

บทที่ 4

รูปแบบทางคณิตศาสตร์

1. บทนำ

การแก้ปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อยเพื่อให้ได้ผลผลิตน้ำตาลรวมสูงที่สุดและเป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุด (Optimal solution) ได้จากการพัฒนาและการหาคำตอบจากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ (Mathematical model) ซึ่งมีความเหมาะสมกับการหาคำตอบของปัญหาที่มีขนาดเล็ก มีจำนวนตัวแปร พารามิเตอร์และสมการหรืออสมการที่เกี่ยวข้องมีความซับซ้อนไม่มากนัก โดยในบทนี้ได้เสนอการพัฒนาในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ โดยมีองค์ประกอบต่าง ๆ ได้แก่ สมมติฐานของปัญหา พารามิเตอร์ ตัวแปรตัดสินใจ สมการเป้าหมาย สมการหรืออสมการข้อจำกัดที่เกี่ยวข้อง และตัวอย่างการคำนวณผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่พัฒนาขึ้น

2. รูปแบบทางคณิตศาสตร์สำหรับปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อย

2.1 สมมติฐานของปัญหา (Assumptions)

สมมติฐานของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อยได้ถูกสร้างขึ้นเพื่อให้เกิดความสอดคล้องกับรูปแบบปัญหาและลักษณะต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องในปัญหาที่สนใจ สมมติฐานของปัญหามีรายละเอียดดังต่อไปนี้ คือ

2.1.1 ค่าความหวานของอ้อยที่นำมาคำนวณผลผลิตน้ำตาลในสมการเป้าหมาย เป็นค่าความหวานจากการเก็บเกี่ยวอ้อยในแปลงเพาะปลูกแต่ละช่วงเวลา ซึ่งถือว่าระยะเวลาเริ่มตั้งแต่การเก็บเกี่ยวจนกระทั่งเข้าสู่กระบวนการผลิตน้ำตาลมีค่าน้อย โดยส่งผลให้ค่าความหวานของอ้อยไม่มีค่าลดลงตามระยะเวลารอคอยการเข้าสู่กระบวนการผลิต

2.1.2 ค่าความหวานของอ้อยในแต่ละแปลงเพาะปลูกมีค่าเท่ากันอย่างสม่ำเสมอตลอดทั้งแปลง

2.1.3 อ้อยที่ถูกจัดลำดับให้มีการเก็บเกี่ยวจากแต่ละแปลงเพาะปลูกในแต่ละช่วงเวลาถือว่าสามารถเก็บเกี่ยวได้จริง นั่นคือ ไม่คำนึงถึงสภาวะปัญหาน้ำท่วม สภาพแปลงที่ไม่สามารถเก็บเกี่ยวได้ หรือไม่มีปัญหาการขาดแคลนแรงงานเก็บเกี่ยวอ้อย

2.1.4 ปริมาณอ้อยที่ทำการเพาะปลูกรวมทั้งหมด มีปริมาณมากกว่ากำลังการผลิตรวมทั้งหมด ซึ่งจะทำให้สามารถคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและกำหนดปริมาณการเก็บเกี่ยวอ้อยของแปลงเพาะปลูกแต่ละแปลงในแต่ละช่วงเวลา เพื่อให้ได้ผลผลิตน้ำตาลรวมสูงที่สุด

2.1.5 การขนส่งอ้อยของรถบรรทุกแต่ละคัน อ้อยที่ทำการบรรทุกต้องได้จากแปลงเพาะปลูกเพียงแปลงเดียวเท่านั้น ไม่มีการผสมอ้อยจากแปลงเพาะปลูกที่แตกต่างกัน

2.1.6 การเก็บเกี่ยวอ้อยในแปลงเพาะปลูกแต่ละแปลงมีความเป็นอิสระต่อกัน

2.1.7 การเก็บเกี่ยวอ้อยที่ถูกจัดลำดับ ไม่คำนึงถึงความเสมอภาคกันของปริมาณอ้อยในแต่ละแปลง

2.1.8 ปริมาณรถบรรทุกที่ใช้ในการขนส่งอ้อยเข้าสู่โรงงาน ให้ถือว่ามีความเพียงพอต่อความต้องการในการขนส่งอ้อยตามลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อยที่ได้กำหนดขึ้น

2.2 พารามิเตอร์ (Parameters)

พารามิเตอร์ที่ใช้ในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อย มีดังนี้

i	ดัชนีแสดงวันเก็บเกี่ยว มีค่าเป็น 1, 2,..., t
j	ดัชนีแสดงแปลงเพาะปลูก มีค่าตั้งแต่ 1, 2,..., n
k	ดัชนีแสดงปริมาณบรรทุก มีค่าตั้งแต่ 1, 2,..., m
C_{ij}	ค่าความหวานของอ้อยในแปลงเพาะปลูก j ในวันเก็บเกี่ยว i
MC_i	ปริมาณกำลังการผลิตที่โรงงานต้องการสำหรับแปลงเพาะปลูกที่พิจารณาในวันเก็บเกี่ยว i
TQ_j	ปริมาณการเก็บเกี่ยวสูงสุดต่อวันของแปลงเพาะปลูก j
qt_k	ปริมาณบรรทุกที่ k ต่อคัน
Nm_{ijk}	จำนวนรถบรรทุกสูงสุดของรถบรรทุกที่มีปริมาณบรรทุก k ของวันเก็บเกี่ยว i แปลงเพาะปลูก j

2.3 ตัวแปรตัดสินใจ (Decision variables)

ตัวแปรตัดสินใจที่ใช้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อย คือ

Q_{ij}	ปริมาณอ้อยที่จะทำการเก็บเกี่ยวจากแปลงเพาะปลูก j ในวันเก็บเกี่ยว i
n_{ijk}	จำนวนคันของรถบรรทุกที่ทำการขนส่งอ้อยที่มีปริมาณบรรทุก k ในวันเก็บเกี่ยว i แปลงเพาะปลูก j

2.4 สมการเป้าหมาย (Objective function)

สมการเป้าหมายของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อย คือ

$$\text{Maximize} \quad \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n C_{ij} * Q_{ij} \quad (1)$$

สมการเป้าหมาย (1) เป็นผลคูณระหว่างค่าความหวานของอ้อยกับปริมาณอ้อยจากแปลงเพาะปลูกและวันเก็บเกี่ยวทั้งหมด ซึ่งหมายถึงผลผลิตน้ำตาลรวม โดยมีเป้าหมายให้ได้ค่ามากที่สุด

2.5 สมการและอสมการข้อจำกัด (Constraints)

สมการและอสมการข้อจำกัดที่ใช้ในแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อย มีดังนี้

2.5.1 ข้อจำกัดด้านกำลังการผลิตของโรงงาน

$$\sum_{j=1}^n Q_{ij} \leq MC_i \quad ; \forall i \quad (2)$$

สมการ (2) หมายถึง ปริมาณอ้อยรวมจากทุกแปลงเพาะปลูกในวันเก็บเกี่ยว i มีค่าไม่เกินกำลังการผลิตของโรงงานในวันเก็บเกี่ยวนั้น

2.5.2 ข้อจำกัดด้านปริมาณอ้อยรวมของแปลงเพาะปลูก

$$\sum_{i=1}^t Q_{ij} \leq TQ_j \quad ; \forall j \quad (3)$$

สมการ (3) หมายถึง ปริมาณอ้อยรวมของทุกวันเก็บเกี่ยวในแต่ละแปลงเพาะปลูก มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับปริมาณอ้อยทั้งหมดของแปลงเพาะปลูกนั้น

2.5.3 ข้อจำกัดด้านจำนวนรถบรรทุกและปริมาณบรรทุก

$$Q_{ij} \leq \sum_{k=1}^m qt_k * n_{ijk} \quad ; \forall i, \forall j \quad (4)$$

สมการ (4) หมายถึง ผลรวมของผลคูณของจำนวนรถบรรทุกและปริมาณบรรทุก มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับปริมาณอ้อยที่ทำการเก็บเกี่ยวสำหรับวันเก็บเกี่ยว i และแปลงเพาะปลูก j และอ้อยจากแปลงเพาะปลูกหนึ่งๆ จะไม่ถูกรวมบรรทุกในรถบรรทุกคันเดียวกันกับอ้อยจากแปลงเพาะปลูกอื่นๆ

$$n_{ijk} \leq Nm_{ijk} \quad ; \forall i, \forall j, \forall k \quad (5)$$

สมการ (5) หมายถึง จำนวนรถบรรทุกที่ขนส่งอ้อย มีจำนวนไม่เกินจำนวนรถบรรทุกทั้งหมด

$$n_{ijk} \geq 0 \text{ และ } n_{ijk} \text{ integer} \quad ; \forall i, \forall j, \forall k \quad (6)$$

สมการ (6) จำนวนรถบรรทุกทั้งหมด มีค่าเป็นจำนวนเต็มบวกหรือเท่ากับ 0

2.5.4 ข้อจำกัดด้านปริมาณอ้อยที่ถูกจัดให้มีการเก็บเกี่ยว

$$Q_{ij} \geq 0 \quad ; \forall i, \forall j \quad (7)$$

สมการ (7) หมายถึง ปริมาณอ้อยที่ทำการเก็บเกี่ยวในวันเก็บเกี่ยว i และแปลงเพาะปลูก j มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0

รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ได้พัฒนาขึ้นนี้ มีจำนวนตัวแปรตัดสินใจและจำนวนสมการที่เกิดขึ้นในการหาคำตอบเท่ากับ $(t \times n)(m+1)$ ตัวแปรและ $1 + t + n + (2 \times t \times n) + (2 \times t \times n \times m)$ สมการตามลำดับ

3. ตัวอย่างการคำนวณผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์

ตัวอย่างการคำนวณผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อยเพื่อให้ได้ผลผลิตน้ำตาลรวมสูงที่สุดโดยใช้คอมพิวเตอร์ซอฟต์แวร์สำเร็จรูป CPLEX/AMPL ปัญหาที่นำมาคำนวณเพื่อหาผลลัพธ์จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาที่ได้ทำการสมมติค่าของพารามิเตอร์ต่าง ๆ ขึ้น โดยเป็นการกำหนดจำนวนพารามิเตอร์ที่มีขนาดเล็กและความซับซ้อนของปัญหาและข้อจำกัดไม่มากนัก โดยรายละเอียดของค่าพารามิเตอร์ และผลลัพธ์การคำนวณ มีดังนี้

3.1 พารามิเตอร์

กำหนดให้ค่าพารามิเตอร์ต่างๆของปัญหาการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวอ้อย เป็นดังนี้

$$3.1.1 \text{ วันเก็บเกี่ยวอ้อย} \quad i = 1, 2, \dots, 10$$

$$3.1.2 \text{ แปลงเพาะปลูก} \quad j = 1, 2, \dots, 15$$

$$3.1.3 \text{ ปริมาณบรรทุก} \quad k = 1, 2$$

$$3.1.4 \text{ ค่าความหวานของอ้อยในแปลงเพาะปลูก } j \text{ ในวันเก็บเกี่ยว } i \text{ (} C_{ij} \text{) แสดงดัง}$$

ตารางที่ 4.1

3.1.5 ปริมาณกำลังการผลิตที่โรงงานต้องการสำหรับแปลงเพาะปลูกที่พิจารณาในวันเก็บเกี่ยว i (MC_i) แสดงดังตารางที่ 4.2

3.1.6 ปริมาณการเก็บเกี่ยวสูงสุดต่อวันของแปลงเพาะปลูก j (TQ_j) แสดงดังตารางที่ 4.3

3.1.7 ปริมาณบรรทุกที่ k ต่อคัน (qt_k) โดย $qt_1 = 10$, $qt_2 = 20$

3.1.8 จำนวนรถบรรทุกสูงสุดของรถบรรทุกที่มีปริมาณบรรทุก k ของวันเก็บเกี่ยว i แปลงเพาะปลูก j (Nm_{ijk}) โดย $Nm_{ij1} = 2$, $Nm_{ij2} = 1$

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าพารามิเตอร์ของค่าความหวานของอ้อยในแปลงเพาะปลูก j ในวันเก็บเกี่ยว i (C_{ij})

i	ค่าความหวานของอ้อยในแปลงเพาะปลูก j ในวันเก็บเกี่ยว i (C_{ij})														
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$	$j=11$	$j=12$	$j=13$	$j=14$	$j=15$
1	6.8	9.6	5.5	3.3	6.4	9.8	5.3	3.8	5.2	5.0	6.2	9.7	5.2	5.4	3.8
2	7.6	10.7	6.4	4.4	7.7	10.6	6.3	4.2	5.3	5.3	7.9	10.9	6.4	5.1	4.8
3	8.9	11.7	7.3	5.4	8.6	11.2	7.7	5.2	6.6	6.6	8.0	11.3	7.7	6.5	5.6
4	9.6	12.4	8.7	5.2	9.7	12.4	8.5	5.8	7.0	7.0	9.6	12.9	8.6	7.2	5.4
5	10.3	13.3	10.0	6.8	10.4	13.2	10.0	6.1	9.0	8.2	11.9	13.9	9.4	8.3	6.6
6	12.2	12.4	10.1	7.5	12.7	12.9	10.5	7.5	9.5	9.0	12.1	12.4	11.0	9.9	7.1
7	13.6	10.8	11.9	8.7	13.8	10.9	11.4	8.8	10.5	10.8	13.4	10.2	11.0	10.8	8.4
8	12.2	9.7	12.7	9.3	12.7	9.2	12.1	9.6	11.9	11.9	12.9	9.7	12.2	11.7	9.5
9	11.4	8.2	13.9	10.8	11.6	9.0	13.1	10.1	12.4	12.2	10.7	8.1	13.2	12.7	10.6
10	9.8	7.5	12.0	11.8	9.2	7.9	12.4	11.4	13.8	13.6	9.3	7.6	12.5	13.5	11.8

ตารางที่ 4.2 แสดงค่าพารามิเตอร์ของปริมาณกำลังการผลิตที่โรงงานต้องการสำหรับแปลงเพาะปลูกที่พิจารณาในวันเก็บเกี่ยว i (MC_i)

i	MC_i	i	MC_i
1	450	6	450
2	450	7	450
3	450	8	450
4	450	9	450
5	450	10	450

ตารางที่ 4.3 ปริมาณการเก็บเกี่ยวสูงสุดต่อวันของแปลงเพาะปลูก j (TQ_j)

j	TQ_j	j	TQ_j
1	307	9	320
2	314	10	379
3	309	11	341
4	391	12	386
5	364	13	381
6	359	14	371
7	397	15	353
8	363		

3.2 ผลลัพธ์การคำนวณ

ผลลัพธ์การคำนวณที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ คือ คำตอบที่เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดของการคัดเลือกแปลงเพาะปลูกและการจัดลำดับการเก็บเกี่ยวด้วย โดยผลลัพธ์ที่ได้มีความสอดคล้องกับสมการและอสมการข้อจำกัด ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

3.2.1 ค่าผลผลิตน้ำตาลที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ คือ 44,871.6 หน่วย

3.2.2 ตารางการเก็บเกี่ยวด้วย ซึ่งเป็นรายละเอียดของวันเก็บเกี่ยวในแต่ละแปลงเพาะปลูก และปริมาณการเก็บเกี่ยวด้วยในแต่ละวัน แสดงได้ดังตารางที่ 4.4

ตารางที่ 4.4 แสดงผลลัพธ์การจัดลำดับการเก็บเกี่ยว ซึ่งปริมาณน้อยที่จะทำการเก็บเกี่ยวจากแปลงเพาะปลูก j ในวันเก็บเกี่ยว i (Q_{ij})

i	ปริมาณน้อยที่จะทำการเก็บเกี่ยวจากแปลงเพาะปลูก j ในวันเก็บเกี่ยว i (Q_{ij})														
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$	$j=11$	$j=12$	$j=13$	$j=14$	$j=15$
1	40	40	11	0	40	40	37	2	40	40	40	40	40	40	0
2	0	0	40	40	4	40	40	40	40	40	6	40	40	40	40
3	40	40	38	0	40	40	40	0	1	40	40	40	40	11	40
4	40	40	10	0	40	40	40	0	40	40	40	40	40	40	0
5	40	40	40	0	40	40	40	0	10	40	40	40	40	40	0
6	31	40	40	0	40	40	40	0	40	19	40	40	40	40	0
7	40	40	10	0	40	40	40	0	40	40	40	40	40	40	0
8	40	40	40	0	40	40	40	0	29	40	40	40	21	40	0
9	36	34	40	0	40	0	40	20	40	40	40	40	40	40	0
10	0	0	40	40	40	35	40	40	40	40	15	0	40	40	40

การทดสอบความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์ พิจารณาจากการแทนค่าตัวแปรแต่ละตัวในทุก ๆ เงื่อนไขของสมการและอสมการ ซึ่งพบว่าเมื่อแทนค่าและคำนวณตามสมการและอสมการแล้วทุกเงื่อนไขเป็นจริง แสดงว่า รูปแบบทางคณิตศาสตร์ที่ได้พัฒนาขึ้นนี้มีความถูกต้อง

ผลลัพธ์ที่ได้จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์เป็นผลเฉลยที่เหมาะสมที่สุดและสามารถหาผลลัพธ์ให้กับปัญหาที่มีจำนวนตัวแปรและความซับซ้อนของปัญหาไม่มากนัก ซึ่งในกรณีที่ปัญหามีขนาดใหญ่หรือเป็นปัญหาจริงของอุตสาหกรรม การหาผลลัพธ์จากรูปแบบทางคณิตศาสตร์อาจไม่สามารถกระทำได้หรือใช้เวลาในการหาคำตอบเป็นเวลานานมาก ดังนั้น วิธีการฮิวริสติกอัลกอริทึมที่ได้พัฒนาขึ้นจะสามารถหาคำตอบที่เป็นคำตอบที่ใกล้เคียงคำตอบที่เหมาะสมที่สุด (Near-optimal solution) ใช้เวลาน้อย และสามารถแก้ปัญหามีขนาดใหญ่และซับซ้อนมากยิ่งขึ้นได้