

บทที่ 4

ผลการวิจัยและอภิปรายผล

การวิจัยครั้งนี้เป็นกรณีศึกษา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ โดยการใช้ ตัวนำเสนอที่หลากหลาย เป็นเครื่องมือการเรียนรู้ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele กลุ่มเป้าหมายเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนสุวรรณภูมิจังหวัดหนองบัวลำภู จำนวน 12 คน โดยได้จากการเลือกแบบเจาะจงและตามความสมัครใจของนักเรียน ซึ่งคัดเลือกมาโดยมีลักษณะเป็นคนชอบคิด ชอบพูด ชอบแสดงออก สนใจอยากรู้ อยากเห็น มีความกระตือรือร้น กล้าแสดงความคิดเห็น ให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมและสามารถทำงานร่วมกันได้ ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิจัยโดยแบ่งเป็นหัวข้อย่อยๆ ดังต่อไปนี้

1. ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย
2. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้
3. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้ วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้
4. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้
5. ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้
6. ผลการเปรียบเทียบการพัฒนาระดับของมโนคติทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้
7. อภิปรายผล

ข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายของการศึกษาค้นคว้าครั้งนี้ เป็นนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนสุวรรณคูหาพิทยาสรรค์ สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาหนองบัวลำภูเขต 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 12 คน เพื่อให้การศึกษาค้นคว้าครั้งนี้เป็นไปตามวัตถุประสงค์ผู้วิจัยได้เลือกนักเรียนแบบเจาะจงและแบ่งนักเรียนออกเป็น 4 กลุ่ม กลุ่มละ 3 คน เพื่อให้เป็นกลุ่มเป้าหมายในการศึกษาเชิงลึก ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยได้เสนอข้อมูลพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มเป้าหมายในแต่ละกลุ่มดังนี้

1. นักเรียนกลุ่มที่ 1 เป็นนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

1.1 แพรว มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน มีความร่าเริงแจ่มใส มีน้ำใจกับเพื่อนๆ มีความรับผิดชอบและเป็นที่ยอมรับของเพื่อนๆ

1.2 เน็ก มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น เป็นคนค่อนข้างคิดเร็ว มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน เป็นคนที่พูดมากและอารมณ์ขันที่สุด

1.3 เมย์ มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน จะเป็นคนที่พูดน้อยและคอยฟังเพื่อนเวลาเพื่อนอธิบายและแนะนำเพื่อนเวลาเพื่อนทำผิด

2. นักเรียนกลุ่มที่ 2 เป็นนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

2.1 มิว มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์และชีววิทยา มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน จะเป็นคนที่พูดน้อยและเป็นคนที่ค่อนข้างมีเหตุและมีผล มีความรอบคอบ

2.2 นิล มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดี เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน และช่วยอธิบายให้เพื่อนฟังเวลาเพื่อนไม่เข้าใจ

2.3 ฟา มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับปานกลาง มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน ชอบอ่านนิยาย

3. นักเรียนกลุ่มที่ 3 เป็นนักเรียนที่ใช้ The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

1.1 ดี มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน จะเป็นคนที่พูดน้อย และเป็นคนที่ค่อนข้างมีเหตุและมีผล มีความรอบคอบ คอยสรุปเวลาที่เพื่อนแสดงความคิดเห็นและแก้ปัญหา

1.2 ฟาง มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น เป็นคนค่อนข้างคิดเร็ว มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน เป็นคนที่พูดมากและสามารถอธิบายให้เพื่อนฟังเวลาเพื่อนไม่เข้าใจได้

1.3 ฝน มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น เป็นคนค่อนข้างคิดเร็ว มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน เป็นคนที่พูดมาก

4. นักเรียนกลุ่มที่ 4 เป็นนักเรียนที่ใช้ The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ จำนวน 3 คน ซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกในกลุ่ม ดังนี้

2.1 วช มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น เป็นคนค่อนข้างคิดเร็ว มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน จะเป็นคนที่พูดน้อย และเป็นคนที่ค่อนข้างมีเหตุและมีผล มีความรอบคอบ คอยสรุปเวลาที่เพื่อนแสดงความคิดเห็นและแก้ปัญหา

2.2 ตาล มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น เป็นคนค่อนข้างคิดเร็ว มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน จะเป็นคนที่พูดมาก

2.3 เพริน มีนิสัยชอบเรียนคณิตศาสตร์และเคมี มีผลสัมฤทธิ์วิชาคณิตศาสตร์ในระดับดีมาก เป็นนักเรียนเรียนดี มีความตั้งใจในการทำงาน กล้าพูด กล้าแสดงความคิดเห็น เป็นคนค่อนข้างคิดเร็ว มีความสนใจและกระตือรือร้นในการเรียน เป็นคนที่พูดมาก

ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริง เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

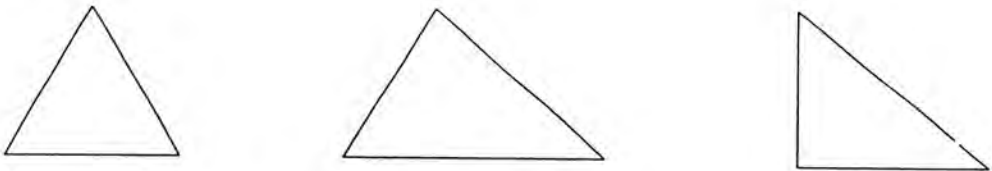
ผลการวิเคราะห์โปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎี ของ van Hiele ได้จัดระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ออกเป็น 5 ระดับ คือ การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) การวิเคราะห์หรือการพรรณารูปลักษณะ (Analysis, description) การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) และการเป็นนามธรรม (Rigor)

1.1 การแก้ปัญหาในกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง มาตรฐานสามเหลี่ยมคล้ายกันและ

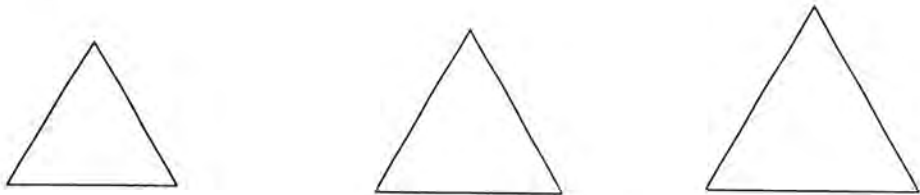
ในกิจกรรมที่ 1 นี้ต้องการให้นักเรียนบอกถึงความหมายของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันและบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่ ดังนั้นผู้วิจัยได้เสนอแนวคิดและกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้วัตถุจริง เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ ดังนี้

คำชี้แจง

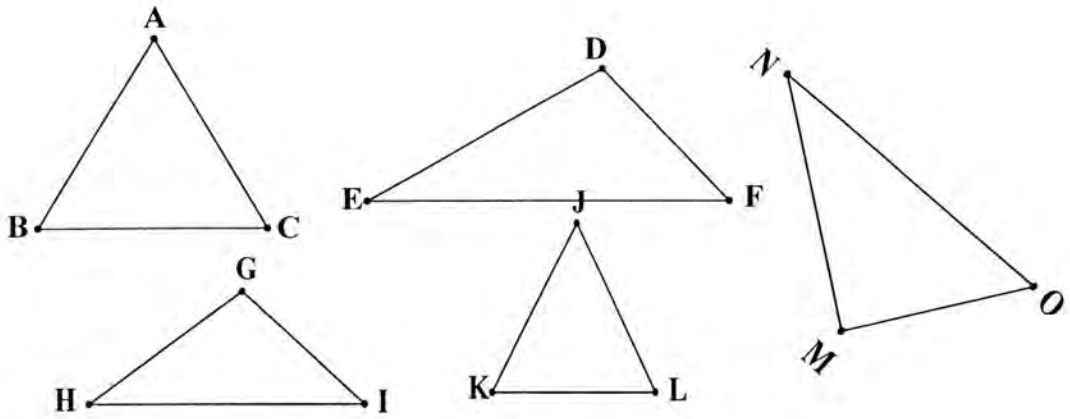
1. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



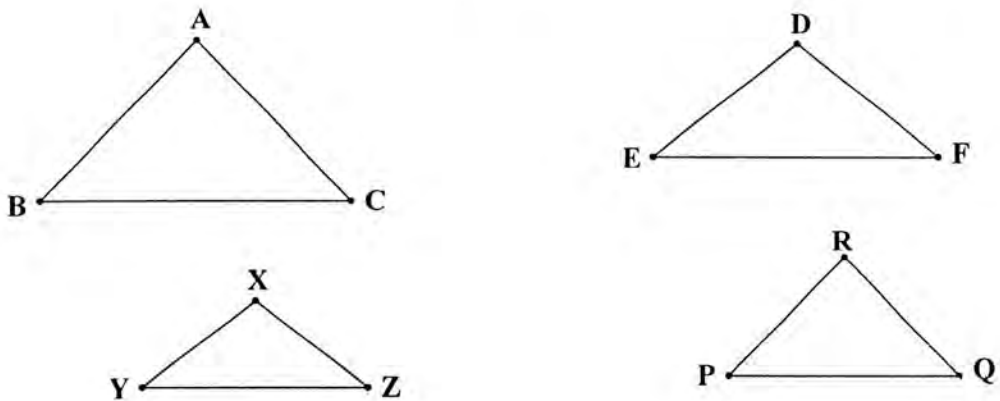
2. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



3. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด



4. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด



5. จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

6. สรุปสิ่งที่ได้จากกิจกรรมในข้อที่ 1 ถึง 5

7. สามเหลี่ยมคล้าย หมายถึง.....

นักเรียนกลุ่มที่ 1 (แพรว, เมย์, เน็ก)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 3 ระดับ โดยมีตัวอย่างของรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)

ผู้วิจัยได้นำเอารูปสามเหลี่ยมที่เป็นวัตถุจริงที่เตรียมเอาไว้มาให้ให้นักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เน็กได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูป โดยแพรวและเน็กได้เสนอว่าไม่เป็นรูปร่างแบบเดียวกันเพราะว่ารูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 ได้นำเอารูปสามเหลี่ยมที่เป็นวัตถุจริงมาเปรียบเทียบกับกันจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่ารูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

เน็ก : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

แพรว : ไม่ เพราะเป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

เน็ก : สามเหลี่ยมใดๆ สามเหลี่ยมด้านเท่า (ชี้และวาดรูปพร้อมทั้งบอกให้แพรวเขียน)

เมย์ : อันนี้เป็นอันนี้ (ชี้รูปวัตถุจริงกับรูปในโจทย์)

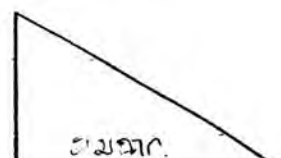
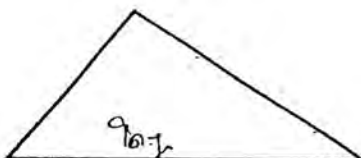
แพรว : มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่เพราะเหตุใด

เน็ก : สามเหลี่ยมทั้งสามรูปมีด้านยาวในแต่ละด้านไม่เท่ากัน รูปที่ 1 มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

เมย์ : รูปที่ 2 มีด้านแต่ละด้านยาวไม่เท่ากัน

แพรว : รูปที่ 3 มีมุมเป็นมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



ไม่ เพราะ รูปที่ 1 ด้านทุกด้านยาวเท่ากัน

รูปที่ 2 ด้านแต่ละด้านยาวไม่เท่ากัน

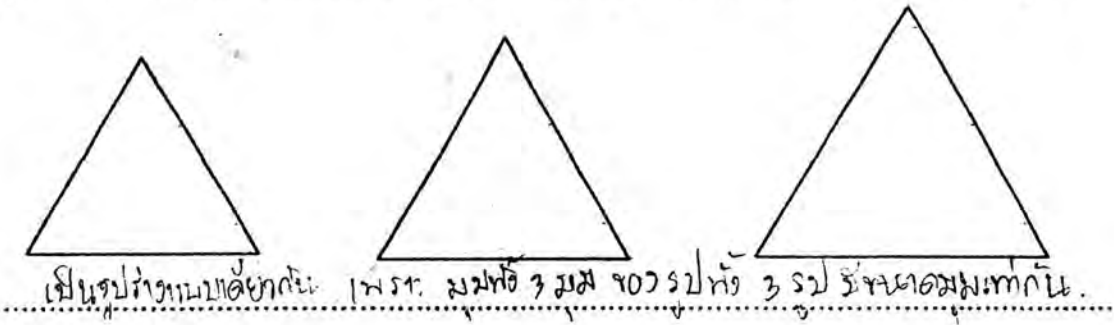
รูปที่ 3 มีมุมเป็นมุมฉาก

ภาพที่ 4 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกัน

ในกิจกรรมข้อ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนบอกว่ารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เมื่อแพรวอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนักเรียนทั้ง 3 คนได้นำเอาวัตถุจริงมาพิจารณา แล้วเน็กและเมย์ก็เสนอขึ้นว่ามีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีขนาดเท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

- แพรว : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
- แพรว : มีรูปร่างแบบเดียวกัน
- เน็ก : มีด้านยาวเท่ากัน
- เมย์ : จะบอกว่ามีด้านยาวเท่ากันไม่ได้
- แพรว : มีมุมทั้ง 3 มุม เท่ากัน
- เมย์ : เป็นรูปร่างแบบเดียวกัน
- เน็ก : มุมทั้ง 3 มุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามรูปมีขนาดเท่ากัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



ภาพที่ 5 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่านักเรียนจะดูรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมจากวัตถุจริงและในโจทย์ โดยนักเรียนจะแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมออกตามชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว และจากการอาศัยการวัดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมเข้ามาช่วยในการแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเป็นการให้ความหมายของชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการมองเห็นและความรู้ที่ได้นี้เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ โดยที่นักเรียนได้นำความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้แสดงให้เห็นถึงระดับการรับรู้จากการมองเห็นที่นักเรียนนำเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา

เรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตในระดับการรับรู้และการมองเห็น (Visualization or Recognition)

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

หลังจากที่นักเรียนได้ใช้ความรู้ในระดับการรับรู้จากการมองเห็นในเรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม ทำให้นักเรียนสามารถนำเอาความรู้นั้นมาช่วยในการวิเคราะห์รูปลักษณะของรูปสามเหลี่ยมเพื่อช่วยในการแยกกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน โดยนักเรียนจะนำเอารูปสามเหลี่ยมที่เป็นวัตถุจริงมาวางซ้อนทับกันดูว่ารูปใดมีขนาดของมุมเท่ากันและนักเรียนทั้ง 3 คนก็สรุปร่วมกันว่ารูปสามเหลี่ยม HGI และ EDF มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมีขนาดของมุมเท่ากัน และรูปสามเหลี่ยม KJL และ BAC มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน โดยเมย์และเน็กได้ร่วมกันทดลองวัดขนาดของมุมดูว่ามีขนาดเท่ากันทั้งสามมุมหรือไม่ ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด

เมย์ : รูปสามเหลี่ยม HGI

แพรว : และ EDP มีขนาดเท่ากัน

เมย์ : เขาถามถึงรูปร่าง มีรูปร่างเหมือนกันหรือไม่

แพรว : มีรูปร่างแบบเดียวกัน

เน็ก : เพราะขนาดของมุมเท่ากัน

แพรว : เพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

เมย์ : เพราะมีมุมเท่ากัน และ

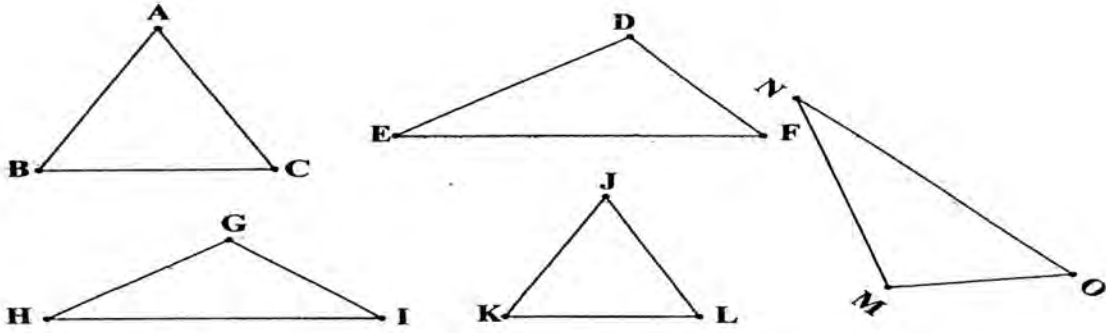
แพรว : รูปสามเหลี่ยม KJL และ BAC มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะ...

เมย์ : เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน วัตถุสี(วัตถุมุม)

แพรว : เท่าไหม

เน็ก : เท่า

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด



- รูปสามเหลี่ยม HAI และ EDF มีรูปร่างเหมือนกัน เพราะมีมุมที่เท่ากัน
- รูปสามเหลี่ยม KJL และ BAC มีรูปร่างเหมือนกัน เพราะมีด้านเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

ภาพที่ 6 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

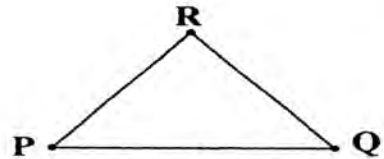
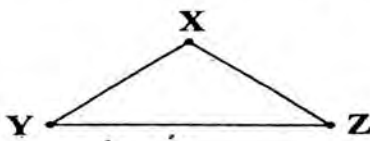
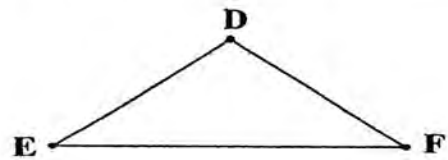
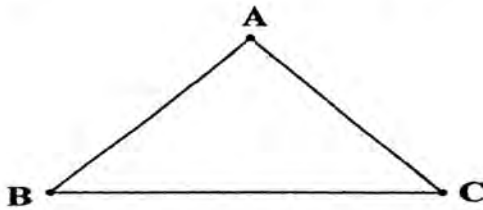
หลังจากที่นักเรียนได้จัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันแล้วในกิจกรรมข้อที่ 4 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน เมื่อแพรวอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วเมย์ได้เสนอแนะว่ารูปสามเหลี่ยม BAC และรูปสามเหลี่ยม PRQ มีลักษณะคล้ายกันเพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกันแต่เน็กได้แย้งว่าเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วนักเรียนทั้ง 3 คนจึงได้ตรวจสอบโดยการวัดความยาวของด้านทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยมจนได้ข้อสรุปว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและแพรวได้ถามว่ามีรูปไหนอีกเมย์และเน็กได้เสนอว่ารูปสามเหลี่ยม EDP และ YXZ เพราะมีมุมขนาดเท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

- แพรว : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด
- เมย์ : อันนี้กับอันนี้ และอันนี้กับอันนี้ (ชี้ที่รูป)
- แพรว : BAC และสามเหลี่ยม PRQ มีลักษณะคล้ายกันเพราะอะไร
- เมย์ : เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน
- เน็ก : เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว
- แพรว : จัวยังไง
- เมย์ : อันนี้ 10.5 , 10 , 15 (ชี้ที่รูป)
- แพรว : ถ้าหน้าจั่วด้านข้างจะยาวฐานจะสั้น
- เมย์ : ไม่มีอันไหนเท่ากัน
- แพรว : รูปไหนอีก
- เมย์ : EDP และ YXZ เพราะมีลักษณะคล้ายกัน

- เน็ก : มีมุมเท่ากันด้วย
 แพรว : มีมุมป้านเหมือนกัน
 เมย์ : ไม่เหมือนนะ
 เน็ก : มุมนี้เท่ากับมุมนี้ (ชี้ที่รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป)
 แพรว : บอกมุมด้วย
 เมย์ : $\hat{E} = \hat{Y}$, $\hat{D} = \hat{X}$ และ $\hat{F} = \hat{Z}$
 แพรว : แค่นี้ใช่ไหม



รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด



รูปสามเหลี่ยม ABC และ PQR มีลักษณะคล้ายกัน เพราะ เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน
 รูปสามเหลี่ยม EDF และ YXZ มีลักษณะคล้ายกัน เพราะ $\hat{E} = \hat{Y}$, $\hat{D} = \hat{X}$, $\hat{F} = \hat{Z}$

ภาพที่ 7 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่าในการจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้นนักเรียนจะอาศัยการสังเกตและการทดลองวัดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ถ้ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดมีขนาดความยาวของด้านเท่ากันทั้งสามด้านและมุมเท่ากันทั้งสามมุม ก็จะสรุปได้ว่าสามเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้น เป็นสามเหลี่ยมคล้ายแบบสามเหลี่ยมด้านเท่า แต่ถ้ารูปสามเหลี่ยมคู่ใดมีขนาดของมุมเท่ากันสามคู่แล้วสรุปได้ว่า สามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณนาอุปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์

(Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วแพรวและเมย์เสนอว่าไม่เท่ากันโดยแพรวให้เหตุผลว่าขนาดของรูปสามเหลี่ยมมีขนาดรูปร่างไม่เท่ากันแต่เน็กได้แย้งว่าไม่ใช่ขนาดรูปร่างแต่เป็นขนาดของมุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมและนักเรียนทั้ง 3 คนได้ร่วมกันอภิปรายว่าไม่ใช่ขนาดของรูปร่างแต่เป็นขนาดของมุมจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่ามุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมแบบเดียวกัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่
เพราะเหตุใด

เมย์ : ไม่

แพรว : ไม่คล้าย เพราะอันหนึ่งมันน้อย อันหนึ่งมันใหญ่

เมย์ : เขาบอกขนาดไม่ได้บอกรูปร่าง

เน็ก : มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยม

แพรว : มุมในแต่ละคู่เออ ไม่ใช่ขนาด

เน็ก : มีมุมขนาดเท่ากัน

แพรว : เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยม...

เมย์ : เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยม แบบเดียวกัน

แพรว : ใช่

เมย์ : เท่า

แพรว : เพราะในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมมีลักษณะคล้ายกันและในแต่ละคู่มิขนาดมุมเท่ากัน

จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

เท่ากัน เพราะในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมมีลักษณะคล้ายกันและในแต่ละคู่มิขนาดมุมเท่ากัน

ภาพที่ 8 แสดงข้อสรุปของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่านักเรียนสามารถบอกได้ว่าเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้ขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ด้วย และนักเรียนยังสามารถบอกได้ถึง ความหมายของสามเหลี่ยมคล้ายได้ว่า จะมีลักษณะคล้ายกันและขนาดของมุมในแต่ละคู่จะเท่ากัน

ดังแสดงในภาพที่ 9 ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

สามเหลี่ยมคล้าย หมายถึง.....ลักษณะ:คล้ายกัน และ: ขนาดของมุมในเส้นคู่ขนาน

ภาพที่ 9 แสดงความหมายของสามเหลี่ยมคล้าย

กลุ่มที่ 2 (มีว, นิล, ฟ้า)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 3 ระดับ โดยมีตัวอย่างของรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)

ผู้วิจัยได้นำเอารูปสามเหลี่ยมที่เป็นวัตถุจริงที่เตรียมเอาไว้มาให้ให้นักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ฟ้าได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูป โดยนิลและฟ้าได้เสนอว่าไม่เป็นรูปร่างแบบเดียวกันนะเพราะมุมแต่ละรูปมีขนาดไม่เท่ากันแล้วนักเรียนทั้ง 3 คนได้ช่วยกันวัดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้งสามรูปและมีวก็เสนอว่ารูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่ฟ้าได้แย้งว่าทั้ง 3 รูปมีรูปร่างเหมือนกันเพราะเป็นสามเหลี่ยมเหมือนกันเพียงแต่ขนาดของมุมในแต่ละรูปไม่เท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนได้นำเอารูปสามเหลี่ยมที่เป็นวัตถุจริงมาเปรียบเทียบกันจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีรูปร่างแบบเดียวกันแต่ขนาดของมุมในแต่ละรูปไม่เท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ฟ้า : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

นิล : มันไม่คล้ายกันนะ วัตถุ

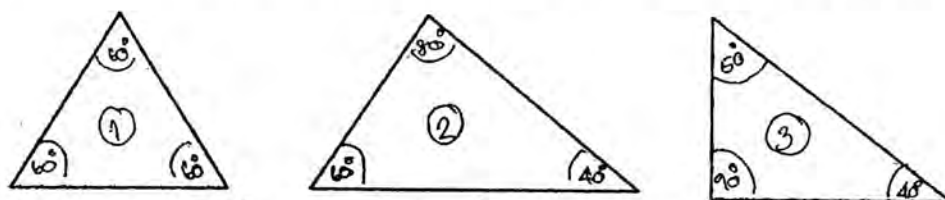
มีว : วัดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปและบอกว่ารูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

มีว : เป็นรูปสามเหลี่ยมเหมือนกัน แต่มีมุมไม่เท่ากัน

มีว : จะอธิบายว่ายังไง

- นิล : มีรูปร่างไม่เหมือนกันเพราะรูปสามเหลี่ยมทั้งสามรูปจะมีมุมแตกต่างกัน
 มิว : เป็นรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมันมีสามมุมเหมือนกัน
 ฟ้า : เออ ก็คิดว่ามันมีรูปร่างเหมือนกัน แต่มุมไม่เท่ากันเฉยๆ
 มิว : แต่อาจมีขนาดความกว้างของมุมไม่เท่ากัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



~~ใช่~~ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะ เป็นรูปสามเหลี่ยม ที่มีมุม ~~3 มุม~~ 3 มุมเหมือนกัน แต่ขนาดกว้างของมุมในแต่ละรูปไม่เท่ากัน

ภาพที่ 10 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่เหมือนกัน

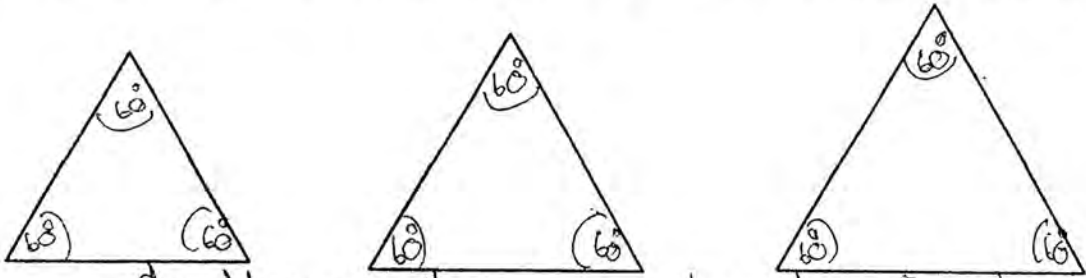
ในกิจกรรมข้อ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนบอกว่ารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เมื่อนิลอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนิลและมิวก็เสนอขึ้นว่ามีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีขนาดเท่ากันแต่ฟ้าแย้งขึ้นมาว่าไม่เท่ากันเพราะรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาดไม่เท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนได้นำเอาวัตถุดิบมาพิจารณา จนได้ข้อสรุปว่ามีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมุมแต่ละมุมของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีขนาดเท่ากันคือ 60° และเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

- นิล : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
 นิล : เป็นรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมุมมันเท่ากันแน่นอน
 ฟ้า : ไม่เท่านะ อันนี้มันรูปน้อยจะทอบ (ชี้ที่รูป)
 มิว : ทอกันฟ้า วัดเบ็ง
 นิล : แต่ละรูปมุมเท่ากันคือ 60°
 มิว : เป็นรูปร่างแบบเดียวกัน มุมเท่ากันทั้ง 3 รูปและเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน



ฟ้า : และมีมุม 60° เหมือนกัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



เป็นรูปปร่างแบบเดียวกัน เพราะมีมุมเท่ากันทั้ง 3 รูป และเป็น
สามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน ๕. ทุกรูปมีความกว้างของมุม คือ 60° เท่ากัน
ทุกรูป

ภาพที่ 11 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่านักเรียนจะดูรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมจาก
วัตถุจริงและในโจทย์ โดยนักเรียนจะแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมออกตามชนิดของรูปสามเหลี่ยม
ที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว และจากการอาศัยการวัดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมเข้ามาช่วยใน
การแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเป็นการให้ความหมายของชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการ
มองเห็นและความรู้ที่ได้นี้เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ โดยที่นักเรียนได้นำ
ความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมที่นักเรียน
แสดงออกนี้แสดงให้เห็นถึงระดับการรับรู้จากการมองเห็นที่นักเรียนนำเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหา
เรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตใน
ระดับการรับรู้และการมองเห็น (Visualization or Recognition)

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

หลังจากที่นักเรียนได้ใช้ความรู้ในระดับการรับรู้จากการมองเห็นในเรื่องรูปร่างของ
รูปสามเหลี่ยม ทำให้นักเรียนสามารถนำเอาความรู้ที่นำมาช่วยในการวิเคราะห์รูปลักษณะของ
รูปสามเหลี่ยมเพื่อช่วยในการแยกกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันโดยนักเรียนจะ
อาศัยการวัดขนาดของมุมว่ารูปสามเหลี่ยมใดที่มีขนาดของมุมเท่ากันและนักเรียนทั้ง 3 คนก็สรุป
ร่วมกันว่ารูปสามเหลี่ยมรูปที่ 1 (ABC) และรูปที่ 4 (JKL) มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะเป็น
สามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกันและมีขนาดของมุมแต่ละมุมเท่ากัน และรูปสามเหลี่ยมรูปที่ 2 (DEF)

และรูปที่ 5 (MNO) มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะมีขนาดของมุมแต่ละรูปเท่ากันเป็นคู่ๆ ดัง
โปรดคัดลอกการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

นิล : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด

นิล : รูปที่ 1 กับ 4 จะเหมือนกัน

มีว : วัดขนาดของมุมในแต่ละรูป

ฟ้า : รูปที่ 2 กับ รูปที่ 5 เหมือนกัน

นิล : ok

ฟ้า : เราจะบอกว่ายังไงเมื่อมันคล้ายกัน

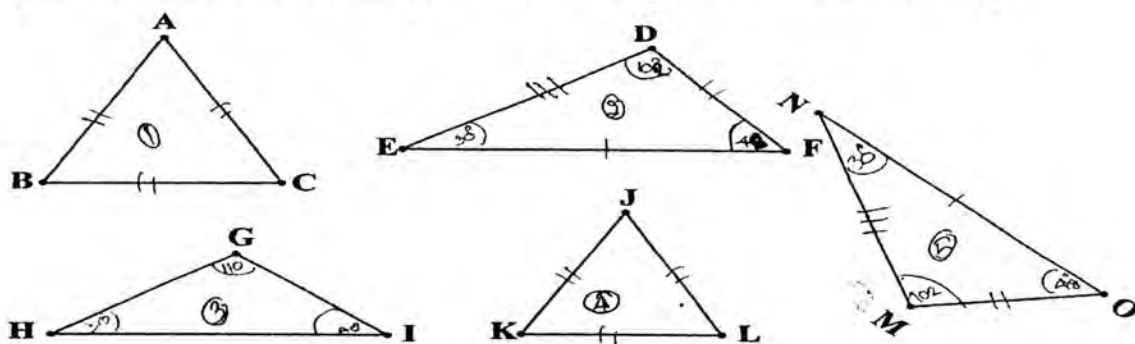
นิล : รูปที่ 1 และ 4 มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

ฟ้า : มีวทั้ง 2 รูป เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วนะ (ชี้ที่รูปที่ 2 และ 5)

นิล : เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีขนาดของมุมแต่ละมุมที่ฐานเท่ากัน

มีว : เพราะมีมุมแต่ละรูปเท่ากันเป็นคู่ๆ

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด



รูปที่ 1 และรูปที่ 4 เป็นรูป Δ ที่สร้างได้เช่นกัน เพราะเป็นรูป Δ ด้าน
เท่า ทั้ง 2 รูป การกรอกริมของมุมที่ปลายมุมเท่ากัน ฟ้า/รูปที่ 2 และรูปที่ 5
เป็นรูป Δ ที่สร้างได้เช่นกัน เพราะเป็นรูป Δ หน้าจั่วที่มีมุมที่ฐานเท่ากัน

ภาพที่ 12 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

หลังจากที่นักเรียนได้จัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันแล้วในกิจกรรม
ข้อที่ 4 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน เมื่อนิลอ่านคำชี้แจง
เสร็จแล้วฟ้าได้เสนอแนะว่ารูปสามเหลี่ยมมันคล้ายกันหมดทุกรูป แต่นิลได้แย้งขึ้นมาว่าไม่ทุกรูป

นะมีเพียงรูปที่ 1 (BAC) กับรูปที่ 4 (PRQ) และ รูปที่ 2 (EDF) กับรูปที่ 3 (XYZ) (ชี้ที่รูป) ที่มีลักษณะคล้ายกัน นักเรียนทั้ง 3 คนจึงได้ตรวจสอบโดยการวัดขนาดของมุมและความยาวของด้านทั้ง 3 ของรูปสามเหลี่ยมโดยนำเอามาเปรียบเทียบกับวัตถุจริงที่ผู้วิจัยเตรียมเอาไว้จนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะที่คล้ายกันจะมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังโปรแกรมคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

นิล : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด

ฟ้า : มันคล้ายกันหมดแหละ

นิล : ไม่ รูปที่ 1 (BAC) กับรูปที่ 4 (PRQ) และ รูปที่ 2 (EDF) กับรูปที่ 3 (XYZ) (ชี้ที่รูป) ที่มีลักษณะคล้ายกัน

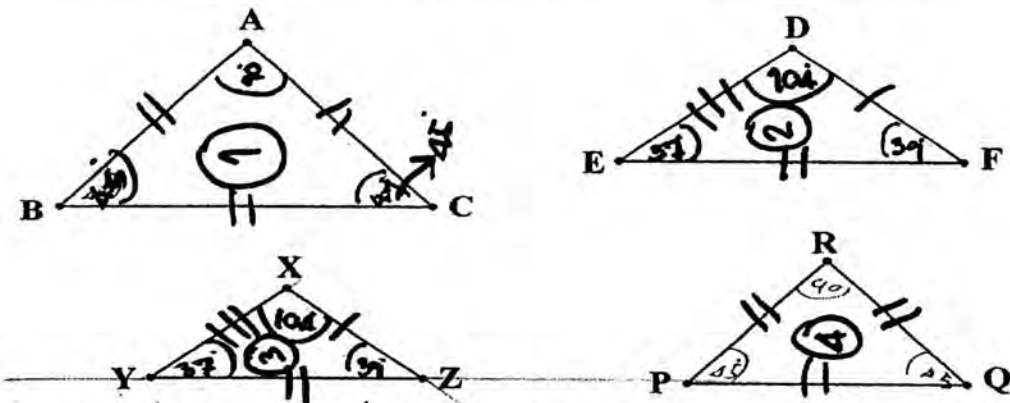
มีว : วัดดูดีกว่า (นักเรียนทั้ง 3 คนช่วยกันวัดขนาดของมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูป)

นิล : รูปที่ 1 (BAC) กับรูปที่ 4 (PRQ) คล้ายกันเพราะความกว้างของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ และเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ฟ้า : รูปที่ 2 (EDF) กับรูปที่ 3 (XYZ) เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

นิล : รูปที่ 2 (EDF) กับรูปที่ 3 (XYZ) คล้ายกันเพราะมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ และเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด



รูป Δ ที่ 1 คล้ายรูปที่ 4 คล้ายกันเพราะรูปสองเหลี่ยมมุมฉาก มีความกว้างของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ เช่นได้กับรูป Δ ที่ 2 คล้ายรูปสามเหลี่ยมที่ 3 คล้ายกันเพราะมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ

ภาพที่ 13 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

คล้ายกันแล้วจะมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ และมีรูปร่างแบบเดียวกันแต่ไม่จำเป็นต้องมีขนาดเท่ากัน ดังแสดงในภาพที่ 15 ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

สามเหลี่ยมคล้าย หมายถึง.....

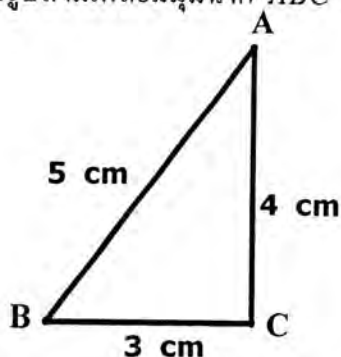
รูป Δ ที่มีด้านทั้งสามของสามเหลี่ยมเหมือนกัน 100 เปอร์เซ็นต์

ภาพที่ 15 แสดงความหมายของสามเหลี่ยมคล้าย

1.2 การแก้ปัญหาในกิจกรรมที่ 2 เรื่อง อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

ในกิจกรรมที่ 2 นี้ต้องการให้นักเรียนบอกได้ว่าเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้เสนอแนวคิดและกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ ดังนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีขนาด ดังรูป



1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้ โดยให้ DFE เป็นมุมฉากและด้าน EF ยาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC แล้วนำ ΔABC ที่ตัดไว้มาวางซ้อน ΔDEF ให้ A กับ D ทับ DFE และด้าน CB ทับด้าน FE

1.1 ด้าน DF ยาวเป็นกี่เท่าของด้าน AC

1.2 ด้าน DE ยาวเป็นกี่เท่าของด้าน AB

- 1.3 จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอก

เหตุผล

2. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้ โดยให้ PRQ เป็นมุมฉากและด้าน PR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

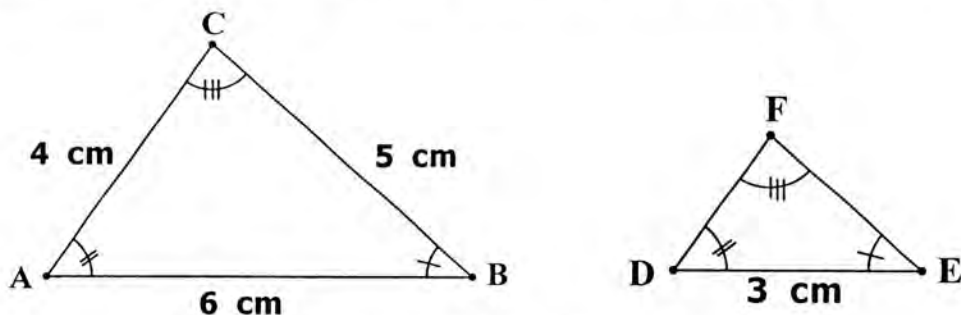
2.1 ด้าน QR ยาวเป็นกี่เท่าของด้าน BC

2.2 ด้าน PQ ยาวเป็นกี่เท่าของด้าน AB

- 2.3 จงหาค่าของ $\frac{PR}{AC}$, $\frac{QR}{BC}$ และ $\frac{PQ}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอก

เหตุผล

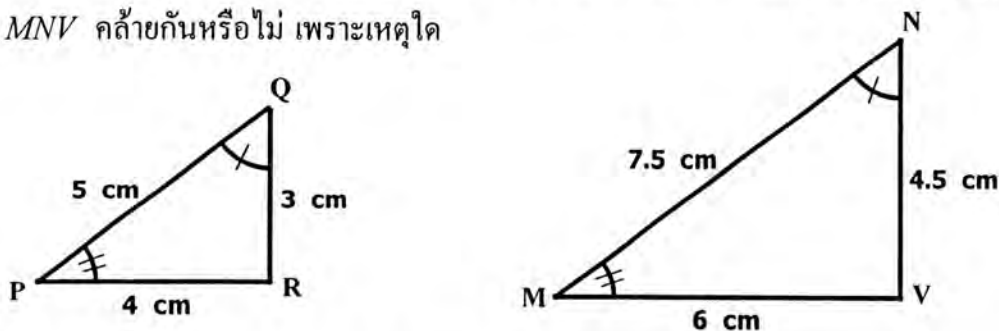
3. กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังรูป



- 3.1 $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่ จงให้เหตุผล

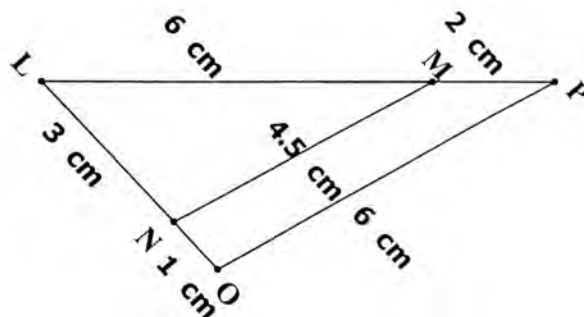
3.2 จงวัดความยาวของ $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ แล้วหาค่าของ $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

4. กำหนดให้ $\triangle PQR$ และ $\triangle MNV$ ที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่ ดังรูป $\triangle PQR$ และ $\triangle MNV$ คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



4.1 จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่

5. กำหนดให้ $\overline{NM}$ ขนานกับ $\overline{OP}$ ดังรูป $\triangle LNM$ และ $\triangle LOP$ คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



5.1 จงจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งกับด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งโดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

6. จากข้อที่ 4 และ 5 นักเรียนมีวิธีจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันได้อย่างไร จึงจะได้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

7. ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

นักเรียนกลุ่มที่ 1 (แพรว, เมย์, เน็ก)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้เตรียมกระดาษ ไม้บรรทัดและกรรไกรให้นักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 แพรวได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับการสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ว่าทำอย่างไรให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมที่ผู้วิจัยเตรียมเอาไว้ โดยความยาวของด้านจะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า ของสามเหลี่ยมรูปเดิม และแพรวได้เสนอว่าจากเดิมความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมเป็น 3, 4 และ 5 เซนติเมตร ตามลำดับ ดังนั้นความยาวของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ก็เป็น 6, 8 และ 10 เซนติเมตร ตามลำดับ แต่เน็กและเมย์ได้แย้งว่ารูปที่ให้สร้างความยาวของรูปสามเหลี่ยมใหม่จะเปลี่ยนเฉพาะจาก 3 เซนติเมตร เป็น 6 เซนติเมตร เท่านั้นใช่ไหม ส่วนด้านอื่นๆเท่าเดิม จนได้ข้อสรุปของรูปสามเหลี่ยม DEF ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

- แพรว : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้ โดยให้ DFE เป็นมุมฉากและด้าน EF ยาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC แล้วนำ $\triangle ABC$ ที่ตัดไว้มาวางซ้อน $\triangle DEF$ ให้ $A \equiv B$ ทับ DFE และด้าน CB ทับด้าน FE
- เมย์ : ลงมือสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF และวัดความยาว
- เน็ก : ยาวเป็นสองเท่า
- เมย์ : ไม่ใช่
- แพรว : เดิมเป็น 3 เซนติเมตร ใหม่ก็จะเป็น 6 เซนติเมตร
- เน็ก : ให้เฉพาะด้านนี้ใช้ไหม (EF) ด้านอื่นไม่ต้องห่อ
- แพรว : DF ยาวเป็นกี่เท่าของ AC
- เน็ก : ด้านที่กำหนดให้ยาวเป็นสองเท่า ด้านอื่นยาวเป็นหนึ่งเท่า
- เมย์ : จะเป็น 5 ได้ยังงัยอีกด้านหนึ่งเพิ่มเป็นสองเท่านะ
- นักเรียนทั้ง 3 คน จึงมาวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ใหม่และนำอัตราส่วนทั้ง 3 มาเปรียบเทียบกัน

จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\begin{array}{l} \frac{EF}{BC} = \frac{6}{3} = 2 \\ \frac{DF}{AC} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{DE}{AB} = \frac{5}{5} = 1 \end{array}$$

ภาพที่ 16 แสดงอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมเดิมและรูปสามเหลี่ยมใหม่

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาใหม่ โดยให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม เมย์ได้ลงมือวาดรูปตามโจทย์โดยเน็กได้เสนอว่าเมื่อมันเป็นรูปสามเหลี่ยมคล้ายความยาวของแต่ละด้านจะลดลงด้านละ 2 เท่า นักเรียนทั้ง 3 คน ได้ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่จนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าถ้ารูปสามเหลี่ยม PQR คล้ายกับ ABC แล้วจะส่งผลให้ QR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ BC และ PQ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AB และอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรง

ข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้ โดยให้ PQ เป็นมุมฉากและด้าน PR ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

เน็ก : เขาถามหาความยาว เมื่อมันเป็นสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ว่าความยาวมันลดลงด้านละ 2

แพรว : ด้านตั้งฉากยาว 2

เมย์ : อันนี้หะ ขาวเท่าใด (ชี้ที่รูป)

แพรว : อันนี้ 1.5

เมย์ : หาความยาวของด้าน PQ จากรูปได้ 2.5

จงหาค่าของ $\frac{PR}{AC}$, $\frac{QR}{BC}$ และ $\frac{PQ}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{PR}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{QR}{BC} = \frac{1.5}{3}$$

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{2.5}{5}$$

* เนื่องจากด้าน PR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC ดังนั้น PQR คล้ายกับ ABC ซึ่ง
ส่วนนี้ QR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ BC .

เนื่องจาก PQR กับ ABC คล้ายกันจึงมีส่วนนี้ PQ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AB

ภาพที่ 17 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป

ในกิจกรรมข้อที่ 3 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ทั้งสามคู่ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกันหรือไม่ โดยแพรวได้เสนอว่ามันคล้ายกัน เพราะว่ามีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ เมย์และเน็กยังบอกต่อไปอีกว่ามีมุม $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$ ที่มีขนาดเท่ากันด้วย แล้วนักเรียนทั้ง 3 คนได้ช่วยกันหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม DEF ที่เหลือ เมื่อนำเอาอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันพบว่าอัตราส่วนทั้งสามอัตราส่วนมีค่าเท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่

แพรว : คล้ายกัน เพราะมีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ

เมย์ : ได้แก่ $\hat{A} = \hat{D}$, $\hat{B} = \hat{E}$ และ $\hat{C} = \hat{F}$

แพรว : จงวัดความยาวของ $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ แล้วหาค่าของ $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$

เน็ก : ไม่ต้องวัดหรอก เนื่องจากความยาวของแต่ละด้านมันหารด้วย 2 จะได้ว่า $EF = 2.5$

เมย์ : $FD = 2$

เน็ก : บรรทัดต่อมาเอามาเขียน อัตราส่วนเลย

แพรว : จะได้ $\frac{AB}{DE} = \frac{6}{3} = 2$, $\frac{BC}{EF} = \frac{5}{2.5} = 2$ และ $\frac{CA}{FD} = \frac{4}{2} = 2$

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่ จงให้เหตุผล

คล้ายกัน เพราะ มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ ๆ ได้แก่

$$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$$

จงวัดความยาวของ $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ แล้วหาค่าของ $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสาม

ที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\overline{EF} = 2.5 \quad \overline{FD} = 2$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{BC}{EF} = \frac{5}{2.5} = 2$$

$$\frac{CA}{FD} = \frac{4}{2} = 2$$

ภาพที่ 18 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดขนาดของมาให้ทั้งสามมุม

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 นักเรียนคิดว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นเพิ่มเพียงด้านเดียวเมื่อนำเอาความยาวที่หาได้มาวาดรูปจึงส่งผลให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ผิดพลาดจากเงื่อนไขที่ผู้วิจัยได้ตั้งเอาไว้ ทำให้นักเรียนไม่สามารถสรุปและบอกเหตุผลได้ ส่วนในกิจกรรมข้อที่ 2 นักเรียนสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ที่มีความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของสามเหลี่ยมรูปเดิมได้และในกิจกรรมข้อที่ 3 เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูปและมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ มาให้นักเรียน

สามารถบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นคล้ายกันและเมื่อนักเรียนนำเอาอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมมาเปรียบเทียบกับกันจนนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วแพรวได้เสนอว่ามันคล้ายกันนะ แต่เน็กได้แย้งขึ้นว่าไม่คล้ายหรอกเพราะความยาวมันไม่เท่ากันและถ้ามันคล้ายกันต้องมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ 3 คู่ นี่มันมี 2 มุมเอง เมย์และแพรวพูดขึ้นมาพร้อมกันว่าเท่ากันทั้งสามมุมสิตรงนี้เป็นมุมฉากนะ(ชี้ที่รูป) เน็ก ลองวัดดูสิ และนักเรียนทั้งสามคนได้ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกัน หลังจากทีนักเรียนทั้ง 3 คนได้ข้อสรุปแล้วว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกันแล้วก็มาร่วมกันอภิปรายว่าทำยังไงถึงจะจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่ เน็กเสนอว่าถ้าอยากให้ด้านมันเท่ากันเราก็ลดความยาวของด้านลง 0.5 เท่า สิ เมย์แย้งขึ้นว่าไม่ใช่ต้องลบออกด้านละ 1.5 ต่างหาก แต่อีกด้านละ เน็กเลยเสนอขึ้นมาว่าถ้าอย่างนั้นก็เอาความยาวของด้าน MV หาด้วยความยาวของด้าน PR ก็จะได้เท่ากับ 1.5 เท่า นั่นก็คือแต่ละด้านก็จะยาวขึ้นด้านละ 1.5 เท่า ังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

เน็ก : จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

แพรว : ด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

เน็ก : อยากให้ด้านมันเท่ากัน เราก็ลดจากอันนี้ลงเป็น 0.5 เท่า (ชี้ที่รูป) เอาใหม่ๆ

เมย์ : ลบ 1.5 เท่านั้น เอา MN นั้นนะ

เน็ก : เมื่อไหร่เราหาร เราต้องเอามาคูณ

เมย์ : มันคูณ

แพรว : มันต้องเป็นหาร

เมย์ : เขาให้หา...

แพรว : จับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$

เน็ก : เราก็พิสูจน์ว่าเป็นยังอันนี้จึงเท่ากับนี้ (ชี้ที่รูป) เป็นยังจึงเพิ่มขึ้น เราก็เอา 4 มาคูณกับ 1.5 จะเท่ากับ 6



แพรว : ยังไงมันก็เพิ่ม เอา 1.5 เท่า คุณเข้าไป

เน็ก : จะได้ $PR = 4 \times 1.5$
 $= 6$

เมย์ : ดังนั้น $\overline{PR} = \overline{MV}$

แพรว : ทำคู่เดียวหรือ

เมย์ : บ่ คู่อื่นๆ ทำเหมือนกัน

จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน
 เท่ากันทั้งสามคู่

$PR = 4 \times 1.5$	$PQ = 5 \times 1.5$	$QR = 3 \times 1.5$
$= 6$	$= 7.5$	$= 4.5$
$\therefore \overline{PR} = \overline{MV}$	$\therefore \overline{PQ} = \overline{MN}$	$\therefore \overline{QR} = \overline{NV}$

ภาพที่ 19 แสดงการจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากันทั้งสามคู่

ในกิจกรรมข้อที่ 7 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เน็กได้เสนอว่า ได้เสมอไปเพราะว่ามุมมันเท่ากันอยู่แล้วและขนาดของมุมในแต่ละคู่ก็เท่ากันด้วย ซึ่งแพรวและเมย์ก็เห็นด้วยกับเน็กและยังบอกอีกว่า ถ้ามุมมันเท่ากันแล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันด้วย ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่

เน็ก : ได้เสมอไป

แพรว : เพราะ

เน็ก : มุมมันเท่ากันอยู่แล้วและขนาดของมุมในแต่ละคู่ก็เท่ากันด้วย

เมย์ : ใช่ๆ และอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันด้วย

ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

เสมอไป เพราะ มุมภายในมีขนาดเท่ากัน

ภาพที่ 20 แสดงข้อสรุปการจับคู่ของด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในการจับคู่ของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน นักเรียนจะสามารถจับคู่ให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอ โดยนักเรียนจะพิจารณาจากความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้านละกี่เท่า แล้วก็นำอัตราส่วนนั้นไปเปรียบเทียบกับกัน เพื่อตรวจสอบว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

กลุ่มที่ 2 (มิว, นิล, ฟ้า)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้เตรียมกระดาษ ไม้บรรทัดและกรรไกรให้นักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 นิลได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับการสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ว่าทำอย่างไรให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมที่ผู้วิจัยเตรียมเอาไว้ โดยความยาวของด้านจะเพิ่มขึ้นเป็น สองเท่าของสามเหลี่ยมรูปเดิม ซึ่งมิวและฟ้าได้เสนอว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าทั้งหมดทุกด้านเลยแต่นิลได้แย้งว่าไม่ใช่ น่าจะเป็นด้าน EF เท่านั้นที่ยาวเป็นสองเท่าของด้าน BC จากนั้นนักเรียนทั้ง 3 คนได้ช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม DEF จะยาวเป็นสองเท่าของด้านรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกด้าน ซึ่งเดิมความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC เป็น 3, 4 และ 5 เซนติเมตร ตามลำดับ ดังนั้นความยาวของรูปสามเหลี่ยม DEF เป็น 6, 8 และ 10 เซนติเมตรตามลำดับ ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

นิล : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้ โดยให้ DFE เป็นมุมฉากและด้าน EF ยาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC แล้วนำ $\triangle ABC$ ที่ตัดไว้มาวางซ้อน $\triangle DEF$ ให้ ACB ทับ DFE และด้าน CB ทับด้าน FE

ฟ้า : สองเท่าหมดแน่นอน ฐานก็จะยาว 3

มิว : สองเท่าก็จะเป็น 6

ฟ้า : อืม

นิล : แล้วนำ $\triangle ABC$ ที่ตัดไว้มาวางซ้อน $\triangle DEF$ ให้ ACB ทับ DFE และด้าน CB ทับด้าน FE

ฟ้า : แล้วความยาวของด้านอื่นหละมันเท่าเท่าไร หรือยัง

นิล : ความยาวเป็น 3 สองเท่าก็จะเป็น 6 สองเท่าทั้งหมดเลย

ฟ้า : ตัวนี้เป็น 8 อีกตัวเป็น 10 (ชี้ที่ด้านของรูป $\triangle DEF$)

นิล : DF ยาวเป็นกี่เท่าของ AC

มิว : เป็นสองเท่า

ฟ้า : ด้าน DE ยาวเป็นกี่เท่าของ AB

มิว : เป็นสองเท่า

นิล : บอกด้วยนะว่ารูปสามเหลี่ยมเดิมยาวเท่าใด และรูปสามเหลี่ยมใหม่ยาวเท่าใด

ฟ้า : DF ยาว 8 AC ยาว 4 DE ยาว 10 AB ยาว 5

นิล : จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอก

เหตุผล

มิวและฟ้าช่วยกันหาค่าของอัตราส่วน

$$\frac{EF}{BC} = \frac{6}{3}, \frac{DF}{AC} = \frac{8}{4} \text{ และ } \frac{DE}{AB} = \frac{10}{5}$$

มิว : เปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

ฟ้า : หารหือ

มิว : คัดปุ๊บมันจะได้ 2 เขาให้เปรียบเทียบแค่บอกชื่อๆ

นิล : ค่าที่ได้มาจากการคูณเข้าเป็นสองเท่าของแต่ละตัว

มิว : เปรียบเทียบก่อน ค่าทั้ง 3 ที่หาได้นั้นเมื่อนำมาหารกันจะได้ 2 ทุกจำนวน เพราะมันเป็น การเพิ่มขึ้นสองเท่าของทุกจำนวน



จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{EF}{BC} = \frac{6}{3} \quad \frac{DF}{AC} = \frac{9}{3} \quad \frac{DE}{AB} = \frac{10}{5}$$

ค่าทั้ง 3 คือ 3 จำนวน ที่ไม่เหมือนกัน เมื่อเราพิจารณารด้วยส่วน จก 3
ผลลัพธ์ เท่ากับ 2 ทั้ง 3 จำนวน เพราะค่าของยาวของทั้ง สามด้าน
ยาวขึ้นเป็น 2 เท่าของรูปเดิม

ภาพที่ 21 แสดงอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมเดิมและรูปสามเหลี่ยมใหม่

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาใหม่ โดยให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม ฟ้าได้ลงมือวาดรูปตามโจทย์โดยมีวและนิลได้ช่วยกันวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ ซึ่งจะพบว่าความยาวของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่แต่ละด้านลดลงเป็น 0.5 เท่าของความยาวแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม นักเรียนทั้ง 3 ได้ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่จนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าถ้ารูปสามเหลี่ยม PQR คล้ายกับ ABC แล้วจะส่งผลให้ QR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ BC และ PQ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AB และอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ฟ้า : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้ โดยให้ PRQ เป็นมุมฉากและด้าน PR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

มีว : PR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

ฟ้า : โดยที่ R เป็นมุมฉาก

มีว : ตัดเลย (บอกให้ฟ้าตัดรูปสามเหลี่ยม PQR)

ฟ้า : อันนี้จะเป็น P เป็น Q และเป็น R ตามลำดับ (เขียนชื่อมุมลงในรูปสามเหลี่ยมที่สร้างขึ้นใหม่) ด้าน QR ยาวเป็นกึ่งเท่าของด้าน BC

มีว : 0.5 เท่า

ฟ้า : อันนี้มัน 3 แต่อันนี้เป็น 1.5 (ชี้ที่รูปสามเหลี่ยมเดิมและรูปสามเหลี่ยมใหม่)

มีว : PQ ยาวเท่าใด

นิล : PQ ยาว 2.5

มีว : AB หละ

นิล : AB ขาว 5 เอา 2.5 ไปหารเลย

มีว : จะได้ 0.5 เท่า

ฟ้า : มันทำเหมือนเดิมเลย เหมือนข้อ 1.3 นะ มันจะได้ 0.5 หมด

จงหาค่าของ $\frac{PR}{AC}$, $\frac{QR}{BC}$ และ $\frac{PQ}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{PR}{AC} = \frac{2}{4} \quad \frac{QR}{BC} = \frac{1.5}{3} \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{2.5}{5}$$

ค่าที่ได้ทั้ง 3 จำนวนที่ได้เป็นเศษส่วนลดอย่างง่ายแล้ว หากรวบรวมแล้วก็จะได้
ลัพท์เท่ากับ 0.5 ทั้ง 3 จำนวน เพราะความยาวของแต่ละด้าน ~~ลดลง~~ ลด
เป็น 0.5 เท่าของรูปเดิม

ภาพที่ 22 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป

ในกิจกรรมข้อที่ 3 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ทั้งสามคู่ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกันหรือไม่ โดยนิลได้เสนอมันคล้ายกันนะเพราะว่ามีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ และรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็เหมือนกันทั้งรูปร่างและความกว้างของมุม แล้วนักเรียนทั้ง 3 คนได้ช่วยกันหาความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม DEF ที่เหลือ เมื่อนำเอาอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมของด้านที่อยู่ตรงข้ามของมุมที่มีขนาดเท่ากันพบว่าอัตราส่วนทั้งสามอัตราส่วนมีค่าเท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

มีว : $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่

นิล : คล้ายกัน เพราะขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ และรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็เหมือนกันทั้งรูปร่างและความกว้างของมุม

ฟ้า : จงวัดความยาวของ $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ แล้วหาค่าของ $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$

มีว : อันนี้ 2.5 (ด้าน EF) และ อันนี้ 2 (ด้าน FD)

ฟ้าและมีวช่วยกันหาอัตราส่วนจะได้ $\frac{AB}{DE} = \frac{6}{3}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{5}{2.5}$ และ $\frac{CA}{FD} = \frac{4}{2}$

มีว : มีค่าเท่ากับ 2 เหมือนเดิม

ฟ้า : ลดลงหรือเพิ่มขึ้น

นิล : ลดลง รูปที่ 2 ($\triangle DEF$) มันลดลง

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่ จงให้เหตุผล

คล้ายกัน เพราะมุมแต่ละมุมมีขนาดเท่ากัน มุมรูป $\triangle$ แต่ละรูป 2 ก็เหมือนกันทั้งรูปว่า ความยาวด้านของมุม

จงวัดความยาวของ $\overline{EF}$ และ $\overline{FD}$ แล้วหาค่าของ $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสาม
ที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{3} \quad \frac{BC}{EF} = \frac{5}{2.5} \quad \frac{CA}{FD} = \frac{4}{2}$$

ค่าที่ได้ทั้ง 3 จำนวน เป็นเศษส่วน เพื่อให้นำเศษทั้งสามส่วน
มาตัดกันเศษ 6 ทั้ง 3 จำนวน เพราะ ความยาวของรูปที่
1 ยาวเป็น 2 เท่าของรูป 2

ภาพที่ 23 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดขนาด
ของมุมมาให้ทั้งสามมุม

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 และ 2 นักเรียนสามารถสร้าง
รูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ที่มีความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าหรือลดลงเป็น
ครึ่งหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมได้และเมื่อนำอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยม
รูปใหม่มาเปรียบเทียบกับความยาวของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมก็จะพบว่าค่าของอัตราส่วนในแต่ละ
รูปจะมีค่าเท่ากันเสมอไม่ว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงก็ตาม ส่วนใน
กิจกรรมข้อที่ 3 เมื่อผู้วิจัยได้กำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูปและมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ มาให้
นักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นคล้ายกันและเมื่อนักเรียนนำเอาอัตราส่วน
ความยาวของรูปสามเหลี่ยมมาเปรียบเทียบกับกันจนนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใด
คล้ายกันแล้วจะทำให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากัน
ทั้งสามอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมี
ระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนิลได้เสนอมันคล้ายกันนะ เพราะแค่ความยาวมันลดลงเฉยๆ แต่ขนาดของมุมมันเท่าเดิมและมีก็บอกว่าใช้ๆ มันคล้ายกันเพราะมุมมีขนาดเท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนได้ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกัน หลังจากที่นักเรียนทั้ง 3 คนได้ข้อสรุปแล้วว่า รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกันแล้วก็มาร่วมกันอภิปรายว่าทำอย่างไรถึงจะจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ นักเรียนทั้ง 3 คน ได้นำเอารูปที่ตัดเอาไว้ในข้อที่ 1 และ 2 มาพิจารณาโดยเอานำมาวางซ้อนทับกับ แล้วจับคู่อัตราส่วนของความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า $MV:PR$, $NV:QR$ และ $MN:PQ$ ซึ่งแต่ละอัตราส่วนมีค่าเท่ากับ 1.5 เหมือนกัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ฟ้า : สามเหลี่ยมทั้ง 2 รูป คล้ายกันหรือไม่

นิล : คล้ายกัน เพราะแค่ความยาวมันลดลงเฉยๆ แต่ขนาดของมุมมันเท่าเดิม

มีว : รูปร่างก็เหมือนกัน เพียงแค่ความยาวมันต่างกัน

นิล : จะจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

ฟ้า : มีวต้องวาดรูปใหม่ให้มันเท่ากันก่อนนะ

มีว : เอารูปเก่าในข้อ 1 และ 2 จะได้ไม่ต้องวาดใหม่

นักเรียนทั้ง 3 คน ได้พิจารณาอัตราส่วนที่จับคู่กัน

นิล : การจับคู่ของแต่ละรูปได้ดังนี้

$$\frac{MV}{PR} = \frac{6}{4}, \frac{NV}{QR} = \frac{4.5}{3}, \frac{NM}{QP} = \frac{7.5}{5} \text{ ค่าที่ได้ของแต่ละอัตราส่วนคือ 1.5}$$

จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่

MN	4	QR	1.5	QP	7.5
PR	6	QR	3	QP	5
การจับคู่ด้านของ 2 รูป คือ 6:4 = 1.5 หรือ 3:2 หรือ 1.5:1					
เท่ากัน ทั้ง 3 ผลคือ 1.5					

ภาพที่ 24 แสดงการจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากันทั้งสามคู่

ในกิจกรรมข้อที่ 5 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่วางซ้อนทับกัน โดยมีมุมร่วมกันหนึ่งมุมและให้ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่ร่วมกันขนานกัน คล้ายกันหรือไม่ นิลได้เสนอมันคล้ายกันนะเพราะมีมุมที่เท่ากันคือมุม L และมีมุมที่เท่ากันคือมุม M กับ P และ มุม N กับ O ก็มีขนาดเท่ากันด้วยเพราะเมื่อเส้นตรงสองเส้นขนานกันแล้วจะทำให้มุมภายในกับมุมภายนอกมีขนาดเท่ากันด้วย ซึ่งนักเรียนทั้งสามคนได้ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกัน หลังจากทีนักเรียนทั้ง 3 คนได้ข้อสรุปแล้วว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกันแล้วก็มาร่วมกันอภิปรายว่าทำอย่างไรถึงจะจับคู่ด้านของ $\triangle LNM$ กับด้านของ $\triangle LOP$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ ฟาก็เสนอมันเราก็ทำเหมือนข้อที่ 4 สิ แล้วนักเรียนทั้ง 3 คน ก็นำเอาความยาวของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วน คือ $\frac{LM}{LP}$, $\frac{LN}{LO}$ และ $\frac{MN}{PO}$ แต่เมื่อนักเรียนแทนค่าความยาวปรากฏว่าฟ้าได้บอกความยาวของด้าน LM ผิดจาก 6 เป็น 4 จึงทำให้อัตราส่วนที่หาได้มีค่าต่างจากอัตราส่วนอื่นๆ ดังโปรแกรมคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

นิล : จงจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งกับด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งโดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

ฟ้า : เหมือนข้อที่ 4 เลย

มีว : 4, 6, 8 (ความยาวแต่ละด้านของ $\triangle LNM$) และ 3, 4.5, 6 (ความยาวแต่ละด้านของ $\triangle LOP$)

ฟ้าและมีวช่วยกันหาอัตราส่วน จะได้ $\frac{LM}{LP} = \frac{4}{8}$, $\frac{LN}{LO} = \frac{3}{4}$, $\frac{MN}{PO} = \frac{4.5}{6}$

ฟ้า : ลองหารดูสิ

นิล : น่าจะเอาตัวมากขึ้นข้างบนนะ

มีว : ค่าที่ได้จะออกมาเป็น 2 และ 1 กว่าๆนะ

นิล : สองคู่หลังเหมือนกัน

ฟ้า : แต่มันเหลือแค่ตัวนี้ ($\frac{LM}{LP}$)

จงจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งกับด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งโดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

ไม่สามารถจับคู่ได้ ทั้ง 3 คู่ สามเหลี่ยมใด หด 2 คู่เท่า
หน้า หน้า คำนวณหาได้เท่านั้น

ภาพที่ 25 แสดงการจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่วางซ้อนทับกัน

ในกิจกรรมข้อที่ 7 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ มีวได้เสนอว่า ไม่เสมอไปเพราะจากการหาอัตราส่วนแต่ละคู่ในข้อที่ 5 ได้เหมือนกันเพียงแค่ 2 คู่เท่านั้น ซึ่งฟ้าและนิลก็เห็นด้วย ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

นิล : ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่

มีว : ไม่เสมอไป

ฟ้า : เพราะ

มีว : จากการหาอัตราส่วนแต่ละคู่ในข้อที่ 5 ได้เหมือนกันเพียงแค่ 2 คู่ เท่านั้น

ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

ไม่เสมอไป เพราะ จากภาพ หา สมมติจาก สามเหลี่ยมใด
ข้อ 5 ได้เหมือนกันแค่ 2 คู่เท่านั้น

ภาพที่ 26 แสดงข้อสรุปการจับคู่ของด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

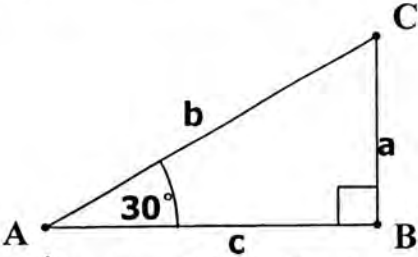
จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในข้อที่ 5 นักเรียนไม่สามารถจับคู่ของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้เนื่องจากนักเรียนบอกค่าของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมผิดจึงทำให้ค่าที่นักเรียนหาออกมาได้มีค่าไม่เท่ากับอัตราส่วนคู่อื่นๆที่หาได้ ซึ่งในการจับคู่ให้อัตราส่วน

ของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่ นั้นนักเรียนจะพิจารณาจากความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้านละกี่เท่า แล้วก็นำอัตราส่วนนั้นไปเปรียบเทียบกันเพื่อตรวจสอบว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่หรือไม่ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

1.3 การแก้ปัญหาในกิจกรรมที่ 3 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในกิจกรรมที่ 3 นี้ต้องการให้นักเรียนได้เห็นที่มาของอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสามอัตราส่วนซึ่งมีชื่อเรียกว่า ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ โดยให้ A เป็นมุมแหลมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ($\sin A$) อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ($\cos A$) และอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านประชิดมุม A ($\tan A$) มีค่าคงที่เสมอ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้เสนอแนวคิดและกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ ดังนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนตัดกระดาษเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากอีกรูปหนึ่งให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังต่อไปนี้

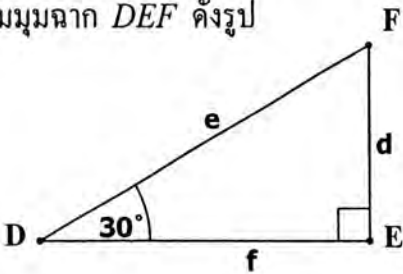


1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้และจากรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป ให้นักเรียนวัดความยาว a และ b แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 โดยใช้ความยาวที่วัดได้ของด้านของรูปสามเหลี่ยม จงหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นอย่างไร

1.2 อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปในข้อ 1 เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.3 ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ดังรูป



นักเรียนคิดว่า $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ ที่หาได้ในข้อ 1 เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด ไม่ว่า d, e หรือ f จะยาวเท่าใดก็ตาม

2. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC อีกรูปหนึ่งโดยให้มุม A ไม่เท่ากับ 30° และสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ให้คล้ายกับ $\triangle ABC$

โดยให้ a แทน ความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากับขนาดของมุม A

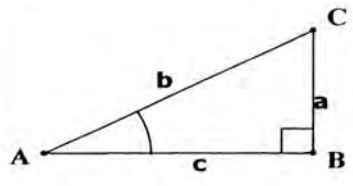
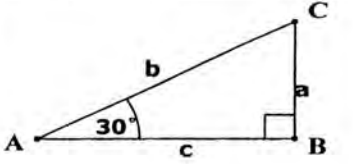
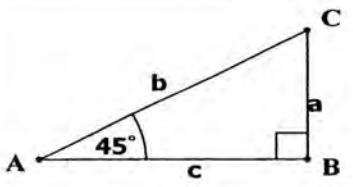
b แทน ความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก

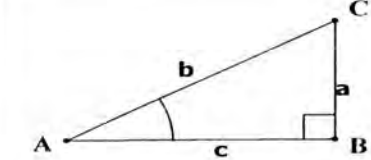
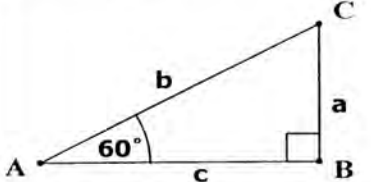
จากรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป ให้นักเรียนวัดความยาว a และ b แล้วตอบคำถามต่อไปนี้

2.1 โดยใช้ความยาวที่วัดได้ของด้านของรูปสามเหลี่ยม จงหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นเท่าไร และเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

2.2 ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งซึ่งคล้ายกับรูปสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ให้ p แทนความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากับมุม A และ q แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก นักเรียนคิดว่า $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่ อย่างไร

3. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากโดยให้มุม A มีขนาดตามที่กำหนดให้ในตาราง พร้อมทั้งวัดความยาวของ a, b และ c แล้วเติมข้อมูลลงในตาราง โดยใช้ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	30°						
	45°						

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	60°						

4. สรุปสิ่งที่ได้จากกิจกรรมในข้อที่ 1 ถึง 3

นักเรียนกลุ่มที่ 1 (แพรว, เมย์, แนน)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้เตรียมกระดาษ ไม้บรรทัดและกรรไกรให้นักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกัน ทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 แพรวได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรมนักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนได้สร้างขึ้นใหม่ให้มีลักษณะคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมและเมย์ก็ได้หาว่าอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมกับรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่เท่ากันหรือไม่ แพรวได้เสนอว่ามันไม่เท่ากันนะ เพราะอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมเดิมเท่ากับ $\frac{1}{2.07}$ แต่อัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมใหม่เท่ากับ $\frac{1}{2}$ แนนก็เลยแย้งขึ้นมาว่าค่าประมาณของรูปสามเหลี่ยมเดิมเท่ากับ $\frac{1}{2}$ นะ ดังนั้นอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็เท่ากันสิ แพรวก็เสนอว่า ถ้างั้นไม่ว่าความยาวของแต่ละด้านจะยาวเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนจะเท่ากันเสมอใช่ไหม เมย์ก็ตอบว่าใช่และถ้ามุมมันเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีค่าเท่ากันเพราะอัตราส่วนในการเพิ่มของแต่ละด้านเท่ากันและเมื่อขนาด

ของมุมมีค่าเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย ดังโปรแกรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้

เมย์ : ลงมือวาดรูปตามโจทย์ โดยวัดความยาวจากรูปเดิม แล้วให้มันยาวเท่าใดละ

แพรว : วัดมุมฉากก่อนสิ แล้วขีดขึ้นไปเลย

เมย์ : อืม

แพรว : อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปในข้อ 1 เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

แพรว : ไม่เท่า

เน็ก : เพราะ...

แพรว : $\frac{a}{b}$ อันนี้เป็น $\frac{1}{2}$ แต่อีกอันเป็น $\frac{1}{2.07}$ มันเลยไม่เท่ากัน

เน็ก : ค่าประมาณเป็น $\frac{1}{2}$ นะมันเลยเท่ากัน เพราะอัตราส่วนในการเพิ่มแต่ละด้านเท่ากัน

แพรว : ถ้าจันไม่ว่า d, e จะยาวเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนของ $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ แน่นป่ะ

เน็ก : ใช่

เมย์ : ถ้ามุมมันเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะเท่าเดิมด้วย

นักเรียนคิดว่า $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ ที่หาได้ในข้อ 1 เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด ไม่ว่า d, e หรือ f จะยาวเท่าใดก็ตาม

เท่ากันหมด $\hat{D} = \hat{A}$ กับ $\hat{E} = \hat{B}$ ส่วนนี้ $\hat{F} = \hat{C}$

จึงทำให้ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปเท่ากันหมด

a เดิม	a เดิม = 2.7
b เดิม	b เดิม = 5.6
a ใหม่ = 9	อัตราส่วน $\frac{a}{b} = \frac{2.7}{5.6}$
b ใหม่ = 14	
อัตราส่วน $\frac{a}{b} = \frac{9}{14}$	$= \frac{1}{2.07}$
$= \frac{1}{2}$	$\approx \frac{1}{2}$

ภาพที่ 27 แสดงอัตราส่วน ของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากับ 30°

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยให้มุม A ไม่เท่ากับ 30° เน้นเสนอว่าเป็นมุม 45° หรือ 60° ก็ได้ นักเรียนทั้ง 3 คนก็ตกลงกันว่าเอามุม 60° แล้วเมย์ก็ลงมือสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและที่วัดอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ได้เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\frac{p}{q}$ ได้เท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้นอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็เท่ากันสิ แพรวก็เสนอว่า ถ้าจั้นไม่ว่าเราจะเปลี่ยนมุมให้มีขนาดเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนจะเท่ากันเสมอใช่ไหม เมย์ก็ตอบว่าใช่ถ้ามุมมันเท่าเดิม ค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันแล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีค่าเท่ากันเสมอ ดังโปรดคลอการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

แพรว : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC อีกรูปหนึ่งโดยให้ มุม A ไม่เท่ากับ 30°

และสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ให้คล้ายกับ $\triangle ABC$

เมย์ : ไม่เท่ากับ 30° เป็นยังไง

เน็ก : A ไม่เท่ากับ 30° เป็น 45° ก็ได้ 60° ก็ได้

เมย์ : เราก็เลือกเอาสักมุม จะเอามุมเท่าใด

เน็ก : เอามุม 60° นะ

แพรว : จงหาอัตราส่วน $\frac{a}{b}$

เมย์ : สร้างรูปตามโจทย์และวัดความยาวของ a และ b และ $\frac{a}{b}$ เป็น $\frac{\sqrt{3}}{2}$

แพรว : อีกรูปละ

เน็ก : เอาเหมือนเดิมความยาวเท่าเดิม

แพรว : มันก็เหมือนเดิมสิ

เน็ก : เอารูปเดิมแต่คูณ 2 เข้าทุกด้านของสามเหลี่ยมเลย

เมย์ : จะได้ฐานยาว 2 ครบนี้เป็น 4 (ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก) และอีกด้านก็จะยาว $2\sqrt{3}$

แพรว : แล้ว $\frac{p}{q}$ มีค่าเท่าใดละ

เน็ก : $\frac{p}{q}$ เป็น $\frac{\sqrt{3}}{2}$

แพรว : ถ้าจั้นไม่ว่าเราจะเปลี่ยนมุมให้มีขนาดเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนจะเท่ากันเสมอใช่ไหม

เมย์ : ใช่ถ้ามุมมันเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย



ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งซึ่งคล้ายกับสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ให้ p แทนความยาวความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากับมุม A และ q แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

นักเรียนคิดว่า $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่อย่างไร

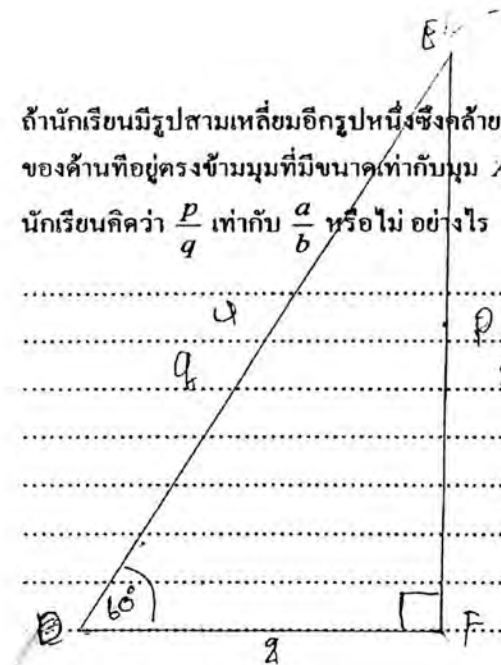
$$\frac{p}{q} = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{ถ้า } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{p}{q} = \frac{a}{b}$$

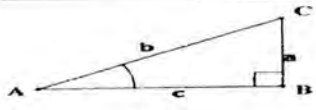
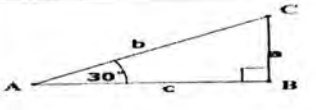
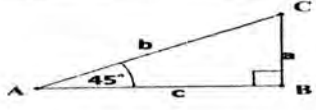
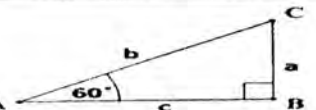


ภาพที่ 28 แสดงอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมไม่เท่ากับ 30°

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 และ 2 เมื่อนักเรียนหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันจะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีค่าคงที่เสมอไม่ว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดเท่าใดก็ตามถ้ามุม A มีขนาดคงที่แล้ว จะได้รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันเสมอ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่ 3 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนักเรียนได้ช่วยกันสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดของมุมตามที่โจทย์กำหนดให้แล้วช่วยกันวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปพร้อมทั้งนำเอาความยาวของแต่ละด้านมาเขียนในรูปของอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความว่าด้าน $\overline{AB}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้าน $\overline{AC}$ เรียกว่า ด้านประชิดมุม A และด้าน $\overline{BC}$ เรียกว่าด้านตรงข้ามมุม A และอัตราส่วนทั้งสามมีชื่อเรียก ดังนี้ เรียก $\frac{BC}{AB}$ ว่าไซน์ (sine) ของมุม A เรียก $\frac{AC}{AB}$ ว่าโคไซน์ (cosine) ของมุม A และเรียก $\frac{BC}{AC}$ ว่าแทนเจนต์ (tangent) ของมุม A ดังที่แสดงในภาพที่ 29

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	30°	5.4	8.7	7.5	$\frac{4.4}{8.7}$	$\frac{7.5}{8.7}$	$\frac{4.4}{7.5}$
	45°	7.5	10.5	7.5	$\frac{7.5}{10.5}$	$\frac{7.5}{10.5}$	$\frac{7.5}{7.5}$
	60°	13.4	15.4	7.5	$\frac{13.4}{15.4}$	$\frac{7.5}{15.4}$	$\frac{13.4}{7.5}$

ภาพที่ 29 แสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จากการอภิปรายในข้างต้นพบว่า อัตราส่วนแต่ละอัตราส่วนในแต่ละรูปจะเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน โดยจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของนักเรียนในการวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปและขนาดของมุม ซึ่งค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ที่มีขนาดของมุม 30° , 45° และ 60° ตามลำดับ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

กลุ่มที่ 2 (มัว, นิล, ฟ้า)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าในการเรียนรู้กิจกรรมที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้เตรียมกระดาษ ไม่บรรทัดและกรรไกรให้นักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 นิลได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟังแล้วลงมือทำกิจกรรมนักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนได้สร้างขึ้นใหม่ให้มีลักษณะคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมและฟ้ายก็ได้หาว่าอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิมกับรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่

เท่ากันหรือไม่ มีัวได้เสนอว่าเท่ากันนะ เพราะอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมเดิมเท่ากับ $\frac{3}{5}$ และอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมใหม่เท่ากับ $\frac{3}{5}$ เหมือนกัน ดังนั้นอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็มีค่าเท่ากัน ฟาก็เสนอว่า ถ้าจั้นไม่ว่าความยาวของแต่ละด้านจะยาวเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนจะเท่ากันเสมอใช่ไหม มีัวก็ตอบว่าใช่และถ้ามุมมันเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย แต่นิลแย้งขึ้นมาว่าไม่เท่ากันเพราะว่าความยาวมันต่างกัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนได้ช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีค่าไม่เท่ากันเพราะความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปยาวไม่เท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

นิล : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่ตัดไว้

มีัว : ใช้ความยาวหาकिनเลข คือ 3, 4 และ 5 เซนติเมตร

นิล : ok

ฟ้า : อัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปในข้อ 1 เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

มีัว : เท่ากัน เพราะอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็มีค่าเท่ากัน

ฟ้า : ถ้าจั้นไม่ว่า d, e จะยาวเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนของ $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ เสมอไปใช่หรือไม่

มีัว : เสมอไป

ฟ้า : เท่ากันอยู่แล้ว เพราะมุมมันเท่ากัน แต่ถ้าเป็นความยาวของด้านจะไม่เท่ากัน

นิล : แต่ถ้าเป็นอัตราส่วนตรีโกณมิติ จะไม่เสมอไปเพราะว่าความยาวมันต่างกัน

มีัว : อัตราส่วนเท่ากันนะ

ฟ้า : เขาถามหาอัตราส่วนหรือความยาว

นิล : ความยาว

มีัว : อัตราส่วน

นิล : ลองแทนความยาวเป็น 5, 12 และ 13 ดูสิ

มีัว : อืม อัตราส่วนมันไม่เท่ากันเลข

นักเรียนคิดว่า $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ ที่หาได้ในข้อ 1 เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด ไม่ว่า d, e หรือ f จะยาวเท่าใดก็ตาม

ไม่เสมอไป เพราะ ความยาวของทศจรูปยาวไม่เท่ากัน ดังนั้น จึงทำให้ คติฐานยังไม่ทำได้ในเสมอไป

ภาพที่ 30 แสดงอัตราส่วน ของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากับ 30°

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยให้มุม A ไม่เท่ากับ 30° ฟ้าเสนอว่าเป็นมุม 45° แล้วนิลก็ลงมือสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและวัดอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ได้ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป ได้เท่ากับ $\frac{3}{4.5}$ และ $\frac{4}{6}$ ดังนั้นอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็เท่ากันสิ ฟ้าก็เสนอว่า ถ้าฉันไม่ว่าเราจะเปลี่ยนมุมให้มีขนาดเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนจะเท่ากันเสมอใช่ไหม นีลก็ตอบว่าใช่ถ้ามุมมันเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันแล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีค่าเท่ากันเสมอ ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นดังนี้

มีว : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC อีกรูปหนึ่งโดยให้มุม A ไม่เท่ากับ 30° และสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ให้คล้ายกับ $\triangle ABC$

นิล : ไม่เท่ากับ 30°

มีว : เอากี่องศาละ

ฟ้า : เอามุม 45° นะ

นิล : มุมนี้ 45° มุมนี้ก็ 45° และมุมนี้ 90° (ชี้ที่รูป)

มีว : รูปสามเหลี่ยม DEF มันคล้ายกันก็ต้องมีมุมเท่ากับ 45° เท่ากัน

ฟ้า : อัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นอย่างไร

นิล : $\frac{a}{b}$ ของรูปที่ 1 เป็น $\frac{3}{4.5}$ และ $\frac{a}{b}$ ของรูปที่ 2 เป็น $\frac{4}{6}$ เท่ากันหรือไม่

นิล : ไม่

มีว : อัตราส่วนนะ ลองหารดูสิ

นิล : ได้ 0.6 เหมือนกัน

มีว : เท่ากัน

ฟ้า : เท่ากัน เพราะอะไร

มีว : เมื่อมุมเท่ากัน อัตราส่วนเลยเท่ากัน

ฟ้า : ถ้าฉันไม่ว่าเราจะเปลี่ยนมุมให้มีขนาดเท่าใดก็ตาม อัตราส่วนจะเท่ากันเสมอใช่ไหม

มีว : ใช่ถ้ามุมมันเท่าเดิมค่าของอัตราส่วนก็จะมีค่าเท่าเดิมด้วย

โดยใช้ความยาวที่วัดได้ของด้านของรูปสามเหลี่ยม จงหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมแต่ละรูป

เป็นเท่าไร และเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

$$\frac{a}{b} \text{ รูปที่ 1 } \frac{3}{4.5} = 0.6$$

$$\text{รูปที่ 2 } \frac{4}{6.6} = 0.6$$

เท่ากัน เพราะ 3 เป็น 4 อัตราส่วน 4 หาร 6 แล้วได้ 0.6
4 หาร 6.6 เท่ากัน คือ 0.6

ภาพที่ 31 แสดงอัตราส่วน ของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมไม่เท่ากับ 30°

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 นักเรียนนำรูปสามเหลี่ยมจากข้ออื่นมาใช้ โดยไม่ได้สร้างรูปสามเหลี่ยมขึ้นมาใหม่และวัดความยาวจากรูปสามเหลี่ยมนั้นซึ่งไม่ได้คำนึงถึงขนาดของมุมว่ามีขนาดกี่องศาเลยทำให้นักเรียนไม่สามารถสรุปได้ว่าอัตราส่วนของ $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ เมื่อรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีขนาดมุมเท่ากัน ส่วนในกิจกรรมที่ 2 เมื่อนักเรียนหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันจะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีค่าคงที่เสมอไม่ว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดเท่าใดก็ตาม ถ้ามุม A มีขนาดคงที่แล้ว จะได้รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันเสมอ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณานาฏลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์

(Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่ 3 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนักเรียนได้ช่วยกันสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดของมุมตามที่โจทย์กำหนดให้แล้วช่วยกันวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปพร้อมทั้งนำเอาความยาวของแต่ละด้านมาเขียนในรูปของอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความว่าด้าน $\overline{AB}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้าน $\overline{AC}$ เรียกว่า ด้านประชิดมุม A และด้าน $\overline{BC}$ เรียกว่าด้านตรงข้ามมุม A และอัตราส่วนทั้งสามมีชื่อเรียก ดังนี้ เรียก $\frac{BC}{AB}$ ว่าไซน์ (sine) ของมุม A เรียก $\frac{AC}{AB}$ ว่าโคไซน์ (cosine) ของมุม A และเรียก $\frac{BC}{AC}$ ว่าแทนเจนต์ (tangent) ของมุม A ดังที่แสดงในภาพที่ 32

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	30°	2.0	1.0	1.7	$\frac{2.0}{1.0}$	$\frac{1.7}{1.0}$	$\frac{2.0}{1.7}$
	45°	3.2	2.2	2.2	$\frac{3.2}{2.2}$	$\frac{3.2}{2.2}$	$\frac{3.2}{2.2}$
	60°	3.9	2.3	2.0	$\frac{3.9}{2.3}$	$\frac{2.0}{2.3}$	$\frac{3.9}{2.0}$

ภาพที่ 32 แสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จากการอภิปรายในข้างต้นพบว่า อัตราส่วนแต่ละอัตราส่วนในแต่ละรูปจะเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน โดยจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของนักเรียนในการวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปและขนาดของมุม ซึ่งค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ที่มีขนาดของมุม 30° , 45° และ 60° ตามลำดับ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์การทำกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้พบว่าในระหว่างการทำกิจกรรมของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่มนักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับขั้นตอนและวิธีการจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยม รวมทั้งการสร้างและหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถสรุปผลได้ ดังนี้

ตารางที่ 4 การวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้ วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ของ van Hiele	ผลการวิเคราะห์กิจกรรมการเรียนรู้	
	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2
ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization or Recognition)	นักเรียนสามารถบอกชื่อเปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้	นักเรียนสามารถบอกชื่อเปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้
ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)	นักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้ นักเรียนสามารถย่อรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้และสามารถเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่อที่มีขนาดเท่ากันได้ แต่ไม่สามารถขยายรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ได้	นักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้ นักเรียนสามารถย่อ และขยายรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้และสามารถเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่อที่มีขนาดเท่ากันได้



ตารางที่ 4 การวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้ วัตถุจริง เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ (ต่อ)

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ของ van Hiele	ผลการวิเคราะห์กิจกรรมการเรียนรู้	
	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2
ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือ การพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)	นักเรียนสามารถสร้างและหา อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยม สองรูปที่มีขนาดมุมเท่ากันได้ ไม่ว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุม ฉากให้มีขนาดเท่าใดก็ตาม	นักเรียนสามารถสร้างและหา อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยม สองรูปที่มีขนาดมุมเท่ากันได้ แต่นักเรียนจะยึดติดกับขนาด ความยาวของด้านของรูป สามเหลี่ยมมุมฉากที่ไม่ใช่ขนาด ของมุมที่กำหนดให้
ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิง นิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน หรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction or Ordering)	นักเรียนสามารถบอกความหมาย ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ นักเรียนสามารถจับคู่ด้านของ รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันโดย ให้อัตราส่วนของความยาวของ ด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาด เท่ากันเท่ากันได้ทั้งสามอัตราส่วน นักเรียนสามารถสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ ค้นพบได้ว่า อัตราส่วนแต่ละ อัตราส่วน ในแต่ละรูปจะ เท่ากันหรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่ง ค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ตามลำดับ	นักเรียนสามารถบอกความหมาย ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ นักเรียนสามารถจับคู่ด้านของ รูป สามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดยให้ อัตราส่วนของความยาวของด้าน ที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาด เท่ากันเท่ากันได้ แต่ไม่สามารถ จับคู่อัตราส่วนของความยาวของ ด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้ายที่มี มุมร่วมกันหนึ่งมุมและด้านที่อยู่ ตรงข้ามมุมที่ร่วมกันขนานกันได้ นักเรียนสามารถสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ ค้นพบได้ว่า อัตราส่วนแต่ละ อัตราส่วนในแต่ละรูปจะเท่ากัน หรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่งค่าที่ได้ นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ตามลำดับ

ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

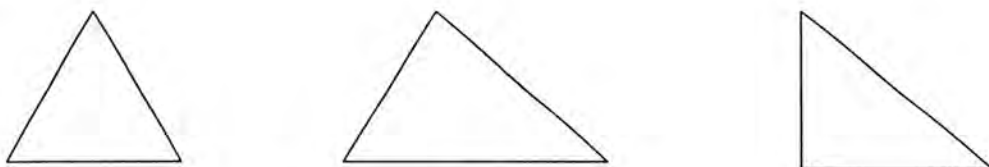
ผลการวิเคราะห์โปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้จัดระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ออกเป็น 5 ระดับ คือ การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) การวิเคราะห์หรือการพรรณารูปลักษณะ (Analysis, description) การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) และการเป็นนามธรรม (Rigor)

1.1 การแก้ปัญหาในกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง มารู้จักสามเหลี่ยมคล้ายกันเถอะ

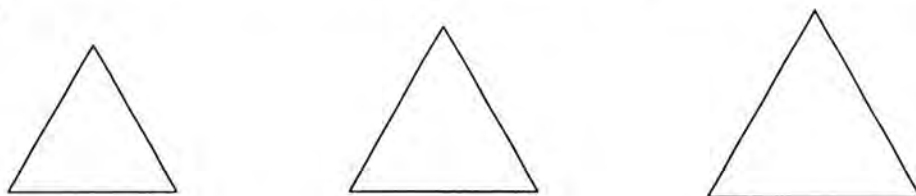
ในกิจกรรมที่ 1 นี้ต้องการให้นักเรียนบอกถึงความหมายของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันและบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่กำหนดให้คล้ายกันหรือไม่ ดังนั้นผู้วิจัยได้เสนอแนวคิดและกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ ดังนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนเปิดไฟล์ gsp แล้วคลิกเลือก ใบกิจกรรมที่ 1

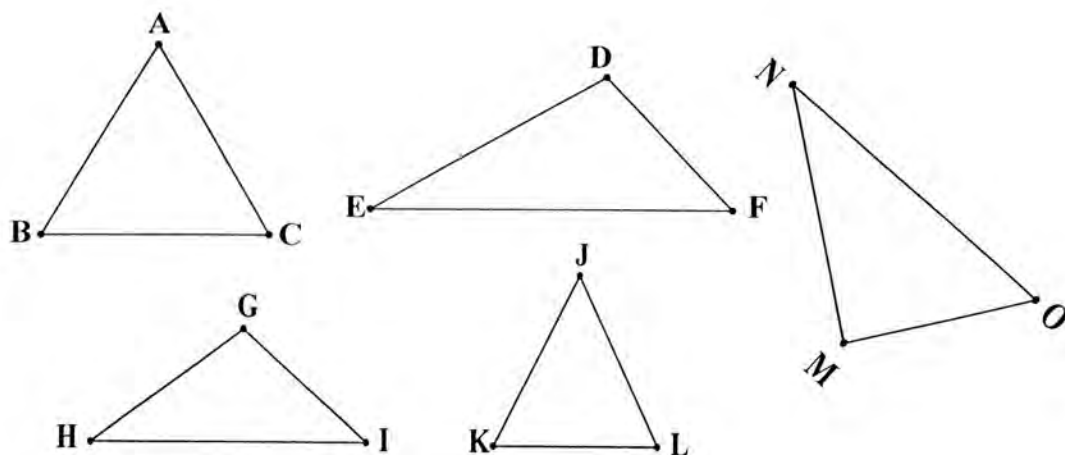
1. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



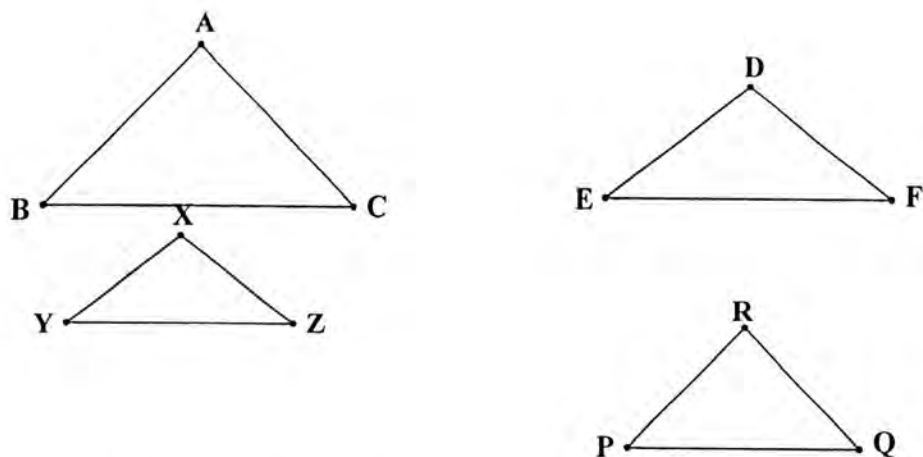
2. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



3. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด



4. รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด



5. จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

6. สรุปสิ่งที่ได้จากกิจกรรมในข้อที่ 1 ถึง 5

7. สามเหลี่ยมคล้าย หมายถึง.....

นักเรียนกลุ่มที่ 1 (ดี, ฟาง, ผน)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 3 ระดับ โดยมีตัวอย่างของรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)

ผู้วิจัยได้แนะนำวิธีการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับนักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 ดีได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูป โดยฟางและผนได้เสนอว่าไม่เป็นรูปร่างแบบเดียวกันเพราะว่ามุมของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละรูปมีขนาดต่างกันและดีได้เสนอว่ารูปสามเหลี่ยมรูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คน ได้ทดลองเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปให้มาวางซ้อนทับกันจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่ารูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีรูปร่างต่างกัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ดี : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

ฟาง : ไม่

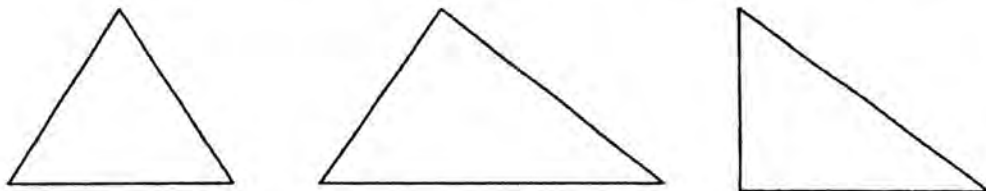
ดี : อันนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ามุมมีขนาด 60° ซึ่งไม่เหมือนกับรูปอื่นเพราะมุมมันต่างกัน

ผน : อันนี้มันกว้างแต่อันนี้มันแคบ (ชี้ที่รูป)

ฟาง : ไม่เหมือนกันเพราะมุมแต่ละรูปต่างกัน

ผน : มุมแต่ละมุมขนาดต่างกัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



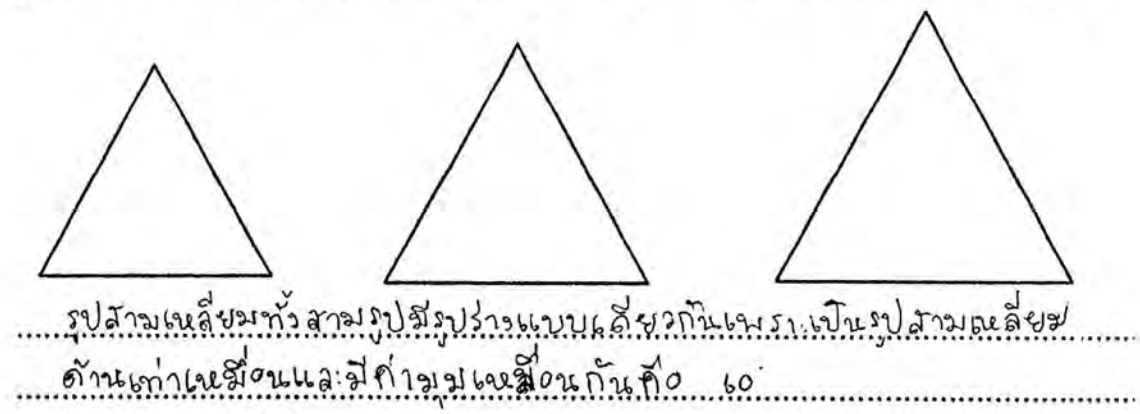
รูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูป ไม่เหมือนกันเพราะรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีค่ามุมต่างกัน รูปที่ 1 เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า มีค่ามุมหน้าอื่นกันคือ 60° แต่รูปอื่นมีค่ามุมต่างกัน

ภาพที่ 33 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกัน

ในกิจกรรมข้อ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนบอกว่ารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เมื่อฝนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนักเรียนทั้ง 3 คน ได้ทดลองเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาวางซ้อนทับกัน แล้วดีและฟ้างก็เสนอขึ้นว่ามีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีขนาดเท่ากันและเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

- ฝน : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
- ฟ้าง : เหมือนกันเพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกันแต่นำมาวางซ้อนกันใช้ไหม
- ดี : ใช่
- ฝน : รูปร่างเหมือนกันผิดแต่นำมาวางซ้อนกัน
- ฟ้าง : รูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปนี้มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะ...
- ดี : มีขนาดมุมเท่ากันและเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



ภาพที่ 34 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่านักเรียนจะพิจารณารูปร่างของรูปสามเหลี่ยมจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad และในโจทย์ โดยนักเรียนจะแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมออกตามชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว และจากการอาศัยการเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมให้มาวางซ้อนทับกันเพื่อพิจารณาว่าขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเท่ากันหรือไม่เพื่อนำมาช่วยในการแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเป็นการให้ความหมายของชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการมองเห็นและความรู้ที่ได้นี้เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนามโนคติทาง

คณิตศาสตร์ โดยที่นักเรียนได้นำความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้แสดงให้เห็นถึงระดับการรับรู้จากการมองเห็นที่นักเรียนนำเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาเรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตในระดับการรับรู้และการมองเห็น (Visualization or Recognition)

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณารูปลักษณะ (Analysis, Description)

หลังจากที่นักเรียนได้ใช้ความรู้ในระดับการรับรู้จากการมองเห็นในเรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมทำให้นักเรียนสามารถนำเอาความรู้นั้นมาช่วยในการวิเคราะห์รูปลักษณะของรูปสามเหลี่ยมเพื่อช่วยในการแยกกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันโดยนักเรียนจะนำเอารูปสามเหลี่ยมมาวางทับกันดูก่อนว่ารูปใดมีขนาดของมุมเท่ากันและนักเรียนทั้ง 3 คนก็สรุปร่วมกันว่ารูปสามเหลี่ยม KJL และ BAC มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน และรูปสามเหลี่ยม HGI และ EDF มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมีขนาดของมุมเท่ากัน แต่รูปสามเหลี่ยม OMN มีขนาดของมุมแตกต่างจากรูปสามเหลี่ยมรูปอื่นๆ ดังโปรแกรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ฟ้าง : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด

ฝน : รูปสามเหลี่ยม ABC เหมือนกันกับรูปสามเหลี่ยม JKL (ชี้ที่รูป)

ดี : ถ้ามันเหมือนกันมุมมันต้องเท่ากันด้วย

ฝน : รูปสามเหลี่ยม KJL และ BAC มีรูปร่างแบบเดียวกัน

ดี : มุมมันทับกันได้พอดีเลย

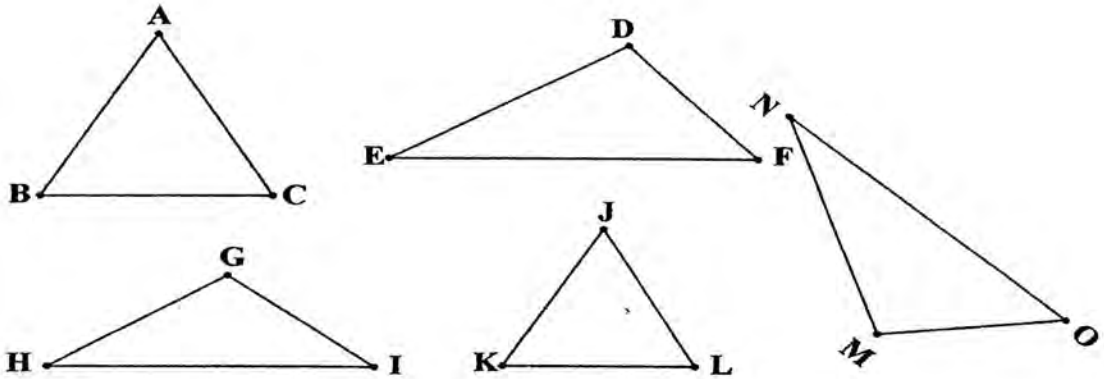
ฝน : แล้วรูป(สามเหลี่ยม OMN) นี้ไม่เหมือนเพื่อน

ฟ้าง : เราจะตอบยังไง

ดี : รูปสามเหลี่ยม BAC คล้ายกับ รูปสามเหลี่ยม KJL เพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

ฝน : รูปสามเหลี่ยม HGI กับ รูปสามเหลี่ยม EDF เพราะมีรูปร่างแบบเดียวกันส่วนรูปสามเหลี่ยม OMN มีขนาดของมุมแตกต่างจากรูปสามเหลี่ยมรูปอื่นๆ

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด



สามเหลี่ยม $\triangle ABC$ และสามเหลี่ยม KJL เท่ากันเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยม
ด้านเท่าเหมือนกัน และรูปสามเหลี่ยม HGI , EDF , ~~และ~~ มีรูปร่าง
ได้เหมือนกันแต่มีความเท่ากัน ส่วนรูปสามเหลี่ยม MNO เพราะมีด้านยาวต่างกันสาม
ด้าน HGI , EDF .

ภาพที่ 35 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

หลังจากที่นักเรียนได้จัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันแล้วในกิจกรรมข้อ
ที่ 4 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน เมื่อฟังอ่านคำชี้แจงเสร็จ
แล้วฝนได้เสนอแนะว่ารูปสามเหลี่ยม BAC และรูปสามเหลี่ยม PRQ มีลักษณะคล้ายกันเพราะเป็น
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน แต่ดีได้แย้งว่ารูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมุมไม่จำเป็นต้องมีขนาด
เท่ากัน ฟางเลยเสนอว่าเท่ากันดีเพียงแค่ว่ารูปร่างมันต่างกันเท่านั้นนักเรียนทั้ง 3 คนจึงได้ตรวจสอบวัด
ขนาดของมุมจนได้ข้อสรุปว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าและฟางได้ถามว่ามีรูปไหนอีกดีและฝนได้
เสนอว่ารูปสามเหลี่ยม EDP และ YXZ เพราะมีมุมขนาดเท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทาง
คณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ฟาง : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด

ฝน : คล้ายกัน เพราะเหตุใด

ฟาง : อันนี้ (BAC) กับอันนี้ (PRQ) น่าจะคล้ายกันนะ

ดี : อืม

ฝน : รูปสามเหลี่ยม BAC และรูปสามเหลี่ยม PRQ มีลักษณะคล้ายกันเพราะเป็น
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

ดี : สองวัดมุมดูก่อน คล้ายกัน มุมไม่จำเป็นต้องเท่ากันนะ

ฝน : ยังไงหะ

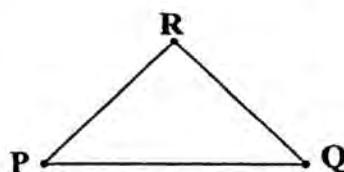
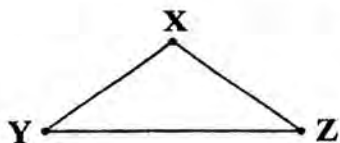
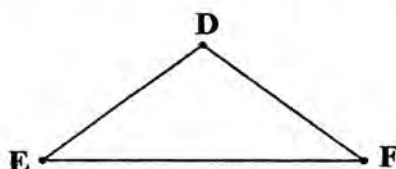
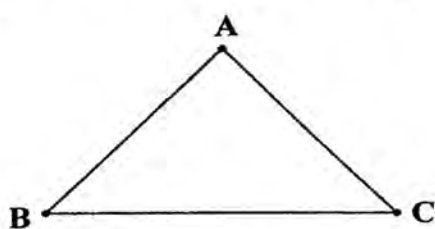
ฟ้า : คล้ายกันคือ มุมมีขนาดเท่ากันแต่รูปร่างอาจจะต่างกันหรือไม่ต่างกันก็ได้

ฟ้า : รูปไหนอีก

ดี : EDP และ XYZ เพราะมีลักษณะคล้ายกัน

ฝน : มีมุมเท่ากันด้วย

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด



รูปสามเหลี่ยม BAC และ PQR มีรูปร่างคล้ายกันและมีขนาดมุมเท่ากัน
แต่รูปสามเหลี่ยม BAC มีขนาดในอวกาศมากกว่า PQR และรูปสามเหลี่ยม XYZ และ
EDF มีรูปร่างคล้ายกันและมีขนาดมุมเท่ากันแต่ต่างกันที่รูปร่างเพราะรูปสามเหลี่ยม XYZ
มีขนาดในอวกาศเล็กกว่ารูปสามเหลี่ยม EDF ..

ภาพที่ 36 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่าในการจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้นนักเรียนจะอาศัยการสังเกตและการทดลองเลือกรูปสามเหลี่ยมไปเทียบกับรูปสามเหลี่ยมใดที่มีขนาดของมุมเท่ากันได้พอดีมุมต่อมุม ก็จะสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันถึงแม้ว่าขนาดของรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปจะไม่เท่ากันก็ตาม ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์

(Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วฟางและฝนเสนอว่าเท่ากันเพราะจากรูปสามเหลี่ยมในข้อที่ 4 จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม BAC กับรูปสามเหลี่ยม PRQ มีมุมยอดขนาดเท่ากันและรูปสามเหลี่ยม EDF กับรูปสามเหลี่ยม YXZ มีมุมยอดขนาดเท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คน ได้ช่วยกันตรวจสอบมุมคู่อื่นๆ ว่าเท่ากันหรือไม่จนได้ข้อสรุปว่ามุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้นจะมีขนาดเท่ากันเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมแบบเดียวกัน ดังโปรแกรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ฟาง : จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่
เพราะเหตุใด

ฝน : มีขนาดเท่ากัน

ฟาง : จากข้อที่ 4 เมื่อรูปสามเหลี่ยมมันคล้ายกันแล้วมุมมันก็ต้องเท่ากันสินะ

ฝน : คู่นี้ ($\triangle BAC$ กับ $\triangle PRQ$) และคู่นี้ ($\triangle EDF$ กับ $\triangle YXZ$) มีขนาดของมุมเท่ากัน

ดี : เท่ากันใช่ไหม

ฝน : อืม

จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

เท่ากันเพราะรูปสามเหลี่ยม YXZ และ EDF มีมุมเท่ากันคือ 35°

ส่วนรูปสามเหลี่ยม BAC และ PRQ มีมุมเท่ากันคือ 45°

ภาพที่ 37 แสดงข้อสรุปของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในช่วงต้นพบว่านักเรียนสามารถบอกได้ว่าเมื่อสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้ขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ด้วย และนักเรียนยังสามารถบอกได้ถึง ความหมายของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ว่า จะมีลักษณะคล้ายกันและขนาดของมุมในแต่ละคู่จะเท่ากันแม้ว่าขนาดของรูปร่างจะมีขนาดแตกต่างกันก็ตาม ดังแสดงในภาพที่ 38 ซึ่งผู้วิจัยพบว่า พฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

สามเหลี่ยมคล้าย หมายถึง.....รูปสามเหลี่ยมที่มีขนาด มุมเท่ากัน แต่มีรูปร่าง
ต่างกัน เช่น ในรูป ด้าน เอ็ดก

ภาพที่ 38 แสดงความหมายของสามเหลี่ยมคล้าย

กลุ่มที่ 2 (วัช, ตาล, เฟิร์น)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 1 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 3 ระดับ โดยมีตัวอย่างของรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition)

ผู้วิจัยได้แนะนำวิธีการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับนักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 1 วัชได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูป โดยเฟิร์นได้เสนอว่าไม่เป็นรูปร่างแบบเดียวกันเพราะว่ารูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ตาลได้แย้งว่ารูปที่ 2 และ 3 เหมือนกันนะเพียงแคกลับด้านกันเฉยๆ และเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากด้วย ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 ได้ทดลองเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมมาวางซ้อนทับกันจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่ารูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

วัช : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

เฟิร์น : บ

ตาล : เพราะ

เฟิร์น : อันนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า สามเหลี่ยมใดๆและสามเหลี่ยมมุมฉาก (ชี้ที่รูป)

ตาล : รูปที่ 2 และ 3 เหมือนกันนะเพียงแคกลับด้านกันเฉยๆและเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากด้วย

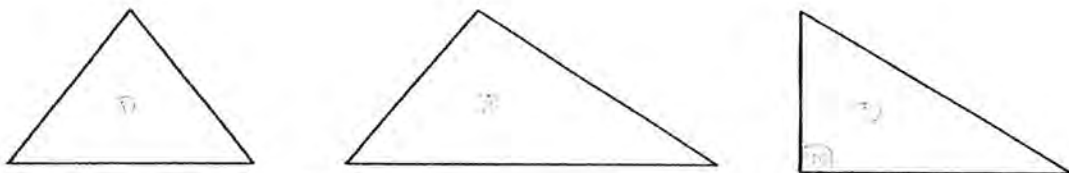
วัช : ถ้าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแล้วทำไมเส้นมันไม่ตรงละ

เฟิร์น : นั่นสิ

ตาล : สรุปว่า

เฟิร์น : ไม่เหมือนกัน เพราะรูปที่ 1 เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า รูปที่ 2 เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ และรูปที่ 3 เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



ไม่เหมือนกัน รูป ① เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า
รูป ② เป็นรูปสามเหลี่ยมหัวขึ้น
รูป ③ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
จึงเป็นรูป Δ ที่รูปร่างไม่เหมือนกัน

ภาพที่ 39 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่แตกต่างกัน

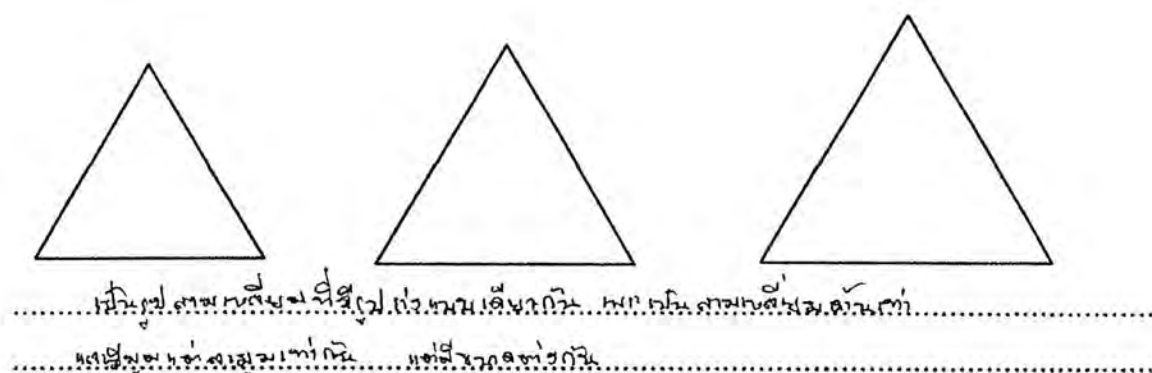
ในกิจกรรมข้อ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนบอกว่ารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เมื่ออ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วนักเรียนทั้ง 3 คนได้ทดลองเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาวางซ้อนทับกัน แล้วตาลและเฟิร์นก็เสนอขึ้นว่ามีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมทั้ง 3 รูปมีขนาดเท่ากันแต่มีขนาดต่างกัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

วัช : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

เฟิร์น : เหมือนกันเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า

ตาล : คือกัน เพราะมีมุมแต่ละมุมเท่ากันแต่ขนาดต่างกัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



ภาพที่ 40 แสดงรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่านักเรียนจะพิจารณารูปร่างของรูปสามเหลี่ยมจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad และในโจทย์โดยนักเรียนจะแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมออกตามชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่นักเรียนเคยเรียนมาแล้ว และจากการอาศัยการเคลื่อนรูปสามเหลี่ยมให้มาวางซ้อนทับกันเพื่อพิจารณาว่าขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเท่ากันหรือไม่เพื่อนำมาช่วยในการแยกรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งเป็นการให้ความหมายของชนิดของรูปสามเหลี่ยมที่ได้จากการมองเห็นและความรู้ที่ได้นี้เป็นจุดเริ่มต้นในการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ โดยที่นักเรียนได้นำความรู้นี้มาใช้ในการสร้างความหมายเกี่ยวกับลักษณะของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้แสดงให้เห็นถึงระดับการรับรู้จากการมองเห็นที่นักเรียนนำเข้ามาช่วยในการแก้ปัญหาเรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยม พฤติกรรมนี้แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตในระดับการรับรู้และการมองเห็น (Visualization or Recognition)

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

หลังจากที่นักเรียนได้ใช้ความรู้ในระดับการรับรู้จากการมองเห็นในเรื่องรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมทำให้นักเรียนสามารถนำเอาความรู้ที่ได้นั้นมาช่วยในการวิเคราะห์รูปลักษณะของรูปสามเหลี่ยมเพื่อช่วยในการแยกกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันโดยนักเรียนจะนำเอารูปสามเหลี่ยมมาวางทับกันดูก่อนว่ารูปใดมีขนาดของมุมเท่ากันซึ่งตาลได้เสนอว่ารูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม KJL มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกันและเฟิร์นก็เสนอว่ายังมีอีกคู่หนึ่งคือรูปสามเหลี่ยม HGI กับรูปสามเหลี่ยม EDP ส่วนรูปสามเหลี่ยมMNO ไม่เหมือนรูปอื่นแต่ตาลได้แย้งว่าเหมือนอยู่เพียงแค่มุมมันกลับด้านเฉยๆแล้ว

นักเรียนทั้ง 3 คนก็ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่ารูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม KJL มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน และรูปสามเหลี่ยม HGI รูปสามเหลี่ยม EDF และรูปสามเหลี่ยม MNO มีรูปร่างแบบเดียวกันเพราะมีขนาดของมุมเท่ากัน ดังโปรแกรมต่อไปนี้

วัช : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด

ตาล : รูปสามเหลี่ยม ABC เหมือนกันกับรูปสามเหลี่ยม JKL (ชี้ที่รูป) เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน รูปร่างมันเท่ากัน

เฟิร์น : รูปร่างเท่ากันแต่มีมุมเท่ากัน นี่อีกคู่หนึ่ง (ชี้ที่รูป $\triangle HGI$ กับ $\triangle EDF$)

วัช : ได้อยู่

เฟิร์น : อันนี้ไม่ได้ (ชี้ที่รูป $\triangle MNO$) ไม่เหมือนเพื่อน

ตาล : มันก็เป็นรูปเหมือนกันอยู่

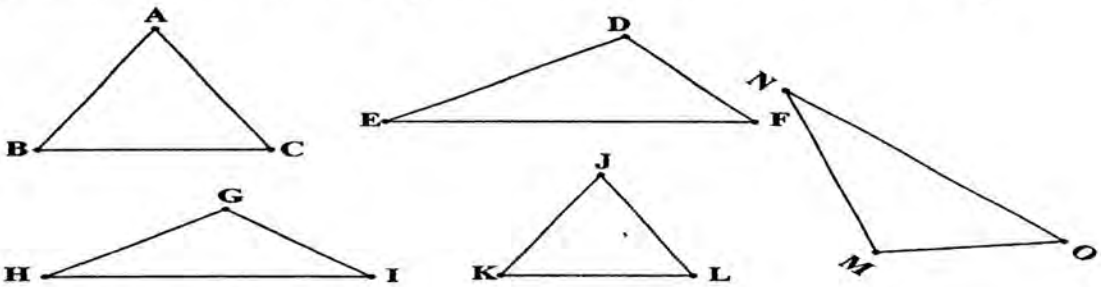
เฟิร์น : มุมมันกลับใจ

วัช : เราจะตอบยังไง

เฟิร์น : รูปสามเหลี่ยม ABC มีรูปร่างแบบเดียวกับรูปสามเหลี่ยม JKL เพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

ตาล : รูปสามเหลี่ยม EDF มีรูปร่างแบบเดียวกับรูปสามเหลี่ยม MON และรูปสามเหลี่ยม GHI แต่มีขนาดต่างกัน

รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน เพราะเหตุใด



รูป $\triangle ABC$ มีรูปร่างเหมือนกับรูป $\triangle JKL$ เพราะสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน
รูป $\triangle DEF$ มีรูปร่างเหมือนกับรูป $\triangle MNO$ และ $\triangle GHI$ เพราะขนาดต่างกัน

ภาพที่ 41 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกัน

หลังจากที่นักเรียนได้จัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีรูปร่างแบบเดียวกันแล้วในกิจกรรมข้อที่ 4 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนจัดกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน เมื่อวิชาอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้ว ตาลและเฟิร์นได้เสนอว่ารูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม PRQ มีลักษณะคล้ายกันเพราะเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกันและรูปสามเหลี่ยม DEF กับรูปสามเหลี่ยม XYZ เพราะแต่ละมุมมีขนาดเท่ากัน ดัง โปร โตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

วิช : รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด

เฟิร์น : มันคล้ายกันหมดเลย

ตาล : สองอันนี้มันคล้ายกัน ($\triangle ABC$ กับ $\triangle PRQ$) และ ($\triangle DEF$ กับ $\triangle XYZ$)

วิช : เออ มันคล้ายกัน

ตาล : ก็ถูกแล้วตัว

วิช : เราจะตอบว่ายังไง

ตาล : รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม PRQ เพราะมีขนาดมุมแต่ละมุมเท่ากันและเป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเหมือนกัน

วิช : $\hat{A} = \hat{R}$

เฟิร์น : $\hat{B} = \hat{P}$ และ $\hat{C} = \hat{Q}$

วิช : อันไหนอีก

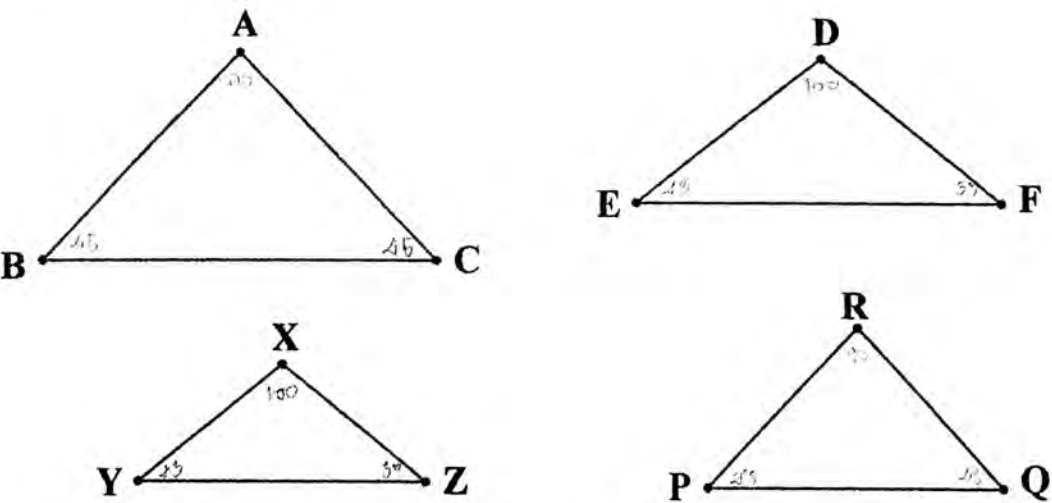
เฟิร์น : รูปสามเหลี่ยมEDP และ รูปสามเหลี่ยมYXZ เพราะ...

วิช : แต่มุมมีขนาดเท่ากัน

เฟิร์น : $\hat{D} = \hat{X}$, $\hat{Y} = \hat{E}$ และ $\hat{F} = \hat{Z}$



รูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ต่อไปนี้ รูปสามเหลี่ยมใดที่มีลักษณะคล้ายกัน เพราะเหตุใด



.....รูป $\triangle ABC$ คล้าย กับ $\triangle PQR$ เพราะมีขนาดมุมตรงมุมเท่ากัน (สามเหลี่ยมด้านเท่า)
.....รูป $\triangle DEF$ คล้ายกับ $\triangle XYZ$ เพราะมีขนาดมุมตรงมุมเท่ากัน

ภาพที่ 42 แสดงกลุ่มของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่าในการจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันนั้นนักเรียนจะอาศัยการสังเกตและการทดลองเลื่อนรูปสามเหลี่ยมไปทับกันถ้ารูปสามเหลี่ยมใดที่มีขนาดของมุมทับกันได้พอดีมุมต่อมุม ก็จะสรุปได้ว่ารูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันถึงแม้ว่าขนาดของรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปจะไม่เท่ากันก็ตาม ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจาก การวิเคราะห์หรือพรรณารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 1 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วพิจารณาและคาดเดาว่าเท่ากันเพราะจากรูปสามเหลี่ยมในข้อที่ 4 จะได้ว่ารูปสามเหลี่ยม ABC กับรูปสามเหลี่ยม PRQ มีมุมขนาดเท่ากันและรูปสามเหลี่ยม EDF กับรูปสามเหลี่ยม XYZ มีมุมขนาดเท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คน ได้ร่วมกันอภิปรายว่าเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้มุมมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังโปรแกรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ตาล : จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

เฟิร์น : มาจากข้อที่ 4

ตาล : คู่นี้ ($\triangle ABC$ กับ $\triangle PRQ$) กับ คู่นี้ ($\triangle EDF$ กับ $\triangle YXZ$) มีมุมเท่ากัน

วิช : บอกมุมด้วยสิ

ตาล : $\hat{A} = \hat{R}$, $\hat{B} = \hat{P}$ และ $\hat{C} = \hat{Q}$

เฟิร์น : $\hat{D} = \hat{X}$, $\hat{Y} = \hat{E}$ และ $\hat{F} = \hat{Z}$

จากรูปในข้อที่ 4 มุมในแต่ละคู่ของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันมีขนาดเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

..... (ก) $\triangle ABC \sim \triangle RPQ$ เพราะ $\hat{A} = \hat{R}$ มีขนาดมุมเท่ากับ 90° $\hat{B} = \hat{P}$ มีขนาดมุมเท่ากับ 45°
 และ $\hat{C} = \hat{Q}$ มีขนาดมุมเท่ากับ 45°
 (ข) $\triangle DEF \sim \triangle YXZ$ เพราะ $\hat{D} = \hat{X}$ มีขนาดมุมเท่ากับ 100° $\hat{E} = \hat{Y}$ มีขนาดมุมเท่ากับ 40°
 และ $\hat{F} = \hat{Z}$ มีขนาดมุมเท่ากับ 37°

ภาพที่ 43 แสดงข้อสรุปของรูปสามเหลี่ยมที่มีลักษณะคล้ายกัน

จากการอภิปรายในที่กล่าวมาในข้างต้นพบว่านักเรียนสามารถบอกได้ว่าเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้ขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ด้วย และนักเรียนยังสามารถบอกได้ถึง ความหมายของสามเหลี่ยมคล้ายได้ว่า จะมีลักษณะคล้ายกันและขนาดของมุมในแต่ละคู่จะเท่ากัน แม้ว่าขนาดของรูปร่างจะมีขนาดแตกต่างกันก็ตาม ดังแสดงในภาพที่ 44 ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

สามเหลี่ยมคล้าย หมายถึง..... (ก) $\triangle ABC$ (ข) สามเหลี่ยมใด ๆ (ค) สามเหลี่ยมใด ๆ
 (ง) สามเหลี่ยมใด ๆ (จ) สามเหลี่ยมใด ๆ (ฉ) สามเหลี่ยมใด ๆ (ช) สามเหลี่ยมใด ๆ (ซ) สามเหลี่ยมใด ๆ
 โดยที่มุมและขนาดมุมเท่ากัน

ภาพที่ 44 แสดงความหมายของสามเหลี่ยมคล้าย

1.2 การแก้ปัญหาในกิจกรรมที่ 2 เรื่อง อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

ในกิจกรรมที่ 2 นี้ต้องการให้นักเรียนบอกได้ว่าเมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกัน อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้เสนอแนวคิดและกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ ดังนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนเปิดไฟล์ gsp แล้วคลิกเลือก ไปกิจกรรมที่ 2

1. กำหนดให้สามเหลี่ยม DEF คล้ายกับสามเหลี่ยม ABC

ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อนจุด F** โดยให้ด้าน EF ขาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC แล้วนำ $\triangle ABC$ มาวางซ้อนทับ $\triangle DEF$ ให้ $A \square B$ ทับ $D \square E$ และด้าน CB ทับด้าน FE

1.1 ด้าน DF ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน AC

1.2 ด้าน DE ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน AB

1.3 จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอก

เหตุผล

2. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ABC ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อนจุด R** โดยให้ด้าน PR ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

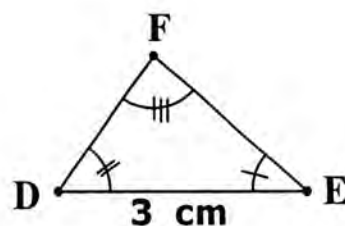
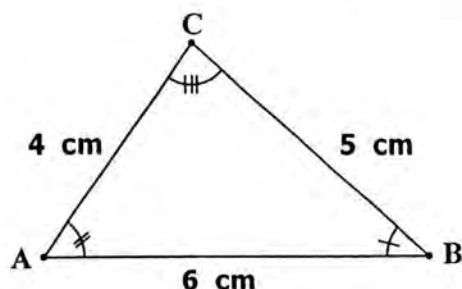
2.1 ด้าน QR ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน BC

2.2 ด้าน PQ ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน AB

2.3 จงหาค่าของ $\frac{PR}{AC}$, $\frac{QR}{BC}$ และ $\frac{PQ}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอก

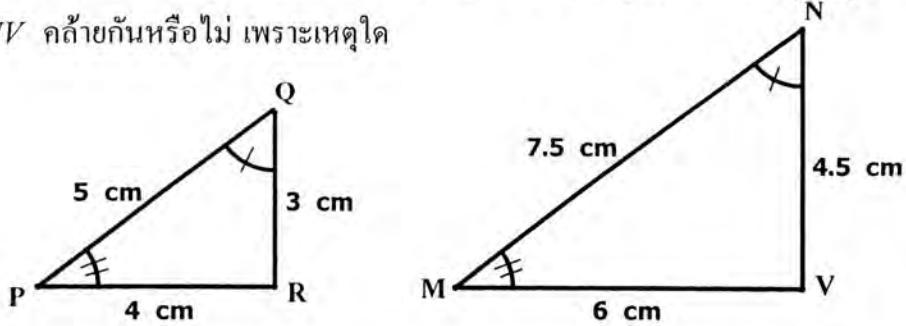
เหตุผล

3. กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ ที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ดังรูป



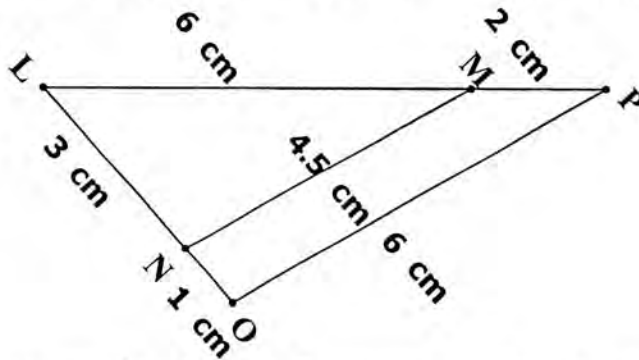
3.1 ให้นักเรียนคลิกปุ่มวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปพร้อมทั้งหาค่า $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

4. กำหนดให้ $\triangle PQR$ และ $\triangle MNV$ ที่มีขนาดของมุมเท่ากันสองคู่ ดังรูป $\triangle PQR$ และ $\triangle MNV$ คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



4.1 จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

5. กำหนดให้ $\overline{NM}$ ขนานกับ $\overline{OP}$ ดังรูป $\triangle LNM$ และ $\triangle LOP$ คล้ายกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



5.1 จงจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งกับด้านของรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งโดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

6. จากข้อที่ 4 และ 5 นักเรียนมีวิธีจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่คล้ายกันได้อย่างไร จึงจะได้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

7. ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

นักเรียนกลุ่มที่ 1 (ตี, ฟ้าง, ฝน)

จากการวิเคราะห์โปรแกรม The Geometer's Sketchpad พบว่าในการเรียนรู้กิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้แนะนำวิธีการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับนักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 ตีได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับการสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ว่าทำอย่างไรให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมที่ผู้วิจัยเตรียมเอาไว้ โดยความยาวของด้านจะเพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่า ของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม และตีได้เสนอว่า EF ยาวเป็นสองเท่าของด้าน BC ต้องยาวเป็น 6 เซนติเมตร ถึงแม้ฟ้างก็แย้งว่าไม่ใช่สองเท่าคือ $3^2 = 9$ แล้วนักเรียนทั้ง 3 คน ก็ช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งว่ายาวเป็นสองเท่าหมายความว่าอย่างไร จนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าสองเท่าคือความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมยาวเพิ่มขึ้นจากรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม เช่น จากเดิมความยาวเป็น 3 เซนติเมตร สองเท่าก็จะยาว 9 เซนติเมตร ดังโปรแกรมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ตี : ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อนจุด F** โดยให้ด้าน EF ยาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC
แล้วนำ $\triangle ABC$ มาวางซ้อนทับ $\triangle DEF$ ให้ $A \equiv B$ ทับ $D \equiv E$ และด้าน CB
ทับด้าน FE

ฟ้าง : สองเท่าของอะไรนะ

ฝน : ของ BC

ตี : EF ยาวเป็นสองเท่าของด้าน BC ต้องยาวเป็น 6

ฝน : หนึ่งเท่าก็ 3

ฟ้าง : สองเท่าก็ $3^2 = 9$

ฝน : แล้ว โจทย์บอกว่า ด้าน EF ยาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC นะ

ตี : อืม หนึ่งเท่าคือเพิ่มขึ้นจาก 3 เป็น 6 ถ้าสองเท่า...

ฟ้าง : จาก 6 ก็จะกลายเป็น 9

นักเรียนทั้ง 3 คน จึงนำเอาความยาวของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วนเพื่อเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้

$$\frac{EF}{BC} = \frac{6}{3} = 2, \frac{DF}{AC} = \frac{6}{3} = 2, \frac{DE}{AB} = \frac{6}{3} = 2$$

ฟ้าง : ทำไมมันได้ 3 หมาดละ มันน่าจะเป็นสามเท่านะ

ฝน : แสดงว่านับฐานมันด้วย

ดี : อืม ใช่

จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

ค่าทั้งสามเท่ากันเพราะรูปสามเหลี่ยม EDF มีขนาดครึ่ง 2 เท่า
ของรูปสามเหลี่ยม BAC

$$\frac{EF}{BC} = \frac{4.5}{9}, \quad \frac{DF}{AC} = \frac{12}{24}, \quad \frac{DE}{AB} = \frac{15}{30}$$

ด้าน DF ยาวเป็น 2 เท่าของ AC เพราะ AC ยาว 12 cm.
ส่วน DF ยาว 24 cm. ทำให้ DF ยาวกว่า AC อยู่ 2 เท่า
(1 เท่า = 8 2 เท่า = 16 cm)

ด้านของ DE ยาวเป็น 2 เท่าของ AB ให้มองจาก DE
ยาว 15 cm จึงมองเป็น 2 เท่าของ AB (1 = 10 2 เท่า = 20 cm)

ภาพที่ 45 แสดงอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมใหม่ต่อรูปสามเหลี่ยมเดิม

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาใหม่ โดยให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม ฟางและฝนได้เสนอว่าจากข้อที่แล้วมันเพิ่มขึ้นแต่ข้อนี้มันลดลงครึ่งหนึ่งของด้าน AC ดังนั้น PR ก็จะยาว 2 เซนติเมตร นักเรียนทั้ง 3 ได้ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าถ้ารูปสามเหลี่ยม PQR คล้ายกับ ABC แล้วจะส่งผลให้ QR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ BC และ PQ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AB และอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่นั้นมีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็นดังนี้

ดี : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อนจุด R** โดยให้ด้าน PR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

ฟาง : จากข้อที่ 1 มันเพิ่มขึ้นแต่ข้อนี้มันลดลง

ฝน : ด้าน PR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AC ต้องเป็น 2

ดี : ด้าน QR ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน BC

ฟาง : หนึ่งเท่าของ BC

ดี : หนึ่งเท่าต้องมากกว่านะ

ฟ้าง : ไม่ใช่ต้องเป็นครึ่งเท่า

ดี : ยาวเป็น $\frac{1}{2}$ ของ BC

ฝน : 0.5 เท่า

นักเรียนทั้ง 3 คน จึงนำเอาความยาวของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วนเพื่อเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้

$$\frac{PR}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{QR}{BC} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}, \frac{PQ}{AB} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$

ฟ้าง : มันเป็น $\frac{1}{2}$ เลย

ฝน : ถูกแล้วมันเป็นครึ่งหนึ่งเหมือนเดิม

ดี : เราจะตอบว่ายังไงดี

ฟ้าง : ค่าทั้งสามเท่ากันคือ $\frac{1}{2}$ เพราะสามเหลี่ยม PQR มีขนาดเล็กกว่าสามเหลี่ยม BAC

งหาค่าของ $\frac{PR}{AC}$, $\frac{QR}{BC}$ และ $\frac{PQ}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล
ค่าทั้งสามที่หาได้เท่ากัน คือ $\frac{1}{2}$ พจน์สามเหลี่ยม PQR

สามเหลี่ยม BAC สูง 1 เท่า

$$\frac{PR}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \frac{QR}{BC} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}, \frac{PQ}{AB} = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$$

QR สามเหลี่ยม BC สูง 0.5 เท่า หรือสามเหลี่ยม
 $\frac{1}{2}$ เท่าของ BC

PQ สามเหลี่ยม AB สูง 0.5 เท่า หรือสามเหลี่ยม AB
สูง $\frac{1}{2}$ เท่า

ภาพที่ 46 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป

ในกิจกรรมข้อที่ 3 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ทั้งสามคู่ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกันหรือไม่ โดยดีได้ทดลองเคลื่อนมุมของรูปสามเหลี่ยมไปมาปรากฏว่ามุมยังคงเท่าเดิมเปลี่ยนเพียงแต่ขนาด ฝนเลยเสนอดังนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนี้จึงคล้ายกันเพราะมีขนาดมุมเท่ากัน แต่เมื่อนักเรียนนำความยาวของ

รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนอยู่ในรูปอัตราส่วนปรากฏว่าอัตราส่วนแต่ละตัวมีค่าไม่เท่ากัน ดัง
โปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ดี : ให้นักเรียนคลิกที่มุมของรูปสามเหลี่ยมมุมใดมุมหนึ่งแล้วลากไปมา ตรวจสอบดูว่า

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่

ฝน : คล้ายกัน เพราะ...

ฟาง : มีมุมขนาดเท่ากันและรูปร่างคล้ายกันแต่ขนาดของรูปแตกต่างกัน

นักเรียนทั้ง 3 คน จึงนำเอาความยาวของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วนเพื่อ
เปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้

$$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{8} = 1, \frac{BE}{EF} = \frac{8}{6.1} = 1.1, \frac{CA}{FD} = \frac{8}{4.7} = 0.904$$

ฝน : ค่าทั้ง 3 มันต่างกันมากเลย

ฟาง : แสดงว่ารูปมันต้องคล้ายเพราะมุมมันเท่ากัน

ดี : ใช้รูปมันคล้าย

ฟาง : มุมทุกมุมเหมือนกันแต่ความยาวของแต่ละรูปต่างกัน

ให้นักเรียนคลิกที่มุมของรูปสามเหลี่ยมมุมใดมุมหนึ่งแล้วลากไปมา ตรวจสอบดูว่า $\triangle ABC$ และ
 $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

- คล้ายกัน เพราะมีขนาดมุมเท่ากัน และ รูปปร่างคล้ายกัน แต่ขนาด
DEF มีขนาดเล็กกว่า ABC

ให้นักเรียนคลิกวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปพร้อมทั้งหาค่า $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$

แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

ค่าทั้ง 3 ไม่เท่ากัน มุมเท่ากัน แต่ขนาดของรูปมันไม่
เท่ากัน ทำให้อัตราทั้ง 3 ต่างกัน คือ $\frac{AB}{DE} = 1$, $\frac{BC}{EF} = \frac{8}{6.1} = 1.1$
 $\frac{CA}{FD} = \frac{8}{4.7} = 0.904$

ภาพที่ 47 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดขนาด
ของมาให้ทั้งสามมุม

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 นักเรียนคิดว่าความยาวของ
ด้านที่เพิ่มขึ้นของรูปสามเหลี่ยม DEF มีขนาดเป็นสองเท่าของความยาวของรูปสามเหลี่ยม ABC แต่
นักเรียนมีความเข้าใจว่าเพิ่มขึ้นสองเท่าคือต้องนับจากฐานเดิมของรูปสามเหลี่ยมด้วย นั่นก็คือจะทำ

ให้ความยาวที่เพิ่มกลายเป็นสามเท่าของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อนำเอาความยาวที่หาได้มาวาดรูปจึงส่งผลให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ผลิตผลจากเงื่อนไขที่ผู้วิจัยได้ตั้งเอาไว้ ส่วนในกิจกรรมข้อที่ 2 นักเรียนสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ที่มีความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของสามเหลี่ยมรูปเดิมได้และในกิจกรรมข้อที่ 3 เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูปและมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ มาให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นคล้ายกันและเมื่อนักเรียนนำเอาอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมมาเปรียบเทียบกับกันจะพบว่าค่าทั้งสามของอัตราส่วนจะมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งเกิดจากความละเอียดของการวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจนทำให้ไม่สามารถนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วฟังและตีได้เสนอว่ามันคล้ายกันนะเพราะมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ 3 คู่ แต่ขนาดต่างกัน นักเรียนทั้ง 3 คนได้ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกัน หลังจากทีนักเรียนทั้ง 3 คนได้ข้อสรุปแล้วว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกันแล้วก็มาร่วมกันอภิปรายว่าทำไมยังไปถึงจะจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ ฝนเสนอว่าเราลองเคลื่อนรูปทั้งสองมาวางซ้อนทับกันสิ โดยการปรับขนาดของรูปให้มีขนาดเท่ากันก่อน ดีและฟังพูดขึ้นมาพร้อมกันว่าใช่แล้ว เมื่อมุมเท่ากันและด้านเท่ากันก็จะได้อัตราส่วนที่เท่ากันเป็น 1:1 ใจ ดังโปรดคอยการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ดี : $\triangle PQR$ และ $\triangle MNV$ คล้ายกันหรือไม่

ฟัง : คล้าย

ดี : เพราะ มีขนาดของมุมเท่ากันแต่ขนาดต่างกัน

ฟัง : จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

ฝน : ลองเคลื่อนรูปทั้งสองมาวางซ้อนทับกันสิ โดยการปรับขนาดของรูปให้มีขนาดเท่ากันก่อน

ฟัง : ใช่ๆ

ดี : เมื่อมุมเท่ากันและด้านเท่ากันก็จะได้อัตราส่วนที่เท่ากันเป็น 1:1 ใจ

นักเรียนทั้ง 3 คน ช่วยกันเขียนอัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน

$$PQ:MN, QR:NV \text{ และ } PR:MV$$

จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน

เท่ากันทั้งสามคู่

อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่
โดยมีอัตราส่วนของด้านเท่ากัน 1:1

ภาพที่ 48 แสดงการจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากันทั้งสามคู่

ในกิจกรรมข้อที่ 7 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ ผนเสนอว่าไม่เสมอไป ดีก็เลยถามขึ้นว่าทำไมล่ะ ฟางก็พูดขึ้นมาว่าเพราะรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาดของมุมเท่ากันแต่มีขนาดรูปร่างต่างกัน ดังโปรดคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ดี : ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่

ผน : ไม่เสมอไป เพราะ...

ดี : ทำไมล่ะ

ฟาง : รูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาดของมุมเท่ากันแต่มีขนาดรูปร่างต่างกัน ทำให้อัตราส่วนไม่เท่ากัน

ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

ไม่พอครับ รูปสามเหลี่ยมมีขนาดมุมเท่า แต่ขนาดรูปไม่เท่ากัน
ทำให้อัตราส่วนไม่เท่ากันได้

ภาพที่ 49 แสดงข้อสรุปการจับคู่ของด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 4 นักเรียนสามารถจับคู่ให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอ โดยนักเรียนจะพิจารณาจากเลื่อนรูปสามเหลี่ยมให้มาวางซ้อนทับกันส่วนในกิจกรรมข้อที่ 5 นั้นนักเรียนไม่สามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันได้ทั้งสามคู่ ซึ่งสามารถจับคู่ได้เพียงสองคู่เท่านั้น จึงทำให้นักเรียนสรุปในกิจกรรมข้อที่ 7 ว่าไม่สามารถจับคู่ให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันได้ ถึงแม้ว่าจะมีมุมขนาดเท่ากันก็ตาม ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

กลุ่มที่ 2 (วัช, ตาล, เฟิร์น)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าในการเรียนรู้กิจกรรมที่ 2 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้แนะนำวิธีการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับนักเรียน ในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 2 ตาลได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟัง แล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับการสร้างรูปสามเหลี่ยม DEF ว่าทำอย่างไรให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมที่ผู้วิจัยเตรียมเอาไว้ ตาลได้เสนอว่าลองเลื่อนให้รูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมาทับกันสิ โดยให้มุม A ตรงกับมุม F และเฟิร์นได้เสนอว่าถ้าด้าน DF ก็ยาวเป็น 4 เท่าของด้าน AC สิ วัชเลยแย้งขึ้นมาว่าจะสามเท่าได้ไหมมันน่าจะเป็นสองเท่านะนักเรียนทั้ง 3 คน ก็ช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งว่าความยาวที่เพิ่มขึ้นของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม DEF ยาวเป็นเท่าไร จนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม DEF ยาวเป็น 6, 8 และ 10 เซนติเมตร ตามลำดับ นั่นก็คือ DF ยาวเป็นสองเท่าของ AC และ DE ยาวเป็นสองเท่าของ AB ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ตาล : ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อนจุด F** โดยให้ด้าน EF ยาวเป็น 2 เท่าของด้าน BC
 แล้วนำ $\triangle ABC$ มาวางซ้อนทับ $\triangle DEF$ ให้ $A \hat{=} B$ ทับ $D \hat{=} E$ และด้าน CB
 ทับด้าน FE

เฟิร์น : สามเท่า

วัช : สามเท่าอยู่หรือ

เฟิร์น : ลองลบออกดู

ตาล : เอา 12-4 เหลือ 8 ลบออก 4 จะเหลือ 4 และ $4 \times 3 = 12$ เป็นสามเท่า

วัช : อันนี้มันคือสี่หลายเท่าสองเท่าของสาม

เฟิร์น : สามคูณกันสองครั้ง เป็นเก้า

วัช : สองเท่ามันน่าจะคูณด้วยสองนะ ไม่ได้บอกให้คูณด้วยสาม

ตาล : ลองเปลี่ยนรูปใหม่สิ

วัช : สองเท่าเป็นแบบนี้แหละ

ตาล : ครึ่งต่อครึ่ง อันนี้ก็ครึ่งอันนี้ก็ครึ่ง

เฟิร์น : ด้าน DF ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน AC

ตาล : ก็สองเท่าสิ

วัช : ด้าน DF ขาว 8 เซนติเมตร

เฟิร์น : ด้าน AC ขาว 4 เซนติเมตร

วัช : ด้าน DF ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน AC

ตาล : ข้อ 2 กี่เท่า ก็กันหเรอ

เฟิร์น : เราก็สรุปเหมือนกันเพียงแค่เปลี่ยนตัวเลข

นักเรียนทั้ง 3 คน จึงนำเอาความยาวของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วนเพื่อเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้

$$\frac{EF}{BC} = \frac{6}{3} = 2, \frac{DF}{AC} = \frac{8}{4} = 2, \frac{DE}{AB} = \frac{10}{5} = 2$$

ตาล : เพราะมันเพิ่มขึ้นสองเท่าคือครึ่งต่อครึ่งของขนาดปกติ

จงหาค่าของ $\frac{EF}{BC}$, $\frac{DF}{AC}$ และ $\frac{DE}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{EF}{BC} = \frac{6}{3} \quad \frac{DF}{AC} = \frac{8}{4} \quad \text{และ} \quad \frac{DE}{AB} = \frac{10}{5}$$

จากการเปรียบเทียบอัตราส่วนที่หามาได้ มันสองเท่าของความปกติ

เพราะรูป $\triangle$ ขาวอยู่ในรูปที่ดำมีขนาด 2 เท่า

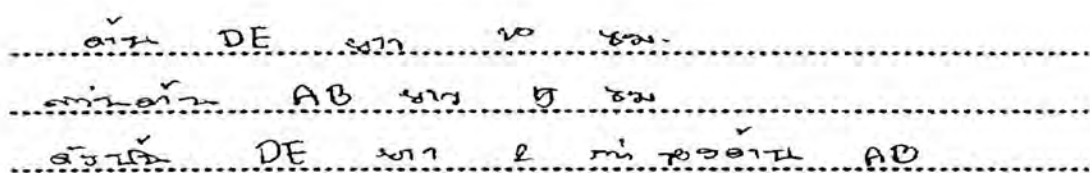
ด้าน DF ขาวเป็น 8 ซม.

ด้าน AC ขาวเป็น 4 ซม.

ด้าน DE ขาวเป็น 10 เท่าของ AC

ภาพที่ 50 แสดงอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมใหม่ต่อรูปสามเหลี่ยมเดิม





ภาพที่ 50 แสดงอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมใหม่ต่อรูปสามเหลี่ยมเดิม (ต่อ)

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาใหม่ โดยให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม วัชได้เสนอว่า PR ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC แสดงว่าต้องลดลงเหลือ 2 ดังนั้น QR ขาวเป็นสองเท่าของ BC ตาลเลยแย้งขึ้นมาว่าทำไมมันเท่ากับข้อ 1 หละแต่วัชกับเฟิร์นก็บอกว่าถูกแล้ว แล้วนักเรียนทั้ง 3 ก็ได้ร่วมกันอภิปรายเกี่ยวกับความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าถ้ารูปสามเหลี่ยม PQR คล้ายกับ ABC แล้วจะส่งผลให้ QR ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของ BC และ PQ ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของ AB และอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่นั้นที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ตาล : ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก PQR ให้คล้ายกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

ให้นักเรียนคลิกปุ่ม **เคลื่อน จุด R** โดยให้ด้าน PR ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC

วัช : ด้าน PR ขาวเป็นครึ่งหนึ่งของด้าน AC แสดงว่าต้องลดลงเหลือ 2 แมนบ่

เฟิร์น : ใช่ๆ

ตาล : ด้าน QR ขาวเป็นกี่เท่าของด้าน BC

เฟิร์น : 1.5 กับ 3

วัช : สองเท่าแมนบ่ QR ขาวเท่าใด

เฟิร์น : QR ขาว 2 เซนติเมตร

วัช : BC หละ

เฟิร์น : 3 เซนติเมตร

ตาล : ทำไมมันเท่ากับกับข้อ 1 มันถูกบ่เนี่ยะ

วัช : ถูกแล้ว แน่ใจ

นักเรียนทั้ง 3 คน จึงนำเอาความยาวของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วนเพื่อเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้

$$\frac{PR}{AC} = \frac{2}{4}, \frac{QR}{BC} = \frac{1.5}{3}, \frac{PQ}{AB} = \frac{2.5}{5}$$

- เฟิร์น : จากการเปรียบเทียบค่าที่หาได้
 วัช : มีขนาดเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าของขนาดปกติ
 ตาล : ไม่ใช่ต้อง ลดลงจากขนาดปกติ

จงหาค่าของ $\frac{PR}{AC}$, $\frac{QR}{BC}$ และ $\frac{PQ}{AB}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{PR}{AC} = \frac{2}{4} \quad \frac{QR}{BC} = \frac{1.5}{3} \quad \text{และ} \quad \frac{PQ}{AB} = \frac{2.5}{5}$$

จากการเปรียบเทียบค่าที่หามาได้จะพบว่า อัตราส่วนของด้านของรูป $\triangle ABC$ เท่ากับอัตราส่วนของด้านของรูป $\triangle PQR$

ซึ่งแสดงว่ารูป $\triangle ABC$ และรูป $\triangle PQR$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน

ภาพที่ 51 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป

ในกิจกรรมข้อที่ 3 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ทั้งสามคู่ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปนี้คล้ายกันหรือไม่ โดยวัชได้ทดลองเคลื่อนมุมของรูปสามเหลี่ยมไปมาปรากฏว่ามุมยังคงเท่าเดิมเปลี่ยนเพียงแค่ขนาด เฟิร์นและतालเลยเสนอดังนั้นรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปนี้จึงคล้ายกันเพราะมีขนาดมุมเท่ากัน แต่เมื่อนักเรียนนำความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนอยู่ในรูปอัตราส่วนปรากฏว่าอัตราส่วนแต่ละตัวมีค่าไม่เท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

วัช : ให้นักเรียนคลิกที่มุมของรูปสามเหลี่ยมมุมใดมุมหนึ่งแล้วลากไปมา ตรวจสอบดูว่า

$\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่

เฟิร์น : คล้ายกัน เพราะ...

วัช : ก็เขาบอกมาแล้วว่ามุมมันเท่ากัน

ताल : คล้ายกันแต่ความยาวแต่ละด้านไม่เท่ากัน

นักเรียนทั้ง 3 คน จึงนำเอาความยาวของสามเหลี่ยมแต่ละรูปมาเขียนในรูปของอัตราส่วนเพื่อเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้

$$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{7}, \quad \frac{BE}{EF} = \frac{6}{5.3}, \quad \frac{CA}{FD} = \frac{5}{4.6}$$

ताल : จากการเปรียบเทียบพบว่า

วัช : ด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมจะมีขนาดไม่เท่ากันแต่...

เฟิร์น : มุมมันเท่ากัน

ให้นักเรียนคลิกที่มุมของรูปสามเหลี่ยมมุมใดมุมหนึ่งแล้วลากไปมา ตรวจสอบดูว่า $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ คล้ายกันหรือไม่ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \quad \text{เพราะด้านสองด้านเท่ากัน มุมที่จับคู่กันก็เท่ากัน}$$

$$\hat{D} = \hat{F} \quad \text{เพราะมุม } 22.63^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{D} \quad \text{เพราะมุม } 49.60^\circ$$

$$\hat{B} = \hat{E} \quad \text{เพราะมุม } 41.71^\circ$$

$$\text{เพราะด้านยาวด้านหนึ่งเท่ากันแต่ด้านอื่นไม่เท่ากัน คือ } \vec{AC} \neq \vec{DF} \quad \vec{BC} \neq \vec{EF}$$

$$\text{และ } \vec{AB} \neq \vec{DE}$$

ให้นักเรียนคลิกปุ่มวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปพร้อมทั้งหาค่า $\frac{AB}{DE}$, $\frac{BC}{EF}$ และ $\frac{CA}{FD}$ แล้วเปรียบเทียบค่าทั้งสามที่หาได้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

$$\frac{AB}{DE} = \frac{a}{7} \quad \frac{BC}{EF} = \frac{b}{0.6} \quad \text{และ } \frac{CA}{FD} = \frac{0}{1.6}$$

$$\text{ทุกค่าที่ได้มาเมื่อเทียบกับด้านหนึ่งด้านของรูป } \triangle \text{ แล้วค่าไม่เท่ากัน เพราะหาค่าของรูป } A$$

$$\text{แล้วกับด้านยาวด้านอื่นก็ไม่ได้เท่ากัน}$$

ภาพที่ 52 แสดงการเปรียบเทียบอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมเมื่อกำหนดขนาดของมาให้อย่างสามมุม

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 และ 2 นักเรียนสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมรูปใหม่ที่มีความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมที่เพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าหรือลดลงเป็นครึ่งหนึ่งของสามเหลี่ยมรูปเดิมได้และเมื่อนำอัตราส่วนของความยาวของด้านของสามเหลี่ยมรูปใหม่มาเปรียบเทียบกับความยาวของสามเหลี่ยมรูปเดิมก็จะพบว่าค่าของอัตราส่วนในแต่ละรูปจะมีค่าเท่ากันเสมอไม่ว่าความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงก็ตามและในกิจกรรมข้อที่ 3 เมื่อกำหนดรูปสามเหลี่ยมสองรูปและมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ มาให้นักเรียนสามารถบอกได้ว่าสามเหลี่ยมสองรูปนั้นคล้ายกันและเมื่อนักเรียนนำเอาอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมมาเปรียบเทียบกับกันจะพบว่าค่าทั้งสามของอัตราส่วนจะมีค่าแตกต่างกัน ซึ่งเกิดจากความละเอียดของการวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมจนทำให้ไม่สามารถนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วจะทำให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้

แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 2 ข้อที่ 4 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วเฟิร์นและวัชได้เสนอว่ามันคล้ายกันนะเพราะมีมุมที่มีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ 3 คู่ แต่ขนาดต่างกัน นักเรียนทั้งสามคนได้ร่วมกันอภิปรายจนได้ข้อสรุปว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกัน หลังจากทีนักเรียนทั้งสามคนได้ข้อสรุปแล้วว่ารูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีลักษณะคล้ายกันแล้วก็มาร่วมกันอภิปรายว่าทำอย่างไรถึงจะจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ ตาลเสนอว่าเราลองเคลื่อนรูปทั้งสองมาวางซ้อนทับกันสิ โดยการปรับขนาดของรูปให้มีขนาดเท่ากันก่อน เฟิร์นและวัชพูดขึ้นมาพร้อมกันว่าใช่แล้ว เมื่อมุมเท่ากันและด้านเท่ากันก็จะได้อัตราส่วนที่เท่ากัน ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ตาล : $\triangle PQR$ และ $\triangle MNV$ คล้ายกันหรือไม่

เฟิร์น : คล้ายกัน เพราะ...

วัช : มีมุมเท่ากันเป็นคู่ๆ ทั้ง 3 คู่ และมีรูปร่างเหมือนกัน

วัช : จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่

ตาล : ลองเคลื่อนรูปทั้งสองมาวางซ้อนทับกันสิ โดยการปรับขนาดของรูปให้มีขนาดเท่ากันก่อน

เฟิร์น : ใช่ๆ

วัช : เมื่อมุมเท่ากันและด้านเท่ากันก็จะได้อัตราส่วนที่เท่ากัน

นักเรียนทั้ง 3 คน ช่วยกันเขียนอัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน

$$\overline{PQ} = \overline{MN} = 10.1 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\overline{PR} = \overline{MV} = 6.1 \text{ เซนติเมตร}$$

$$\overline{RQ} : \overline{VN} = 8.1 \text{ เซนติเมตร}$$

จงจับคู่ด้านของ $\triangle PQR$ กับด้านของ $\triangle MNV$ โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่

$$\begin{aligned} \triangle PQR &\sim \triangle MNV \quad \text{อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันได้} \\ \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{MN} = 10:1 \quad \text{ชม.} \\ \overrightarrow{PR} &= \overrightarrow{MV} = 6:1 \quad \text{ชม.} \\ \overrightarrow{RQ} &= \overrightarrow{VN} = 4:1 \quad \text{ชม.} \end{aligned}$$

ภาพที่ 53 แสดงการจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดเท่ากันทั้งสามคู่

ในกิจกรรมข้อที่ 7 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนพิจารณาว่า ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ วัชเสนอว่าไม่เสมอไป ดาลก็เลยถามขึ้นว่าทำไมล่ะ ก็เพราะว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาดต่างกันแต่มุมทั้ง 3 มุมมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ 3 คู่ ดัง โปร โตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ดาล : ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่

วัช : ไม่เสมอไป เพราะ...

ดาล : ทำไมหละ

วัช : เพราะว่ารูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีขนาดต่างกันแต่มุมทั้ง 3 มุมมีขนาดเท่ากันเป็นคู่ๆ 3 คู่

ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว นักเรียนคิดว่าจะสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป โดยให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กัน เท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

ไม่เสมอไป เพราะรูป Δ แต่ละรูปมีขนาดที่ต่างกัน แต่จะมีมุม 3 มุมเท่ากัน
เป็นคู่ๆ ก็สามเหลี่ยมรูป Δ ที่ต่างกันแต่มีขนาดต่างกันแต่จะมีมุม 3 มุมเท่ากัน
เท่ากันก็โอ

ภาพที่ 54 แสดงข้อสรุปการจับคู่ของด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้าย

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 4 และ 5 นักเรียนสามารถจับคู่ให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่จับคู่กันเท่ากันทั้งสามคู่ได้เสมอ โดยนักเรียนจะเลื่อนรูปสามเหลี่ยมให้มาวางซ้อนทับกันและขยายรูปสามเหลี่ยมให้มีขนาดเท่ากันแล้วพิจารณาจากอัตราส่วนของความยาวของด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากัน ส่วนในกิจกรรมข้อที่ 7 นักเรียนจะพิจารณาถึงขนาดของรูปร่างของรูปสามเหลี่ยมเป็นหลักเมื่อใดที่รูปสามเหลี่ยม 2 รูป ที่มีขนาดแตกต่างกันจะทำให้ให้นักเรียนมองว่าอัตราส่วนที่หาค่าได้จะมีค่าไม่เท่ากันทั้งที่ยังไม่ได้หาค่าของอัตราส่วนออกมา ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

1.3 การแก้ปัญหาในกิจกรรมที่ 3 เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในกิจกรรมที่ 3 นี้ต้องการให้นักเรียนได้เห็นที่มาของอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสามอัตราส่วนซึ่งมีชื่อเรียกว่า ไซน์ โคไซน์และแทนเจนต์ โดยให้ A เป็นมุมแหลมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ($\sin A$) อัตราส่วนของความยาวของด้านประชิดมุม A ต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ($\cos A$) และอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุม A ต่อความยาวของด้านประชิดมุม A ($\tan A$) มีค่าคงที่เสมอ ดังนั้นผู้วิจัยจึงได้เสนอแนวคิดและกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือการเรียนรู้ ดังนี้

คำชี้แจง ให้นักเรียนเปิดไฟล์ gsp แล้วคลิกเลือก ไปกิจกรรมที่ 3

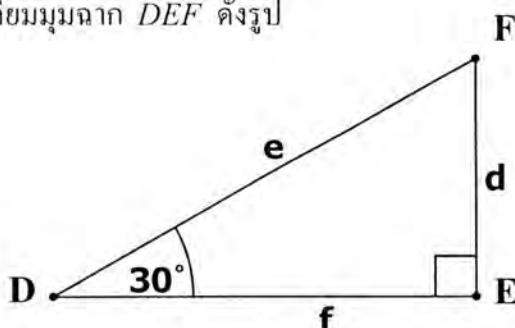
1. กำหนดให้สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC คล้ายกับสามเหลี่ยม DEF

ให้นักเรียนคลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมแล้วตอบคำถามต่อไปนี้

1.1 โดยใช้ความยาวที่วัดได้ของด้านของรูปสามเหลี่ยม จงหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นอย่างไร

1.2 อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปในข้อ 1 เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1.3 ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF ดังรูป



นักเรียนคิดว่า $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ ที่หาได้ในข้อ 1 เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด
ไม่ว่า d, e หรือ f จะยาวเท่าใดก็ตาม

2. กำหนดให้สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC คล้ายกับสามเหลี่ยม DEF

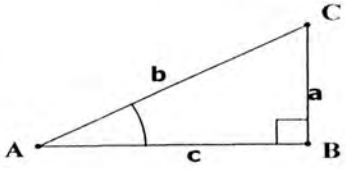
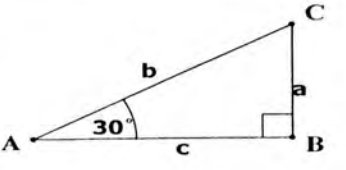
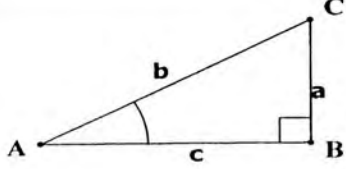
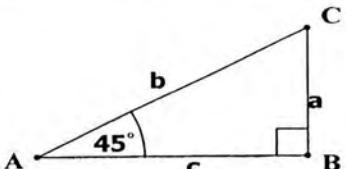
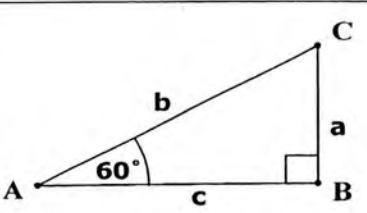
ให้นักเรียนคลิกปุ่ม ☐+ หรือ ☐- เพื่อเปลี่ยนขนาดของมุม A และมุม D ให้มีค่า
ไม่เท่ากับ 30° และให้นักเรียนคลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมแล้วตอบ
คำถามต่อไปนี้

2.1 โดยใช้ความยาวที่วัดได้ของด้านของรูปสามเหลี่ยม จงหาว่าอัตราส่วนของ $\frac{a}{b}$ และ
 $\frac{d}{e}$ ของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นเท่าไร และเท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

2.2 ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งซึ่งคล้ายกับสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ให้ p แทน
ความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากับมุม A และ q แทนความยาวของด้านตรงข้าม
มุมฉาก นักเรียนคิดว่า $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่ อย่างไร

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ

ให้นักเรียนคลิกปุ่ม ☐+ หรือ ☐- เพื่อเปลี่ยนขนาดของมุม A ตามที่กำหนดไว้ใน
ตาราง และคลิกปุ่มวัดความยาวแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม แล้วเติมข้อมูลลงในตาราง โดยใช้
ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	30°						
	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	45°						
	60°						

4. สรุปสิ่งที่ได้จากกิจกรรมในข้อที่ 1 ถึง 3



นักเรียนกลุ่มที่ 1 (ดี, ฟาง, ฝน)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนาสัญลักษณ์ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้แนะนำวิธีการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับนักเรียนในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 ดีได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟังแล้วลงมือทำกิจกรรม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนได้สร้างขึ้นใหม่ให้มีลักษณะคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม ฟางได้คลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป แล้วนักเรียนทั้ง 3 คน ก็ช่วยกันหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปว่าเท่ากันหรือไม่ ฝนได้เสนอว่าไม่เท่ากัน เพราะว่าอัตราส่วนของ $\triangle ABC$ เท่ากับ $\frac{3}{5}$ แต่อัตราส่วนของ $\triangle DEF$ เท่ากับ $\frac{2}{4}$ แม้ว่าจะมีขนาดของมุมเท่ากันก็ตาม ฟางก็เสนอว่าถ้าเราเพิ่มความยาวของด้านแต่ละด้านแล้วอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากันเสมอไปหรือไม่ ดีเสนอว่าไม่เสมอไปหรอก เพราะความยาวของแต่ละด้านไม่เท่ากัน ฟางเลยแย้งขึ้นมาว่ามันน่าจะมีโอกาสเท่ากันนะ เพราะมุมมันมีค่าเท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คน ได้ช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีค่าไม่เท่ากัน เพราะความยาวในแต่ละด้านไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุมเท่ากันก็ตาม ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

ดี : ให้นักเรียนวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

ฟาง : ได้คลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป

ดี : อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปในข้อ 1 เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

ฝน : ไม่เท่ากัน เพราะว่าอัตราส่วนของ $\triangle ABC$ เท่ากับ $\frac{3}{5}$ แต่อัตราส่วนของ $\triangle DEF$ เท่ากับ $\frac{2}{4}$

ฟาง : ถ้าเราเพิ่มความยาวของด้านแต่ละด้านแล้วอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากันเสมอไปหรือไม่

ดี : ไม่เสมอไปหรอก เพราะความยาวของแต่ละด้านไม่เท่ากัน

ฟาง : มันน่าจะมีโอกาสเท่ากันนะ เพราะมุมมันมีค่าเท่ากัน

ให้นักเรียนคลิกเมาส์ที่จุด E แล้วพิจารณาว่า $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ ที่หาได้ในข้อ 1 เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

ไม่ใช่ ไม่สอดคล้องกัน เพราะความยาวไม่คงที่ค่าของ $\frac{d}{e} \neq \frac{a}{b}$

ถ้า ค่าของ $a, b, c = d, e, f$ มีไม่คง หรือ เหนือไม่ได้ที่จะหา
อัตราส่วน $\frac{d}{e} = \frac{a}{b}$

ภาพที่ 55 แสดงอัตราส่วน ของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากับ 30°

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนเปลี่ยนขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยให้มุม A และ D ไม่เท่ากับ 30° ฟังเสนอว่าเอามุม 60° แล้วฝนก็คลิกที่ปุ่มเปลี่ยนขนาดของมุมจนมีขนาดเท่ากับ 60° และคลิกปุ่มวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป แล้วนักเรียนทั้ง 3 คน ก็ช่วยกันหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ และ $\frac{p}{q}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปว่าเท่ากันหรือไม่ ดีได้เสนอว่าไม่เท่ากัน เพราะความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุมเท่ากันก็ตาม ซึ่งนักเรียนทั้งสามคนช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีค่าไม่เท่ากัน เพราะความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุมเท่ากันก็ตาม ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเป็น ดังนี้

ดี : ให้นักเรียนคลิกปุ่ม $\boxed{+}$ หรือ $\boxed{-}$ เพื่อเปลี่ยนขนาดของมุม A และมุม D ให้มีค่า

ไม่เท่ากับ 30° และให้นักเรียนคลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

ฟัง : A ไม่เท่ากับ 30° เป็น 60° ก็ได้

ฝน : จงหาว่าอัตราส่วน $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่

ดี : ไม่เท่ากัน เพราะความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุมจะเท่ากันก็ตาม



ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งซึ่งคล้ายกับสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ให้ p แทนความยาวความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากับมุม A และ q แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

นักเรียนคิดว่า $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่ อย่างไร

.....
 เพราะ เป็นรูปสามเหลี่ยมคล้าย จึงมีความยาวที่คล้ายกัน แต่ถ้าความยาว
 ไม่เท่ากัน จึงทำให้ อัตราส่วน $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$

ภาพที่ 56 แสดงอัตราส่วน ของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมไม่เท่ากับ 30°

จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 และ 2 เมื่อนักเรียนหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากันจะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละรูปมีค่าไม่เท่ากัน เนื่องจากเมื่อนักเรียนย่อหรือขยายรูปจะพบว่าความยาวของรูปสามเหลี่ยมจะเปลี่ยนไป โดยความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นจำนวนเต็มจึงทำให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่วัดได้มีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งทำให้นักเรียนไม่สามารถนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากัน อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีค่าคงที่เสมอไม่ว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดเท่าใดก็ตามถ้ามุม A มีขนาดคงที่แล้ว จะได้รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันเสมอ แต่นักเรียนยังสามารถบอกได้ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมและความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันแล้วจะทำให้อัตราส่วนของความยาวของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันได้ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์
 (Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่ 3 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วฟังได้คลิกที่ปุ่มเพิ่มและลดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดของมุมตามที่โจทย์กำหนดให้แล้วนำเอาความยาวของแต่ละด้านมาเขียนในรูปของอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความว่าด้าน $\overline{AB}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้าน $\overline{AC}$ เรียกว่า ด้านประชิดมุม A และด้าน $\overline{BC}$ เรียกว่าด้านตรงข้ามมุม A และอัตราส่วนทั้งสามมีชื่อเรียก ดังนี้ เรียก $\frac{BC}{AB}$ ว่าไซน์ (sine) ของ

มุม A เรียก $\frac{AC}{AB}$ ว่าโคไซน์ (cosine) ของมุม A และเรียก $\frac{BC}{AC}$ ว่าแทนเจนต์ (tangent) ของมุม A ดังที่แสดงในภาพที่ 57

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	30°	3	6	5	$\rightarrow \frac{3}{6}$ $= 0.5$	$\rightarrow \frac{3}{6}$ $= 0.8$	$\rightarrow \frac{3}{5}$ $= 0.6$
	45°	5	7	5	$\frac{5}{7}$ $= 0.7$	$\frac{5}{7}$ $= 0.7$	$\frac{5}{5}$ $= 1$
	60°	1	10	5	$\frac{1}{10}$ $= 0.1$	$\frac{5}{10}$ $= 0.5$	$\frac{1}{5}$ $= 0.2$

จากจลกรณม a มีค่าเท่าเดิม sine c มีค่าเท่าเดิม cos

ของ a มีค่าเท่า tan หรือ { ตาม sine, จด cos, tan ใหม่ }
จาก จาก

เมื่อลดคิปรึ่ม + หรือ ค่ำมุมเพิ่มขึ้น ตามแนวเพิ่มขึ้น เกลื่อน ตาม
แนวของ c ตรงที่ เมื่อลดคิปรึ่ม - ตามแนวลดลง มุมลด แต่ ค่ำ c จะคง ที่ในมือ ค่ำ

ภาพที่ 57 แสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จากการอภิปรายในข้างต้นพบว่า อัตราส่วนแต่ละอัตราส่วนในแต่ละรูปจะเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน โดยจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของนักเรียนในการวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปและขนาดของมุม ซึ่งค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ที่มีขนาดของมุม 30° , 45° และ 60° ตามลำดับ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

กลุ่มที่ 2 (วัช, ตาล, เฟิร์น)

จากการวิเคราะห์โปรโตคอลพบว่าการเรียนรู้กิจกรรมที่ 3 ของนักเรียนกลุ่มที่ 2 สามารถพัฒนาการเรียนรู้ตามกรอบทฤษฎีของ van Hiele ได้ทั้งหมด 2 ระดับ โดยมีตัวอย่างรายละเอียดของแต่ละระดับ ดังนี้

ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)

ผู้วิจัยได้แนะนำวิธีการใช้ โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ให้กับนักเรียนในระหว่างที่นักเรียนร่วมมือกันทำกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 3 วัชได้อ่านคำชี้แจงให้เพื่อนๆ ฟังแล้วลงมือทำกิจกรรมนักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่นักเรียนได้สร้างขึ้นใหม่ให้มีลักษณะคล้ายกับรูปสามเหลี่ยมรูปเดิม เฟิร์นได้คลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป แล้วนักเรียนทั้ง 3 คน ก็ช่วยกันหาว่าอัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปว่าเท่ากันหรือไม่ เฟิร์นได้เสนอว่าไม่เท่ากัน เพราะว่าอัตราส่วนของ $\triangle ABC$ เท่ากับ $\frac{3}{5}$ แต่อัตราส่วนของ $\triangle DEF$ เท่ากับ $\frac{2}{5}$ ตาลก็เสนอว่าถ้าเราเพิ่มความยาวของด้านแต่ละด้านแล้วอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากันเสมอไปหรือไม่ วัชเสนอว่าไม่เสมอไป เพราะความยาวของแต่ละด้านไม่เท่ากัน ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนได้ช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีค่าไม่เท่ากัน เพราะความยาวในแต่ละด้านไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุมเท่ากันก็ตาม ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็นดังนี้

วัช : ให้นักเรียนวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

เฟิร์น : ได้ได้คลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูป

ตาล : อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ ของสามเหลี่ยมทั้งสองรูปในข้อ 1 เท่ากันหรือไม่ เพราะเหตุใด

เฟิร์น : ไม่เท่ากันเพราะ $a \neq d$

ตาล : ถ้าเราเพิ่มความยาวของด้านแต่ละด้านแล้วอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปจะเท่ากันเสมอไปหรือไม่

วัช : ไม่เสมอไป เพราะความยาวของแต่ละด้านไม่เท่ากัน

ให้นักเรียนคลิกเมาส์ที่จุด E แล้วพิจารณาว่า $\frac{d}{e}$ จะเท่ากับ $\frac{a}{b}$ ที่หาได้ในข้อ 1 เสมอไปหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ $\frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$ $\frac{1}{32} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{64}$ $\frac{1}{64} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{128}$ $\frac{1}{128} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{256}$ $\frac{1}{256} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{512}$ $\frac{1}{512} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1024}$ $\frac{1}{1024} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2048}$ $\frac{1}{2048} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4096}$ $\frac{1}{4096} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8192}$ $\frac{1}{8192} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16384}$ $\frac{1}{16384} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32768}$ $\frac{1}{32768} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{65536}$ $\frac{1}{65536} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{131072}$ $\frac{1}{131072} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{262144}$ $\frac{1}{262144} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{524288}$ $\frac{1}{524288} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1048576}$ $\frac{1}{1048576} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2097152}$ $\frac{1}{2097152} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4194304}$ $\frac{1}{4194304} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8388608}$ $\frac{1}{8388608} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16777216}$ $\frac{1}{16777216} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{33554432}$ $\frac{1}{33554432} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{67108864}$ $\frac{1}{67108864} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{134217728}$ $\frac{1}{134217728} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{268435456}$ $\frac{1}{268435456} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{536870912}$ $\frac{1}{536870912} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1073741824}$ $\frac{1}{1073741824} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2147483648}$ $\frac{1}{2147483648} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4294967296}$ $\frac{1}{4294967296} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8589934592}$ $\frac{1}{8589934592} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{17179869184}$ $\frac{1}{17179869184} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{34359738368}$ $\frac{1}{34359738368} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{68719476736}$ $\frac{1}{68719476736} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{137438953472}$ $\frac{1}{137438953472} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{274877906944}$ $\frac{1}{274877906944} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{549755813888}$ $\frac{1}{549755813888} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1099511627776}$ $\frac{1}{1099511627776} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2199023255552}$ $\frac{1}{2199023255552} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4398046511104}$ $\frac{1}{4398046511104} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8796093022208}$ $\frac{1}{8796093022208} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{17592186044416}$ $\frac{1}{17592186044416} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{35184372088832}$ $\frac{1}{35184372088832} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{70368744177664}$ $\frac{1}{70368744177664} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{140737488355328}$ $\frac{1}{140737488355328} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{281474976710656}$ $\frac{1}{281474976710656} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{562949953421312}$ $\frac{1}{562949953421312} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1125899906842624}$ $\frac{1}{1125899906842624} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2251799813685248}$ $\frac{1}{2251799813685248} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4503599627370496}$ $\frac{1}{4503599627370496} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9007199254740992}$ $\frac{1}{9007199254740992} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18014398509481984}$ $\frac{1}{18014398509481984} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36028797018963968}$ $\frac{1}{36028797018963968} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{72057594037927936}$ $\frac{1}{72057594037927936} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{144115188075855872}$ $\frac{1}{144115188075855872} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{288230376151711744}$ $\frac{1}{288230376151711744} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{576460752303423488}$ $\frac{1}{576460752303423488} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1152921504606846976}$ $\frac{1}{1152921504606846976} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2305843009213693952}$ $\frac{1}{2305843009213693952} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4611686018427387904}$ $\frac{1}{4611686018427387904} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9223372036854775808}$ $\frac{1}{9223372036854775808} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18446744073709551616}$ $\frac{1}{18446744073709551616} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{36893488147419103232}$ $\frac{1}{36893488147419103232} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{73786976294838206464}$ $\frac{1}{73786976294838206464} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{147573952589676412928}$ $\frac{1}{147573952589676412928} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{295147905179352825856}$ $\frac{1}{295147905179352825856} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{590295810358705651712}$ $\frac{1}{590295810358705651712} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1180591620717411303424}$ $\frac{1}{1180591620717411303424} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2361183241434822606848}$ $\frac{1}{2361183241434822606848} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4722366482869645213696}$ $\frac{1}{4722366482869645213696} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{9444732965739290427392}$ $\frac{1}{9444732965739290427392} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{18889465931478580854784}$ $\frac{1}{18889465931478580854784} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{37778931862957161709568}$ $\frac{1}{37778931862957161709568} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{75557863725914323419136}$ $\frac{1}{75557863725914323419136} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{151115727451828646838272}$ $\frac{1}{151115727451828646838272} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{302231454903657293676544}$ $\frac{1}{302231454903657293676544} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{604462909807314587353088}$ $\frac{1}{604462909807314587353088} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1208925819614629174706176}$ $\frac{1}{1208925819614629174706$

ภาพที่ 58 แสดงอัตราส่วน ของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากับ 30°

ในกิจกรรมข้อที่ 2 ผู้วิจัยได้ให้นักเรียนเปลี่ยนขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยให้มุม A และ D ไม่เท่ากับ 30° วัชเสนอว่าเอามุม 40° เฟิร์นเลยแย้งขึ้นว่าเอามุม 45° ดีกว่าแล้ววัชก็คลิกที่ปุ่มเปลี่ยนขนาดของมุมจนมีขนาดเท่ากับ 45° และคลิกปุ่มวัดความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป จะได้ว่าอัตราส่วนของ $\frac{a}{b} = \frac{4}{6}$ และ $\frac{p}{q} = \frac{7}{5}$ ตาลเลยเสนอดังนั้นอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปก็มีค่าไม่เท่ากันสิ ซึ่งนักเรียนทั้ง 3 คนช่วยกันตรวจสอบอีกครั้งจนได้ข้อสรุปร่วมกันว่า อัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองรูปมีค่าไม่เท่ากัน เพราะความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุมเท่ากันก็ตาม ดังโปรโตคอลการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียน เป็น ดังนี้

วิธี : ให้นักเรียนคลิกปุ่ม  หรือ  เพื่อเปลี่ยนขนาดของมุม A และมุม D ให้มีค่าไม่เท่ากับ 30° และให้นักเรียนคลิกปุ่มวัดความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยม

วิชา : A ไม่เท่ากับ 30° เอาเป็น 40°

เฟิร์น : เอาเป็น 45° ดีกว่า

วิชา : คณิต ปู้นวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูป

เฟิร์น : อันนี้ 4, 5, 6 (ซึ่งที่รูป $\triangle ABC$)

วิธี : อัตราส่วน $\frac{a}{b}$ เป็นเท่าไร

$$\text{เฟิร์น} : \frac{a}{b} = \frac{4}{6}$$

วิธี : จงหาว่าอัตราส่วน $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่

คาล : ไม่เท่ากัน เพราะความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปไม่เท่ากัน ถึงแม้ว่าจะมีขนาดของมุม
 จะเท่ากันก็ตาม

ถ้านักเรียนมีรูปสามเหลี่ยมอีกรูปหนึ่งซึ่งคล้ายกับสามเหลี่ยม $\triangle ABC$ ให้ p แทนความยาวความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่มีขนาดเท่ากับมุม A และ q แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

นักเรียนคิดว่า $\frac{p}{q}$ เท่ากับ $\frac{a}{b}$ หรือไม่ อย่างไร

$$\frac{p}{q} = \frac{7}{5} \text{ และ } \frac{a}{b} = \frac{6}{6}$$

ถ้าเราพิจารณา สามเหลี่ยมมุมฉาก A และ $\triangle ABC$ จะเห็นว่า $\frac{a}{b} = \frac{6}{6}$
 และ $\frac{p}{q} = \frac{7}{5}$ ซึ่ง $\frac{a}{b} \neq \frac{p}{q}$ ดังนั้น $\frac{p}{q} \neq \frac{a}{b}$
 $\frac{p}{q} = \frac{7}{5}$ ซึ่ง $\frac{a}{b} = \frac{6}{6}$ หรือ $\frac{a}{b} = \frac{6}{6}$ และ $\frac{p}{q} = \frac{7}{5}$
 $\cos A = \frac{a}{b} = \frac{6}{6}$

ภาพที่ 59 แสดงอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมไม่เท่ากับ 30°

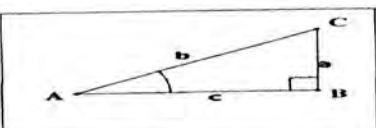
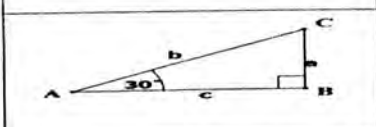
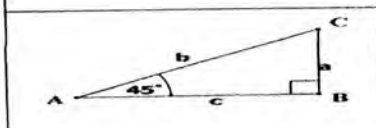
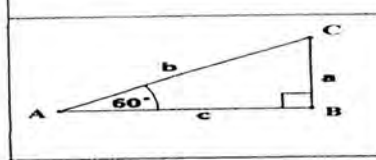
จากการอภิปรายที่กล่าวมาในข้างต้น พบว่าในกิจกรรมข้อที่ 1 และ 2 เมื่อนักเรียนหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมที่มีขนาดของมุมเท่ากันจะได้ว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมในแต่ละรูปมีค่าไม่เท่ากัน เนื่องจากเมื่อนักเรียนย่อหรือขยายรูปจะพบว่าความยาวของรูปสามเหลี่ยมจะเปลี่ยนไป โดยความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปเป็นจำนวนเต็มจึงทำให้อัตราส่วนของความยาวของด้านที่วัดได้มีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งทำให้นักเรียนไม่สามารถนำไปสู่ข้อสรุปที่ว่า เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมเท่ากัน อัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากจะมีค่าคงที่เสมอไม่ว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดเท่าใดก็ตามถ้ามุม A มีขนาดคงที่แล้ว จะได้รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันเสมอ แต่นักเรียนยังสามารถบอกได้ว่า ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดของมุมและความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมเท่ากันแล้วจะทำให้อัตราส่วนของความยาวของรูปสามเหลี่ยมทั้งสองเท่ากันได้ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกมานี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการวิเคราะห์หรือพรรณนาอุปลักษณะ (Analysis, Description)

ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์

(Informal deduction, or Ordering)

ในขณะที่นักเรียนทำกิจกรรมที่ 3 ข้อที่ 3 เมื่อนักเรียนอ่านคำชี้แจงเสร็จแล้วเพื่อนได้คลิกที่ปุ่มเพิ่มและลดขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากให้มีขนาดของมุมตามที่โจทย์กำหนดให้แล้วนำเอาความยาวของแต่ละด้านมาเขียนในรูปของอัตราส่วน ซึ่งผู้วิจัยได้ให้คำจำกัดความว่าด้าน $\overline{AB}$ เรียกว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก ด้าน $\overline{AC}$ เรียกว่า ด้านประชิดมุม A และด้าน

$\overline{BC}$ เรียกว่าด้านตรงข้ามมุม A และอัตราส่วนทั้งสามมีชื่อเรียก ดังนี้ เรียก $\frac{BC}{AB}$ ว่าไซน์ (sine) ของมุม A เรียก $\frac{AC}{AB}$ ว่าโคไซน์ (cosine) ของมุม A และเรียก $\frac{BC}{AC}$ ว่าแทนเจนต์ (tangent) ของมุม A ดังที่แสดงในภาพที่ 60

	A	a	b	c	$\frac{a}{b}$	$\frac{c}{b}$	$\frac{a}{c}$
	30°	3.0	6.0	5.0	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 0.5	$\frac{5}{6}$ 0.8	$\frac{3}{5}$ 0.6
	45°	5	7	5	$\frac{5}{7}$ 0.7	$\frac{5}{7}$ 0.7	$\frac{5}{5}$ 1.0
	60°	9	10	5	$\frac{9}{10}$ 0.9	$\frac{5}{10}$ 0.5	$\frac{9}{5}$ 1.8

ภาพที่ 60 แสดงค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติ

จากการอภิปรายในข้างต้นพบว่า อัตราส่วนแต่ละอัตราส่วนในแต่ละรูปจะเท่ากันหรือใกล้เคียงกัน โดยจะขึ้นอยู่กับความละเอียดของนักเรียนในการวัดความยาวของรูปสามเหลี่ยมแต่ละรูปและขนาดของมุม ซึ่งค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ที่มีขนาดของมุม 30° , 45° และ 60° ตามลำดับ ซึ่งผู้วิจัยพบว่าพฤติกรรมที่นักเรียนแสดงออกนี้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจจากการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering)

ผลการวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์การทำกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้พบว่าในระหว่างการทำกิจกรรมของนักเรียนทั้ง 2 กลุ่ม นักเรียนได้มีการอภิปรายเกี่ยวกับขั้นตอนและวิธีการจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยม รวมทั้งการสร้างและหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยม ซึ่งสามารถสรุปผลได้ ดังนี้

ตารางที่ 5 การวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ของ van Hiele	ผลการวิเคราะห์กิจกรรมการเรียนรู้	
	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2
ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization or Recognition)	นักเรียนสามารถบอกชื่อเปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้	นักเรียนสามารถบอกชื่อเปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้
ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)	นักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้ นักเรียนสามารถย่อและขยายรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้และสามารถเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่อที่มีขนาดเท่ากันได้	นักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้ นักเรียนสามารถย่อและขยายรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้ แต่สามารถเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่อที่มีขนาดเท่ากันได้
ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction or Ordering)	นักเรียนสามารถบอกความหมายของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ นักเรียนสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้ายโดยให้อัตราส่วนความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากันได้	นักเรียนสามารถบอกความหมายของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ นักเรียนสามารถจับคู่ด้านของรูปสามเหลี่ยมคล้ายโดยให้อัตราส่วนความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมีค่าเท่ากันได้

ตารางที่ 5 การวิเคราะห์การปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนกลุ่มที่ 1 และ 2 ที่ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ (ต่อ)

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ของ van Hiele	ผลการวิเคราะห์กิจกรรมการเรียนรู้	
	กลุ่มที่ 1	กลุ่มที่ 2
ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิง นิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน หรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction or Ordering)	นักเรียนสามารถสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ ค้นพบได้ว่า อัตราส่วนแต่ละ อัตราส่วนในแต่ละรูปจะ เท่ากันหรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่ง ค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ตามลำดับ	นักเรียนสามารถสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ ค้นพบได้ว่า อัตราส่วนแต่ละ อัตราส่วนในแต่ละรูปจะ เท่ากันหรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่ง ค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ตามลำดับ

ผลการเปรียบเทียบการพัฒนาระดับของมโนคติทางเรขาคณิตของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

จากการวิเคราะห์การทำกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้พบว่านักเรียนที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ นักเรียนจะสามารถหีบและจับต้องกับตัวของวัตถุได้โดยตรงและนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้จะช่วยให้ นักเรียนมีความตื่นตื้นกับการที่นักเรียนสามารถเคลื่อนและเปลี่ยนลักษณะของรูปสามเหลี่ยมไปมาได้แต่ในการสร้างรูปสามเหลี่ยมนั้นควรกำหนดให้ความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมีค่าความเที่ยงตรงเป็นทศนิยม 2 ตำแหน่ง เพราะว่าเมื่อนักเรียนย่อหรือขยายรูปสามเหลี่ยมจะทำให้ค่าที่ได้ออกมามีความถูกต้อง ซึ่งจะเห็นได้ว่าทั้งวัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad สามารถพัฒนาระดับของมโนคติทางเรขาคณิตของนักเรียนได้ไม่แตกต่างกัน ดังตารางการเปรียบเทียบต่อไปนี้

ตารางที่ 6 การเปรียบเทียบการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ของ van Hiele	ผลการวิเคราะห์กิจกรรมการเรียนรู้	
	ใช้วัตถุจริง	ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad
ระดับที่ 1 : การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization or Recognition)	นักเรียนสามารถบอกชื่อเปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง	นักเรียนสามารถบอกชื่อเปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้ถูกต้อง
ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)	นักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้รวมทั้งยังสามารถหาอัตราส่วนของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดมุมเท่ากันได้ว่าอัตราส่วนของความยาวของด้านตรงข้ามมุมต่อความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก	นักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้ แต่ไม่สามารถเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดมุมที่เท่ากันได้

ตารางที่ 6 การเปรียบเทียบการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัสดุจริงและโปรแกรม The Geometer’s Sketchnpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ (ต่อ)

ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ของ van Hiele	ผลการวิเคราะห์กิจกรรมการเรียนรู้	
	ใช้วัสดุจริง	ใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchnpad
ระดับที่ 2 : การวิเคราะห์หรือ การพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description)	จะมีค่าคงที่เสมอไม่ว่าจะสร้าง รูปสามเหลี่ยมให้มีขนาดเท่าใด ก็ตาม	
ระดับที่ 3 : การให้เหตุผลเชิง นิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน หรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction or Ordering)	นักเรียนสามารถบอกความหมาย ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ นักเรียนสามารถจับคู่ด้านของ รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดย ให้อัตราส่วนของความยาวของ ด้านของรูปสามเหลี่ยมมีค่า เท่ากันได้ นักเรียนสามารถสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ ค้นพบได้ว่า อัตราส่วนแต่ละ อัตราส่วนในแต่ละรูปจะ เท่ากันหรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่ง ค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ตามลำดับ	นักเรียนสามารถบอกความหมาย ของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ นักเรียนสามารถจับคู่ด้านของ รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดย ให้อัตราส่วนของความยาวของ ด้านของรูปสามเหลี่ยมมีค่า เท่ากันได้ นักเรียนสามารถสร้าง ความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ ค้นพบได้ว่า อัตราส่วนแต่ละ อัตราส่วนในแต่ละรูปจะ เท่ากันหรือมีค่าใกล้เคียงกัน ซึ่ง ค่าที่ได้นี้เป็นค่าของ $\sin A$, $\cos A$ และ $\tan A$ ตามลำดับ

อภิปรายผล

จากการเปรียบเทียบการปฏิบัติกิจกรรมการเรียนรู้เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือการเรียนรู้ สามารถสรุปได้ว่านักเรียนมีการพัฒนาทางด้านทักษะ/กระบวนการทางคณิตศาสตร์ การสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง และการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ที่เพิ่มขึ้น โดยนักเรียนสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของตนเอง คือ การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization or Recognition) การวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description) และการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction or Ordering) ซึ่งแยกเป็นระดับได้ ดังนี้

การพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนในระดับการรับรู้จากการมองเห็น (Visualization or Recognition) พบว่านักเรียนสามารถบอกชื่อ เปรียบเทียบและจัดกระทำกับรูปสามเหลี่ยมได้ โดยนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงเป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้จะสามารถบอกชื่อ เปรียบเทียบและจัดกระทำกับวัตถุได้มากกว่านักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ เนื่องจากนักเรียนได้มีการสัมผัสกับตัววัตถุโดยตรง ส่วนนักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะไม่สามารถหยิบและจับต้องวัตถุได้ ซึ่งจะสามารถทำได้เพียงการเคลื่อนรูปให้มาวางซ้อนทับกันเท่านั้น

การพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนในระดับการวิเคราะห์หรือการพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, Description) พบว่านักเรียนสามารถจำแนกรูปร่างและลักษณะของรูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกันได้ แต่นักเรียนที่ใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะไม่สามารถเปรียบเทียบอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีขนาดมุมที่เท่ากันได้ เนื่องจากเมื่อนักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมให้มีลักษณะคล้ายกันนั้นนักเรียนได้มีการกำหนดความยาวของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมให้เป็นจำนวนเต็มหน่วย เมื่อนำอัตราส่วนความยาวของรูปสามเหลี่ยมมาเปรียบเทียบกันจึงทำให้อัตราส่วนทั้งสามอัตราส่วนมีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งจากการวิเคราะห์ข้อมูลจะพบว่านักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้จะมีระดับการคิดเชิงเรขาคณิตที่ไม่แตกต่างกัน

การพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์เรื่อง อัตราส่วนตรีโกณมิติ ของนักเรียนในระดับการให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction or Ordering) พบว่านักเรียนสามารถบอกความหมายของรูปสามเหลี่ยมคล้ายได้ รวมทั้งยังสามารถเชื่อมโยงและสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ค้นพบได้ว่า เมื่อรูปสามเหลี่ยมสองรูปใดคล้ายกันแล้วอัตราส่วนของความยาวของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากันจะเท่ากันทั้งสามอัตราส่วน และนักเรียนสามารถบอกถึงที่มาของอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสามซึ่งมีชื่อ

เรียกว่า 'ไชน์ โคไซน์ และแทนเจนต์' โดยนักเรียนที่ใช้วัตถุจริงและโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือช่วยในการเรียนรู้ นักเรียนสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ค้นพบได้ไม่แตกต่างกัน

จากการศึกษาครั้งนี้พบว่า การพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนเพิ่มขึ้น ถึงแม้ว่าจะไม่มากนักแต่ก็ปรากฏให้เห็นอยู่บ้าง ทั้งนี้อาจเป็นเพราะระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัยและตัวกิจกรรมการเรียนรู้ การที่จะพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์นั้น จะต้องมีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง และใช้เวลานาน ซึ่งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Hail (2000) ที่ได้ศึกษาเกี่ยวกับการใช้การนำเสนอที่หลากหลายในการสร้างความรู้และทักษะเกี่ยวกับความเข้าใจในพื้นฐานพีชคณิต ผลการศึกษาพบว่า นักเรียนมักใช้การนำเสนอในการอธิบายการดำเนินการทางสัญลักษณ์ในการเรียนรู้เรื่อง การแก้สมการ กราฟ ช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ของตัวแปร ทั้งกราฟและอุปกรณ์จะช่วยให้ นักเรียนมองเห็นสัญลักษณ์ของการเท่ากันและการเปรียบเทียบ แม้ว่านักเรียนหลายคนยังไม่ได้เรียนเรื่องกราฟ. โดยการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์นั้นนอกจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแล้วสิ่งที่เอื้อต่อการพัฒนามโนคติทางคณิตศาสตร์ก็คือ เทคนิคและรูปแบบการสอนใหม่ๆ โดยที่ครูต้องให้ความสำคัญในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและคอยช่วยเหลือและแนะนำเมื่อนักเรียนพบปัญหาหรืออุปสรรคเพื่อให้นักเรียนได้มีการพัฒนาอย่างต่อเนื่อง ซึ่งสอดคล้องกับกระบวนการพัฒนาทางสติปัญญาตามทฤษฎีของ Piaget ที่กล่าวว่าจัดการเรียนการสอนต้องเน้นให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติและตามหลักของ Bruner จะให้โอกาสนักเรียนได้รับความเข้าใจในความรู้ที่เรียนโดยการใช้สื่อที่เป็นรูปธรรม กึ่งรูปธรรม เพื่อให้นักเรียนได้เข้าใจในสิ่งที่เรานามธรรมและการศึกษาของ Iron (1987) ที่ว่านักแก้ปัญหาที่ดีจะต้องมีความเข้าใจในความคิดรวบยอดในการแก้ปัญหาและมองเห็นสภาพการณ์ได้ชัดเจน

