



บทที่ 4

รูปแบบทางคณิตศาสตร์

1. บทนำ

การแก้ปัญหาการจัดตารางการผลิตของโรงงานกรณีศึกษา เพื่อให้เกิดต้นทุนรวมซึ่งประกอบด้วยต้นทุนการผลิต ต้นทุนวัสดุคงคลังและต้นทุนการเตรียมงานที่น้อยที่สุด ซึ่งเป็นตารางการผลิตที่ดีที่สุด โดยหาได้จากการพัฒนารูปแบบทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีความเหมาะสมสำหรับการแก้ปัญหาขนาดเล็กเท่านั้น มีจำนวนตัวแปร พารามิเตอร์และสมการหรืออสมการข้อจำกัดมีความซับซ้อนไม่มากนัก โดยในบทนี้ได้เสนอการพัฒนารูปแบบทางคณิตศาสตร์ โดยมีองค์ประกอบต่างๆ ได้แก่ สมมติฐานของปัญหา พารามิเตอร์ ตัวแปรตัดสินใจ สมการเป้าหมาย สมการหรืออสมการข้อจำกัดของปัญหา และตัวอย่างการคำนวณผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ได้พัฒนาขึ้น

2. รูปแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการจัดตารางการผลิตชิ้นส่วนฮาร์ดดิสก์ไดรฟ์

2.1 สมมติฐานของปัญหา (Assumptions)

สมมติฐานของปัญหาการจัดตารางการผลิต ได้ถูกสร้างขึ้นเพื่อให้เกิดความสอดคล้องกับรูปแบบปัญหาของโรงงานกรณีศึกษา สมมติฐานของปัญหามีรายละเอียดดังต่อไปนี้

2.1.1 เครื่องจักรที่ใช้ผลิตชิ้นส่วนฮาร์ดดิสก์ไดรฟ์ของโรงงานกรณีศึกษาเป็นเครื่องจักรแบบขนานที่ไม่เกี่ยวข้องกัน

2.1.2 เวลาเตรียมงานของแต่ละเครื่องจักรและลำดับงานก่อนหลังไม่เป็นอิสระต่อกัน

2.1.3 กำหนดให้มีการแบ่งคาบเวลาการผลิตและรอบการสั่งผลิต

2.1.4 กำหนดให้การผลิตในคาบเวลาใด ๆ จะทำการผลิตได้เพียง 1 ชนิดผลิตภัณฑ์ และต้องผลิตเต็มคาบเวลาการผลิต เพื่อป้องกันความสับสนระหว่างฝ่ายวางแผนและฝ่ายปฏิบัติงาน

2.1.5 กำหนดให้ในแต่ละรอบการผลิต เครื่องจักรทุกเครื่องต้องผลิตอย่างต่อเนื่อง ห้ามเว้นว่างระหว่างการผลิต

2.1.6 กำหนดให้ปริมาณวัตถุดิบที่ใช้ในการผลิตมีเพียงพอต่อความต้องการ

2.1.7 กำหนดให้ไม่มีปัจจัยรบกวนระหว่างการดำเนินการผลิต เช่น เครื่องจักรเสีย ไฟดับ พนักงานป่วยกะทันหัน เป็นต้น

สำนักงานคณะกรรมการวิจัยแห่งชาติ	
ห้องสมุดงานวิจัย	
วันที่.....	25 ก.ค. 2555
เลขทะเบียน.....	247523
เลขเรียกหนังสือ.....	

2.2 พารามิเตอร์ (Parameters)

พารามิเตอร์ที่ใช้ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดตารางการผลิต มีดังนี้

i	ดัชนีแสดงชนิดผลิตภัณฑ์ มีค่าตั้งแต่ 0, 1, ..., N ($i=0$ คือ ไม่มีการผลิต)
j	ดัชนีแสดงชนิดผลิตภัณฑ์ มีค่าตั้งแต่ 0, 1, ..., N ($j=0$ คือ ไม่มีการผลิต)
k	ดัชนีแสดงเครื่องจักร มีค่าตั้งแต่ 1, 2, ..., P
l	ดัชนีแสดงคาบเวลาผลิต มีค่าตั้งแต่ 1, 2, ..., S
m	ดัชนีแสดงรอบการผลิต มีค่าตั้งแต่ 1, 2, ..., W
Sc	ค่าใช้จ่ายการเตรียมงาน (บาทต่อหน่วยเวลา)
Pc	ค่าใช้จ่ายการผลิต (บาทต่อคาบเวลาผลิต)
Hc	ค่าใช้จ่ายพัสดุคงคลัง (บาทต่อหน่วยผลิตภัณฑ์ต่อรอบการผลิต)
$Uph_{j,k}$	กำลังการผลิตผลิตภัณฑ์ j บนเครื่องจักร k (หน่วยผลิตภัณฑ์ต่อหน่วยเวลา)
Pt	เวลาการผลิตในแต่ละคาบเวลาผลิต (หน่วยเวลา)
$St_{i,j,k}$	เวลาเตรียมงานของเครื่องจักร k เมื่อเปลี่ยนจากผลิตภัณฑ์ i ไปผลิต ผลิตภัณฑ์ j (หน่วยเวลา)
$D_{j,m}$	ปริมาณความต้องการผลิตภัณฑ์ j ในรอบการผลิต m (หน่วยผลิตภัณฑ์)
Oh_j	ปริมาณผลิตภัณฑ์ j ที่มีอยู่ในคลังสินค้าก่อนเริ่มการผลิต (หน่วยผลิตภัณฑ์)
Ip_j	ค่าสมมติซึ่งมีค่าเป็น 0 ถ้า j มีค่าเท่ากับ 1 นอกนั้นเป็น 1
Ps_k	ผลิตภัณฑ์ที่เครื่องจักร k ดำเนินการผลิตก่อนเริ่มการผลิต

จากพารามิเตอร์ข้างต้น จะสามารถระบุขนาดของปัญหาการจัดตารางการผลิต ได้ดังนี้
ปัญหาการจัดตารางการผลิตซึ่งประกอบด้วย $n+1$ ชนิดผลิตภัณฑ์ ผลิตบน p เครื่องจักร วางแผน
 w รอบการผลิต โดยในแต่ละรอบการผลิตประกอบด้วย s คาบเวลาการผลิต

2.3 ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variables)

ตัวแปรตัดสินใจที่ใช้ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดตารางการผลิต คือ

$X_{i,j,k,l,m}$	เป็น 1 เมื่อเครื่องจักร k ผลิตผลิตภัณฑ์ j ในคาบเวลา l ในรอบการผลิต m และในคาบเวลาที่ผ่านมาผลิตผลิตภัณฑ์ i นอกนั้นเป็น 0
$Inv_{j,m}$	ปริมาณพัสดุคงคลังของผลิตภัณฑ์ j ในรอบการผลิต m (หน่วยผลิตภัณฑ์)



2.4 สมการเป้าหมาย (Objective function)

สมการเป้าหมายของรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดตารางการผลิต คือ

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & Pc \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^W X_{i,j,k,l,m} + Sc \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^S \sum_{m=1}^W St_{i,j,k} X_{i,j,k,l,m} \\ & + Hc \sum_{j=0}^N Inv \end{aligned} \quad (1)$$

สมการ (1) คือสมการเป้าหมายของต้นทุนรวมทั้งหมดในการจัดตารางการผลิต ประกอบด้วยต้นทุนการผลิต ต้นทุนการเตรียมงานและต้นทุนพัสดุดังกล่าวโดยมีเป้าหมายให้ต้นทุนรวมทั้งหมดต่ำที่สุด

2.5 สมการและอสมการข้อจำกัด (Constraints)

สมการและอสมการข้อจำกัดของรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดตารางการผลิต มีดังนี้

2.5.1 สมการกำหนดค่าปริมาณพัสดุดังกล่าว

$$\begin{aligned} Inv_{j,1} = Oh_j + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^S (Pt - St_{i,j,k}) Uph_{j,k} X_{i,j,k,l,1} - D_{j,1} \\ ; \forall j, m=1 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} Inv_{j,m} = Inv_{j,m-1} + \sum_{i=0}^N \sum_{k=1}^P \sum_{l=1}^S (Pt - St_{i,j,k}) Uph_{j,k} X_{i,j,k,l,m} - D_{j,m} \\ ; \forall j, m=2,3,...,W \end{aligned} \quad (3)$$

สมการ (2) และ (3) หมายถึง ปริมาณพัสดุดังกล่าวคือผลรวมของปริมาณพัสดุดังกล่าวในรอบการผลิตก่อนหน้าและปริมาณผลิตภัณฑ์ที่ผลิตได้ในรอบการผลิตปัจจุบันลบด้วยปริมาณความต้องการผลิตภัณฑ์ โดยพัสดุดังกล่าวของรอบการผลิตแรก คือ Oh_j

2.5.2 อสมการกำหนดค่าปริมาณพัสดุดังกล่าวให้มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0

$$Inv_{j,m} \geq 0 \quad ; \forall j, \forall m \quad (4)$$

สมการ (4) หมายถึง ปริมาณพัสดุดังกล่าวต้องมีค่าเป็นบวก นั่นคือสามารถตอบสนองความต้องการของลูกค้าได้

2.5.3 สมการกำหนดลักษณะการผลิต

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N X_{i,j,k,l,m} = 1 \quad ; \quad \forall k, \forall l, \forall m \quad (5)$$

สมการ (5) หมายถึง บนเครื่องจักร k คาบเวลา l รอบการผลิต m รูปแบบทางคณิตศาสตร์สามารถเลือกลักษณะการผลิตได้เพียง 1 ลักษณะเท่านั้น (เปลี่ยนจากการผลิตชนิดผลิตภัณฑ์ i ในคาบเวลาก่อนหน้า มาผลิตชนิดผลิตภัณฑ์ j ในคาบเวลา l)

2.5.4 สมการกำหนดความสัมพันธ์ระหว่างคาบเวลาก่อนหน้ากับคาบเวลาปัจจุบัน

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N jX_{i,j,k,l-1,m} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N iX_{i,j,k,l,m} \quad ; \quad \forall k, \forall m, l = 2, 3, \dots, S \quad (6)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N jX_{i,j,k,S,m-1} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N iX_{i,j,k,1,m} \quad ; \quad \forall k, m = 2, 3, \dots, W \quad (7)$$

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N iX_{i,j,k,1,1} = Ps_k \quad ; \quad \forall k, l=1, m=1 \quad (8)$$

สมการ (6), (7) และ (8) หมายถึง ค่า i คาบเวลาผลิตปัจจุบันก็คือค่า j ของคาบเวลาก่อนหน้านั้นเอง โดยค่า i ของคาบเวลาที่ 1 ของรอบการผลิต l ก็คือค่า j ของคาบเวลาสุดท้าย (คาบเวลา S) ของรอบการผลิต $l-1$ และค่า i ของคาบเวลาที่ 1 ของรอบการผลิตที่ 1 คือค่า Ps_k

2.5.5 อสมการกำหนดให้การผลิตเป็นไปอย่างต่อเนื่อง

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N Ip_j X_{i,j,k,l-1,m} \geq \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N Ip_j X_{i,j,k,l,m} \quad ; \quad \forall k, \forall m, l = 2, 3, \dots, S \quad (9)$$

สมการ (9) หมายถึง บนทุกเครื่องจักรและทุกรอบการผลิต ไม่สามารถมีคาบเวลาการผลิตว่าง (คาบเวลาที่ไม่มีการผลิต) แทรกกลางระหว่างคาบเวลาการผลิตที่มีการผลิต

2.5.6 กำหนดให้ตัวแปรตัดสินใจ $X_{i,j,k,l,m}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1

$$X_{i,j,k,l,m} \in \{0,1\} \quad ; \quad \forall i, \forall j, \forall k, \forall l, \forall m \quad (10)$$

สมการ (10) หมายถึง $X_{i,j,k,l,m}$ ทุกตัวมีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น

3. ตัวอย่างการคำนวณและผลลัพธ์จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์

จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่กล่าวมาแล้ว สามารถหาผลเฉลยด้วยโปรแกรม LINGO 11 ซึ่งเป็นโปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการหาผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด (Optimization Software) โดยในหัวข้อนี้ได้มีการตั้งโจทย์ปัญหาการจัดตารางการผลิตซึ่งประกอบด้วย 3 ชนิดผลิตภัณฑ์ 3 เครื่องจักรแบบขนาน 5 คาบเวลาการผลิต และวางแผน 3 รอบการผลิต โดยรายละเอียดของค่าพารามิเตอร์ และผลลัพธ์การคำนวณ มีดังนี้

3.1 พารามิเตอร์

กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆของปัญหาการจัดตารางการผลิต ดังนี้

- จำนวนชนิดผลิตภัณฑ์ (N) = 3 ชนิดผลิตภัณฑ์
- จำนวนเครื่องจักร (P) = 3 เครื่องจักร
- จำนวนคาบเวลาผลิต (S) = 5 คาบเวลา
- จำนวนรอบการผลิต (W) = 3 รอบ
- ค่าใช้จ่ายการเตรียมงาน (Sc) = 2,500 บาทต่อชั่วโมง
- ค่าใช้จ่ายการผลิต (Pc) = 15,000 บาทต่อคาบเวลาผลิต
- ค่าใช้จ่ายวัสดุคงคลัง (Hc) = 100 บาทต่อพื้นที่ขึ้นต่อรอบการผลิต
- เวลาการผลิตในแต่ละคาบเวลาผลิต (Pt) = 7 ชั่วโมง
- เวลาเตรียมงาน ($St_{i,j,k}$) แสดงรายละเอียดในตารางที่ 4.1
- กำลังการผลิต ($Up_{h,k}$) แสดงรายละเอียดในตารางที่ 4.2
- ปริมาณความต้องการ ($D_{j,m}$) แสดงรายละเอียดในตารางที่ 4.3
- เซตของปริมาณผลิตภัณฑ์ที่มีอยู่ในคลังสินค้า (Oh_j) = {0, 0, 0, 0} พื้นที่
- เซตลักษณะการผลิตเริ่มต้น (Ps_k) = {0, 1, 2}
- เซตค่าสมมติ (Ip_j) = {0, 1, 1, 1}



ตารางที่ 4.1 กำลังการผลิต (พันชิ้นต่อชั่วโมง)

ผลิตภัณฑ์ (j)	เครื่องจักร (k)		
	1	2	3
1	4.1	4.6	3.1
2	4.8	4.8	4.3
3	2.7	2.7	2.7

ตารางที่ 4.2 เวลาเตรียมงาน (ชั่วโมงต่อการเตรียมงาน)

ผลิตภัณฑ์ (i)	ผลิตภัณฑ์ (j)	เครื่องจักร (k)		
		1	2	3
0	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	2	0	0	0
0	3	0	0	0
1	0	0	0	0
1	1	0	0	0
1	2	1.7	2.4	2.3
1	3	2	2.3	1.3
2	0	0	0	0
2	1	2.5	1.1	2.1
2	2	0	0	0
2	3	1.6	2	2
3	0	0	0	0
3	1	1.4	1.1	1.2
3	2	1.7	1.3	2.5
3	3	0	0	0

ตารางที่ 4.4 ค่าตัวแปรตัดสินใจจากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ (ต่อ)

k	i	j	m = 1					m = 2					m = 3				
			1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1
3	2	3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
3	3	3	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0

ตารางที่ 4.5 ตารางการผลิตจากวิธีรูปแบบทางคณิตศาสตร์ จากตารางที่ 4.4

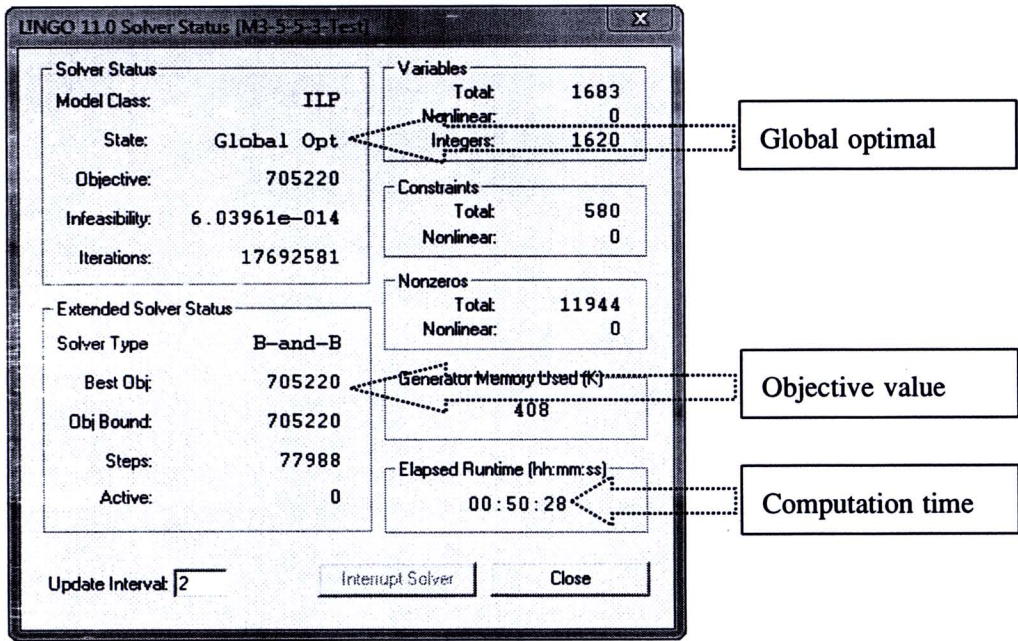
เครื่องจักร (k)	รอบผลิต 1					รอบผลิต 2					รอบผลิต 3				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2

ตารางที่ 4.6 เวลาเตรียมงานที่ใช้ในการจัดตารางการผลิตจากตัวอย่าง

เครื่องจักร (<i>k</i>)	รอบผลิต 1					รอบผลิต 2					รอบผลิต 3				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	-	-	-	1.7	-	-	-	-	-	-	-	1.6	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	2.0	-	-	-	-	-	-	2.5	-	-	-	-	-

ตารางที่ 4.7 ปริมาณพัสดุคงคลังในแต่ละรอบการผลิตจากตัวอย่าง

ผลิตภัณฑ์ (<i>j</i>)	รอบการผลิต (<i>m</i>)		
	1	2	3
1	7.10	18.10	9.10
2	19.24	6.59	0.69
3	11.30	16.90	18.18



ภาพที่ 4.1 ส่วนการแสดงผลการทำงานของโปรแกรม LINGO 11