/15)*h*\omega^2*\rho*A, (1, 6) = 0, \\ & (2, 1) = 0, (2, 2) = -(1/45)*h*G*A*Kappa, (2, 3) = 0, (2, 4) = (2/45)*h*G*A*Kappa, \\ & (2, 5) = 0, (2, 6) = -(1/45)*h*G*A*Kappa, (3, 1) = (2/15)*h*\omega^2*\rho*A, (3, 2) \\ & = 0, (3, 3) = -(4/15)*h*\omega^2*\rho*A, (3, 4) = 0, (3, 5) = \\ & (2/15)*h*\omega^2*\rho*A, (3, 6) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (2/45)*h*G*A*Kappa, (4, 3) \\ & = 0, (4, 4) = -(4/45)*h*G*A*Kappa, (4, 5) = 0, (4, 6) = (2/45)*h*G*A*Kappa, (5, 1) \\ & = -(1/15)*h*\omega^2*\rho*A, (5, 2) = 0, (5, 3) = (2/15)*h*\omega^2*\rho*A, (5, 4) = \\ & 0, (5, 5) = -(1/15)*h*\omega^2*\rho*A, (5, 6) = 0, (6, 1) = 0, (6, 2) = - \\ & (1/45)*h*G*A*Kappa, (6, 3) = 0, (6, 4) = (2/45)*h*G*A*Kappa, (6, 5) = 0, (6, 6) = - \\ & (1/45)*h*G*A*Kappa\}); \end{aligned}$$

$$kQ_LS:=\text{evalm}(kq+kqls);$$

$$KQ_LS:=\text{matrix}((4*n+2),(4*n+2),0): \text{evalm}(KQ_LS):$$

for i from 0 by 4 to 4*(n-1) do

 for ii from 1 to 6 do

 for jj from 1 to 6 do

$$KQ_LS[ii+i, jj+i]:=KQ_LS[ii+i, jj+i]+kQ_LS[ii, jj]:$$

od: od: od:

Mass Matrix:

$$\begin{aligned} mq:= & \text{Matrix}(6, 6, \{(1, 1) = (2/15)*h*\rho*A, (1, 2) = 0, (1, 3) = (1/15)*h*\rho*A, \\ & (1, 4) = 0, (1, 5) = -(1/30)*h*\rho*A, (1, 6) = 0, (2, 1) = 0, (2, 2) = (2/15)*h*\rho*J, \\ & (2, 3) = 0, (2, 4) = (1/15)*h*\rho*J, (2, 5) = 0, (2, 6) = -(1/30)*h*\rho*J, \end{aligned}$$

```

(3, 1) = (1/15)*h*rho*A, (3, 2) = 0, (3, 3) = (8/15)*h*rho*A, (3, 4) = 0,
(3, 5) = (1/15)*h*rho*A, (3, 6) = 0, (4, 1) = 0, (4, 2) = (1/15)*h*rho*J,
(4, 3) = 0, (4, 4) = (8/15)*h*rho*J, (4, 5) = 0, (4, 6) = (1/15)*h*rho*J,
(5, 1) = -(1/30)*h*rho*A, (5, 2) = 0, (5, 3) = (1/15)*h*rho*A, (5, 4) = 0,
(5, 5) = (2/15)*h*rho*A, (5, 6) = 0, (6, 1) = 0, (6, 2) = -(1/30)*h*rho*J,
(6, 3) = 0, (6, 4) = (1/15)*h*rho*J, (6, 5) = 0, (6, 6) = (2/15)*h*rho*J});

```

```

MQ:=matrix((4*n+2),(4*n+2),0): evalm(MQ):

```

```

for i from 0 by 4 to 4*(n-1) do

```

```

    for ii from 1 to 6 do

```

```

        for jj from 1 to 6 do

```

```

            MQ[ii+i,jj+i]:=MQ[ii+i,jj+i]+mq[ii,jj]:

```

```

        od: od: od:

```

```

### Force Vector:

```

```

F:=matrix((4*n+2),1,0):

```

```

F[(4*n+1),1]:=1:

```

```

### Nodal Displacement:

```

```

KK_QLS:=evalm(KQ_LS-(evalm((omega^2)*MQ))):

```

```

KKK_QLS:=submatrix(KK_QLS,2..4*n+1,2..4*n+1):

```

```

FF:=submatrix(F,2..4*n+1,1..1):

```

```

d_QLS:=linsolve(KKK_QLS,evalm(FF)):

```

```

dd_QLS:=augment([0],evalm(transpose(d_QLS)),[0]):

```

```

#### Displacement Approximation

```

```

vh_QLS:=matrix(n,1,0):

```

```

for i from 0 to n-1 do

```

```

    x1:=i*h;

```

```

x2:=(i+(1/2))*h;
x3:=(i+1)*h;

N1:=(x-x2)*(x-x3)/((x1-x2)*(x1-x3));
N2:=(x-x1)*(x-x3)/((x2-x1)*(x2-x3));
N3:=(x-x1)*(x-x2)/((x3-x1)*(x3-x2));
vh_QLS[i+1,1]:=N1*dd_QLS[1,4*i+1]+N2*dd_QLS[1,4*i+3]+N3*dd_QLS[1,4*i+5]:
od:

### Error in L2 Norm:
L2_QLS[nn]:=0:
for i from 0 to n-1 do
  xe1:=i*h:
  xe2:=(i+1)*h:
L2_QLS[nn]:=L2_QLS[nn]+Re(int((vh_QLS[i+1,1]-v_ex)^2,x=xe1..xe2)):
od:
eL2_QLS[nn]:=sqrt(L2_QLS[nn]):

### Normalized an Error:
NE_QLS[nn]:=simplify(eval(100*eL2_QLS[nn]/norm_v_ex)):
NN[nn]:=n:
od:

27  p_QLS:=loglogplot([seq([NN[i],NE_QLS[i]],i=1..mcase)],color=black,axes=BOXED,leg
end="GGLS3",style=line,linestyle=longdash,view=[25..125,0.01..1000]):

28  display({p_SRI,p_GLS,p_QSRI,p_QLS},
labels=['Number_of_Elements_of_half_beam','Normalized_L2-Error']);

```

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นางสาวรัตนสุดา แนวเงินดี
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 13 กันยายน 2525
สถานที่เกิด	ขอนแก่น
ประวัติการศึกษา	วศ.บ. (วิศวกรรมการบินและอวกาศยาน) มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ (2547)
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-