ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมอุตสาหการ)

ปริญญา

วิศวกรรมอุตสาหการ — **สาขา**

วิศวกรรมอุตสาหการ — **ภาควิชา**

เรื่อง ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

A Stochastic Linear Assignment Problem

นามผู้วิจัย นางสาวจารุวรรณ แก้วแสนซาว

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(รองศาสตราจารย์พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล, Ph.D.)

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม

(อาจารย์สุวิชภรณ์ วิชกูล, วศ.ด.)

หัวหน้าภาควิชา

(รองศาสตราจารย์อนันต์ มุ่งวัฒนา, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญจนา ธีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ .... **เดือน** .... **พ.ศ.** ....

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

การจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

A Stochastic Linear Assignment Problem

โดย

นางสาวจารุวรรณ แก้วแสนซาว

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมอุตสาหการ)
พ.ศ. 2555

จารุวรรณ แก้วแสนซาว 2555: ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม ปริญญาวิศวกรรมศาสตรมหาบัณฑิต (วิศวกรรมอุตสาหการ) สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ ภาควิชาวิศวกรรมอุตสาหการ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: รองศาสตราจารย์พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล, Ph.D. 136 หน้า

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่รวมเอาปัจจัยความไม่แน่นอนของการจับคู่ทรัพยากร-งาน ประกอบกับต้นทุนที่เกี่ยวข้องกับความเสี่ยงมาสร้างตัวแบบกำหนดการเชิงเส้น พิจารณาในตัวแบบปัญหาการจัดงานโดยอาศัยแนวทางแบบจำลองสองขั้นซึ่งนำเสนอโดย Dantzig (1955) จัดเป็นลักษณะหนึ่งของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม แบบจำลองดังกล่าวถูกนำไปทดสอบแก้หาคำตอบโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ขนาดของปัญหาที่ทดสอบได้ถูกขยายเพิ่มจนโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ไม่สามารถหาคำตอบได้ วิธีแบ่งส่วนของเบนเดอร์ได้ถูกนำมาประยุกต์ใช้โดยพัฒนาขึ้นจากโปรแกรม MATLAB R2010b เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ผลการทดลองพบว่าวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์สามารถขยายขนาดของการแก้ปัญหาได้แม้ว่าจะมีตัวแปรตัดสินใจที่เกี่ยวข้องมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร

ลายมือชื่อนิสิต ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ___ / ___ / ___

Jaruwan Keawsandsound 2012: A Stochastic Linear Assignment Problem. Master of Engineering (Industrial Engineering), Major Field: Industrial Engineering, Department of Industrial Engineering. Thesis Advisor: Associate Professor Peerayuth Charnsethikul, Ph.D. 136 pages.

The objective of this research is to develop a stochastic linear assignment model that merges of uncertainties jobs-resources pair assignment with their corresponding risky cost to the linear assignment model. The two-stage model approach of Dantzig (1955) is used which classifies as one of a stochastic linear assignment problem. The proposed model is tested by a state of the art software EXCEL/solver-Gurobi 2010 version. The sizes of test problem are increased until unsolvable cases are detected. There, Bender's Decomposition method is applied written in MATLAB R2010b to solve these cases. The experimental result is that the method is capable to expand the size of problem solving capabilities especially in the case of more than one-million decision variables involved.

Student's signature   Thesis Advisor's signature   / /

กิตติกรรมประกาศ

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณ รศ. ดร. พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ได้ให้ความรู้ คำแนะนำ ข้อคิดเห็นต่างๆ ตลอดจนตรวจแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ ของงานวิจัยนี้มาโดยตลอด และประสานงานสำหรับสถานที่ทำการวิจัย รวมทั้ง ดร.สุวิชภรณ์ วิชกูล อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ร่วม และ รศ.ดร.เสรี เศวตเศรนี ตัวแทนบัณฑิตวิทยาลัย รวมทั้ง ผศ.ดร.กรุง สินอภิรมย์สราญ ที่เสียสละเวลาควบคุมการสอบและให้คำแนะนำด้านต่างๆ เพิ่มเติมในการวิจัย รวมถึงช่วยในการตรวจสอบและแก้ไข เพื่อให้วิทยานิพนธ์เล่มนี้เสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ เจ้าหน้าที่โครงการปริญญาโทวิศวกรรมความปลอดภัยทุกท่านที่ให้ความช่วยเหลือในด้านการใช้สถานที่สำหรับทำการวิจัย

ขอขอบพระคุณศูนย์วิทยาการขั้นสูง ด้านเทคโนโลยีอุตสาหกรรมที่ให้ความอนุเคราะห์ทุนในการทำวิจัย

ท้ายนี้ข้าพเจ้าใคร่ขอกราบขอบพระคุณ บิดา มารดา ที่เป็นกำลังใจ และให้การสนับสนุนด้านการศึกษาเสมอมา รวมทั้งเพื่อนๆ ที่ได้ช่วยเหลือและให้คำแนะนำต่างๆ ในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนลุล่วงไปได้ด้วยดี

จารุวรรณ แก้วแสนซาว

มีนาคม 2555

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า

ตารางผนวกที่

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า

ภาพผนวกที่

คำอธิบายสัญลักษณ์และคำย่อ

UB	=	ขอบเขตบน
LB	=	ขอบเขตล่าง

ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

A Stochastic Linear Assignment Problem

คำนำ

ปัญหาการจัดงานเชิงเส้น (The Linear Assignment Problem) คือ การจับคู่งานให้กับทรัพยากรต่างๆ ยกตัวอย่างเช่น คน เครื่องจักร ยานพาหนะและโรงงาน เป็นต้น เพื่อตอบสนองเป้าหมายต่าง เช่น ต้นทุนต่ำสุดหรือกำไรสูงสุด ซึ่งขึ้นอยู่กับสิ่งที่กำลังพิจารณาและยังเป็นปัญหามาตรฐานหนึ่งในการศึกษาและวิจัยด้านวิจัยดำเนินการ (Operations Research) ซึ่งพัฒนามาจากรูปแบบปัญหาการขนส่ง (Transportation Problem) ตัวอย่างปัญหาการจัดงานที่นำมาประยุกต์ ใช้ในชีวิตประจำวัน เช่น การจัดวางตำแหน่งของเครื่องจักรลงในตำแหน่งต่างๆ ของผังโรงงาน การจัดสรรงานให้แก่รถบรรทุกหรือคนหรือเครื่องจักรและการกระจายสินค้าที่มีอยู่อย่างจำกัดให้กับลูกค้าเพื่อให้ได้ประโยชน์สูงสุด

ในปัญหาการจัดงานเชิงเส้นปกติแล้วจะมีข้อกำหนดเบื้องต้น คือ ต้องจับคู่งานแต่ละงานให้กับทรัพยากรเพียงหนึ่งคู่เท่านั้นและต้องไม่เกิดการจับคู่งานมากกว่าหนึ่งงานที่ใช้ทรัพยากรเดียวกันและแต่ละทรัพยากรจะจับคู่ได้กับงานเดียวเท่านั้น ซึ่งเงื่อนไขที่กล่าวมานั้นหมายความว่าในกระบวนการจัดงานนี้จะต้องมีจำนวนงานเท่ากับจำนวนทรัพยากร แต่บางปัญหาอาจพบว่าไม่สอดคล้องกับข้อกำหนดข้างต้น จึงต้องปรับรูปแบบของปัญหาด้วยเงื่อนไขบางประการซึ่งสามารถทำให้สอดคล้องกับข้อกำหนดดังกล่าวได้ เช่น ในกรณีที่ปริมาณงานและสิ่งที่ถูกมอบหมายไม่เท่ากัน สามารถกำหนดสิ่งที่ถูกมอบหมายเทียม (Dummy Assignees) ให้กับปัญหาเพื่อทำให้สอดคล้องกับข้อกำหนดเบื้องต้นและสามารถหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดต่อไป

ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นในช่วงแรกๆ ได้ดำเนินการแก้ปัญหาโดยวิธีการทางคณิตศาสตร์ที่ทราบกันอยู่โดยทั่วไปในหลากหลายวิธีการ เช่น วิธีการแจงนับ (Enumeration) วิธีการของกำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming) เป็นต้น แต่วิธีการทั้งสองนี้เป็นวิธีทั่วไปทำให้ขาดประสิทธิภาพในทางปฏิบัติในการหาคำตอบ อีกทั้งปัญหาการจัดงานเป็นปัญหาลักษณะพิเศษโดยเฉพาะเมื่อปัญหามีขนาดใหญ่ เช่น จำนวนการจับคู่งานและทรัพยากรที่มีหลายพันคู่หรือ

มากกว่า เป็นต้น ต่อมานักวิจัยหลายท่านได้เสนอวิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นโดยเริ่มต้นที่ Kuhn (1955) เสนอวิธีฮังกาเรียน (Hungarian Method) เพื่อแก้ปัญหาดังกล่าว ต่อมา Burkard and Derigs (1980) พัฒนาโปรแกรมภาษาฟอร์แทรน โดยใช้เทคนิคการหาเส้นทางที่สั้นที่สุด (Shortest Path Techniques) เพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว ซึ่งสามารถนำมาขยายผลในการแก้ปัญหาขนาดใหญ่ได้โดยใช้คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูง

Dantzig (1955) ศึกษากำหนดการเชิงเส้นภายใต้ความไม่แน่นอน (Linear Programming under Uncertainty) และนำเสนอตัวแบบสองขั้นตอน (Two-Stage Model) ที่นำเอาสถานการณ์ความไม่แน่นอนของข้อมูลและผลกระทบมารวมในตัวแบบทำให้เกิดเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่มากจนกระทั่งเครื่องคำนวณประมวลผลไม่สามารถรองรับได้และปัญหานี้ยังคงมีสืบเนื่องมาจนถึงปัจจุบัน แม้ว่าวิวัฒนาการของคอมพิวเตอร์จะก้าวหน้าไปอย่างไรก็ตาม ปัจจุบันตัวแบบดังกล่าวได้เป็นส่วนหนึ่งในรายวิชาชื่อกำหนดการเฟ้นสุ่มเชิงเส้น (Stochastic Linear Programming : SLP) ซึ่งบรรจุเป็นบทเรียนทางวิชาอย่างละเอียดพร้อมตัวอย่างและแบบฝึกหัดในตำราของ Wagner (1975) และต่อมา Infanger (1994) ทบทวนหลักการและวิธีการเพื่อแก้ปัญหาการเฟ้นสุ่มเชิงเส้นและนำเสนอวิธีการสุ่มเฉพาะที่สำคัญ (Important Sampling method) เพื่อลดภาระการสร้างตัวแบบที่ต้องครอบคลุมความเป็นไปได้ทั้งหมดของสถานการณ์ความไม่แน่นอน

จากการศึกษาที่ผ่านมาพบว่าปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบมาตรฐานจะมีลักษณะพิเศษที่ทำให้ค่าตัวแปรตัดสินใจที่ได้มีค่าเป็นจำนวนเต็มเสมอซึ่งเรียกว่า “Totally Unimodular (TU)” กล่าวคือถ้าปัญหาเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์ของเงื่อนไขมีลักษณะเป็น TU ซึ่งประกอบด้วยค่าในเมทริกซ์มีค่าเป็น -1, 0, 1 เท่านั้นและค่าทางขวามือ (Right-Hand sides: RHS) เป็นจำนวนเต็ม ผลลัพธ์ที่ได้จะเป็นจำนวนเต็มเสมอ ซึ่งตัวแบบนี้มีลักษณะที่เป็นกำหนดการเชิงเส้น จากข้างต้นนั้นตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นยังไม่คำนึงถึงความไม่แน่นอนของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยจึงมีความสนใจที่จะพัฒนาตัวแบบโดยนำเอาสถานการณ์ความไม่แน่นอนของข้อมูลมารวมในตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบมาตรฐานและเรียกปัญหานี้ว่าเป็นปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม (A Stochastic Linear Assignment Problem) ซึ่งกรณีตัวอย่างของความไม่แน่นอนที่ถูกเพิ่มเข้ามาในตัวแบบ เช่นตัวอย่างการผลิตจานเมลามีน ซึ่งเกิดขึ้นจากจำนวนจานที่ผลิตได้มีจำนวนมากกว่าทรัพยากร ดังนั้นจึงต้องรวมกลุ่ม (Group) งานที่มีลักษณะคล้ายกันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน โดยจะรวมกลุ่มกันให้เท่ากับจำนวนทรัพยากรที่มี เพราะเป็นข้อกำหนดเบื้องต้นของปัญหาการจัดงาน

เมื่อรวมกลุ่มกันเรียบร้อยแล้ว ต้นทุนที่ไม่แน่นอนจึงเกิดขึ้น ซึ่งสามารถเกิดขึ้นในกรณีที่เมื่อทำการจับคู่งานกับทรัพยากรแล้ว ทรัพยากรที่ถูกใช้อาจจะไม่สามารถทำงานใดงานหนึ่งในกลุ่มงานนั้นๆ ได้ ทำให้ต้องเสียค่าใช้จ่ายปรับปรุงหรือเปลี่ยนแปลงทรัพยากรให้ใช้ได้กับงานนั้นและอีกกรณีคือกรณีที่งานถูกยกเลิกโดยฉับพลันซึ่งสาเหตุเหล่านี้ทำให้เกิดต้นทุนที่ไม่แน่นอนขึ้นและในการวิจัยนี้ผู้วิจัยแบ่งการพัฒนาตัวแบบออกเป็น 2 กรณี ได้แก่

1. กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งจะแสดงได้ดังตัวแบบต่อไปนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ik}u_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}r_{jk}\right) \tag{1}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1,2,\dots,n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; j = 1,2,\dots,n \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} = 1 \qquad ; i = 1,2,\dots,n, \quad k = 1,2,\dots,N \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} = 1 \qquad ; j = 1,2,\dots,n, \quad k = 1,2,\dots,N \tag{5}$$

$$x_{ij} = \{0,1\}, \quad u_{ik}, r_{jk} = \{0,1\}, \quad \forall i,j,k \tag{6}$$

โดยที่ n แทนจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงาน

N แทนจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

c_{ij} แทนต้นทุนที่เกิดขึ้นจากการจับคู่ของทรัพยากร i และงาน j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าทรัพยากร } i \text{ ถูกจับคู่กับงาน } j \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

$u_{ik}, r_{jk} = \{0,1\}$ แทนตัวแปรที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนของสมการข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอน เนื่องจาก a_{ijk} และ x_{ij} มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ผลรวมที่ได้จาก $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้นและค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งอาจทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติมตัวแปร u_{ik}, r_{jk} เพื่อปรับค่าให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกัน ซึ่ง u_{ik} เป็นตัวแปรขาดที่ปรับค่าความไม่แน่นอนในแนวแถว และ r_{jk} เป็นตัวแปรขาดที่ปรับค่าความไม่แน่นอนในแนวคอลัมน์

g_{ik} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า u_{ik} โดย $g_{ik} = p_k \times g_i$

e_{jk} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า r_{jk} โดย $e_{jk} = p_k \times e_j$

p_k แทนความน่าจะเป็นร่วม (Joint Probability) ที่เกิดจากการจับคู่ที่เหตุการณ์ k

g_i แทนค่าที่ปรับต่อหน่วย เมื่อ u_{ik} มีการปรับค่าในแนวแถว ในงานวิจัยนี้กำหนดให้เท่ากับ 1

e_j แทนค่าที่ปรับต่อหน่วย เมื่อ r_{jk} มีการปรับค่าในแนวคอลัมน์ในงานวิจัยนี้กำหนดให้เท่ากับ 1

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าทรัพยากร } i \text{ จับคู่กับงาน } j \text{ ได้ในเหตุการณ์ที่ } k \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

เงื่อนไขที่ (1) แทนสมการแสดงผลรวมของต้นทุนเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องทั้งหมด

เงื่อนไขที่ (2) แทนว่าแต่ละทรัพยากร i สามารถจับคู่กับงานได้เพียงหนึ่งเท่านั้น

เงื่อนไขที่ (3) แทนว่าแต่ละงาน j สามารถจับคู่กับทรัพยากรได้เพียงหนึ่งเท่านั้น

เงื่อนไขที่ (4) และ (5) แทนสมการสมดุลเพื่อชี้บ่งการแก้ไขเหตุการณ์ k ที่จับคู่ทรัพยากร i และงาน j

2. กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1

เมื่อให้ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ตัวแบบมีการเปลี่ยนแปลง โดยมีการเพิ่มตัวแปรเกิน v_{ik}, s_{jk} เข้ามาในสมการที่ (4) และ (5) ตามลำดับ เพื่อให้สมการทั้งสองเป็นสมการที่มีความสมดุล แสดงตัวอย่างดังต่อไปนี้

$1 + u_{ik} - v_{ik} = 0$ ทำให้สมการสมดุล $1 + 0 - 1 = 0$ ดังนั้น $v_{ik} = 1$

$1 + r_{jk} - s_{jk} = 0$ ทำให้สมการสมดุล $1 + 0 - 1 = 0$ ดังนั้น $r_{jk} = 1$

ซึ่งจะแสดงตัวแบบได้ดังต่อไปนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk}\right)\right) \tag{7}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad ; i = 1,2,...,n \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad ; j = 1,2,...,n \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \qquad ; i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \qquad ; j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \tag{11}$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}, \forall i,j,k \tag{12}$$

โดยที่ b_{ik} แทนค่าคงที่ทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนในแนวแถวที่เหตุการณ์ k

d_{jk} แทนค่าคงที่ทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนในแนวคอลัมน์ที่เหตุการณ์ k

$u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}$ แทนตัวแปรที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนของสมการข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอน กรณีที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอน เนื่องจาก a_{ijk} และ x_{ij} มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ผลรวมที่ได้จาก

$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้น

และกำหนดให้ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งอาจทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติม $u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk}$ เพื่อให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกัน ซึ่ง u_{ik}, v_{ik} เป็นตัวแปรขาดและตัวแปรเกินที่ปรับค่าความไม่แน่นอนในแนวแถวและ r_{jk}, s_{jk} เป็นตัวแปรขาดและตัวแปรเกินที่ปรับค่าความไม่แน่นอนในแนวคอลัมน์

g_{ik} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีมีการปรับค่า u_{ik} โดย $g_{ik} = prob_k \times g_i$

e_{jk} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีมีการปรับค่า r_{jk} โดย $e_{jk} = prob_k \times e_j$

g_i, h_i แทนค่าที่ปรับต่อหน่วย เมื่อ u_{ik}, v_{ik} มีการปรับค่าในแนวแถว ในงานวิจัยนี้กำหนดให้เท่ากับ 1

e_j, f_j แทนค่าที่ปรับต่อหน่วย เมื่อ r_{jk}, s_{jk} มีการปรับค่าในแนวคอลัมน์ ในงานวิจัยนี้กำหนดให้เท่ากับ 1

จากตัวแบบข้างต้นพบว่า เมื่อปัญหานำเอาชุดลักษณะความไม่แน่นอน (Probabilistic) มารวมอยู่ด้วยจะทำให้ลักษณะของตัวแบบเปลี่ยนแปลงเป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม (Mixed Integer Programming) ซึ่งทำให้ตัวแบบมีความซับซ้อนมากขึ้นและได้นำเสนอเป็นตัวแบบสองขั้น ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงมุ่งเน้นที่หาเทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาตัวแบบสองขั้น เพื่อหาวิธีการที่สามารถประมวลผลตัวแบบที่มีขนาดใหญ่และมีประสิทธิภาพสูง โดยใช้โปรแกรม MATLAB R2010b เป็นเครื่องมือจำลองสถานการณ์และเทคนิคที่นำมาประยุกต์ใช้คือ วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ (Bender’s Decomposition) ซึ่งเป็นเทคนิคที่ใช้ในการแก้ปัญหาเชิงเส้นที่มีความยุ่งยากและซับซ้อน อีกทั้งสามารถขยายขนาดของปัญหาโดยใช้คอมพิวเตอร์ในการประมวลผลได้อีกด้วย

วัตถุประสงค์

วัตถุประสงค์ที่ทำการศึกษาในงานวิจัยนี้ คือ

1. เพื่อพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม ซึ่งนำเสนอในรูปของตัวแบบสองขั้น (Two-Stage Model)

2. เพื่อศึกษาขอบเขตของการทำงานของโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซล โซลเวอร์-กูโรบิ ของบริษัท ฟรอนท์ไลน์ รุ่นปี 2553 (Excel Solver-Gurobi from Frontline System 2010)

3. เพื่อศึกษาวิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มตามตัวแบบที่พัฒนาในข้อ 1. โดยประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ (Bender's Decomposition Method)

4. ศึกษาผลเชิงประสิทธิภาพและประสิทธิผลของเทคนิคการแบ่งส่วนของเบนเดอร์

ขอบเขตของงานวิจัย

1. ขอบเขตของความไม่แน่นอนของการจัดงาน สามารถกำหนดได้ด้วยการสุ่ม (Random) โดยมีการแจกแจงแบบเอกรูป (Uniform distribution)

2. พัฒนาตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นภายใต้ความไม่แน่นอนแบบสองขั้น โดยนำเอาสถานการณ์ความไม่แน่นอนของข้อมูลและผลกระทบมารวมในแบบจำลองต้นแบบทำให้เกิดเป็นปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่

3. ทดลองโดยใช้เครื่องคอมพิวเตอร์ส่วนบุคคล 1 เครื่อง ซึ่งมีหน่วยประมวลผลกลาง Intel(R) Core(TM)2 Duo หน่วยความจำ 2 GB

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และกระบวนการหาคำตอบที่ทำให้ทราบถึงการจัดงานภายใต้การพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นที่เหมาะสม

2. ลดต้นทุนในการวางแผนจัดงานภายใต้การพิจารณาถึงความไม่แน่นอนของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นรวมเข้าไปในตัวแบบด้วย

3. สามารถนำวิธีการแก้ปัญหาไปใช้แก้ปัญหาที่มีขนาดใหญ่ได้ในรูปแบบของโปรแกรมคอมพิวเตอร์

4. ลดความซับซ้อนของปัญหาและเพิ่มประสิทธิภาพในการหาคำตอบ

การตรวจเอกสาร

จากการศึกษาพบว่า นักวิจัยหลายท่านได้ทำการวิจัยพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาการจัดงาน โดยปัญหานี้ได้ถูกกล่าวว่าเป็นปัญหาเอ็นพี (NP) ซึ่งเป็นปัญหาที่เครื่องคำนวณใช้เวลาแก้ปัญหานานมาก (เวลาในการแก้ปัญหาเพิ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันเอ็กซ์โพเนนเชียลเมื่อพารามิเตอร์ของปัญหาเพิ่มขึ้น) ด้วยเหตุนี้นักวิจัยหลายท่านได้สร้างกระบวนการและเทคนิคที่สามารถหาผลเฉลยของปัญหาได้รวดเร็ว นอกจากนี้ในกรณีที่มีความไม่แน่นอนเข้ามาเกี่ยวข้องกับตัวปัญหาได้มีนักวิจัยส่วนหนึ่งทำการศึกษาแก้ปัญหาภายใต้ความไม่แน่นอน ซึ่งจะนำเสนอผลงานวิจัยที่ผ่านมาตามลักษณะปัจจัยและความไม่แน่นอน

ในการทำการวิจัยพัฒนาเพื่อแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มได้มีการศึกษากันอย่างกว้างขวาง ซึ่งปัญหาจะประกอบด้วยต้นทุน 2 ส่วน ส่วนแรกคือต้นทุนที่เกิดจากการจับคู่ของทรัพยากรกับงานซึ่งมีค่าแน่นอน (Deterministic) และต้นทุนส่วนที่สองคือต้นทุนคาดหวังในการแก้ไขเหตุการณ์ซึ่งมีค่าไม่แน่นอน (Probabilistic) ซึ่งสามารถอธิบายรายละเอียดได้ดังต่อไปนี้

1. ปัญหาการจัดงานเชิงเส้น

Burkard *et al*. (2009) ได้กล่าวว่าตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นถูกนำเสนอขึ้นครั้งแรกโดย Easterfield ในปี 1946 ซึ่งมีฟังก์ชันของเวลาในการหาคำตอบแบบนอน-โพลิโนเมียล (Non-Polynomial time) เป็นอัลกอริทึมที่มีอัตราการเพิ่มขึ้นของเวลาในการหาคำตอบเป็น $O(2^n n^2)$ อีกทั้ง Easterfield ยังไม่ได้ตั้งชื่อให้กับปัญหานี้ซึ่งเรื่องนี้ถูกกล่าวถึงในงานวิจัยที่มีชื่อว่า "A Combinatorial algorithm" ต่อมาในปี 1950 Thorndike ได้ทำการวิจัยเรื่อง "The problem of classification of personnel" ซึ่งได้นำเสนอแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นด้วยวิธีการสุ่มอย่างมีเหตุผล (Heuristic Algorithm) ทั้งหมด 3 วิธี จนกระทั่งในปี 1952 ได้มีการปรากฏชื่อของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นเป็นครั้งแรก ในงานวิจัยเรื่อง "The personnel assignment problem" โดย Votaw and Orden ซึ่งทั้งหมดนี้เป็นเรื่องราวโดยย่อของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นและตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{13}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1,2,...,n \tag{14}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; j = 1,2,...,n \tag{15}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \quad \forall i, j \tag{16}$$

โดยที่ n แทนจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงาน

c_{ij} แทนต้นทุนที่เกิดขึ้นจากการจับคู่ของทรัพยากร i และงาน j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าทรัพยากร } i \text{ ถูกจับคู่กับงาน } j \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

การพัฒนาวิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้น ได้ถูกนำเสนอครั้งแรกโดย Kuhn (1955) ซึ่งเสนอวิธีฮังกาเรียน (Hungarian Method) ซึ่งเป็นวิธีเฉพาะที่ใช้ในการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้น ต่อมา Burkard and Derigs (1980) พัฒนาโปรแกรมภาษาฟอร์แทรนเพื่อช่วยแก้ปัญหาดังกล่าว ซึ่งสามารถนำมาขยายผลในการแก้ปัญหาขนาดใหญ่ได้โดยใช้คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูงในปัจจุบัน

2. ปัญหากำหนดการเฟ้นสุ่ม

Wagner (1975) ได้นำเสนอตัวแบบกำหนดการเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่ภายใต้เงื่อนไขของความไม่แน่นอนของสัมประสิทธิ์การตัดสินใจหรือค่าทางขวามือหรือที่เรียกว่า กำหนดการเฟ้นสุ่ม (Stochastic Linear Programming Model: SLP) ซึ่งมีสัมประสิทธิ์ของตัวแปรตัดสินใจหรือค่าคงที่ทางขวามือมีความไม่แน่นอน สามารถแสดงตัวแบบปัญหากำหนดการเฟ้นสุ่มได้ดังนี้

$$\text{Min (Max)} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{m}\left(g_{ik} u_{ik} + h_{ik} v_{ik}\right) \tag{17}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \{\geq, \leq, =\} \ \gamma_i \qquad ; \ i = 1,2,\ldots,m \tag{18}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_j + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \qquad ; i = 1,2,\ldots,m \ ; k = 1,2,\ldots,N \tag{19}$$

$$x_j, u_{ik}, v_{ik} = \{0,1\} \ ; \ \forall i, j, k \tag{20}$$

โดยที่ x_j แทนตัวแปรตัดสินใจซึ่งสอดคล้องกับสมการและอสมการข้อจำกัด

c_j แทนค่าสัมประสิทธิ์ที่แทนค่าใช้จ่ายหรือกำไรต่อ 1 หน่วยสำหรับตัวแปรตัดสินใจที่ j

a_{ij} แทนค่าสัมประสิทธิ์ของจำนวนทรัพยากรชนิดที่ i ซึ่งใช้ในการผลิตตัวแปรตัดสินใจที่ j หนึ่งหน่วย

γ_j แทนค่าคงที่ซึ่งแทนทรัพยากรที่ i ในการผลิตทั้งหมด

m แทนจำนวนข้อจำกัด

n แทนจำนวนตัวแปรตัดสินใจ

N แทนจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

3. วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ (Bender's decomposition)

Bender (1962) เสนอวิธีการการแก้ปัญหาโดยใช้การแบ่งปัญหาเริ่มต้นออกเป็น 2 ส่วน คือ ปัญหาหลัก (Master Problem) และปัญหารอง (Sub Problem) จากนั้นใช้ตัวแบบคู่ควบ (Dual Form) ในการหาคำตอบ ซึ่งเรียกว่าวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์เป็นหลักการที่สามารถประกันได้ว่าจะพบคำตอบที่ดีที่สุดของปัญหา โดยประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาสองขั้นของตัวแบบเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม (Two-Stage Stochastic Linear Problem) เป็นการแก้ปัญหาที่มีเป้าหมายเพียงหนึ่งเป้าหมายที่เหมาะสมและค่าตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม โดยมีการกำหนดเป้าหมายเพื่อที่จะได้ค่าคาดคะเนของต้นทุนที่เกี่ยวข้องทั้งหมดของการดำเนินการตัดสินใจภายใต้ความไม่แน่นอนต่ำที่สุด

จากตัวแบบปัญหากำหนดการเฟ้นสุ่มจากสมการที่ (17) – (20) ได้อาศัยกระบวนการ Classical Decomposition ทำการพัฒนาวิธีการให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น โดยมีหลักการคือทำการแก้ปัญหาสองขั้น โดยอาศัยกระบวนการ Dual (Bender) Decomposition คือจะทำการแยกตัวแบบเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มออกเป็น 2 ส่วน คือตัวปัญหาหลัก (Master Problem) ซึ่งเป็นส่วนที่มีค่าตัวแปรแน่นอนและตัวปัญหาย่อย (Subproblem) ซึ่งเป็นส่วนที่รวมตัวแปรที่อยู่ภายใต้ความไม่แน่นอน

ตัวปัญหาหลัก แสดงได้ดังตัวแบบต่อไปนี้

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{21}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \gamma_i \quad ; i = 1,2,\ldots,m \tag{22}$$

$$x_j = \{0,1\} \tag{23}$$

ตัวปัญหาย่อย แสดงได้ดังตัวแบบต่อไปนี้

$$\text{Min } Z = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{m} \left(g_{ik} u_{ik} + h_{ik} v_{ik} \right) \tag{24}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_j + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \quad ; i = 1,2,\ldots,m \;; k = 1,2,\ldots,N \tag{25}$$

$$x_j, u_{ik}, v_{ik} = \{0,1\} \;; \forall_{i,j,k} \tag{26}$$

จากนั้นเปลี่ยนตัวปัญหาย่อยให้เป็นตัวแบบปัญหาคู่ควบ (Dual Form) ซึ่งทำได้ดังนี้ เริ่มจากจากตัวแปรตัดสินใจจาก x_j เป็น u_{ik}, v_{ik} โดยการย้ายข้าง $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_j$ ในสมการที่ (25) ให้มาอยู่ทางขวามือ แสดงได้ดังนี้

$$\text{Subject to} \quad u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} - \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_j \tag{27}$$

จากนั้นแปร u_{ik}, v_{ik} ให้เป็น Unrestricted และสร้างตัวแปรใหม่ แสดงได้ดังนี้

$$\text{Max } \omega = \left(b_{jk} - \sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_j \right) y_{jk} \tag{28}$$

$$\text{Subject to} \quad -h_{jk} \le y_{jk} \le g_{jk} \tag{29}$$

โดยที่ ω แทนค่าเป้าหมายควบคู่ของปัญหาย่อย

กำหนดค่าเริ่มต้น x_j หลังจากนั้นแทนค่า x_j ในปัญหาคู่ควบ เพื่อคำนวณหาค่า y_{jk} หลังจากนั้นคำตอบที่ได้ในปัญหาคู่ควบถูกเรียกเป็นขอบเขตบน (UB) อีกทั้งชุดคำตอบของปัญหาคู่ควบสามารถกำหนดข้อจำกัดเข้ามาเพิ่มในตัวปัญหาหลัก เพื่อหาขอบเขตล่าง แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ T โดยเขียนเป็นตัวปัญหาหลักตัวใหม่

$$\text{Min } Z = T + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{30}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \gamma_i \quad ; i = 1,2,\ldots,m \tag{31}$$

$$T - \sum_{j=1}^{n} \left(c_j + \sum_{k=1}^{N} a_{ijk} y_{jk} \right) x_{ij} \ge \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} b_{jk} y_{jk} \tag{32}$$

$$x_j, u_{ik}, v_{ik} = \{0,1\} \; ; \forall_{i,j,k} \tag{33}$$

ในแต่ละรอบของกระบวนการแก้ปัญหาหลัก เริ่มโดยแทนชุดของคำตอบ $\left(y_{jk} \right)$ ที่ได้จากการแก้ปัญหาคู่ควบเบื้องต้น ส่งผ่านไปยังตัวปัญหาหลักในรูปแบบของระนาบตัดที่เหมาะสมที่สุด เพื่อทำการปรับปรุงตัวแบบที่ใช้ในการกำหนดปัญหาหลักอีกครั้งหนึ่ง ซึ่งจะมีการปรับปรุงในทุกๆ รอบของกระบวนการแก้ปัญหา เมื่อ Tol ถูกกำหนดให้เป็นค่าความคลาดเคลื่อนที่สามารถยอมรับได้และคำตอบที่ได้จากปัญหาหลักจะถูกกำหนดเป็นขอบเขตล่าง (LB) ตัวกระบวนการจะสิ้นสุดลงเมื่อสมการที่ (34) เป็นจริง

$$UB - LB \le \text{Tol} \tag{34}$$

วนิดาและคณะ (2551) ได้อธิบายวิธีการแก้ปัญหาโดยวิธีแบ่งส่วนของเบนเดอร์ซึ่งมีหลักการของการแก้ปัญหาดังนี้ คือ แบ่งปัญหาออกเป็น 2 ส่วน ซึ่งประกอบด้วยส่วนของปัญหาหลัก และส่วนของปัญหารอง โดยวิธีการจะเริ่มจาก

1. กำหนดค่าเริ่มต้น x_j แทนค่า x_j ในปัญหารองเพื่อคำนวณหาค่า y_j

2. สร้างระนาบตัดที่เหมาะสมหาคำตอบของ x_j และขอบเขตล่างภายใต้ข้อจำกัดของสมการระนาบตัดที่เหมาะสม

3. ตรวจสอบการลู่เข้าของค่าเป้าหมาย โดยพิจารณาจากค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้ ซึ่งจะอธิบายขั้นตอนอย่างละเอียดในลำดับต่อไป

เมื่อผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับการใช้กระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์พบว่า พิศิษฐ์และคณะ (2551) ทำการเปรียบเทียบการหาคำตอบของวิธีการกำหนดการเฟ้นสุ่ม (Stochastic Programming) จากการสร้างสมการข้อจำกัดแบบทุกทางเลือก (Full Uniform) กับการลดจำนวนของข้อจำกัดโดยการสุ่มปริมาณในแต่ละช่วงเวลาโดยใช้กับปัญหาการวางแผนการผลิตรวม พบว่าวิธีการลดจำนวนข้อจำกัดโดยการสุ่มให้ผลลัพธ์ที่ใกล้เคียงกับการใช้ข้อจำกัดทุกทางเลือก แต่ใช้เวลาในการประมวลผลน้อยกว่ามาก ต่อมาวนิดาและคณะ (2551) พบว่าการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นที่มีความไม่แน่นอนของสัมประสิทธิ์ตัวแปรตัดสินใจหรือค่าคงที่ขวามือของข้อจำกัด ด้วยวิธีการรวมทางเลือกของข้อจำกัดและวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นของทางเลือกทั้งหมดที่เป็นไปได้ พบว่าทั้งสองวิธีให้คำตอบที่เหมาะสมเท่ากันเชิงทฤษฎีแต่การรวมทางเลือกของสมการข้อจำกัดใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่า ซึ่งสามารถนำไปใช้กับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ได้ดีกว่า สำหรับวิธีการแก้ปัญหาโปรแกรมเชิงเส้นที่มีขนาดใหญ่และมีความไม่แน่นอนของสัมประสิทธิ์การตัดสินใจหรือค่าทางขวามือด้วยปัญหาหลัก (Primal) และปัญหาคู่ควบ (Dual) นั้น ถัดมา Puttawong.Y and Charnsethikul.P (2007) ได้นำเสนอตัวแบบปัญหาการขนส่งภายใต้ความต้องการที่มีความไม่แน่นอน ซึ่งใช้การแก้ปัญหาโดยวิธีปัญหาหลักและวิธีปัญหาคู่ควบ เมื่อเปรียบเทียบเวลาแก้ปัญหาทั้ง 2 วิธี พบว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีปัญหาคู่ควบสามารถหาคำตอบได้เร็วกว่าวิธีปัญหาปัญหาหลักแต่เมื่อปัญหามีขนาดใหญ่จะไม่สามารถหาคำตอบได้ด้วย 2 วิธีนี้ จากนั้นวิชัย (2551) ได้ทำการศึกษาปัญหาการควบคุมสินค้าคงคลังซึ่งในแต่ละช่วงเวลามีความต้องการสินค้าไม่แน่นอนโดยความต้องการมีโอกาสเกิดขึ้นได้หลายค่าอย่างไม่ต่อเนื่อง (Discrete Random Demands) โดยมีความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นต่างกันโดยใช้วิธี

กำหนดการเชิงพลวัต (Dynamic Programming) และวิธีกำหนดการจำนวนเต็มแบบเฟ้นสุ่ม (Stochastic Integer Programming) พบว่าวิธีกำหนดการจำนวนเต็มแบบเฟ้นสุ่มให้ผลที่ดีกว่าวิธีกำหนดการเชิงพลวัตแต่ถ้าจำนวนช่วงเวลาเพิ่มขึ้น ทำให้มีทางเลือกเพิ่มขึ้นจะเพิ่มความยุ่งยากในการหาคำตอบ ต่อมาสุพัฒตรา และคณะ (2552) นำวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาการควบคุมสินค้าที่มีความไม่แน่นอนซึ่งเปลี่ยนไปตามคาบเวลา เพื่อหาต้นทุนรวมที่ต่ำสุด ซึ่งเปรียบเทียบกับอีก 2 วิธีคือวิธีปัญหาหลักและปัญหาคู่ควบ พบว่าวิธีปัญหาหลักและปัญหาคู่ควบได้คำตอบที่เหมาะสมเท่ากับแต่วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ได้คำตอบที่เหมาะสมที่สุดแตกต่างเล็กน้อย เมื่อพิจารณาเวลาที่ใช้แก้ปัญหาพบว่า วิธีปัญหาหลักใช้เวลาในการประมวลผลน้อยที่สุด ส่วนการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ไม่เหมาะกับการแก้ปัญหาลักษณะนี้ เพราะการแปลงปัญหาหลักเป็นปัญหาคู่ควบไม่สามารถลดจำนวนข้อจำกัดลงได้ จากนั้นแก้วปั้น และคณะ (2552) ได้นำเสนอวิธีการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นภายใต้ความไม่แน่นอนของค่าขวามือ : กรณีปัญหาการขนส่ง โดยการสร้างสมการข้อจำกัดด้วยวิธีกำหนดการเฟ้นสุ่มแบบใช้ข้อจำกัดทุกทางเลือกกับการรวมทางเลือกของสมการข้อจำกัด แล้วเปรียบเทียบการแก้สมการด้วยปัญหาหลัก ปัญหาคู่ควบและการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ พบว่าทุกวิธีให้ค่าที่เหมาะสมที่เท่ากัน เมื่อพิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผลพบว่า สำหรับปัญหาขนาดเล็กการแก้ปัญหาด้วยวิธีคู่ควบมีประสิทธิภาพสูงสุด รองลงมาคือวิธีปัญหาหลัก และวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ตามลำดับ แต่เมื่อขยายปัญหาให้มีขนาดใหญ่ขึ้นพบว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์กลับมีประสิทธิภาพสูงกว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีอื่น จากนั้นสมศักย์และพีรยุทธ์ (2552) นำเสนอการประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการกำหนดหาค่าที่เหมาะสมของตัวแปรตัดสินใจท่ามกลางความไม่แน่นอนของเงื่อนไขในกระบวนการผสม กรณีศึกษา: การผลิตขนมฝอยทอง พบว่าวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มีประสิทธิภาพสูงกว่าวิธีการกำหนดการเชิงเส้นอย่างมีนัยสำคัญ

4. การใช้สถิติในการทดสอบสมมติฐานเพื่อยืนยันผลการทดสอบ

ในการวิจัยจะต้องพิจารณาถึงองค์ประกอบทางสถิติสำหรับการทดสอบสมมติฐานด้วย และในการทดลองนี้มีข้อสมมติ คือ ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ โดยองค์ประกอบพื้นฐานที่ใช้ในงานวิจัยนี้ คือ ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองกลุ่ม (Difference of Two-Means Test) ซึ่งเป็นการทดสอบเพื่อตรวจสอบข้อมูลว่าค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการระหว่างสองกลุ่มแตกต่างกันหรือไม่ ซึ่งจะแบ่งเป็น 2 ประเภท ได้แก่

4.1 การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน (Independent Sample)

ใช้ในสถานการณ์ที่กลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่มีความสัมพันธ์กันถูกศึกษาภายใต้เงื่อนไขของการทดลองที่แตกต่างกัน มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$ (ค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน)
H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$ (ค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการทั้งสองกลุ่มแตกต่างกัน)

โดยที่ μ_1 แทนค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการของประชากรกลุ่มที่ 1
μ_2 แทนค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการของประชากรกลุ่มที่ 2

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ (α) เท่ากับ 0.05

โดยที่ α แทนระดับนัยสำคัญที่ใช้คำนวณระดับความเชื่อมั่น
โดยแสดงระดับความเชื่อมั่นเท่ากับ $(1-\alpha)\times 100\%$

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ t ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

กรณีไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรและสมมติให้ค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มเท่ากัน

$$t_{cal} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$df = n_1 + n_2 - 2$$

โดยที่ t_{cal} แทนค่าสถิติที่คำนวณได้ ใช้ในการเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต

$\bar{x}_1, \bar{x}_2$ แทนค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการของกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

n_1, n_2 แทนจำนวนตัวอย่างในกลุ่มที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

S_1^2, S_2^2 แทนค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างที่ 1 และ 2 ตามลำดับ

df แทนค่าองศาความเป็นอิสระ

กรณีไม่ทราบความแปรปรวนของประชากรและสมมติให้ค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน

$$t_{cal} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$df = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2}{n_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{n_2}\right)^2}{n_2 - 1}}$$

ขั้นที่ 4 นำค่าสถิติ t_{cal} ที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤตถ้า $|t_{cal}| < t_{(\frac{\alpha}{2}, df)}$ ดังนั้น แสดงว่าไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ สรุปได้ว่าค่าเฉลี่ยทั้งสองค่าไม่แตกต่างกัน

กรณีไม่ทราบค่าความแปรปรวนและไม่สามารถตัดสินใจได้ว่าค่าความแปรปรวนเท่ากันหรือไม่ ต้องทดสอบค่าความแปรปรวนของกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่ม ซึ่งความแปรปรวนคือ สิ่งที่ชี้วัดการกระจายของการแจกแจงความน่าจะเป็น (ประไพศรี และพงศ์ชนัน, 2551) โดยการทดสอบความแปรปรวนจะใช้สถิติทดสอบ F-test

การทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (ค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มเท่ากัน)
H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ (ค่าความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน)

โดยที่ σ_1^2 แทนความแปรปรวนของประชากรกลุ่มที่ 1
σ_2^2 แทนความแปรปรวนของประชากรกลุ่มที่ 2

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ (α) เท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ F ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

$$F_{cal} = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad\qquad F_{cal} = \frac{S_2^2}{S_1^2}$$

หรือ

$$df_1 = n_1 - 1 \qquad\qquad df_1 = n_2 - 1$$

$$df_2 = n_2 - 1 \qquad\qquad df_2 = n_1 - 1$$

โดยที่ F_{cal} แทนค่าสถิติที่คำนวณได้ ใช้ในการเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต

ขั้นที่ 4 นำค่าสถิติ F ที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต

ถ้า $F_{cal} < f_{(\frac{\alpha}{2}, df_1, df_2)}$ ดังนั้นไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ สรุปได้ว่าค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มเท่ากัน

4.2 การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกัน (Dependent Sample)

ใช้ในสถานการณ์ที่กลุ่มตัวอย่างเพียงกลุ่มเดียวถูกศึกษาภายใต้เงื่อนไขของการทดลองที่แตกต่างกัน มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0 : $\mu_D = 0$ (ผลต่างของค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการของประชากรทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน)

H_1 : $\mu_D \neq 0$ (ผลต่างของค่าเฉลี่ยเชิงปฏิบัติการของประชากรทั้งสองกลุ่มแตกต่างกัน)

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ (α) เท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ t ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%

$$t_{cal} = \frac{\bar{d} - \mu d}{\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}}$$

$$df = n - 1$$

โดยที่ d_i แทนผลต่างระหว่างคู่ใดๆ ที่นำมาเปรียบเทียบกัน โดยที่ i=1,2,...,n

n แทนจำนวนคู่ตัวอย่าง

ขั้นที่ 4 นำค่าสถิติ t ที่คำนวณได้ไปเปรียบเทียบกับค่าวิกฤต ถ้า $|t_{cal}| < t_{(\frac{\alpha}{2}, df)}$ ดังนั้น ไม่สามารถปฏิเสธ H_0 ได้ สรุปได้ว่าค่าเฉลี่ยทั้งสองค่าไม่แตกต่างกัน

ในงานวิจัยนี้ผู้วิจัยทำการวิเคราะห์ผลการทดลองทางสถิติโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ Minitab R2010b เป็นโปรแกรมสำเร็จรูปที่พัฒนาโดยบริษัท Minitab Inc. ให้สามารถใช้ได้กับคอมพิวเตอร์หลายขนาด โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้คำนวณค่าสถิติต่างๆ

5. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

Infanger (1994) ได้กล่าวไว้หลายวิธีด้วยกัน เช่น การสุ่มแบบมอนติคาร์โล (Monte Carlo Sampling) ระนาบตัดเชิงความน่าจะเป็น (Probabilistic Cuts) และการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ (Bender's Decomposition) ซึ่งต่อมาผู้วิจัยได้พัฒนาโดยการนำตัวแบบปัญหากำหนดการเฟ้นสุ่มมาประยุกต์ใช้กับปัญหาการจัดงานเชิงเส้น โดยเพิ่มเงื่อนไขความไม่แน่นอนของข้อมูลและผลกระทบซึ่งถูกเรียกว่า ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

Albareda-Sambola *et al*. (2002) เสนอการหาคำตอบโดยใช้วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดของปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่ม ซึ่งจะสร้างสมการเป้าหมายที่มีคำตอบที่เป็นไปได้อย่างชัดเจน และได้นำเสนอวิธีการหาคำตอบโดยใช้วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดมาแก้ปัญหานี้ 3 วิธี ซึ่งแต่ละวิธีตั้งอยู่บนพื้นฐานของเทคนิคการแตกกิ่งและจำกัด (branch and bound) ระนาบตัดที่เหมาะที่สุด (optimality cuts) และค่าขอบเขตล่างแบบพิเศษ (a special purpose lower bound) ซึ่งจะนำเสนอออกมาเป็นผลเชิงตัวเลขและในปีเดียวกันนั้นยังได้นำเสนอการหาคำตอบที่เหมาะสมด้วยวิธีสุ่มอย่างมีเหตุผลบนพื้นฐานการประมาณค่าของแบบจำลองสำหรับปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่มที่ความต้องการมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี ซึ่งสมมติให้ความต้องการของลูกค้าในการรับบริการมีการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี โดยมีวัตถุประสงค์ที่หาค่าต่ำสุดของต้นทุนทั้งหมด ซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วนคือต้นทุนจากการจัดงาน และต้นทุนที่สูญเสียเนื่องมาจากการจัดงานใหม่โดยการเสนอตัวแบบปัญหาสองขั้นและวิธีการแก้ปัญหา

Berkin et al. (2004) เสนอวิธีการเฟ้นสุ่มที่นำไปใช้ในเงื่อนไขทรัพยากรของปัญหาการจัดงานซึ่งทรัพยากรของปัญหาการจัดงานมีความไม่แน่นอนและกำลังการผลิตนั้นไม่ทราบการแจกแจง ซึ่งได้เสนอวิธีในการแก้ปัญหาด้วยวิธีผลลัพธ์เชิงตัวเลขสำหรับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ ผลที่ตามมาทำให้เห็นได้ชัดว่าการแก้ปัญหาโดยวิธีการเขียนโปรแกรมโดยใช้วิธีการเฟ้นสุ่มจะได้ผลที่ดีกว่าการใช้ค่าคาดหวังของกำลังการผลิตในการหาผลลัพธ์ นอกจากนี้การใช้วิธีการเขียนโปรแกรมยังมีประสิทธิภาพดีกว่าอีกด้วย

Punnakitikashe *et al.* (2005) ได้นำเสนอการจัดงานให้แก่พยาบาลเชิงเฟ้นสุ่ม ซึ่งภาพรวมในการวางแผนงานให้กับพยาบาลซึ่งมีขั้นตอนการทำงานมีทั้งหมด 4 ขั้นตอนและ ในขั้นตอนสุดท้ายเป็นการจัดพยาบาลให้เข้าถึงผู้ป่วย จึงพัฒนาตัวแบบกำหนดการจำนวนเต็มเชิงเฟ้นสุ่ม (A Two-stage Stochastic Integer Programming Model) โดยใช้กระบวนการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ในการแก้ปัญหานี้ ซึ่งเงื่อนไขอัตราส่วนระหว่างผู้ป่วยกับพยาบาลจะถูกทำให้เท่ากัน ผลการคำนวณใช้ข้อมูลมาจากศูนย์การแพทย์เบย์เลอ ในเกรปไวน์ รัฐเท็กซัส (Baylor Regional Medical Center in Grapevine, Texas) จากการใช้กำหนดการจำนวนเต็มเชิงเฟ้นสุ่มสำหรับปัญหาการจัดงานให้แก่พยาบาลนั้นมีวัตถุประสงค์เพื่อลดภาระงานที่มากเกินไปสำหรับพยาบาล เมื่อทำการแก้ปัญหาแล้ว พบว่าสามารถลดภาระงานโดยเฉลี่ยของพยาบาลที่เป็นส่วนเกินต่อปีได้ถึง 273 ชั่วโมง ซึ่งจะนำกรณีนี้เป็นกรณีศึกษาเพื่อไปใช้กับตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม แสดงดังภาคผนวก ค

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

1. คอมพิวเตอร์ฮาร์ดแวร์ (Computer Hardware) ที่สำหรับการช่วยแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม ซึ่งมีจำนวน 1 เครื่อง มีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1.1 หน่วยประมวลผลกลาง Intel(R) Core(TM)2 Duo

1.2 หน่วยความจำ 2.00 GB

2. คอมพิวเตอร์ซอฟต์แวร์ (Computer Software)

2.1 โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ของบริษัท ฟรอนท์ไลน์ รุ่นปี 2553 (Excel Solver-Gurobi from Frontline System 2010)

2.2 โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b

2.3 โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ Minitab 15

2.4 โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เวิร์ด (Microsoft Word)

วิธีการ

วิธีการในการดำเนินงานวิจัยประกอบด้วย 4 ขั้นตอนหลักดังนี้

1. สร้างตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มและจำลองข้อมูลเพื่อนำไปใช้ในกา ทดสอบตัวแบบ

2. ศึกษาวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบจากตัวแบบที่สร้างขึ้น

3. เขียนโปรแกรมสำหรับแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

4. การประเมินประสิทธิภาพและประสิทธิผลของวิธีที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา

1. การสร้างตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มและการจำลองข้อมูลเพื่อนำไปใช้ในการทดสอบตัวแบบปัญหาการจัดงาน

ต้องการจับคู่เชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม n งานกับ ทรัพยากร n ทรัพยากร การจัดงานไม่จำเป็นต้องจัดให้ครบทุกคู่ขึ้นอยู่กับความไม่แน่นอนที่เป็นไปได้ทั้งหมดของเหตุการณ์ ซึ่งมีตัวแบบคณิตศาสตร์ดังนี้

สมการเป้าหมาย คือ การหาผลรวมของต้นทุนในการจัดงานซึ่งแบ่งเป็นต้นทุน 2 ส่วน ส่วนที่หนึ่งคือ ต้นทุนที่เกิดจากการจับคู่ของทรัพยากรกับงานซึ่งมีค่าแน่นอนและส่วนที่สองคือ ต้นทุนคาดหวังในการแก้ไขเหตุการณ์ซึ่งมีค่าไม่แน่นอน ดังแสดงได้ตามสมการที่ (35)

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk}\right)\right) \quad (35)$$

ส่วนที่หนึ่ง คือ $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$

ส่วนที่สอง คือ $\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk}\right)\right)$

ข้อจำกัด คือ การแสดงข้อจำกัดของทรัพยากรต่างๆ ที่มีอยู่เพื่อใช้ในการดำเนินงาน ซึ่งในปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มนี้จะประกอบไปด้วยข้อจำกัด ดังต่อไปนี้

สมการข้อจำกัดที่ 36 คือ ผลรวมของตัวแปรตัดสินใจที่ทรัพยากร i ใดๆ สามารถจับคู่กับงาน j ได้เพียง 1 เท่านั้น

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1,2,...,n \qquad (36)$$

สมการข้อจำกัดที่ 37 คือ ผลรวมของตัวแปรตัดสินใจที่งาน j ใดๆ สามารถจับคู่กับทรัพยากร i ได้เพียง 1 เท่านั้น

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; j = 1,2,...,n \tag{37}$$

สมการข้อจำกัดที่ 38 และ 39 คือ ผลรวมของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดกับตัวแปรตัดสินใจ ซึ่งถูกปรับค่าความไม่แน่นอนด้วยตัวแปรขาดและตัวแปรเกิน เป็นการแทนสมการสมดุลเพื่อชี้บ่งการแก้ไขเหตุการณ์ k ที่เกิดการจับคู่ของทรัพยากรกับงาน

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \qquad ; i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \tag{38}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \qquad ; j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \tag{39}$$

สามารถอธิบายได้ดังนี้ เมื่อ $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ มีค่าเท่ากับ 0 และค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}\right)$ มีค่าเป็น 1 ซึ่งทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติม $u_{ik} = 1$ และ $v_{ik} = 0$ เพื่อให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกัน แสดงตัวอย่างดังต่อไปนี้

$0 + u_{ik} - v_{ik} \neq 1$ ทำให้สมการสมดุล $0 + 1 - 0 = 1$

สมการข้อจำกัดที่ 40 คือ ตัวแปรตัดสินใจ (x_{ij}) มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อมีการจับคู่ระหว่างทรัพยากรกับงาน มิฉะนั้นจะมีค่าเท่ากับ 0 และตัวแปรตัดสินใจ $\left(u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk}\right)$ มีค่าเท่ากับ 1 เมื่อมีการปรับค่าความไม่แน่นอนของตัวแปรขาดและตัวแปรเกิน มิฉะนั้นจะมีค่าเท่ากับ 0

$$x_{ij}, u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}, \forall i, j, k \tag{40}$$

ตัวแปรตัดสินใจและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง

n แทนจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงาน

c_{ij} แทนต้นทุนที่เกิดขึ้นจากการจับคู่ของทรัพยากร i และงาน j

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าทรัพยากร i ถูกจับคู่กับงาน j} \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

b_{ik} แทนค่าคงที่ทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนในแนวแถว ที่เหตุการณ์ k

d_{jk} แทนค่าคงที่ทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนในแนวคอลัมน์ ที่เหตุการณ์ k

$u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}$ แทนตัวแปรที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอนของสมการข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอน กรณีที่มีการปรับค่าจากความไม่แน่นอน เนื่องจาก a_{ijk} และ x_{ij} มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ผลรวมที่ได้จาก $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้นและกำหนดให้ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งอาจทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติม $u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk}$ เพื่อให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกัน ซึ่ง u_{ik}, v_{ik} เป็นตัวแปรขาดและตัวแปรเกินที่ปรับค่าความไม่แน่นอนในแนวแถวและ r_{jk}, s_{jk} เป็นตัวแปรขาดและตัวแปรเกินที่ปรับค่าความไม่แน่นอนในแนวคอลัมน์

g_{ik} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า u_{ik} โดย $g_{ik} = p_k \times g_i$

h_{ik} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า v_{ik} โดย $h_{ik} = p_k \times h_i$

e_{jk} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า r_{jk} โดย $e_{jk} = p_k \times e_j$

f_{jk} แทนต้นทุนเฉลี่ยของกรณีที่มีการปรับค่า s_{jk} โดย $f_{jk} = p_k \times f_j$

p_k แทนความน่าจะเป็นร่วมที่เกิดจากการจับคู่ที่เหตุการณ์ k

g_i, h_i แทนค่าที่ปรับต่อหน่วย เมื่อ u_{ik}, v_{ik} มีการปรับค่าในแนวแถว

e_j, f_j แทนค่าที่ปรับต่อหน่วย เมื่อ r_{jk}, s_{jk} มีการปรับค่าในแนวคอลัมน์

$$a_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าทรัพยากร i จับคู่กับงาน j ได้ในเหตุการณ์ที่ k} \\ 0 & \text{ถ้าไม่ใช่} \end{cases}$$

จากข้างต้นได้อธิบายลักษณะของส่วนประกอบของตัวแบบและตัวแปรที่เกี่ยวข้อง สามารถแสดงเป็นตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มได้ดังต่อไปนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk}\right)\right) \quad (41)$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1,2,\dots,n \quad (42)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; j = 1,2,\dots,n \quad (43)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \qquad ; i = 1,2,\dots,n,\ k = 1,2,\dots,N \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \qquad ; j = 1,2,\dots,n,\ k = 1,2,\dots,N \quad (45)$$

$$x_{ij}, u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\},\ \forall i, j, k \quad (46)$$

จากปัญหาข้างต้นที่ได้กล่าวมานั้น ผู้วิจัยได้มีเปลี่ยนแปลงเงื่อนไขที่ (42) และ (43) ในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 เพื่อให้ตัวแบบมีลักษณะคล้ายปัญหาจริงมากที่สุด กล่าวคือ

เงื่อนไขที่ (42) จาก $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1,2,\dots,n$

เปลี่ยนเป็น $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ; i = 1,2,\dots,n \qquad (47)$

อธิบายคือ ทรัพยากร i ใดๆ สามารถจับคู่กับงาน j ได้เพียง 1 งานหรือไม่จับคู่กับงานใดเลย

เงื่อนไขที่ (43) จาก $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad ; j=1,2,...,n$

เปลี่ยนเป็น $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \quad ; j=1,2,...,n$ (48)

อธิบายคือ งาน j ใดๆ สามารถจับคู่กับทรัพยากร i ได้เพียง 1 หรือไม่จับคู่กับทรัพยากรใดเลย

ผู้วิจัยได้ศึกษาตัวแบบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มและได้ทำการวิจัยตัวแบบของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มเป็น 2 กรณี ซึ่งสามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

1.1 กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ($b_{ik}, d_{jk} = 1$)

จากสมการที่ (41) – (46) พบว่า กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน มีค่าเป็น 1 เสมอ จะทำให้รูปแบบทางคณิตศาสตร์เปลี่ยนแปลงไป โดยสามารถกำจัดตัวแปร v_{ik} และ $s_{jk}, \forall i, j, k$ ได้ทั้งหมด

การกำจัดตัวแปร v_{ik} และ s_{jk} ได้ทั้งหมด เนื่องจาก a_{ijk} และ x_{ij} มีค่าเป็น 0 หรือ 1 ทำให้ผลรวมที่ได้จาก $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 เท่านั้นและเมื่อกำหนดให้ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}\right)$ มีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งอาจทำให้สมการทั้งสองข้างไม่สมดุลกัน ดังนั้นจึงต้องเติม $u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk}$ เพื่อให้สมการทั้งสองข้างมีความสมดุลกันแสดงตัวอย่างดังต่อไปนี้

$0 + u_{ik} - v_{ik} \neq 1$ ทำให้สมการสมดุล $0+1-0=1$ ดังนั้น $v_{ik} = 0$
$1 + u_{ik} - v_{ik} = 1$ ดังนั้น $v_{ik} = 0$
$0 + r_{jk} - s_{jk} \neq 1$ ทำให้สมการสมดุล $0+1-0=1$ ดังนั้น $s_{jk} = 0$
$1 + r_{jk} - s_{jk} = 1$ ดังนั้น $s_{jk} = 0$

จากตัวอย่างข้างต้นจะเห็นได้ว่า ไม่ว่ากรณีที่ $\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ และ $\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij}$ มีค่าเป็น 0 หรือ 1 นั้นค่าของตัวแปร v_{ik} และ s_{jk} มีค่าเป็น 0 เสมอดังนี้จึงสามารถตัดตัวแปร v_{ik} และ s_{jk} ได้ทั้งหมด ซึ่งตัวแบบการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่มกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ สามารถแสดงได้ดังต่อไปนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ik} u_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk} r_{jk} \right) \tag{49}$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1,2,\ldots,n \tag{50}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; j = 1,2,\ldots,n \tag{51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk} x_{ij} + u_{ik} = 1 \qquad ; i = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,N \tag{52}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk} x_{ij} + r_{jk} = 1 \qquad ; j = 1,2,\ldots,n,\ k = 1,2,\ldots,N \tag{53}$$

$$x_{ij}, u_{ik}, r_{jk} = \{0,1\}, \forall i,j,k \tag{54}$$

จากตัวแบบในสมการ (49) – (54) เรียกว่า ตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มเต็มรูป

1.2 กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 $\left(b_{ik}, d_{jk} = \{0,1\}\right)$

ในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ผู้วิจัยพบว่าในกรณีนี้ตัวแบบจะคล้ายกับสมการที่ (41) – (46) ซึ่งจะมีตัวแปรเกิน v_{ik}, s_{jk} เพื่อช่วยปรับค่าในสมการที่ (44) และ (45) ตามลำดับให้สมการมีความสมดุล แสดงตัวอย่างดังต่อไปนี้

$1 + u_{ik} - v_{ik} = 0$ ทำให้สมการสมดุล $1 + 0 - 1 = 0$ ดังนั้น $v_{ik} = 1$

$1 + r_{jk} - s_{jk} = 0$ ทำให้สมการสมดุล $1 + 0 - 1 = 0$ ดังนั้น $r_{jk} = 1$

ซึ่งสามารถแสดงได้ดังตัวแบบ ต่อไปนี้

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk}\right)\right) \quad (55)$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ; i = 1,2,...,n \quad (56)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ; j = 1,2,...,n \quad (57)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \qquad ; i = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \quad (58)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \qquad ; j = 1,2,...,n,\ k = 1,2,...,N \quad (59)$$

$$x_{ij} = \{0,1\},\ u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}, \forall i,j,k \quad (60)$$

2. ศึกษาวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบจากตัวแบบที่สร้างขึ้น

เมื่อสร้างตัวแบบจำลองแบบสองขั้นข้างต้นแล้ว ขั้นตอนถัดไปคือ การศึกษาวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบของตัวแบบที่สร้างขึ้น โดยการเลือกใช้เทคนิคต่างๆ จะขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของตัวแบบและวิธีที่เลือกใช้ ซึ่งจะแสดงดังต่อไปนี้

2.1 วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด

เป็นวิธีที่ใช้เพื่อเปรียบเทียบผลลัพธ์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซล โซลเวอร์-กูโรบิ ซึ่งโปรแกรมนี้ถูกพัฒนาโดยสมาชิกของทีมพัฒนา CPLEX ประกอบด้วย Robert Bixby, Zonghao Gu และ Edward Rothberg โดยทั้งสามคนได้พัฒนาโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์ที่มีประสิทธิภาพสูงเป็นพิเศษด้วยอัลกอริทึมใหม่ล่าสุดที่ออกแบบมาสำหรับการประมวลผลแบบมัลติคอร์ (Multi-Core) และเรียกว่า โซลเวอร์-กูโรบิ รุ่น 4.0 ซึ่งสามารถใช้แก้ปัญหาได้ดีที่สุดโดยสังเกตได้จากเวลารวมที่ใช้ในการแก้ปัญหาน้อยกว่าทางเลือกอื่นๆ และสามารถใช้ในการแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้น (Linear Programming : LP) ปัญหากำหนดการกำลังสอง (Quadratic Programming : QP) และปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม (Mixed Integer Programming : MIP) ได้อีกด้วย ซึ่งวิธีนี้จะใช้ในการแก้ปัญหาตามกรณีที่ 2.2 และ 2.3 ซึ่งจะกล่าวต่อไป

2.2 วิธีการลดรูปตัวแบบ

เป็นวิธีที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่ม ในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งจะพิจารณาเงื่อนไข (52) และ (53) ของตัวแบบแทนค่า u_{ik} และ $r_{jk}, \forall i, j, k$ ในรูปของฟังก์ชันเชิงเส้นของ $a_{ijk}, \forall i, j, k$ ลงในสมการเป้าหมาย (49) ได้ผลลัพธ์เป็นดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
Z &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\left(1-\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}\left(1-\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} g_{ik} - \sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} e_{jk} - \sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij}\sum_{j=1}^{n} e_{jk}\right)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[c_{ij} - \sum_{k=1}^{N}\left(g_{ik}+e_{jk}\right)a_{ijk}\right]x_{ij} + \sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} g_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{c_{ij}}x_{ij} + \overline{c_0} \qquad (61)
\end{aligned}
$$

ทำให้การแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม สามารถลดรูปโดยกำจัดตัวแปร u_{ik} และ $r_{jk}, \forall i, j, k$ ได้ทั้งหมด ทำให้ได้ตัวแบบมาตรฐานของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบ เฟ้นสุ่มหรือเรียกว่าตัวแบบลดรูป คือ

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{c_{ij}}x_{ij} + \overline{c_0} \qquad (62)$$

$$\text{Subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; i = 1, 2, ..., n \qquad (63)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad ; j = 1, 2, ..., n \qquad (64)$$

$$x_{ij} = \{0, 1\}, \forall i, j \qquad (65)$$

โดยที่ $\overline{c_{ij}}$ แทน $c_{ij} - \sum_{k=1}^{N}\left(g_{ik}+e_{jk}\right)a_{ijk}$

$\overline{c_0}$ แทน $\sum_{k=1}^{N}\left[\sum_{i=1}^{n} g_{ik} + \sum_{j=1}^{n} e_{jk}\right]$

เงื่อนไขที่ (62) แทนสมการแสดงผลรวมของต้นทุนเชิงเส้นที่เกี่ยวข้องทั้งหมดที่เกิดจากการกำจัดตัวแปร u_{ik} และ $r_{jk}, \forall i, j, k$

เงื่อนไขที่ (63) และ (64) แทนเงื่อนไขของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นอย่างง่าย

2.3 วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์

เป็นวิธีที่พัฒนาขึ้นเพื่อแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเฟ้นสุ่ม ในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งจะใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b เป็นเครื่องมือในการแก้ปัญหานี้ ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

2.3.1 สร้างข้อมูลของปัญหาการจัดงาน คือ สร้างข้อมูลของต้นทุนในการจัดงาน (c_{ij}) ค่าความน่าจะเป็นในการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (p_{ij}) การเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (a_{ijk})ซึ่งข้อมูลข้างต้นเกิดขึ้นจากการสุ่ม โดยการแจกแจงแบบเอกรูปและสุ่มค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีความไม่แน่นอน (b_{ik}, d_{jk}) โดยการแจกแจงแบบเบอร์นูลลี สามารถแสดงตัวอย่างได้ดังนี้

กรณีที่จำนวนทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3 และจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 2 มีการสร้างข้อมูลดังต่อไปนี้

$$\text{ต้นทุนในการจัดงาน} = \begin{bmatrix} 0.421 & 0.953 & 0.123 \\ 0.554 & 0.696 & 0.029 \\ 0.354 & 0.911 & 0.742 \end{bmatrix}$$

$$\text{ความน่าจะเป็นในการจับคู่ทรัพยากรกับงาน} = \begin{bmatrix} 0.110 & 0.392 & 0.388 \\ 0.034 & 0.410 & 0.931 \\ 0.420 & 0.111 & 0.449 \end{bmatrix}$$

$$\text{การเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \text{เหตุการณ์ที่ 1} \\ \\ \\ \\ \text{เหตุการณ์ที่ 2} \\ \\ \end{array}$$

$$\text{ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอน } b_{ik} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{เหตุการณ์ที่ 1} \\ \\ \\ \text{และ} \quad d_{jk} = \\ \\ \text{เหตุการณ์ที่ 2} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.3.2 แยกตัวแบบเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มออกเป็น 2 ส่วน คือตัวปัญหาหลัก ซึ่งเป็นส่วนที่มีค่าตัวแปรแน่นอน และตัวปัญหารอง ซึ่งเป็นส่วนที่อยู่ภายใต้ความไม่แน่นอนจะแสดงได้ดังตัวแบบต่อไปนี้

ตัวปัญหาหลัก

Minimize $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{66}$$

Subject to $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ;i=1,2,...,n \tag{67}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1 \qquad ;j=1,2,...,n \tag{68}$$

$$x_{ij} = \{0,1\} \tag{69}$$

ตัวปัญหารอง

Minimize $$\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n}(g_{ik}u_{ik} + h_{ik}v_{ik}) + \sum_{j=1}^{n}(e_{jk}r_{jk} + f_{jk}s_{jk})\right) \quad (70$$

Subject to $$\sum_{j=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + u_{ik} - v_{ik} = b_{ik} \quad ;i=1,2,...,n,\ k=1,2,...,N \tag{71}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ijk}x_{ij} + r_{jk} - s_{jk} = d_{jk} \quad ;j=1,2,...,n,\ k=1,2,...,N \tag{72}$$

$$x_{ij}, u_{ik}, v_{ik}, r_{jk}, s_{jk} = \{0,1\}, \forall i,j,k \tag{73}$$

2.3.3 เปลี่ยนปัญหารองให้อยู่ในรูปของตัวแบบปัญหาคู่ควบ

$$\text{Maximize } \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(b_{ik}-\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}\right)y_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(b_{jk}-\sum_{i=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}\right)w_{ik}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (74)$$

$$\text{Subject to} \quad -h_{ik} \le y_{ik} \le g_{ik} \qquad (75)$$

$$-f_{jk} \le w_{jk} \le e_{jk} \qquad (76)$$

2.3.4 กำหนดค่าเริ่มต้นของตัวแปรตัดสินใจปัญหาการจัดงาน $\left(x_{ij}\right)$

$$\text{ตัวแปรตัดสินใจเริ่มต้น} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.5 แทนค่าเริ่มต้นของตัวแปรตัดสินใจปัญหาการจัดงานลงในสมการที่ (74) และจะได้ผลลัพธ์เป็นค่า y_{ik} และ w_{jk} ซึ่งเป็นค่าความน่าจะเป็นของแต่ละทางเลือกและค่าขอบเขตบนที่เหมาะสม

2.3.6 ปรับปรุงปัญหาหลักโดยเพิ่มเงื่อนไขระนาบตัดเหมาะที่สุดดังสมการที่ (78) เพื่อคำนวณหาค่าขอบเขตล่างในที่นี้แสดงโดยค่า T จากนั้นจะนำผลลัพธ์ของตัวแปรตัดสินใจใหม่ ไปใช้ในการในการปรับปรุงผลลัพธ์ตามข้อ 2.3.5 ต่อไป

$$\text{Minimize} \quad T \tag{77}$$

$$\text{Subject to } -T+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij}-\sum_{k=1}^{N}a_{ijk}y_{ik}-\sum_{k=1}^{N}a_{ijk}w_{jk}\right)x_{ij} \le -\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}b_{ik}y_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}d_{jk}w_{jk}\right) \tag{78}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \le 1 \qquad ;i=1,2,...,n \tag{79}$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij} \le 1 \qquad ;j=1,2,...,n \tag{80}$$

$$x_{ij}=\{0,1\} \tag{81}$$

โดยที่ T แทนค่าขอบเขตล่าง

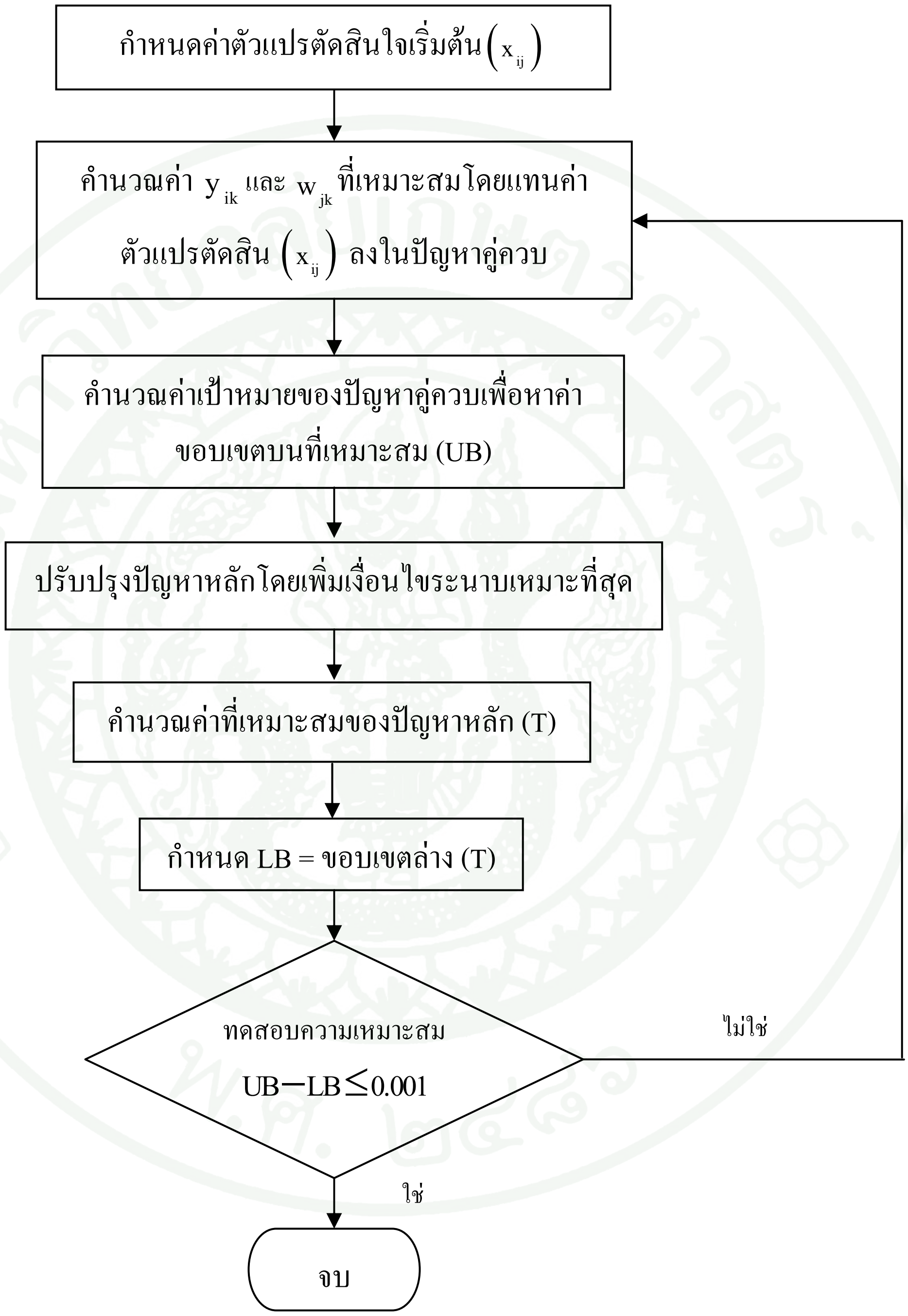
ตัวแปรตัดสินใจเริ่มต้น แทนตัวแปรตัดสินใจที่เกิดจากการสุ่มขึ้นเพื่อแทนค่าในสมการที่ 77 ในรอบการทำซ้ำที่ 1

ตัวแปรตัดสินใจใหม่ แทนตัวแปรตัดสินใจที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ในรอบการทำซ้ำแต่ละรอบตั้งแต่รอบที่ 2 เป็นต้นไป

2.3.7 เงื่อนไขการหยุด จะหยุดเมื่อค้นหาคำตอบเมื่อผลต่างของค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่างน้อยกว่าหรือเท่ากับ Tol ซึ่งในที่กรณีนี้กำหนดให้เท่ากับ 0.001 ซึ่งหมายความว่าคำตอบจะมีความละเอียดถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2

$$UB-LB \le Tol \tag{82}$$

จากข้อ 2.3.4 – 2.3.7 สามารถสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ได้ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 1 ผังงานสรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์

3. เขียนโปรแกรมสำหรับปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

โปรแกรมที่นำมาใช้ในการช่วยแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มคือ MATLAB ซึ่งที่มาของชื่อโปรแกรมมาจากคำว่า MATrix LABoratory (ปฏิบัติการทดลองโดยใช้เมทริกซ์) MATLAB คือ โปรแกรมที่ทำงานทุกส่วนสำหรับการคำนวณเชิงตัวเลข (Numerical Computing Environment) และมีภาษาเฉพาะตัวในการพัฒนาโปรแกรม ซึ่งโปรแกรมนี้ใช้สำหรับคำนวณทางเทคนิคที่ประกอบด้วยการคำนวณเชิงตัวเลข กราฟิกที่ซับซ้อน ซึ่งเป็นโปรแกรมที่ง่ายต่อความเข้าใจ การเขียนโปรแกรมไม่ซับซ้อนและสามารถแสดงผลการคำนวณได้อย่างรวดเร็ว ด้วยเหตุนี้เองผู้วิจัยจึงเลือกใช้ MATLAB R2010b

อย่างที่ทราบเบื้องต้นปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มเป็นปัญหาที่มีลักษณะเป็นปัญหากำหนดการจำนวนเต็มผสม ซึ่งชุดเครื่องมือ (Toolbox) ของโปรแกรม MATLAB ไม่ได้รองรับสำหรับการแก้ปัญหาลักษณะนี้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงต้องพัฒนาโปรแกรมเองในซอฟต์แวร์ดังกล่าว กล่าวคือ ผู้วิจัยเลือกใช้คำสั่งมาตรฐาน bintprog ในโปรแกรม MATLAB R2010b มาใช้ในการแก้ปัญหา ดังนั้นจะได้คำตอบของตัวแปรตัดสินใจที่มีค่าเป็น 0 และ 1 เท่านั้น แต่ค่าเป้าหมายของปัญหานี้ต้องการเป็นค่าจำนวนเต็มหรือจำนวนจริงดังสมการที่ (77) ดังนั้นผู้วิจัยจึงทำการเพิ่มค่าสัมประสิทธิ์หน้า T (ค่าขอบเขตล่าง) ในแต่ละรอบที่มีการทำซ้ำและเพิ่มจนกว่าค่าขอบเขตล่างที่ได้จะมีค่ามากกว่าค่าขอบเขตบน ในการเพิ่มค่า T นั้นอาจทำให้บางครั้งในการเพิ่มค่า T แต่ละรอบที่มากจนเกินไปจะทำให้ข้ามคำตอบที่ดีที่สุดไป ดังนั้นค่าที่เหมาะสมที่ได้จึงมีค่าความผิดพลาดได้

4. การประเมินประสิทธิภาพและประสิทธิผลของวิธีที่นำมาใช้ในการแก้ปัญหา

การประเมินประสิทธิผล (Effectiveness) ใช้การเปรียบเทียบค่าเป้าหมายของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้จากวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด โดยมีการสร้างแบบจำลองปัญหาด้วยขนาดต่างๆ กัน จำนวน 2 ปัญหา แต่ละปัญหามีจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5 โดยจะทำซ้ำ 10 ครั้ง ทำการทดสอบขนาดปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2 และ 3 โดยการจำลองปัญหาทำได้โดยใช้โปรแกรม MATLAB ซึ่งค่าความความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ต้นทุนการจัดงาน และค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอน จะใช้ข้อมูลชุดเดียวกัน

ตารางที่ 1 ลักษณะของปัญหาในการประเมินประสิทธิผล

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (N)
2	5
3	5

การประเมินประสิทธิภาพ (Efficiency) ผู้วิจัยได้แบ่งการทดสอบออกเป็น 3 ส่วนคือ ส่วนแรก ทดสอบเวลาในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ส่วนที่สอง ทดสอบเวลาในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 รวมทั้งศึกษาลักษณะการลู่เข้าของคำตอบของปัญหาและส่วนที่สาม ทดสอบความสามารถในการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่ (จำนวนตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร)

ส่วนที่ 1 พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ โดยเปรียบเทียบเวลาในการประมวลผลของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มแบบเต็มรูปกับแบบลดรูป ซึ่งมีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และเปรียบเทียบเวลาในการประมวลผลของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่ต่างกัน คือ 5 และ 10 โดยมีการเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ตารางที่ 2 ลักษณะของปัญหาในการประเมินประสิทธิภาพในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ

รูปแบบตัวแบบ	จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (N)
ตัวแบบเต็มรูป	5	512 – 8,192
ตัวแบบลดรูป	5	512 – 8,192
	10	512 – 3,584

ส่วนที่ 2 พิจารณาจากเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งจะแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ในการทำการทดสอบ ผู้วิจัยได้ทดสอบปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มซึ่งมีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน ที่ต่างกันจำนวน 4 ปัญหา คือ 10 20 30 และ 40 โดยมีการเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดตามจำนวนตัวแปรตัดสินใจ ซึ่งมีจำนวนตั้งแต่ 10,000 – 200,000 ตัวโดยประมาณและจำนวนตัวแปรตัดสินใจจะเพิ่มขึ้นทีละ 10,000 ตัว และทดสอบการลู่เข้าซึ่งใช้จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 10 และ 20 โดยใช้ความน่าจะเป็นในการจับคู่ทรัพยากรกับงานและต้นทุนการจัดงานชุดเดียวกัน ซึ่งจะทำซ้ำ 3 รอบ

ตารางที่ 3 ลักษณะของปัญหาในการประเมินประสิทธิภาพในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนเหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ (N)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ
5	500 – 10,000	10,025 – 200,025
10	248 – 4,998	10,020 – 200,020
20	120 – 2,495	10,000 – 200,000
30	76 – 1,660	10,020 – 200,100
40	53 – 1,240	10,080 – 200,000

ส่วนที่ 3 เปรียบเทียบความสามารถของการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมโดยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ และการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b

การกำหนดจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีหลักการคือ จะกำหนดเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่สามารถมีจำนวนตัวแปรตัดสินใจ เริ่มตั้งแต่ 10,000 ตัวแปรโดยประมาณ และเพิ่มทีละ 10,000 ตัวแปรจนครบ 200,000 ตัวแปรโดยประมาณ ซึ่งจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดจะสอดคล้องกับจำนวนตัวแปรตัดสินใจ โดยมีวิธีคำนวณดังต่อไปนี้

จำนวนตัวแปรตัดสินใจทั้งหมด = (จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด x จำนวนตัวแปรตัดสินใจที่เป็นตัวแปรขาดและตัวแปรเกินในแต่ละเหตุการณ์) + จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน^2

ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10

จำนวนตัวแปรตัดสินใจทั้งหมด $= (248 \times (4 \times 10))+10^2$
$= 10{,}020$ ตัวแปร

จำนวนตัวแปรตัดสินใจทั้งหมด $= (498 \times (4 \times 10))+10^2$
$= 20{,}020$ ตัวแปร

จำนวนเงื่อนไข = (จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด x 2 x จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน)

ตัวอย่างเช่น ในกรณีที่จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10

จำนวนเงื่อนไข $= (248 \times 2 \times 10)$
$= 4{,}960$ เงื่อนไข

จำนวนเงื่อนไข $= (498 \times 2 \times 10)$
$= 9{,}960$ เงื่อนไข

ผลและวิจารณ์

จากการทำการทดลองทั้ง 3 ส่วนคือ การทดสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ การทดสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 รวมทั้งยังทดสอบการลู่เข้าของคำตอบและการทดสอบความสามารถของการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมโดยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ และการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์โดยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b สามารถแสดงผลการทดสอบได้ดังนี้

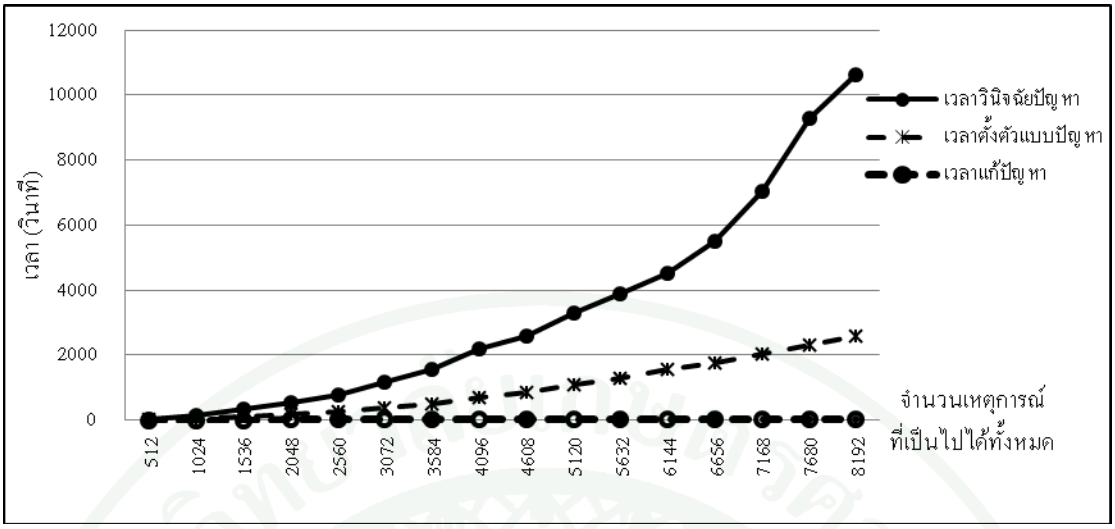
1. การทดสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ

จากการทดสอบเวลาในการประมวลผลของตัวแบบในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ โดยการเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด ผลที่ได้จะแสดงดังต่อไปนี้

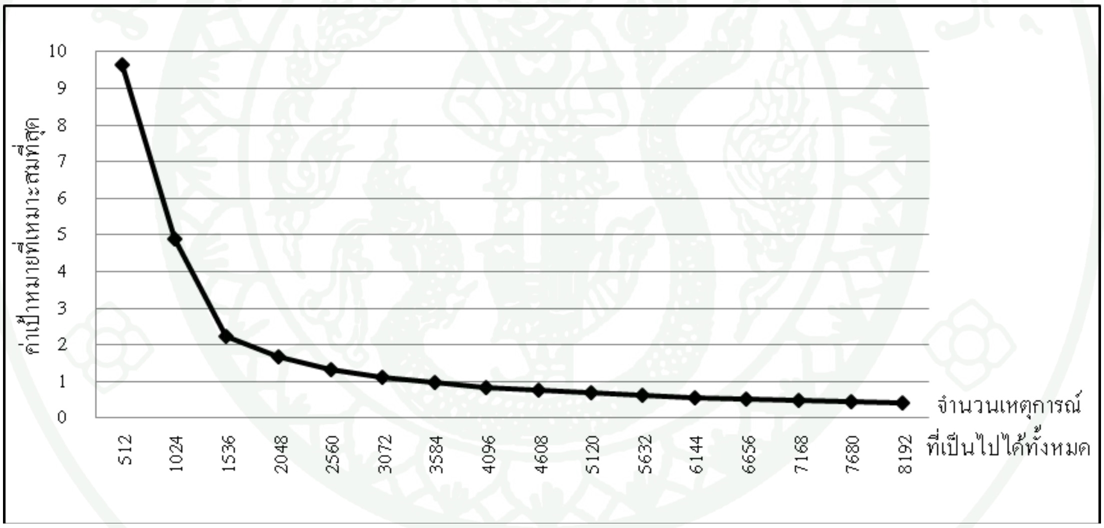
ตารางที่ 4 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาตัวแบบเต็มรูปที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 5

จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด	เวลาที่ใช้ในการ						ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด
	วินิจฉัยปัญหา			ตั้งตัวแบบปัญหา		แก้ปัญหา	
	ชั่วโมง	นาที	วินาที	นาที	วินาที	วินาที	
512	-	-	31.17	-	5.26	0.28	9.654
1024	-	2	29	-	50.17	0.42	4.883
1536	-	5	33	1	35	0.64	2.214
2048	-	8	34	2	50	1.44	1.670
2560	-	12	52	4	20	1.38	1.338
3072	-	19	28	6	20	1.81	1.118
3584	-	26	9	7	59	2.02	0.962
4096	-	36	15	11	12	2.91	0.839
4608	-	42	57	14	20	3.63	0.746
5120	-	54	53	18	17	4.83	0.675
5632	1	5	0	21	11	5.5	0.615
6144	1	15	0	25	73	6.63	0.563
6656	1	32	0	29	23	8.05	0.522
7168	1	57	0	34	3	8.55	0.485
7680	2	35	0	38	19	9.13	0.455
8192	2	57	0	43	5	10.31	0.425

จากตารางที่ 4 พบว่าเมื่อจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีค่าเพิ่มขึ้น เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหารวมตั้งแต่การวินิจฉัยลักษณะปัญหา (Parse Time) เวลาในการตั้งตัวแบบปัญหา (Set up time) และเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบ (Solve time) มีแนวโน้มเพิ่มขึ้น จุดที่น่าสนใจอีกประการคือ เมื่อขนาดของจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพิ่มขึ้น เวลาส่วนใหญ่ในการแก้ปัญหารวมถูกใช้ในการวินิจฉัยลักษณะปัญหาและเวลาในการตั้งปัญหามากกว่าเวลาที่ใช้ในการหาคำตอบโดยเฉพาะเมื่อจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเพิ่มขึ้น ความแตกต่างดังกล่าวสามารถสังเกตได้อย่างชัดเจน ดังแสดงในภาพที่ 2



ภาพที่ 2 เวลาในการแก้ปัญหาของตัวแบบเต็มรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5



ภาพที่ 3 การลู่เข้าของค่าเป้าหมายของตัวแบบเต็มรูปที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 5

จากภาพที่ 3 ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุดมีการลดลง โดยในช่วงแรกจะมีการลดลงอย่างรวดเร็วและจะค่อยลดลงอย่างช้าๆ ซึ่งพบว่าการลู่เข้าของคำตอบ (Solution) จากการแก้ปัญหาในกรณีปัญหาตัวแบบเต็มรูป จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ใช้ยังไม่มากพอที่จะชี้บ่งสภาวะคงตัวหรือลู่เข้าของค่าเป้าหมาย ซึ่งหมายความว่าต้องเพิ่มค่าจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด แต่เนื่องจากข้อจำกัดทางด้านเวลาและทรัพยากรของคอมพิวเตอร์ พบว่าขนาดของปัญหาเกินขีดจำกัดที่โปรแกรมสำเร็จรูปจะรองรับได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงนำเสนอวิธีการลดรูปตัวแบบเพื่อแก้ปัญหาที่ปรากฏนี้

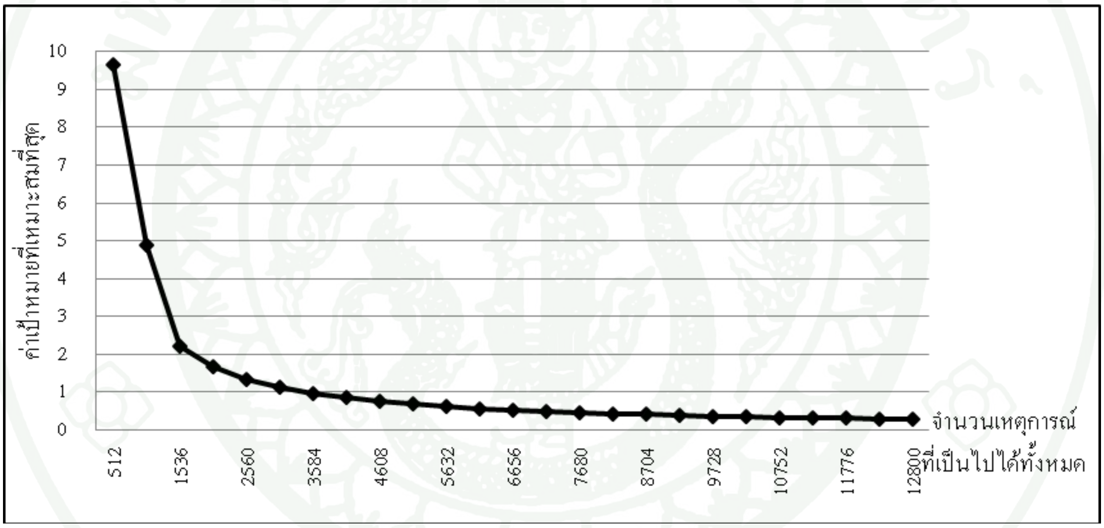
การแปลงรูปดังกล่าวยังทำให้เห็นว่าคำตอบของปัญหาการจัดงานเชิงแบบเฟ้นสุ่มที่ผ่อนปรนเงื่อนไขกับตัวแปรเป็นเลข ศูนย์หนึ่ง จะมีคำตอบเหมาะที่สุดเป็นชุดของเลขศูนย์หนึ่งตามเงื่อนไขอยู่แล้ว ซึ่งหมายความว่าปัญหาดังกล่าวสามารถหาคำตอบได้โดยวิธีการกำหนดการเชิงเส้นตามที่ Burkard and Derigs (1980) และ Wagner (1975) ได้กล่าวไว้ อย่างไรก็ตามปัญหาการลดรูปสมการเป้าหมายให้เป็นตามเงื่อนไข (62) จำเป็นต้องอาศัยการรวมเทอมตามดัชนี k ที่มีค่าตัวเลข 1 ถึง N ซึ่งจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังที่กล่าวมาแล้วในก่อนหน้าว่ามีค่าที่เพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและเป็นอุปสรรคในการประมวลผลโดยเฉพาะ เมื่อจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรมีค่าเพิ่มขึ้น ซึ่งแสดงผลดังตารางดังต่อไปนี้

ตารางที่ 5 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5

จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด	เวลาที่ใช้ในการ				ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด
	วินิจฉัยปัญหา		ตั้งตัวแบบปัญหา	แก้ปัญหา	
	นาที	วินาที	วินาที	วินาที	
512		6.45	0.48	0	9.654
1024		7.58	1.22	0	4.883
1536		11.34	1.48	0.02	2.214
2048		14.88	2.11	0.02	1.670
2560		15.83	2.84	0.02	1.338
3072		24.83	4.3	0.03	1.118
3584		54.83	5.28	0.03	0.962
4096		58.67	5.54	0.03	0.839
4608	1	11	5.89	0.03	0.746
5200	1	34	8.3	0.03	0.675
5632	1	38	9.12	0.03	0.615
6144	1	44	10.64	0.03	0.563
6656	1	53	12.13	0.04	0.522
7168	2	11	12.38	0.06	0.485
7680	2	21	12.46	0.06	0.455
8192	2	32	12.53	0.08	0.425
8704	2	49	13.38	0.09	0.399
9216	2	56	13.51	0.09	0.376
9728	3	22	14.39	0.15	0.357
10240	3	40	15.02	0.16	0.340

ตารางที่ 5 (ต่อ)

จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด	เวลาที่ใช้ในการ				ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด
	วินิจฉัยปัญหา		ตั้งตัวแบบปัญหา	แก้ปัญหา	
	นาที	วินาที	วินาที	วินาที	
10725	3	51	15.32	0.16	0.324
11264	4	38	17.21	0.22	0.310
11776	4	55	17.58	0.28	0.296
12288	5	21	19.04	0.35	0.284
12800	5	46	20.33	0.51	0.273

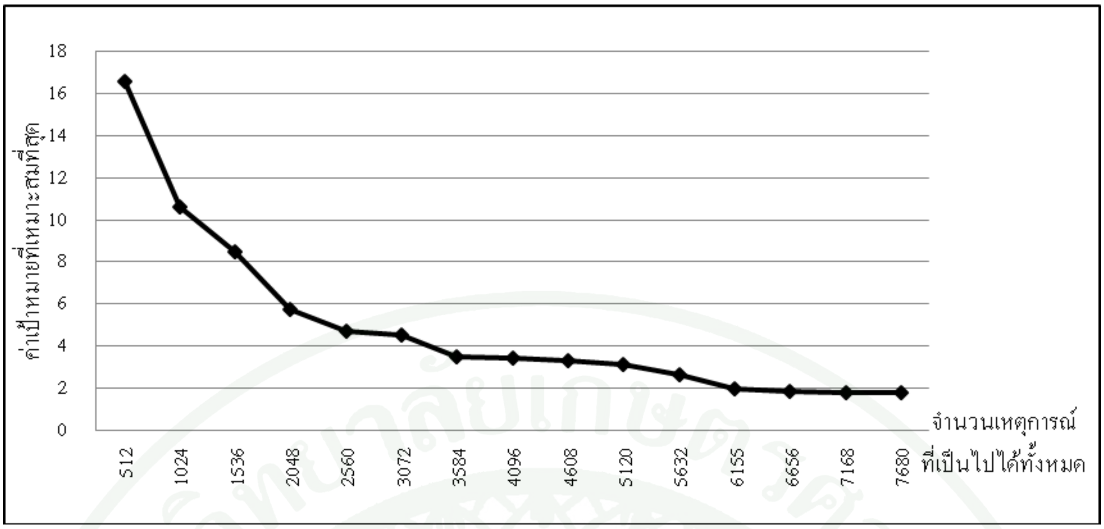


ภาพที่ 4 การลู่เข้าของค่าเป้าหมายของตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5

จากภาพที่ 4 การลู่เข้าของคำตอบจากการแก้ปัญหาในกรณีปัญหาตัวแบบลดรูป เมื่อทดลองเพิ่มเติมโดยเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด พบว่าคำตอบของทั้งสองวิธีมีค่าเท่ากัน ซึ่งในช่วงต้นค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุดจะลดลงอย่างรวดเร็วและค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ ซึ่งแสดงได้ว่าก็เพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดมีผลต่อการลู่เข้าของคำตอบ กล่าวคือ ถ้าจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพิ่มขึ้นจนถึงจุดหนึ่งแล้วค่าเป้าหมายจะเปลี่ยนแปลงน้อยมากหรือไม่เปลี่ยนเลย ซึ่งเรียกได้ว่าเกิดการลู่เข้าของค่าเป้าหมาย ต่อมาได้ศึกษาการขยายจำนวนการจับคู่งานกับ ทรัพยากรเท่ากับ 10 เพื่อศึกษาเวลาที่ใช้ในการประมวลผลซึ่งแสดงได้ดังต่อไปนี้

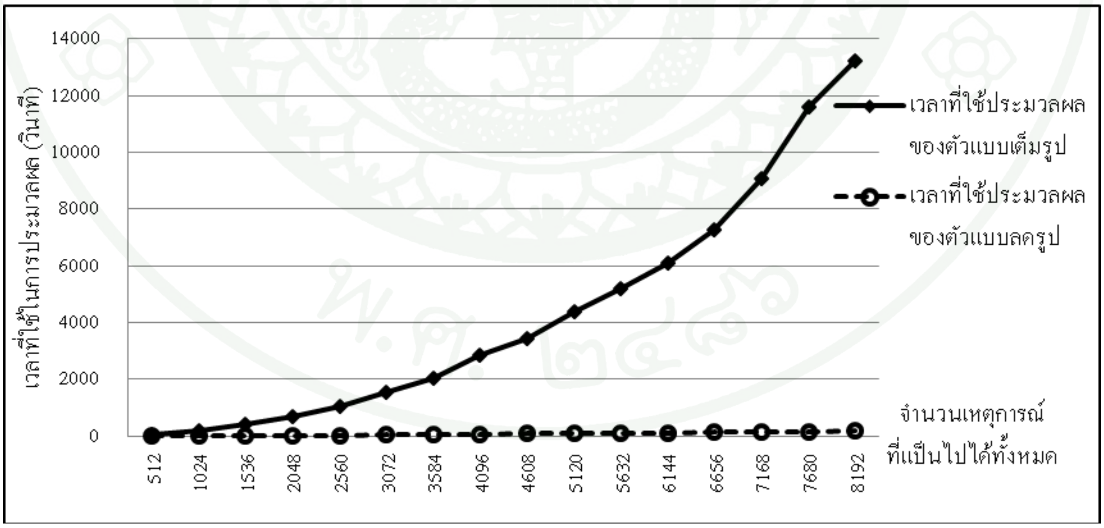
ตารางที่ 6 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 10

จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด	เวลาที่ใช้ในการ					ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด
	วินิจฉัยปัญหา		ตั้งตัวแบบปัญหา		แก้ปัญหา	
	นาที	วินาที	นาที	วินาที	วินาที	
512		12.7		1.31	0.01	16.619
1024	1	22		3.63	0.05	10.604
1536	1	31		4.94	0.01	8.488
2048	1	49	2	8	0.11	5.754
2560	2	36	2	51	0.08	4.684
3072	2	44	3	9	0.03	4.494
3584	3	23	3	44	0.04	3.471
4096	3	46	4	2	0.11	3.400
4608	5	34	4	32	0.20	3.329
5120	7	22	5	26	0.34	3.138
5632	9	54	6	2	0.45	2.638
6155	11	3	6	34	0.37	1.959
6656	16	32	8	3	0.42	1.821
7168	18	45	7	22	1.53	1.786
7680	21	6	8	34	3.33	1.781



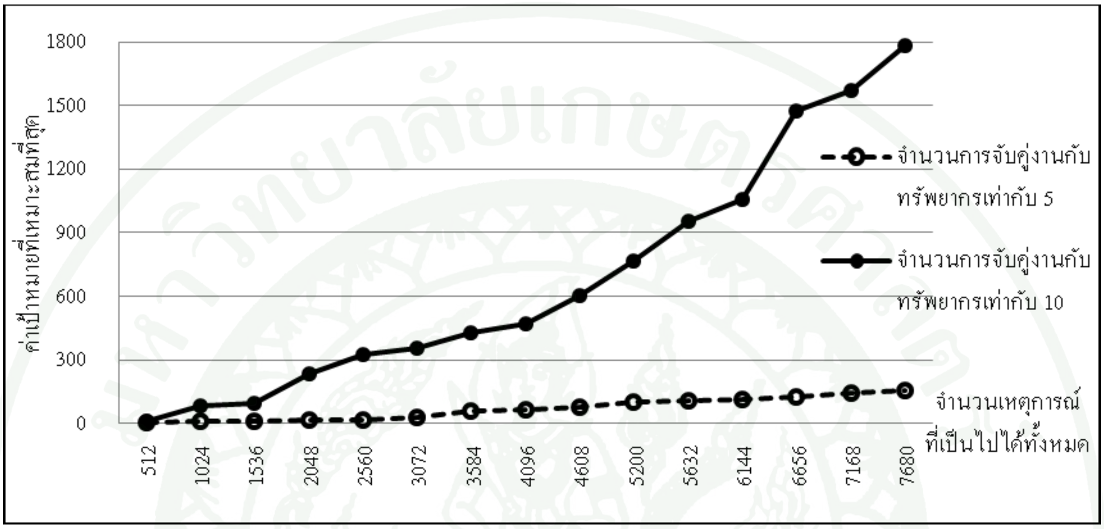
ภาพที่ 5 การลู่เข้าของค่าเป้าหมายของตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10

จากภาพที่ 5 การลู่เข้าของคำตอบจากการแก้ปัญหาในกรณีปัญหาตัวแบบลดรูป ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 พบว่าในช่วงต้นค่าเป้าหมายลดลงอย่างรวดเร็วและเมื่อจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเพิ่มขึ้นจนถึง 6,155 เหตุการณ์ ค่าเป้าหมายมีการลดลงอย่างช้าๆ ซึ่งแสดงว่าเริ่มเกิดการลู่เข้าของค่าเป้าหมาย



ภาพที่ 6 เวลาในการประมวลผลระหว่างตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5

จากภาพที่ 6 จะเห็นว่า เวลาที่ใช้ในการประมวลผลของตัวแบบลดรูปน้อยกว่าเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของตัวแบบเต็มรูปอย่างเห็นได้ชัด ซึ่งในวิธีการแก้ปัญหาที่ต่างกันแต่ให้ค่าที่เหมาะสมที่สุดเท่ากัน และผู้วิจัยจะทดสอบเวลาที่ใช้ของตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่แตกต่างกัน คือ 5 และ 10 ซึ่งจะแสดงได้ดังภาพต่อไปนี้



ภาพที่ 7 เวลาในการประมวลผลของตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10

จากภาพที่ 6 และ 7 ข้างต้น ผู้วิจัยใช้วิธีทางสถิติมาทดสอบความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลด้วยวิธีเต็มรูปและวิธีลดรูป เพื่อแสดงถึงเวลาที่ใช้ในการประมวลผลด้วยวิธีต่างๆ มีความแตกต่างกันหรือไม่ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ Minitab ซึ่งจะแสดงได้ดังต่อไปนี้

การทดสอบความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของกรณีตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 จะใช้การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกัน เพราะข้อมูลของสองกลุ่มอยู่ภายใต้เงื่อนไขเดียวกัน แตกต่างกันเพียงวิธีที่ใช้ในการหาคำตอบ ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

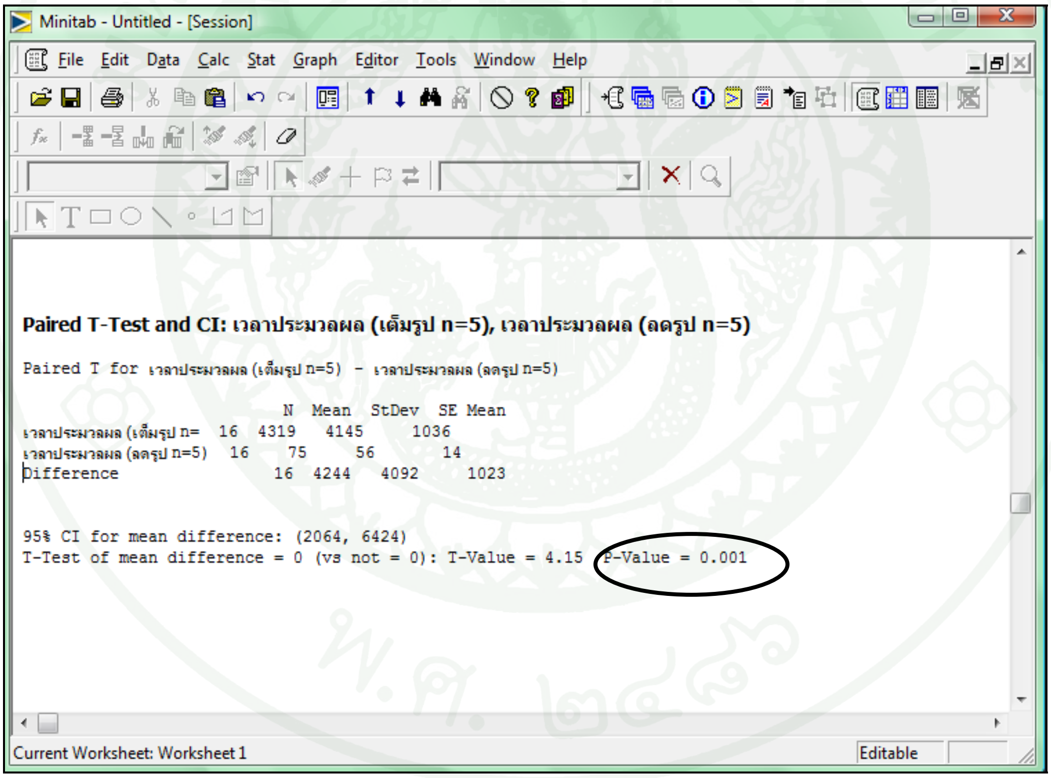
ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 แตกต่างกัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ t ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 8 ผลการทดสอบทางสถิติของเวลาในการประมวลผลระหว่างตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5

จากภาพที่ 8 จะได้ว่า P-value มีค่าน้อยกว่า 0.05 (ระดับนัยสำคัญ) ดังนั้น ปฏิเสธ H_0 สรุปได้ว่า ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 แตกต่างกัน

ส่วนการทดสอบความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของกรณีตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10 จะใช้การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน เพราะข้อมูลของสองกลุ่มไม่มีความสัมพันธ์กัน

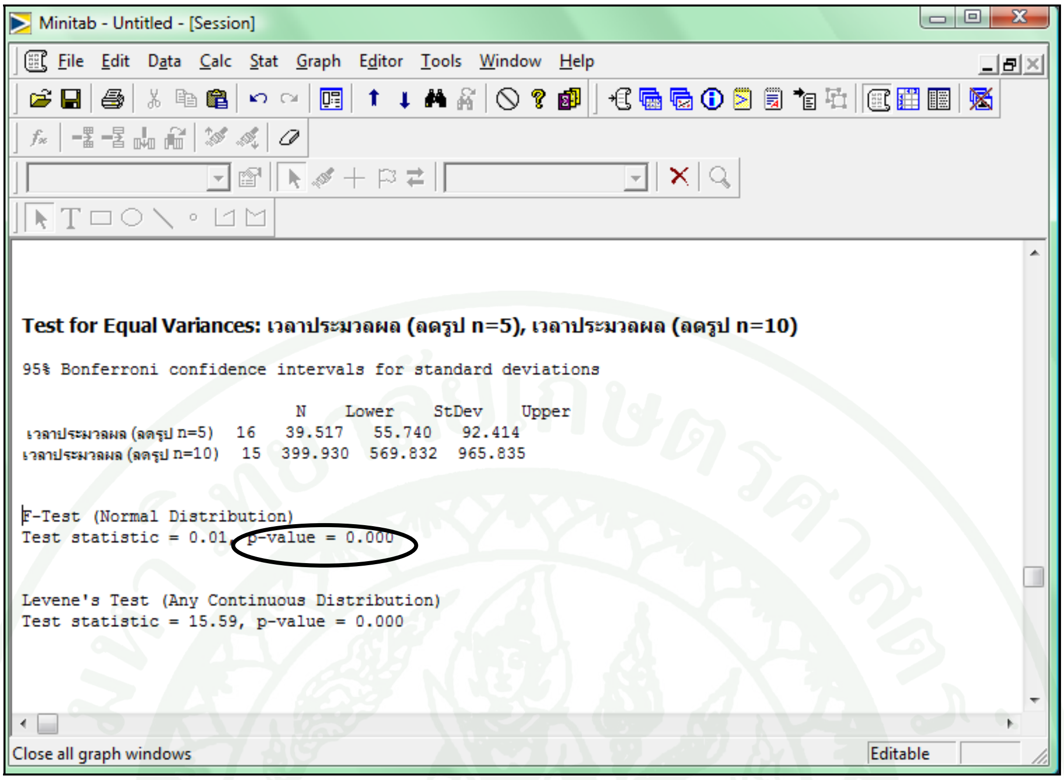
กรณีที่ใช้การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน จะต้องทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม ซึ่งมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0: ค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มเท่ากัน
H_1: ค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ F ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 9 ผลการทดสอบทางสถิติของความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่มของตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10

จากภาพที่ 9 จะได้ว่า P-value มีค่าน้อยกว่า 0.05 ดังนั้นปฏิเสธ H_0 สรุปได้ว่าค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากันและต่อไปจะทดสอบค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10

ทดสอบความแตกต่างระหว่าค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

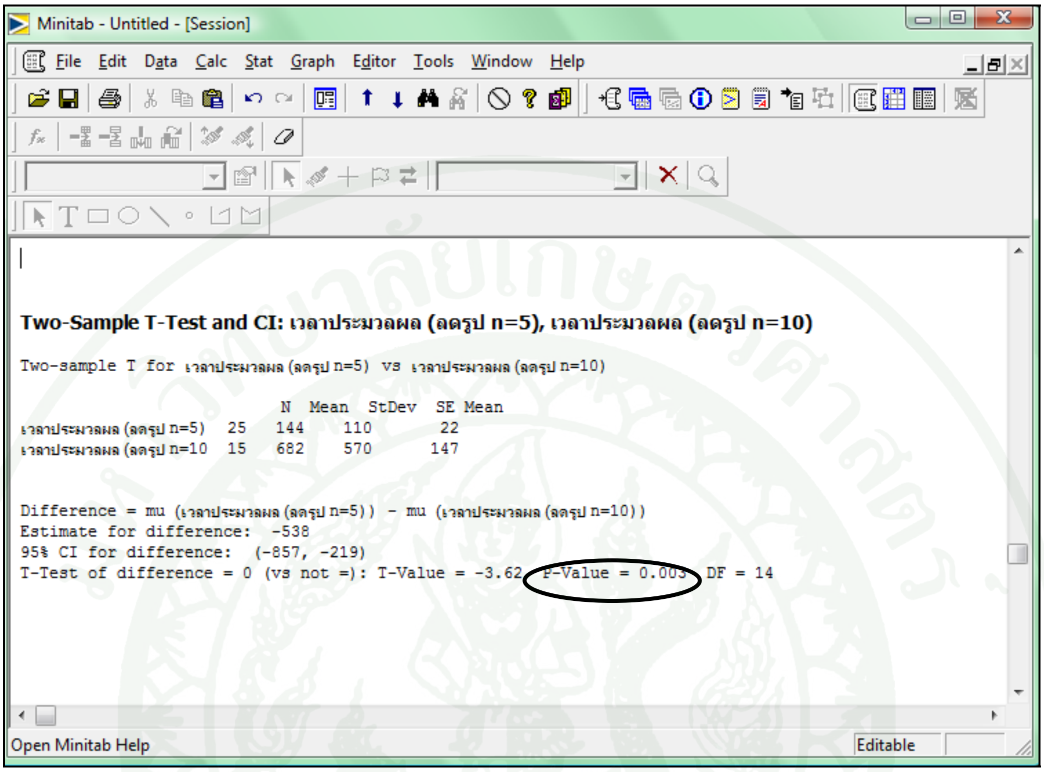
ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10 แตกต่างกัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ t ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 10 ผลการทดสอบทางสถิติของเวลาในการประมวลผลตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10

จากภาพที่ 10 จะได้ว่า P-value มีค่าน้อยกว่า 0.05 ดังนั้นปฏิเสธ H_0 สรุปได้ว่า ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลด้วยตัวแบบลดรูปที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 และ 10 แตกต่างกัน

จากการทดสอบความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลในกรณีต่างๆ ด้วยวิธีทางสถิติโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปทางสถิติ Minitab R2010b สรุปผลดังต่อไปนี้

ตารางที่ 7 ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้และการลู่เข้าของคำตอบในการประมวลผลระหว่างตัวแบบเต็มรูปและตัวแบบลดรูป

ลักษณะของตัวแบบ	จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	ผลการศึกษาที่ได้	
		เวลาที่ใช้ในการประมวลผล	การลู่เข้าของคำตอบ
ตัวแบบเต็มรูป ตัวแบบลดรูป	5	ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลมีความแตกต่างกัน	มีการลู่เข้าอย่างชัดเจน
ตัวแบบลดรูป	5	ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลมีความแตกต่างกัน	มีการลู่เข้าอย่างชัดเจน
ตัวแบบลดรูป	10		การลู่เข้ามีความไม่แน่นอนต้องเพิ่มจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

จากตารางที่ 7 พบว่าค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลมีความแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญในทุกกรณีที่นำมาเปรียบเทียบกัน ซึ่งสามารถสรุปได้ว่าตัวแบบลดรูปมีประสิทธิภาพในการแก้ปัญหาดีกว่าตัวแบบเต็มรูป โดยวิธีทั้งสองให้ค่าเป้าหมายของปัญหาที่เท่ากัน สาเหตุที่ตัวแบบลดรูปมีประสิทธิภาพดีว่าตัวแบบเต็มรูป เพราะตัวแบบลดรูปเป็นการแก้ปัญหาที่ไม่ซับซ้อน ตัวแบบถูกลดรูปให้อยู่ในปัญหาการจัดงานรูปแบบ มาตรฐานส่งผลทำให้จำนวนตัวแปรตัดสินใจลดลงอย่างมาก ดังนั้นจึงทำให้ลดเวลาในการแก้ปัญหาตามไปด้วย ผลการทดลองเบื้องต้นแสดงหลักฐานเชิงวิทยาศาสตร์ ซึ่งชี้ให้เห็นถึงการขยายขีดความสามารถของการแก้ปัญหาปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม แต่ปัญหายังคงมีอยู่และสามารถที่จะดำเนินการวิจัยต่อไป

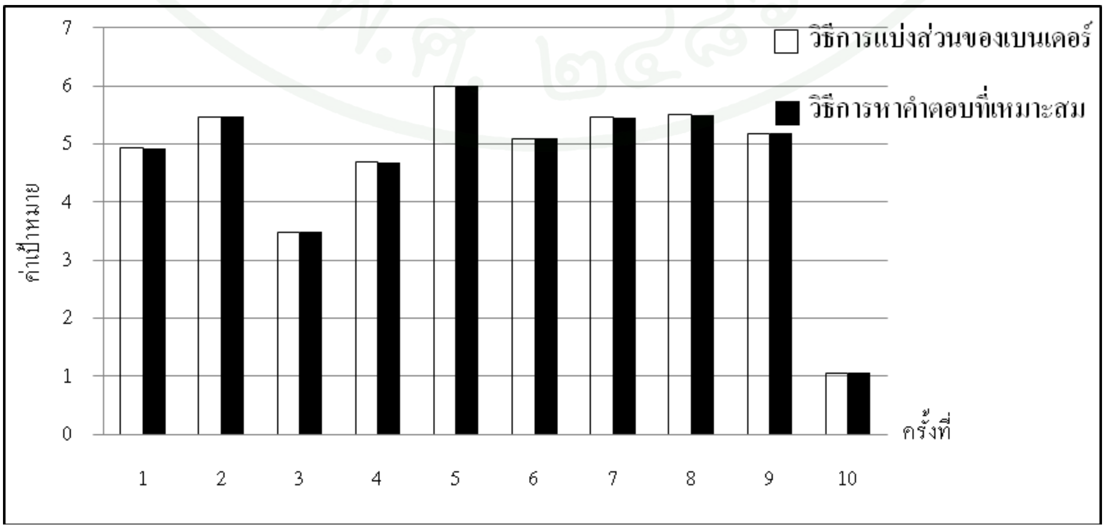
การศึกษาการแก้ปัญหาในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ซึ่งไม่สามารถแก้ปัญหาโดยวิธีลดรูปตัวแบบได้ เมื่อผู้วิจัยได้ศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องจากข้างต้นที่กล่าวมานั้น จากปัญหาการเพิ่มขึ้นของจำนวนพารามิเตอร์ความไม่แน่นอน ทำให้ถึงจุดที่เครื่อง

คำนวณประมวลผลและซอฟต์แวร์มาตรฐานที่มีสมรรถนะสูงไม่สามารถแก้ปัญหาได้ ผู้วิจัยจึงเลือกใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

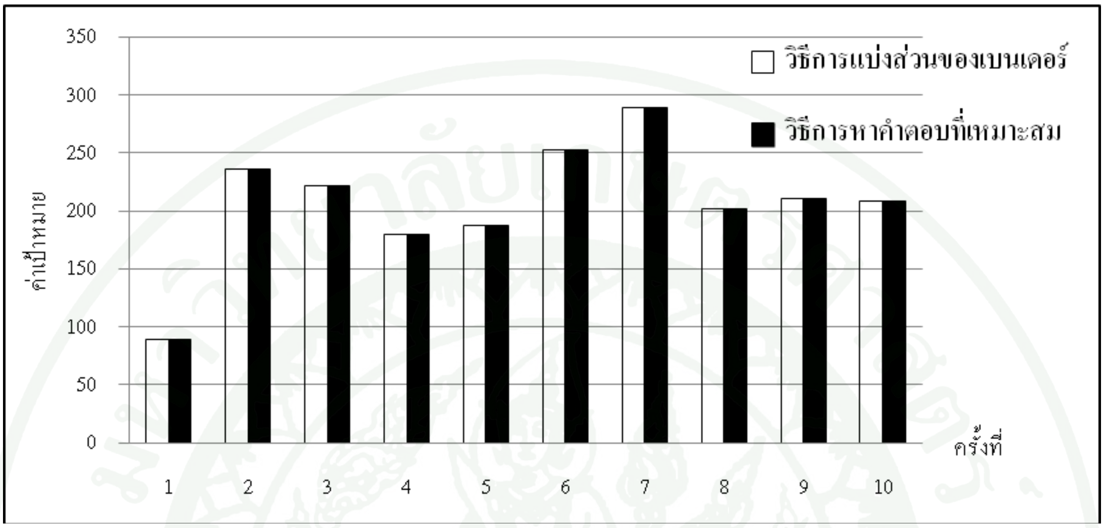
2. การทดสอบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลในกรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1

กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 จะใช้วิธีแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ซึ่งก่อนที่นำวิธีนี้มาใช้กับปัญหาที่มีขนาดใหญ่ ผู้วิจัยได้มีการทดสอบประสิทธิผลของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ซึ่งพิจารณาจากการเปรียบเทียบค่าเป้าหมายของฟังก์ชันวัตถุประสงค์ที่ได้จากวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด จากนั้นนำค่าที่ได้มาทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกันด้วยความเชื่อมั่นของความผิดพลาดที่ 95% ซึ่งข้อมูลดิบที่ทดสอบได้แสดงในภาคผนวก ข

จากผลการทดสอบข้างต้นสามารถแสดงการเปรียบเทียบค่าเป้าหมายของการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม เพื่อให้เห็นค่าความแตกต่างระหว่างค่าเป้าหมายของ 2 วิธีตามที่ได้กล่าวมาแล้วนั้น



ภาพที่ 11 ค่าเป้าหมายของตัวแบบซึ่งแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2



ภาพที่ 12 ค่าเป้าหมายของตัวแบบซึ่งแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3

จากภาพที่ 11 และ 12 ผู้วิจัยได้ทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเป้าหมายของตัวแบบที่ถูกแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม ซึ่งใช้การทดสอบด้วยวิธีทางสถิติ คือ การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกัน ซึ่งสามารถทำได้ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่ไม่เป็นอิสระจากกัน มีขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2 ไม่แตกต่างกัน

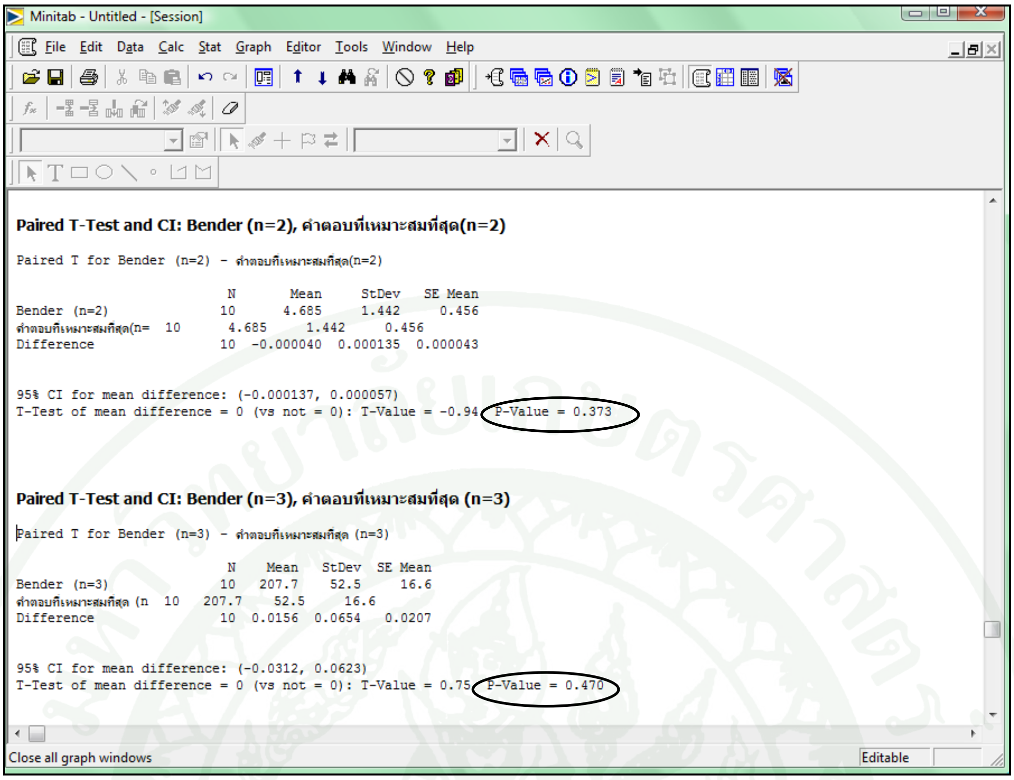
H_1 : ค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2 แตกต่างกัน

H_0 : ค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3 แตกต่างกัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ เท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ t ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 13 ผลการทดสอบความแตกต่างของค่าเป้าหมาย ซึ่งแก้ปัญหาโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2 และ 3

จากภาพที่ 13 จะได้ว่า P-value มีค่ามากกว่า 0.05 ทั้ง 2 กลุ่มตัวอย่าง ดังนั้น ไม่สามารถปฏิเสธ H_0 สรุปได้ว่าค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2 และ 3 ไม่แตกต่างกัน

เมื่อทดสอบประสิทธิผลของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์และวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม โดยใช้การทดสอบด้วยวิธีทางสถิติ พบว่าค่าเป้าหมายที่ได้ไม่แตกต่างกัน ดังนั้น ผู้วิจัยจึงนำวิธีการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาทดสอบการลู่เข้าของคำตอบของปัญหาและเวลาในการประมวลผล

การทดลองนี้ข้อกำหนดเพิ่มเติมบางประการซึ่งสามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

```
249      %----Solve Max Sub Problem (Upper bound)----%
250 -    for j=1:nvar
251 -        sum_cost=sum_cost+(x_initial(j,1)'*cost(j,1));
252 -    end
253 -    upper_bound=((((y'*ba+w'*da)/joint_prob))/nscen*improve_ub)+sum_cost;
254 -    sum_cost=0;
255 -    if Min_upperbound >= upper_bound
256 -        Min_upperbound = upper_bound;
257 -    end
```

ภาพที่ 14 ชุดคำสั่งโปรแกรมที่ใช้ในการคำนวณค่าเป้าหมายที่เหมาะสม

จากภาพที่ 14 จะเห็นได้ว่าค่าเป้าหมายที่เหมาะสมสามารถคำนวณค่าได้ตามคำสั่งในบรรทัดที่ 253 แต่ค่าเป้าหมายที่เหมาะสม โดยปกติแล้วสามารถคำนวณได้จาก

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(b_{ik}-\sum_{j=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}\right)y_{ik}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{N}\left(d_{jk}-\sum_{i=1}^{n}a_{ijk}x_{ij}\right)w_{jk}}{joint\_prob}\times\frac{1}{nscen}\times improve\_ub$$

joint_prob แทนความน่าจะเป็นร่วมของการเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

nscen แทนจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

ถ้าจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานน้อย จะทำให้ค่าเป้าหมายที่คำนวณมีค่าต่ำ ผู้วิจัยจึงปรับค่าเป้าหมายที่เหมาะสมโดยการคูณด้วย improve_ub (ค่าที่ใช้ปรับค่าขอบเขตบน เช่น 10^3) และค่า improve_ub นั้น แตกต่างกันไปตามจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน ถ้าจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเพิ่มขึ้น ผู้วิจัยจะใช้ค่า improve_ub ที่น้อยลง เพราะผู้วิจัยมีข้อจำกัดด้านเวลา ซึ่งเวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาจะแปรผันตรงกับค่าเป้าหมาย กล่าวคือ เมื่อค่าเป้าหมายสูงขึ้น เวลาที่ใช้ก็จะมากขึ้นด้วย ดังนั้นผู้วิจัยจึงลดค่า improve_ub เพื่อลดค่าเป้าหมาย ซึ่งส่งผลให้ลดเวลาในการแก้ปัญหาด้วย

การทดลองเพื่อดูการลู่เข้าของค่าเป้าหมาย ผู้วิจัยจะทำการทดลองทั้งหมด 3 ปัญหา ซึ่งมีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่แตกต่างกัน คือ 5, 10 และ 20 และการทดลองจะใช้ข้อมูลเบื้องต้นร่วมกัน คือ ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงานและต้นทุนการจัดงานในแต่ละรอบ ซึ่งจะทดสอบ 3 ครั้ง

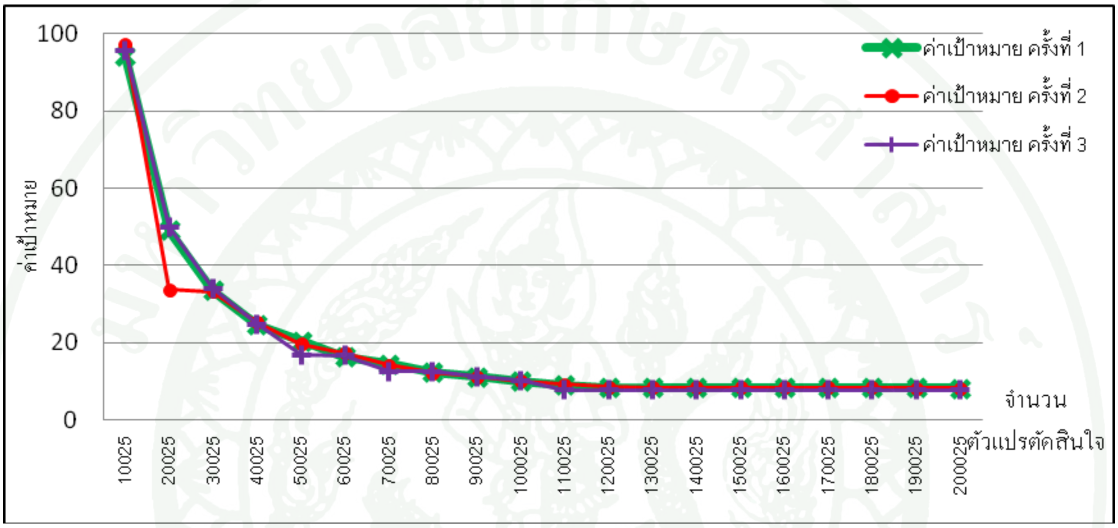
การทดลองที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5 มีข้อกำหนดเพิ่มเติมคือ มีการปรับค่าเป้าหมาย (improve_ub) เท่ากับ 10^4 แสดงค่าดังต่อไปนี้

ตารางที่ 8 ค่าเป้าหมายของปัญหาซึ่งใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการแก้ปัญหา และมีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	ค่าเป้าหมายครั้งที่ 1	ค่าเป้าหมายครั้งที่ 2	ค่าเป้าหมายครั้งที่ 3
5	10,025	94.2423	97.2892	95.7175
	20,025	49.1214	33.8103	49.9585
	30,025	33.5508	33.1641	34.0019
	40,025	24.6389	25.2178	24.7954
	50,025	20.4842	19.5529	16.8130
	60,025	16.3468	17.3681	16.5876
	70,025	14.4550	14.1580	12.5478
	80,025	12.3036	12.2513	12.5258
	90,025	11.1611	11.2081	11.1557
	100,025	9.9469	10.0541	10.1163
	110,025	9.0495	9.1382	7.7561
	120,025	8.4140	8.5163	7.7507
	130,025	8.4047	8.4081	7.7405
	140,025	8.3875	8.3455	7.7176
	150,025	8.3360	8.3435	7.6946
	160,025	8.3254	8.3208	7.6762
	170,025	8.3166	8.2885	7.6741
	180,025	8.2950	8.2859	7.6534

ตารางที่ 8 (ต่อ)

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	ค่าเป้าหมาย ครั้งที่ 1	ค่าเป้าหมาย ครั้งที่ 2	ค่าเป้าหมาย ครั้งที่ 3
5	190,025	8.2915	8.2453	7.6522
	200,025	8.2624	8.2116	7.6517



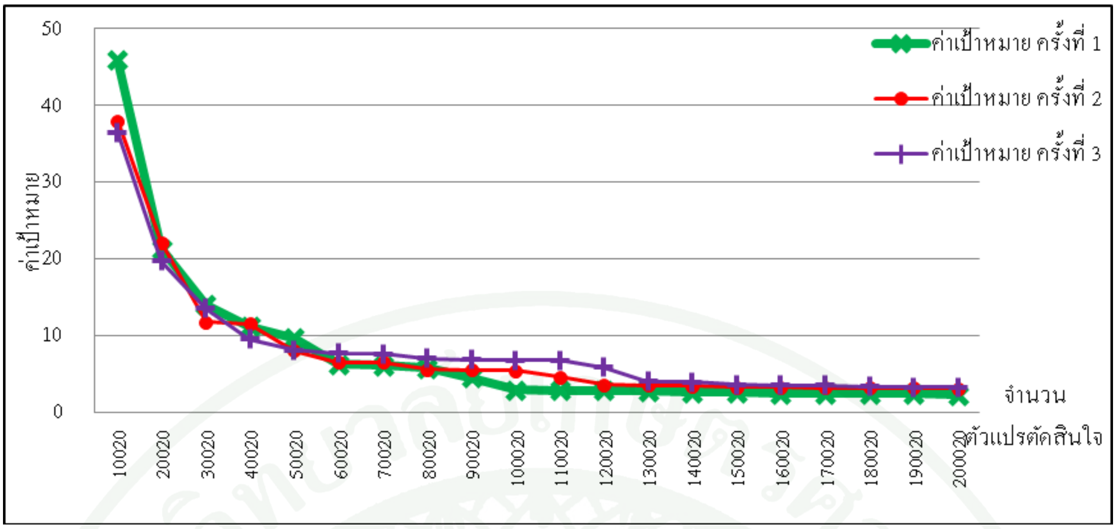
ภาพที่ 15 ค่าเป้าหมายของปัญหาซึ่งใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการแก้ปัญหาและมีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 5

จากภาพที่ 15 พบว่าค่าเป้าหมายจะลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงต้นและจะค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ และในที่สุดในช่วงที่จำนวนตัวแปรตัดสินใจเพิ่มขึ้นประมาณ 110,025 ตัวแปร ค่าเป้าหมายจะลดลงน้อยมากซึ่งแสดงถึงการลู่เข้าของค่าเป้าหมายพร้อมกันและต่อไปจะทดลองโดยเพิ่มจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเป็น 10 และ 20 ตามลำดับ

การทดลองที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 มีข้อกำหนดเพิ่มเติมคือ มีการปรับค่าเป้าหมาย (improve_ub) เท่ากับ 10^3 แสดงค่าดังต่อไปนี้

ตารางที่ 9 ค่าเป้าหมายของปัญหาซึ่งใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการแก้ปัญหา และมีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	ค่าเป้าหมาย ครั้งที่ 1	ค่าเป้าหมาย ครั้งที่ 2	ค่าเป้าหมาย ครั้งที่ 3
10	10,020	45.9425	38.0030	36.4763
	20,020	21.2748	22.1048	19.7160
	30,020	14.0429	11.7486	13.5392
	40,020	11.1753	11.5064	9.5497
	50,020	9.6713	7.9682	8.0634
	60,020	6.2783	6.5348	7.6859
	70,020	6.1258	6.4706	7.5843
	80,020	5.7169	5.6067	7.0091
	90,020	4.5402	5.5421	6.8660
	100,020	2.8825	5.4191	6.7943
	110,020	2.8573	4.6107	6.7219
	120,020	2.8085	3.6100	5.8195
	130,020	2.7513	3.5369	4.0284
	140,020	2.5966	3.4191	3.9204
	150,020	2.5577	3.2533	3.5684
	160,020	2.4440	3.2310	3.5022
	170,020	2.4410	3.1909	3.4933
	180,020	2.4391	3.1749	3.3480
	190,020	2.4004	3.1647	3.2850
	200,020	2.2509	3.0449	3.2661



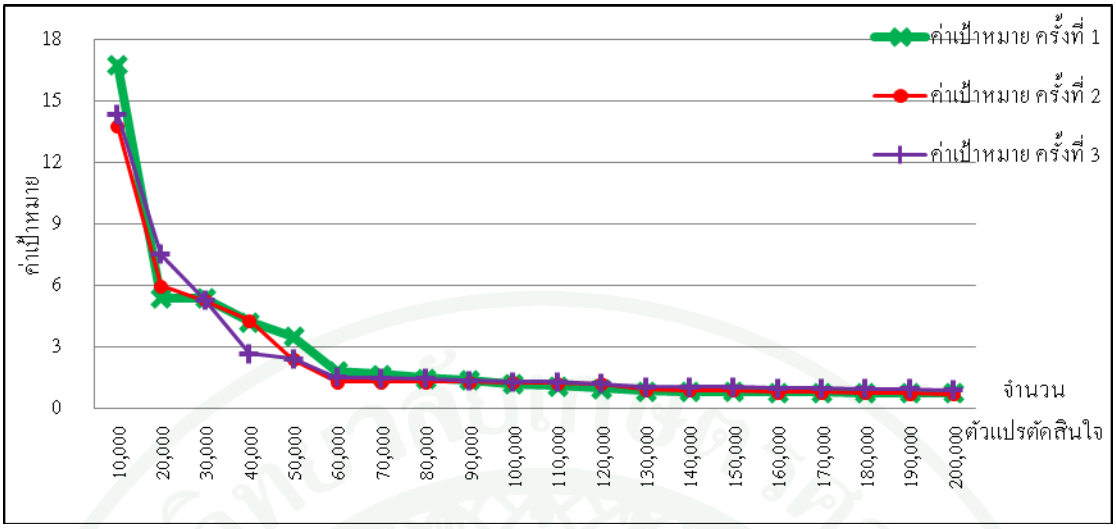
ภาพที่ 16 ค่าเป้าหมายของปัญหาซึ่งใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการแก้ปัญหา และมีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10

จากภาพที่ 16 พบว่าค่าเป้าหมายจะลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงต้นและจะค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด ในการทดลองครั้งที่ 1 มีการลู่เข้าเร็วที่สุด ซึ่งเริ่มลู่เข้าตั้งแต่จำนวนตัวแปรตัดสินใจเท่ากับ 100,020 ตัวแปร ต่อมาเป็นการทดลองครั้งที่ 2 และ 3 ตามลำดับ ซึ่งเริ่มลู่เข้าตั้งแต่จำนวนตัวแปรตัดสินใจเท่ากับ 120,020 และ 130,020 ตัวแปร ตามลำดับ

การทดลองที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 20 มีข้อกำหนดเพิ่มเติมคือมีการปรับค่าเป้าหมาย (improve_ub) เท่ากับ 10^2 แสดงค่าดังต่อไปนี้

ตารางที่ 10 ค่าเป้าหมายของปัญหาซึ่งใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการแก้ปัญหาและมีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 20

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	ค่าเป้าหมายครั้งที่ 1	ค่าเป้าหมายครั้งที่ 2	ค่าเป้าหมายครั้งที่ 3
20	10,000	16.7882	13.7820	14.3252
	20,000	5.3922	5.9601	7.5166
	30,000	5.3666	5.2630	5.3009
	40,000	4.2233	4.3010	2.6599
	50,000	3.5210	2.3960	2.4157
	60,000	1.8195	1.2963	1.5245
	70,000	1.6783	1.2931	1.4794
	80,000	1.4884	1.2881	1.4467
	90,000	1.3886	1.2800	1.3570
	100,000	1.2104	1.2471	1.2936
	110,000	1.1014	1.2369	1.2881
	120,000	0.9892	1.1918	1.2021
	130,000	0.8622	0.9018	1.0520
	140,000	0.8304	0.8937	1.0360
	150,000	0.8155	0.8814	1.0325
	160,000	0.8025	0.7982	0.9842
	170,000	0.7832	0.7767	0.9692
	180,000	0.7717	0.7616	0.9418
	190,000	0.7532	0.7214	0.9412
	200,000	0.7501	0.6894	0.8946



ภาพที่ 17 ค่าเป้าหมายของปัญหาซึ่งใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการแก้ปัญหา และมีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 20

จากภาพที่ 17 พบว่าค่าเป้าหมายจะลดลงอย่างรวดเร็วในช่วงต้นและจะค่อยๆ ซึ่งในช่วงที่ตัวแปรเท่ากับ 60,000 ตัวแปร ค่าเป้าหมายค่อยๆ ลดลงอย่างช้าๆ และเมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรตัดสินใจเท่ากับ 130,000 ตัวแปร จะเกิดการลู่เข้าของค่าเป้าหมาย

ในทั้ง 3 กรณีที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่แตกต่างกัน จะเห็นได้ว่าในทุกๆ ปัญหาจะมีการลู่เข้าเมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรตัดสินใจประมาณ 100,000 - 130,000 ตัวแปร ซึ่งแปรผันตรงกับจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน กล่าวคือ ถ้าจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเพิ่มขึ้น การลู่เข้าก็จะเกิดขึ้นเมื่อจำนวนตัวแปรตัดสินใจเพิ่มขึ้นด้วย นอกจากนั้นสิ่งที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งคือ เวลาในการประมวลผล ดังนั้นผู้วิจัยจึงศึกษาความแตกต่างของเวลาในการประมวลผลในกรณีที่จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่แตกต่างกัน แสดงได้ดังต่อไป

ตารางที่ 11 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	จำนวนรอบที่ใช้ในการประมวลผล	เวลาที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที)
10	10,020	1,292.620	51	25.345
	20,020	2,108.534	27	78.094
	30,020	1,947.533	15	129.835
	40,020	4,232.742	13	325.595
	50.020	4,409.112	10	440.911
	60,020	3,164.974	8	395.622
	70,020	3,805.571	8	475.696
	80,020	7,671.744	7	1,095.963
	90,020	8,566.537	7	1,223.791
	100,020	8,940.596	6	1,490.099
	110,020	9,961.106	6	1,660.184
	120,020	11,400.321	6	1,900.053
	130,020	12,355.193	5	2,471.039
	140,020	10,390.221	5	2,078.044
	150,020	9,674.402	5	1,934.880
	160,020	10,555.312	5	2,638.828
	170,020	19,100.395	4	4,775.099
	180,020	21,034.396	4	5,258.599
	190,020	28,153.204	4	7,038.301
	200,020	30,341.513	4	7,585.378

ตารางที่ 12 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 20

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	จำนวนรอบที่ใช้ในการประมวลผล	เวลาที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที)
	10,000	4,420.378	42	105.247
	20,000	6,037.849	22	274.448
	30,000	6,040.752	13	464.673
	40,000	8,914.805	12	742.900
	50,000	9,228.080	8	1,153.510
	60,000	10,095.481	8	1,261.935
	70,000	11,301.191	7	1,614.456
	80,000	14,050.805	7	2,007.258
	90,000	16,485.905	6	2,747.651
20	100,000	19,505.476	6	3,250.913
	110,000	19,850.175	5	3,970.035
	120,000	20,523.521	5	4,104.704
	130,000	20,145.563	4	5,036.391
	140,000	22,070.402	4	5,517.601
	150,000	25,103.529	4	6,275.882
	160,000	29,682.988	4	7,420.747
	170,000	32,332.297	4	8,083.074
	180,000	36,889.615	4	9,222.404
	190,000	57,014.270	4	14,235.568
	200,000	84,436.222	4	21,109.056

ตารางที่ 13 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	จำนวนรอบที่ใช้ในการประมวลผล	เวลาที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที)
30	10,020	5,447.417	36	151.317
	20,100	6,245.292	17	367.370
	30,060	8,249.072	11	749.916
	40,020	11,644.293	9	1,293.810
	50,100	13,293.861	8	1,661.733
	60,060	16,347.221	6	2,724.537
	70,020	21,464.304	6	3,577.384
	80,100	25,746.650	5	5,149.330
	90,060	30,234.664	5	6,046.933
	100,020	33,096.325	5	6,619.265
	110,100	37,465.221	4	9,366.305
	120,060	40,203.352	4	10,050.838
	130,020	45,235.743	4	11,308.936
	140,100	49,648.768	4	12,412.192
	150,060	53,291.421	4	13,322.855
	160,020	59,232.502	3	19,744.167
	170,100	65,325.235	3	21,775.078
	180,060	73,925.531	3	24,641.844
	190,020	79,463.361	3	26,487.787
	200,100	89,406.691	3	29,802.230

เมื่อเพิ่มจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 40 พบว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ไม่สามารถคำนวณค่าเป็นตัวเลขได้ ซึ่งโปรแกรมจะแสดงค่าขอบเขตบนที่เท่ากับ NaN (Not a Number) ซึ่งมีความหมายว่าค่าที่คำนวณไม่สามารถหาค่าได้ จะเกิดขึ้นได้ในกรณีที่ $0 \times \mathrm{Inf}$, $\frac{0}{0}, \frac{\mathrm{Inf}}{\mathrm{Inf}}$ หรือ $(+\mathrm{Inf})+(-\mathrm{Inf})$ (Inf ย่อมาจากคำว่า Infinity ซึ่งหมายถึงค่าที่ได้มีค่าน้อยมาก ๆ หรือสูงมาก ๆ) และเมื่อตรวจสอบค่าทุกตัวที่คำนวณได้ พบว่าความน่าจะเป็นร่วมของการจัดงานที่เกิดขึ้นทั้งหมด (joint prob) มีค่าน้อยมาก (ในกรณีนี้มีค่าประมาณ 1×10^{-300}) จึงถูกปัดให้เป็นศูนย์ ดังนั้นจึงเกิดกรณี NaN ได้ ดังนั้นผู้วิจัยจึงปรับให้ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงานมีการแจกแจงแบบเอกรูป กล่าวคือ ค่าความน่าจะเป็นซึ่งจะเกิดขึ้นในแต่ละเหตุการณ์มีค่าเท่ากันคือ $\frac{1}{\mathrm{nscen}}$ (nscen ได้ถูกกล่าวในการประกาศตัวแปรในชุดคำสั่งโปรแกรม MATLAB R2010b ซึ่งในที่นี้หมายถึง จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด) ซึ่งจะทำให้ผลรวมของค่าความน่าจะเป็นร่วมของการจัดงานที่เกิดขึ้นทั้งหมดเท่ากับ 1 ซึ่งสามารถทำการทดลองต่อได้

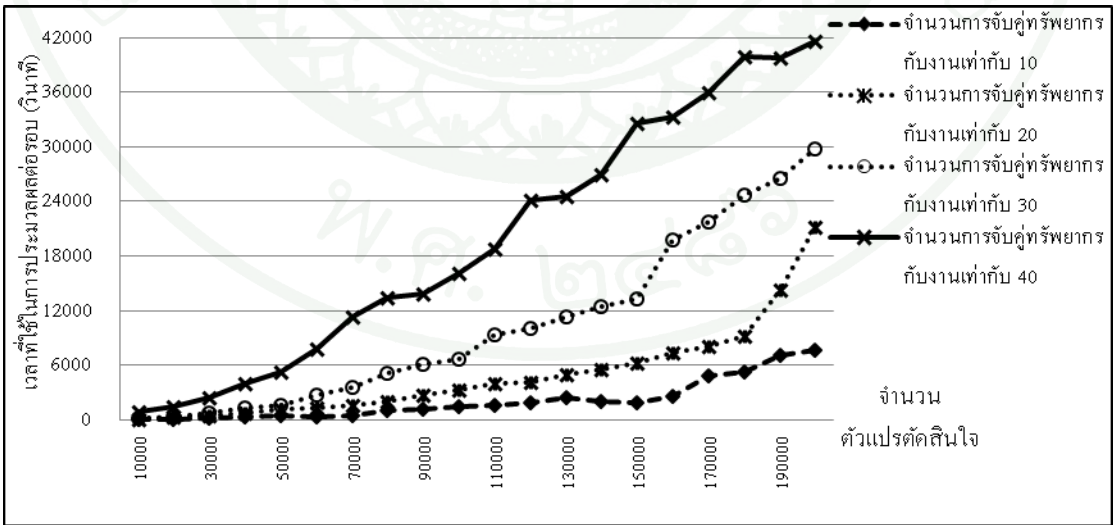
ตารางที่ 14 เวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 40

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	จำนวนรอบที่ใช้ในการประมวลผล	เวลาที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที)
	10,080	7,321.814	8	914.908
	20,000	3,659.631	4	1,480.669
	30,080	2,961.338	2	2,400.174
	40,000	4,800.348	2	3,933.568
40	50,080	7,867.136	2	5,263.642
	60,000	10,527.284	2	7,810.714
	70,080	15,621.427	2	11,312.078
	80,000	22,624.155	2	13,396.340
	90,080	26,792.680	2	13,870.841

ตารางที่ 14 (ต่อ)

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน (n)	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	จำนวนรอบที่ใช้ในการประมวลผล	เวลาที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที)
40	100,000	27,741.682	2	16,153.023
	110,080	32,306.046	2	18,800.827
	120,000	37,601.653	2	24,087.429
	130,080	48,174.857	2	24,535.556
	140,000	49,071.112	2	26,996.651
	150,080	53,993.302	2	32,515.027
	160,000	65,030.053	2	33,324.574
	170,080	66,649.148	2	35,893.084
	180,000	71,786.167	2	39,893.084
	190,080	79,421.353	2	39,710.677
	200,000	83,155.131	2	41,577.566

จากข้อมูลเบื้องต้น ต่อไปจะทำการเปรียบเทียบเวลาที่ใช้ในการประมวลผลด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่แตกต่างกัน



ภาพที่ 18 เวลาในการประมวลผลต่อรอบของการแก้ปัญหาตัวแบบโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานต่างๆ กัน

จากภาพที่ 18 จะได้ว่า เวลาในการประมวลผลต่อรอบของการแก้ปัญหาตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม โดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 และ 20 มีการเพิ่มขึ้นของเวลาที่สม่ำเสมอ ส่วนจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 และ 40 มีการเพิ่มขึ้นของเวลาโดยจะค่อยๆ เพิ่มในช่วงแรก เมื่อผ่านไปจนถึงจุดหนึ่งเวลาที่ใช้ในการประมวลผลจะเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็ว ดังนั้นผู้วิจัยใช้วิธีทางสถิติมาทดสอบความแตกต่างของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานต่างๆ กันซึ่งจะแสดงขั้นตอนดังต่อไปนี้

การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน มีขั้นตอน ดังต่อไปนี้

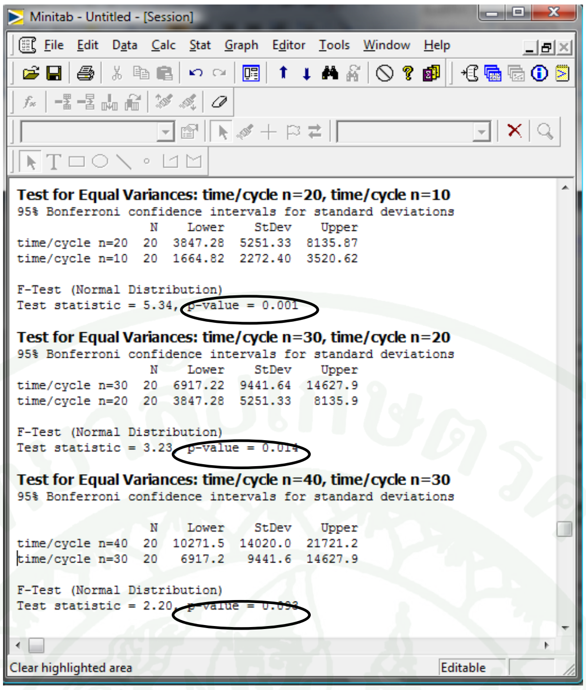
ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0: ค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มเท่ากัน
H_1: ค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ F ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 19 ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่มของการแก้ปัญหาตัวแบบโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 20 30 และ 40

จากภาพที่ 19 จะได้ว่า ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 กับ 20 และ 20 กับ 30 นั้นมีค่า p-value น้อยกว่า 0.05 แสดงว่าค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มของปัญหานี้ไม่เท่ากัน แต่ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 กับ 40 มีค่ามี p-value มากกว่า 0.05 แสดงว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานหลักได้ ซึ่งในทางสถิตินั้นเรียกสิ่งที่เกิดขึ้นว่าเป็น ความผิดพลาดประเภทที่ 2 (Type II Error) คือ ความผิดพลาดที่เกิดเนื่องจากยอมรับสมมติฐานหลัก โดยที่สมมติฐานหลักไม่เป็นจริง ซึ่งผู้วิจัยจะต้องเพิ่มอำนาจการทดสอบ (Power of Test) คือความน่าจะเป็นที่ไม่ก่อให้เกิดความผิดพลาดประเภทที่ 2 โดยการเพิ่มจำนวนตัวอย่างในการทดสอบ และทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรทั้งสองกลุ่มนี้อีกครั้งหนึ่ง

เนื่องจากเวลาของการทดลองในเพิ่มจำนวนตัวอย่างมีจำกัด ดังนั้นผู้วิจัยจึงใช้การวิเคราะห์แนวโน้ม (Trend) เพื่อหาสมการแนวโน้มของข้อมูลที่มีอยู่เดิม โดยการเลือกสมการแนวโน้มที่เหมาะสมนั้นจะพิจารณาจากค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ (Coefficient of Determination : R^2) ซึ่งเป็นค่าที่ชี้ว่าเส้นแนวโน้มที่ใช้เหมาะสมกับข้อมูลมากน้อยเพียงใด ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจจะมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ถ้าค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจมีค่าเข้าใกล้ 1 มากเท่าใด แสดงว่าเส้นกราฟนั้นเหมาะสมและสอดคล้องกับข้อมูลมากขึ้นเท่านั้น ผู้วิจัยจะเปรียบเทียบค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจของสมการแนวโน้มที่แตกต่างกัน 5 แบบด้วยกัน จะแสดงได้ดังนี้

ตารางที่ 15 ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจของสมการแนวโน้มที่แตกต่างกัน

ประเภทของเส้นแนวโน้ม	จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30		จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 40	
	สมการแนวโน้ม	ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ	สมการแนวโน้ม	ค่าสัมประสิทธิ์การตัดสินใจ
- เส้นตรง (Linear)	$y=1,529x-5,693$	0.918	$y=2,353x-5,018$	0.986
- เอ็กซ์โพเนนเชียล (Exponential)	$y=426.7e^{0.239x}$	0.903	$y=1,862e^{0.183x}$	0.881
- ลอการิทึม (Logarithmic)	$y=9,412\ln(x)-9,561$	0.656	$y=15,413\ln(x)-12,933$	0.798
- โพลิโนเมียล (Polynomial)	$y=83.54x^2-225.4x+740.1$	0.990	$y=39.94x^2+1,682x-2,558$	0.991
- ยกกำลัง (Power)	$y=110.3x^{1.825}$	0.992	$y=646.7x^{1.409}$	0.987

โดยที่ y แทนเวลาคาดคะเน

e มีค่าเท่ากับ 2.718281828

x แทนจำนวนครั้งที่มีการเพิ่มจำนวนตัวแปรตัดสินใจ

จากตารางที่ 15 พบว่าข้อมูลเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 มีแนวโน้มใกล้เคียงหรือสอดคล้องกับเส้นแนวโน้มแบบยกกำลังมากที่สุด และข้อมูลเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 40 สอดคล้องกับเส้นแนวโน้มแบบโพลิโนเมียลมากที่สุด ซึ่งประกอบกับเหตุผลที่ปัญหานี้เป็นปัญหาเอ็นพี (NP) ซึ่งเวลาที่ใช้ในการแก้ปัญหาจะเพิ่มขึ้นเป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล ซึ่งสอดคล้องกับข้างต้น ดังนั้นผู้วิจัยจะใช้

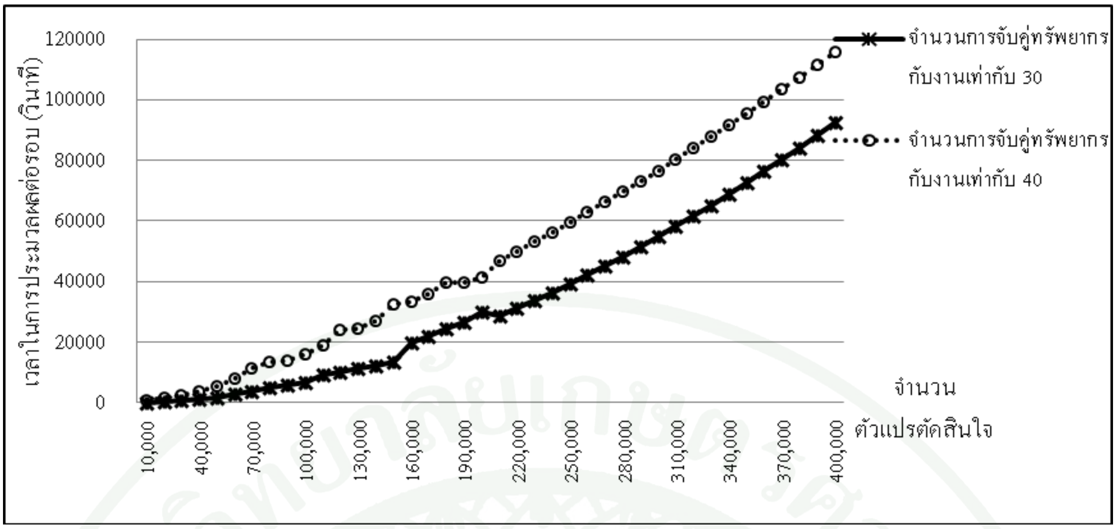
สมการแนวโน้มเหล่านี้ เพื่อคาดคะเนเวลาที่จะใช้ในการประมวลผลต่อจากข้อมูลเดิมเป็นจำนวน 20 ค่า และนำไปทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่มอีกครั้ง

ตารางที่ 16 เวลาจริงและเวลาคาดคะเนที่ใช้ในการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 และ 40

จำนวนตัวแปรตัดสินใจโดยประมาณ	เวลาจริงและเวลาคาดคะเนที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที) ของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30	เวลาจริงและเวลาคาดคะเนที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที) ของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 40
10,000	151.317	914.908
20,000	367.370	1,480.669
30,000	749.916	2,400.174
40,000	1,293.810	3,933.568
50,000	1,661.733	5,263.642
60,000	2,724.537	7,810.714
70,000	3,577.384	11,312.078
80,000	5,149.330	13,396.340
90,000	6,046.933	13,870.841
100,000	6,619.265	16,153.023
110,000	9,366.305	18,800.827
120,000	10,050.838	24,087.429
130,000	11,308.936	24,535.556
140,000	12,412.192	26,996.651
150,000	13,322.855	32,515.027
160,000	19,744.167	33,324.574
170,000	21,775.078	35,893.084
180,000	24,641.844	39,893.084
190,000	26,487.787	39,710.677
200,000	29,802.230	41,577.566
210,000	28,551.289	46,849.540
220,000	31,081.138	49,904.960
230,000	33,707.676	53,024.260
240,000	36,430.156	56,207.440

ตารางที่ 16 (ต่อ)

จำนวนตัวแปรตัดสินใจโดยประมาณ	เวลาจริงและเวลาคาดคะเนที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที) ของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30	เวลาจริงและเวลาคาดคะเนที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ (วินาที) ของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 40
250,000	39,247864	59,454.500
260,000	42,160.123	62,765.400
270,00	45,166.286	66,140.260
280,00	48,265.735	69,578.960
290,000	51,457.876	73,081.540
300,000	54,742.144	76,648.000
310,000	58,117.992	80,278.340
320,000	61,584.897	83,972.560
330,000	65,142.355	87,730.660
340,000	68,789.877	91,552.640
350,000	72,526.997	95,438.500
360,000	76,353.259	99,388.240
370,000	80,262.587	103,401.860
380,000	84,271.471	107,479.360
390,000	88,362.587	111,620.740
400,000	92,541.172	115,826.000



ภาพที่ 20 เวลาจริงและเวลาคาดคะเนในการประมวลผลต่อรอบของการแก้ปัญหาตัวแบบโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 และ 40

การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน มีขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่ม

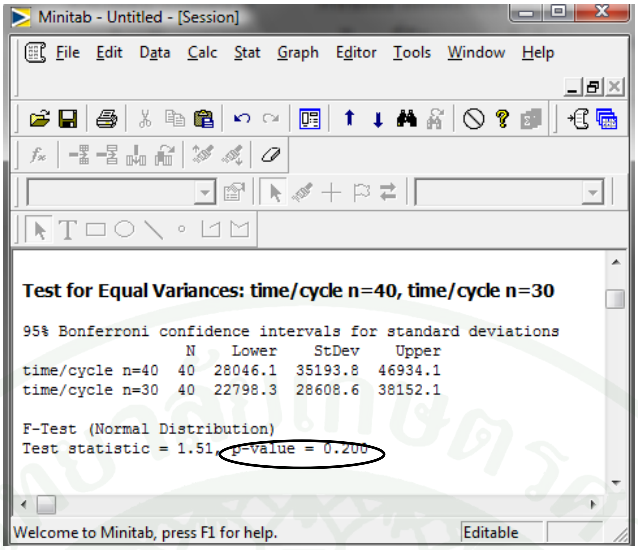
ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0: ค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มเท่ากัน

H_1: ค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มไม่เท่ากัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ F ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 21 ผลการทดสอบความเท่ากันของความแปรปรวนของประชากรสองกลุ่มของการแก้ปัญหาตัวแบบโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 และ 40

จากภาพที่ 21 จะได้ว่า ค่า p-value มากกว่า 0.05 แสดงว่าไม่สามารถปฏิเสธสมมติฐานหลักได้ ดังนั้นแสดงว่าค่าความแปรปรวนของทั้งสองกลุ่มเท่ากัน และต่อไปเป็นการทดสอบความแตกต่างระหว่างเวลาที่ใช้ในการประมวลผลต่อรอบ

การทดสอบความแตกต่างระหว่างค่าเฉลี่ยสองค่าที่ได้จากกลุ่มตัวอย่างสองกลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน มีขั้นตอน ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมติฐานทางสถิติ

H_0 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 และ 20 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 10 และ 20 แตกต่างกัน

H_0 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 20 และ 30 ไม่แตกต่างกัน

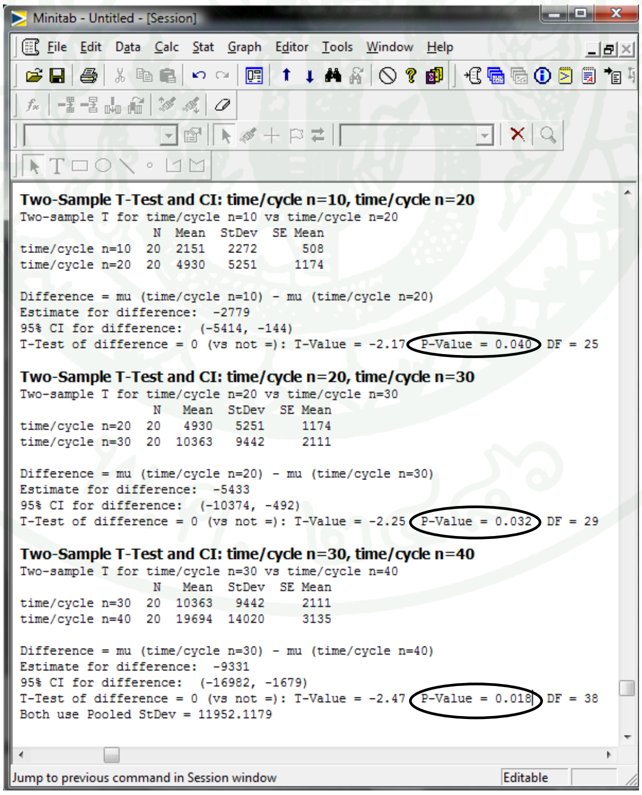
H_1 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 20 และ 30 แตกต่างกัน

H_0 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 และ 40 ไม่แตกต่างกัน

H_1 : ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 30 และ 40 แตกต่างกัน

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติเท่ากับ 0.05

ขั้นที่ 3 คำนวณค่าสถิติ t ที่ระดับความเชื่อมั่น 95%



ภาพที่ 22 ผลการทดสอบทางสถิติของเวลาในการประมวลผลต่อรอบด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 10 20 30 และ 40

จากภาพที่ 22 จะได้ว่า P-value มีค่าน้อยกว่า 0.05 ในทุกกรณี แสดงว่าปฏิเสธ H_0 ซึ่งสรุปได้ว่าค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของงานกับทรัพยากรเท่ากับ 10 กับ 20 20 กับ 30 และ 30 กับ 40 แตกต่างกัน

จากผลการทดลองทั้งหมด สามารถสรุปความแตกต่างของค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการประมวลที่มีจำนวนคู่งานกับทรัพยากรในกรณีต่างๆ ได้ดังตารางที่ 17

ตารางที่ 17 ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ใช้ในการประมวลผลของปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานที่ต่างกัน

จำนวนคู่งานกับทรัพยากร	ผลการศึกษาที่ได้
10 กับ 20 20 กับ 30 30 กับ 40	ค่าเฉลี่ยของเวลาในการประมวลผลแตกต่างกัน

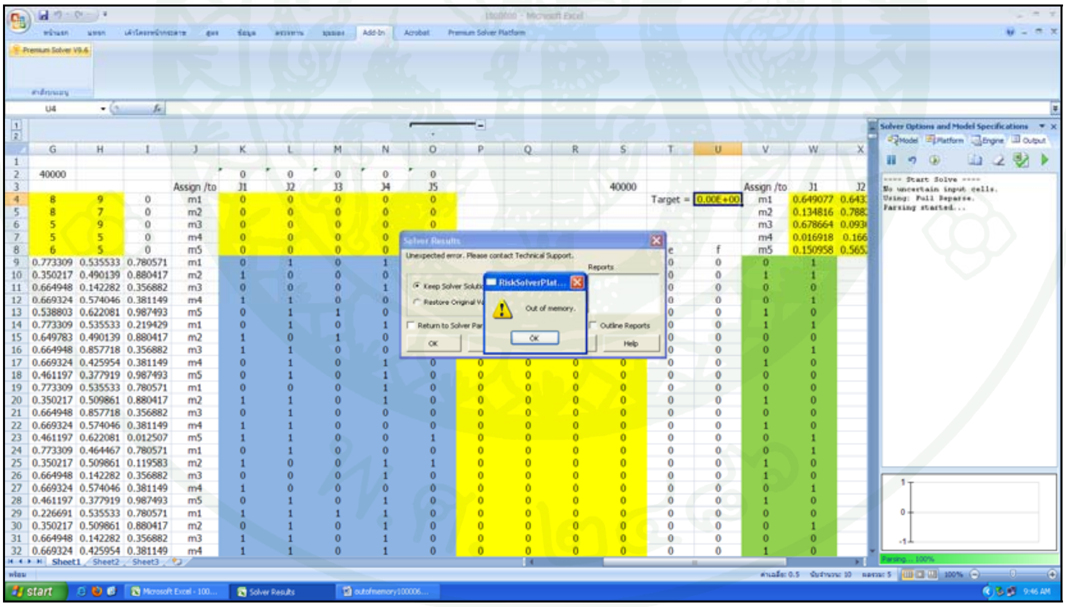
3. ความสามารถของการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมโดยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซล โซลเวอร์-กูโรบิ และการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ โดยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b

จากข้างต้นเป็นการทดสอบประสิทธิภาพของกระบวนการแก้ปัญหาด้วยวิธีต่างๆ ของปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม ซึ่งดูได้จากการลู่เข้าของคำตอบและเวลาที่ใช้ในการประมวลผล ต่อมาจะเป็นการศึกษาความสามารถของกระบวนการหรือวิธีการที่ใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งในที่นี้ ผู้วิจัยได้ทดสอบโดยใช้การแก้ปัญหาเชิงเส้นแบบปกติที่ทำการประมวลผลด้วยไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ที่มีประสิทธิภาพสูง และประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่ทำการประมวลผลด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ได้ผลดังตารางต่อไปนี้

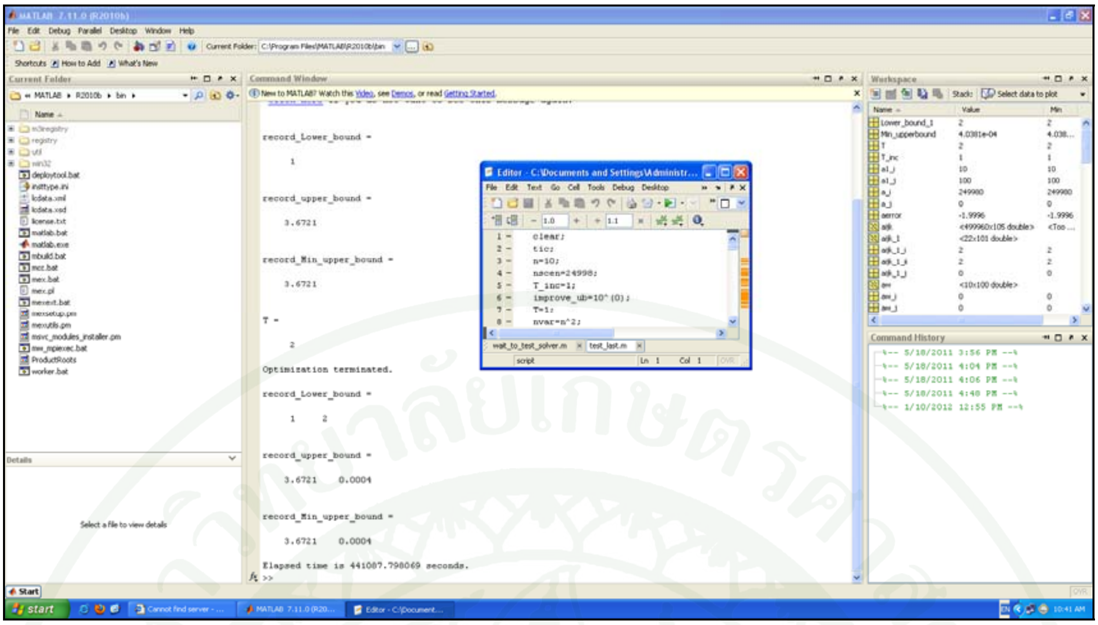
ตารางที่ 18 เวลาในการประมวลผลของตัวแบบการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่

จำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด	จำนวนตัวแปรตัดสินใจ	เวลาที่ใช้ในการประมวลผล (วินาที)	
			ประมวลผลด้วยไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ	ประมวลผลด้วย MATLAB R2010b (เวลาโดยประมาณ)
5	10,000	200,025	27,752 (7 ชั่วโมง)	24,812.074 (7 ชั่วโมง)
5	20,000	400,025	60,499 (17 ชั่วโมง)	53,848.256 (15 ชั่วโมง)
5	30,000	600,025	131,889 (36.5 ชั่วโมง)	101,760.604 (28 ชั่วโมง)
5	40,000	800,025	287,518 (80 ชั่วโมง)	237,441.410 (66 ชั่วโมง)
5	50,000	1,000,025	Out of memory	393,050.270 (109 ชั่วโมง)
10	25,000	1,000,100	Out of memory	441,087.798 (123 ชั่วโมง)
20	620	50,000	3,606 (1 ชั่วโมง)	9,228.080 (2.5 ชั่วโมง)
20	870	70,000	13,729 (4 ชั่วโมง)	11,301.191 (3 ชั่วโมง)
20	1246	100,080	มากกว่า 3 วัน	19,505.476 (5.5 ชั่วโมง)
30	826	100,100	-	33,096.325 (9 ชั่วโมง)
40	615	100,020	-	27,741.682 (8 ชั่วโมง)
50	490	100,000	-	41,800.573 (11.5 ชั่วโมง)
60	20	8,400	-	Out of memory
100	20	18,000	-	Out of memory

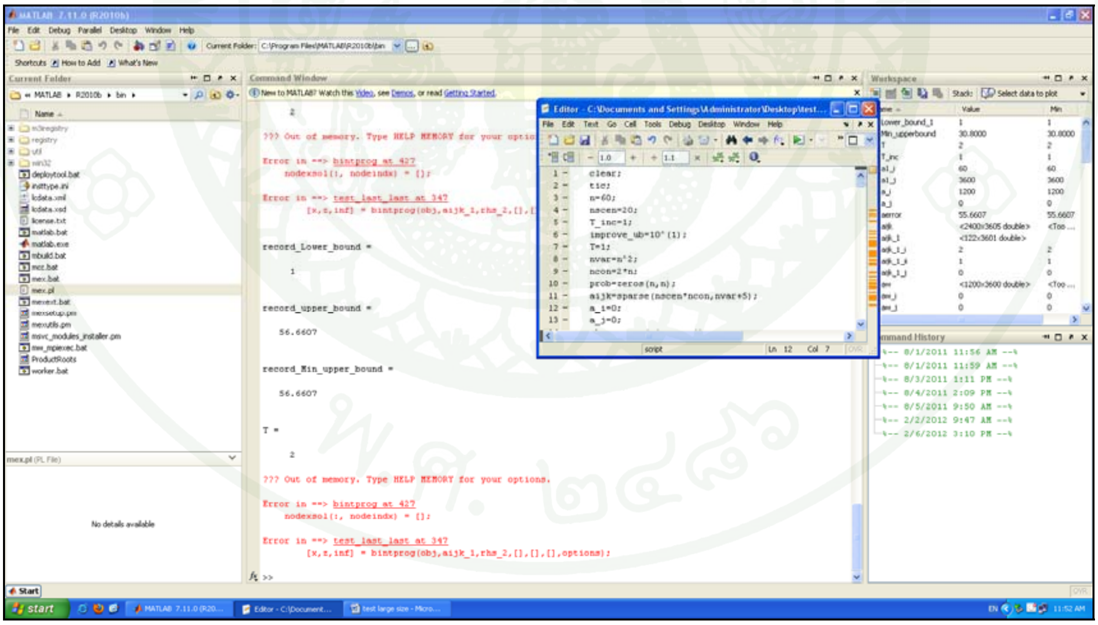
จากตารางที่ 18 จะเห็นได้ว่าเมื่อจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานและจำนวนตัวแปรตัดสินใจมีจำนวนเพิ่มขึ้น การประมวลผลด้วยวิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดด้วยการใช้โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ สามารถแก้ปัญหาได้ช้ากว่าการแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ อีกทั้งการแก้ปัญหาด้วยไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ไม่สามารถคำนวณได้เมื่อมีจำนวนตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร แต่วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ซึ่งประมวลผลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b สามารถทำได้ ซึ่งจะใช้เวลาในการประมวลผลค่อนข้างนานแต่เมื่อเพิ่มจำนวนการจับคู่งานและทรัพยากรเป็น 60 คู่ พบว่าการแก้ปัญหาโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ไม่สามารถประมวลผลได้ ดังนั้นสามารถสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์โดยการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b มีประสิทธิภาพดีกว่าการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ แต่การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ในการแก้ปัญหาก็ยังมีข้อจำกัดทางด้านการเพิ่มจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่สามารถทำได้เพียง 50 คู่เท่านั้น ณ ข้อจำกัดทางด้านคอมพิวเตอร์ฮาร์ดแวร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้



ภาพที่ 23 ข้อมูลที่เกินขีดความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ



ภาพที่ 24 ความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ในการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่



ภาพที่ 25 ข้อมูลที่เกินขีดความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ในการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่

จากภาพที่ 23 ข้อมูลที่ใช้ประกอบด้วยจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 5 และจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 50,000 ซึ่งทำให้มีจำนวนตัวแปรตัดสินใจทั้งหมด 1,000,025 ตัวแปร สามารถยืนยันได้ว่าโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ที่มีประสิทธิภาพสูงไม่สามารถหาคำตอบได้ เมื่อมีตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ซึ่งประมวลผลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b มาใช้แก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่ได้ดังภาพที่ 24 และในภาพที่ 25 เป็นข้อมูลที่เกินขีดความสามารถของโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ในการแก้ปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่มที่มีขนาดใหญ่

จากข้างต้นการเพิ่มค่า T ในงานวิจัยนี้เพิ่มค่า T ครั้งละมากๆ เพราะมีข้อจำกัดด้านเวลา แต่ในความเป็นจริงแล้วการกระทำเช่นนี้อาจทำให้ข้ามค่าเป้าหมายที่ดีที่สุดไปได้ ทำให้ค่าเป้าหมายที่ได้ในการทดลองในงานวิจัยนี้มีความผิดพลาด ดังนั้นจึงแสดงการเพิ่มค่า T ทีละน้อยๆ เพื่อให้ได้ค่าเป้าหมายที่ถูกต้องและแม่นยำมากยิ่งขึ้น

ตารางที่ 19 การกำหนดค่า T ที่เหมาะสม

ครั้งที่	ค่า T ที่เพิ่มขึ้นต่อรอบ	ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด	ค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	ร้อยละความแตกต่างของค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์กับค่าที่เหมาะสมที่สุด	ร้อยละความแตกต่างของเวลาในการประมวลของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่ค่า T ต่างกัน
1	1	105.8241	107.9118	1.9728	-
	0.5		107.9118	1.9728	28.9837
	0.2		105.8241	0	81.9174
2	1	122.3244	122.3244	0	-
	0.5		122.3244	0	41.4886
	0.2		122.3244	0	89.1955
3	1	109.6395	123.9544	13.0563	-
	0.5		110.2841	0.5879	30.1052
	0.2		109.6395	0	80.9574
4	1	160.3892	160.3892	0	-
	0.5		160.3892	0	52.1509
	0.2		160.3892	0	86.7668

ตารางที่ 19 (ต่อ)

ครั้งที่	ค่า T ที่เพิ่มขึ้นต่อรอบ	ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด	ค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	ร้อยละความแตกต่างของค่าเป้าหมายของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์กับค่าที่เหมาะสมที่สุด	ร้อยละความแตกต่างของเวลาในการประมวลของวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ที่ค่า T ต่างกัน
5	1	128.9007	147.4398	14.3824	-
	0.5		128.9007	0	38.1412
	0.2		128.9007	0	96.0789

จากตารางที่ 19 จะพบว่าค่า T ที่เหมาะสมในงานวิจัยนี้คือ 0.2 เพราะทำให้ค่าเป้าหมายที่ได้จากวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์เท่ากับค่าเป้าหมายที่เหมาะสมในทุกกรณีที่เกิดขึ้นดังตัวอย่างข้างต้น และเมื่อศึกษาถึงร้อยละความแตกต่างของเวลาในการประมวลผลที่ใช้ค่า T เท่ากับ 0.2 เพื่อให้ได้ค่าเป้าหมายที่เหมาะสมที่สุด จะเห็นได้ว่าเวลาที่ใช้ในการประมวลผลจะเพิ่มขึ้นมากกว่าร้อยละ 80 ในทุกกรณี ดังนั้นในงานวิจัยนี้จึงใช้ค่า T ที่มากกว่า 0.2 เพื่อลดเวลาในการประมวลผล เพราะระยะเวลาในการทำงานวิจัยมีจำกัด และอาจทำให้ได้ค่าเป้าหมายที่เบี่ยงเบนจากค่าเป้าหมายที่ดีที่สุดเล็กน้อย

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

งานวิจัยนี้ได้พัฒนาตัวแบบโดยการรวมปัจจัยความไม่แน่นอนกับปัญหาการจัดงานเข้าด้วยกันโดยอาศัยแนวทางแบบจำลองสองขั้น จากนั้นได้แบ่งการวิจัยออกเป็น 2 กรณีคือกรณีแรก กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 1 เสมอ ซึ่งได้นำเสนอวิธีการลดรูปตัวแบบ เพื่อแก้ปัญหานี้ พบว่าการแก้ปัญหาด้วยตัวแบบลดรูปมีประสิทธิภาพมากกว่าการแก้ปัญหาด้วยตัวแบบเต็มรูปและกรณีที่สอง กรณีที่ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่มีค่าไม่แน่นอนมีค่าเป็น 0 หรือ 1 พบว่าไม่สามารถใช้ตัวแบบลดรูปในการแก้ปัญหาได้ จึงใช้วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุดในการประมวลผล เมื่อขยายขนาดของปัญหาให้เพิ่มจำนวนตัวแปรตัดสินใจมากกว่า 1,000,000 ตัวแปร พบว่าโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ไม่สามารถประมวลผลได้ จึงนำวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาประยุกต์ ใช้กับปัญหานี้ ซึ่งวิธีนี้สามารถใช้กับกรณีนี้ได้แต่เวลาที่ใช้ในการประมวลผลค่อนข้างนาน สามารถสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์โดยการใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b มีประสิทธิภาพดีกว่าการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ แต่การใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ในการแก้ปัญหาก็ยังมีข้อจำกัดทางด้านการเพิ่มจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานที่สามารถทำได้เพียง 50 คู่เท่านั้น ณ ข้อจำกัดทางด้านคอมพิวเตอร์ฮาร์ดแวร์ที่ใช้ในงานวิจัยนี้ สิ่งที่น่าสนใจอีกประการหนึ่งคือเวลาที่ใช้ในการประมวลผลโดยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ ซึ่งได้ทำการทดสอบกับปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานขนาดต่างๆ ซึ่งให้บทสรุปว่าเวลาที่ใช้ในการประมวลผลนั้นมีความแตกต่างกันในทุกกรณี

ข้อเสนอแนะ

1. งานวิจัยนี้ได้ประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์มาใช้ในการแก้ปัญหา โดยใช้การเขียนโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ซึ่งปัญหานี้อาจจะสามารถใช้ซอฟต์แวร์อื่นๆ มาใช้ในการแก้ปัญหาและมีประสิทธิภาพสูงกว่าได้

2. การเพิ่มค่า T ในงานวิจัยนี้เพิ่มค่า T ครั้งละมากๆ เพราะมีข้อจำกัดด้านเวลา แต่ในความเป็นจริงแล้วการกระทำเช่นนี้อาจทำให้ข้ามค่าเป้าหมายที่ดีที่สุดไปได้ ทำให้ค่าเป้าหมายที่ได้ในการทดลองในงานวิจัยนี้มีความผิดพลาด ดังนั้นจึงควรทำการเพิ่มค่า T ทีละน้อยๆ เพื่อให้ได้ค่าเป้าหมายที่ถูกต้องและแม่นยำมากยิ่งขึ้น

3. ข้อมูลเบื้องต้นที่ใช้ในงานวิจัยนี้ เช่น ต้นทุนการจัดงาน ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน การเกิดขึ้นของเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด และค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน เกิดขึ้นจากการสุ่มด้วยการแจกแจงแบบยูนิฟอร์ม ซึ่งการนำไปประยุกต์ใช้ข้อมูลเหล่านี้ควรมาจากการเก็บข้อมูลในสถานการณ์จริง

4. งานวิจัยนี้กำหนดให้ค่าปรับต่อหน่วยมีค่าเท่ากับ 1 ซึ่งถือว่าน้อยมากไม่เหมาะสมกับสภาพความเป็นจริง ซึ่งเมื่อนำไปประยุกต์ใช้ ควรกำหนดค่าปรับให้ตรงกับสถานการณ์จริง

5. งานวิจัยนี้สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่นๆ ที่มีลักษณะใกล้เคียงกัน เพื่อพัฒนาตัวแบบทางคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องกับความเป็นจริงมากยิ่งขึ้น

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

แก้วปั้น อมตเวทย์, มาริสา แก้วสุวรรณ, มิตรมาณี ตรีวัฒนาวงศ์, สุพัฒตรา เกษราพงศ์, ประภาพรรณ เกษราพงศ์ และพีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล. 2552. การแก้ปัญหากำหนดการเชิงเส้นภายใต้ความไม่แน่นอนของค่าขวามือ: กรณีปัญหาการขนส่ง **Thai VCML Journal** (2): 147-163

ปริญญา สงวนสัตย์. 2553. **คู่มือ MATLAB ฉบับสมบูรณ์.** พิมพ์ครั้งที่ 1 บริษัท ไอดีซี พรีเมียร์ จำกัด, นนทบุรี.

ประไพศรี สุทัศน์ ณ อยุธยา และ พงศ์ชนัน เหลืองไพบูลย์. 2551. **สถิติวิศวกรรม.** สำนักพิมพ์ท้อป จำกัด, กรุงเทพฯ. แปลจาก D.C. Montgomery and G.C. Runger**. Applied Statistics and Probability for Engineers.** John Wiley & Sons. Inc., New York.

พงศ์ชนัน เหลืองไพบูลย์. 2553. **การวิจัยดำเนินงาน (Introduction to Operations Research).** พิมพ์ครั้งที่ 1 บริษัท สำนักพิมพ์ท้อป จำกัด, กรุงเทพฯ. แปลจาก Frederick S. Hillier and Gerald J. Lieberman. **Introduction to Operations Research.**

พิศิษฐ์ แสงชูโต, พิษณุ ทองขาว, สมศักดิ์ เชื้อกิตติศักดิ์ และ พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล. 2551. การวางแผนการผลิตรวมภายใต้ปริมาณความต้องการไม่แน่นอนโดยใช้วิธีกำหนดการเฟ้นสุ่ม, น. 25-32. *ใน* **รายงานการประชุมวิชาการด้านการวิจัยดำเนินงานแห่งชาติ.** สถาบันบัณฑิตพัฒนาบริหารศาสตร์, กรุงเทพฯ.

วนิดา เลิศพิพัฒนานนท์, ศุภัชญา โชตยะกุล, ศิรประภา มโนมัธย์ และ พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล. 2551. การแก้ปัญหากำหนดการเฟ้นสุ่มด้วยวิธีการรวมทางเลือกของข้อจำกัดกรณีศึกษาปัญหาโภชนาการ, น. 1-7. *ใน* **รายงานการประชุมวิชาการด้านการวิจัยดำเนินงานแห่งชาติ.** สถาบันบัณฑิตพัฒนาบริหารศาสตร์, กรุงเทพฯ.

วิชัย รุ่งเรืองอนันต์. 2536. **การหาปริมาณการสั่งซื้อที่มีความต้องการผันแปรแบบไม่ต่อเนื่อง.** วิทยานิพนธ์ วิศวกรรมศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

สมศักย์ ธรรมนิวิฎฐ์ และ พีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล. 2552. การประยุกต์ใช้วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ในการกำหนดหาค่าที่เหมาะสมของตัวแปรตัดสินใจท่ามกลางความไม่แน่นอนของเงื่อนไขในกระบวนการผสมกรณีศึกษา: การผลิตขนมฝอยทอง, น. 97-104. *ใน* **รายงานการประชุมวิชาการข่ายงานวิศวกรรมอุตสาหการ.** มหาวิทยาลัยขอนแก่น, ขอนแก่น.

สุพัฒตรา เกษราพงศ์, มิตรมาณี ตรีวัฒนาวงศ์, ประภาพรรณ เกษราพงศ์, มาริสา แก้วสุวรรณ, แก้วปั้น อมตเวทย์ และพีรยุทธ์ ชาญเศรษฐิกุล. 2552. การแก้ปัญหาการควบคุมสินค้าคงคลังภายใต้ความต้องการที่ไม่แน่นอน และผันแปรตามเวลา **Thai VCML Journal** (2): 133-145

ศูนย์วิจัยและพัฒนา สถาบันพัฒนาครู คณาจารย์และบุคลากรทางการศึกษา. **สารสนเทศการวิจัย.** แหล่งที่มา: http://www.moe.go.th/wijai/matrawat.htm, 8 ตุลาคม 2554.

Albareda-Sambola, M., M.H. van der Vlerk and E. Fernández. 2002. Exact solutions to a class of stochastic generalized assignment problems. **European Journal of Operational Research** 2006 (173): 465-487.

Albareda-Sambola, M. and E. Fernández. 2000. The stochastic generalized assignment problem with Bernoulli demands. **Top** 2000 (8): 165–190.

Benders, J.F. 1962. Partitioning procedures for solving mixed variables programming problem. **Numerische Mathmatik** 1962 (4): 238-252

Berkin Toktas, Joyce W. Yen and Zelda B. Zabinsky. 2003. A Stochastic Programming Approach to the Generalized Assignment Problem with Forecasted Resource Capacities.

Burkard, R.E. and Derigs, V. 1980. **Assignment and Matching Problems: Solution Method with FORTRAN Progress.** Springer Heidelberg Dordrecht, London New York.

Cattrysse, D.G., M. Salomon and L.N. Van Wassenhove. 1994. A set partitioning heuristic for the generalized assignment problem. **European Journal of Operational Research** 1994 (72): 167–174.

Dantzig, G.B. 1955. Linear programming under uncertainty. **Management Science** 1995 (1): 197-206.

Dantzig, G.B. and P.Wolfe. 1960. The Decomposition Principle for Linear Programs. **Operations Res** 1960 (8): 110-111.

David R. Spoerl and R. Kevin Wood. 2004. **A stochastic Generalized Assignment Problem.**

Dyer, M. and A. Frieze. 1992. Probabilistic analysis of the generalized assignment problem. **Mathematical Programming** 1992 (35): 169–181.

Frontline Systems. 2010. **Risk Solver Platform Manual.**

Geoffrion, A.M. 1974. Elements of Large-Scale Mathematical Programming. **Management Science** 1974 (16) : 435-446.

Geoffrion, A.M. and G.W. Grave. 1974. Multicommodity Distribution System Design by Bender Decomposition. **Management Science** 1974 (20): 822-844.

Kuhn, H.W. 1955. The Hungarian methods for the assignment problem, pp. 29-48. Michael Junger et al. **50 Years of Interger Programming 1958-2008.** Springer Heidelberg Dordrecht, London New York.

Mine, H., M. Fukushima and K. Ishikawa and L. Sawa. 1983. An algorithm for the assignment problem with stochastic side constraints. **Memoirs of the Faculty of Engineering Kyoto University** 1983 (45): 26–35.

Osman, I.H. 1995. Heuristics for the generalized assignment problem: Simulated annealing and tabu search approaches. **OR Spektrum** 1995 (17): 211–225.

Prattana Punnakitikashem, Jay M. Rosenberger and Deborah Buckley Behan. 2005. Stochastic programming for nurse assignment. **Computational optimization and applications** 2005 (40): 321-349

Ross, G.T. and R.M. Soland. 1975. A branch and bound algorithm for the generalized assignment problem. **Mathematical Programming** 1975 (8): 91–103.

Savelsbergh, M. 1997. A branch-and-price algorithm for the generalized assignment problem. **Operations Research** 1977 (45): 831–841.

Toktas, B., J.W. Yen, Z. Zabinsky. 2003. **A stochastic programming approach to the Generalized assignment problem with uncertain resource capacities.** EURO/INFORMS 2003. Istanbul, Turkey.

Wagner, H.M. 1975. **Principles of Operations Research: with applications to managerial decisions.** 2 ed. Prentice Hall, New Jersey.

Yutthapoom Puttawong and Peerayuth Charnsethikul. 2007. Solving Linear Programming with Finite Alternatives among Parameters. **Proceeding of The IE Network Conference** 2007: 230-235.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

ชุดคำสั่งโปรแกรม

ชุดคำสั่งโปรแกรม

ในการทำวิจัยนี้ได้ทดลองเพื่อประมวลผลโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b โดยมีลำดับของชุดคำสั่งดังนี้ เริ่มจากการจำลองข้อมูลพื้นฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหาของตัวแบบ จากนั้นนำค่าที่จำลองขึ้นมาไปคำนวณค่าตามวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ โดยจะใช้วิธีซิมเพล็กซ์ (Simplex Method) ในการแก้ปัญหาของปัญหาหลัก จากนั้นจะเป็นกระบวนการแทนค่าย้อนกลับ โดยนำค่าที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยวิธีซิมเพล็กซ์ ไปทำซ้ำด้วยหลักการการแบ่งส่วนของเบนเดอร์ เพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด

ในส่วนการเริ่มจับเวลาประมวลผลจะใช้คำสั่ง tic ก่อนกำหนดคำสั่งและใช้คำสั่ง toc สำหรับยุติการจับเวลาประมวลผลหลังชุดคำสั่งนั้น

1. ชุดคำสั่งจำลองข้อมูลพื้นฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหาของตัวแบบ

```
clear;
tic;
n=3;
nscen=5;
T_inc=0.001;
improve_ub=10^(2);
T=1;
nvar=n^2;
ncon=2*n;
prob=zeros(n,n);
aijk=zeros(nscen*ncon,nvar+5);
a_i=0;
a_j=0;
rhs=sparse(n*nscen,1);
rhs_i=0;
cost=zeros(nvar,1);
prob_event=sparse(n*nscen,n);
```

```
pe_i=0;
pe_j=0;
joint_prob=zeros(nscen,1);
ps_i=0;
total_joint_prob=0;
x_initial=zeros(nvar+1,1);
aijk_1=sparse(ncon+1,nvar+1);
a1_i=0;
a1_j=0;
check=0;
uv_i=0;
uv_j=0;
ba=sparse(n*nscen,1);
rs_i=0;
rs_ii=0;
rs_j=0;
da=sparse(n*nscen,1);
g=sparse(nscen,1);
h=sparse(nscen,1);
e=sparse(nscen,1);
f=sparse(nscen,1);
ghef_i=0;
ghef_j=0;
y=sparse(n*nscen,1);
w=sparse(n*nscen,1);
sum_cost=0;
upper_bound=0;
Min_upperbound=10000000;
obj=zeros(1,nvar+1);
ay=zeros(n,nvar);
axy=zeros(nvar,1);
```

```
ay1=0;
ay_i=0;
ay_j=0;
ay_ii=0;
sum_ay=sparse(n,nvar);
sum_ay_i=0;
aw=sparse(n,nvar);
aw_i=0;
aw_j=0;
sum_aw=sparse(n,nvar);
sum_aw_i=0;
aijk_1_i=0;
aijk_1_ii=0;
aijk_1_j=0;
rhs_1=sparse(ncon,1);
by=sparse(n,1);
sum_by=0;
by_i=0;
dw=sparse(n,1);
sum_dw=0;
dw_i=0;
rhs_1_i=0;
rhs_2=sparse(ncon,1);
rhs_2_i=1;
Lower_bound_1=0;
x=zeros(nvar+1,1);
p=1;
aerror=100000000;
sum_ay_aw=sparse(1,nvar);
x_i=0;
```

```
%----Random Probability of assignment Problem----%
% prob=zeros(3);
% prob = xlsread('test value.xls', '3x3', 'P2:R4');
for i=1:n
        for j=1:n
                prob(i,j)=rand();
        end
end

%----Create Scenarios (aijk)----%
% Visual_data = xlsread('test value.xls', '3x3', 'H7:J21');
% i=0; j=0;
% [i,j]=size(Visual_data);
% for z=1:nscen
%       for i=1:n
%               for j=1:n
%                       aijk(i+a_i,j+a_j)=Visual_data(i+a_i,j);
%               end
%               a_j=a_j+n;
%       end
%       a_i=a_i+n;
%       a_j=0;
% end
 for z=1:nscen
         for i=1:n
                for j=1:n
                        if rand()<=prob(i,j)
                                aijk(i+a_i,j+a_j)=1;
                        else aijk(i+a_i,j+a_j)=0;
                        end
                end
```

```
                a_j=a_j+n;
        end
        a_i=a_i+n;
        a_j=0;
end

%----Copy Scenarios----%
 for i=1:n*nscen
        for j=1:nvar
                aijk(n*nscen+i,j)=aijk(i,j);
        end
 end

%----Random RHS----%
% Visual_rhs = xlsread('test value.xls', '3x3', 'O7:O21');
% Visual_rhss = xlsread('test value.xls', '3x3', 'P7:P21');
% for i=1:n*nscen
%       rhs(i,1)=Visual_rhs(i,1);
% end
% for i=1:n*nscen
%       rhs(i+n*nscen,1)=Visual_rhss(i,1);
% end
for z=1:nscen*2
        for i=1:n
                rhs(i+rhs_i,1)=randint(1,1,[0,1]);
        end
        rhs_i=rhs_i+n;
end
```

```
%----Random Cost----%
% Visual_cost = xlsread('test value.xls', '3x3', 'C2:E4');
% cost_j=0;
% for i=1:n
%       for j=1:n
%               cost(j+cost_j,1)=Visual_cost(i,j);
%        end
%       cost_j=cost_j+n;
% end
for j=1:nvar
        cost(j,1)=rand();
end

%----Solve Probability of Event----%
for k=1:nscen
         for i=1:n
                for j=1:n
                        if aijk(i+pe_i,j+pe_j)==1
                                prob_event(i+pe_i,j)=prob(i,j);
                        else prob_event(i+pe_i,j)=1-prob(i,j);
                        end
                end
                pe_j=pe_j+n;
        end
        pe_i=pe_i+n;
        pe_j=0;
end
```

```
%----Solve Joint Probability ----%
for k=1:nscen
    joint_prob(k)=1;
    for i=1:n
        for j=1:n
            joint_prob(k)=joint_prob(k)*prob_event(i+ps_i,j);
        end
    end
    ps_i=ps_i+n;
    total_joint_prob=total_joint_prob+joint_prob(k);
end
if joint_prob==0
    for k=1:nscen
        joint_prob(k)=1/nscen;
        total_joint_prob=total_joint_prob+joint_prob(k);
    end
end

%----Create Constraint of Assignment Problem----%
for i=1:n
    for j=1:n
        aijk_1(i+a1_i,j+a1_j)=1;
    end
    a1_j=a1_j+n;
end
a1_i=a1_i+n;
a1_j=0;
```

```
for i=1:n
        for j=1:n
                aijk_1(n+j,j+a1_j)=1;
        end
        a1_j=a1_j+n;
end

%----Random Cost----%
% Visual_x = xlsread('test value.xls', '3x3', 'H3:J5');
% x_j=0;
% for i=1:n
%       for j=1:n
%               x_initial(j+x_j,1)=Visual_x(i,j);
%       end
%       x_j=x_j+n;
% end
 for i=1:n
        x_initial(i+x_i,1)=0;
        x_i=x_i+n;
 end
```

2. ชุดคำสั่งแก้ปัญหาด้วยวิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์

```
while aerror>=0

for j=1:nvar+1
        record_x_initial(p,j)=x_initial(j,1);
end
```

```
%----Solve u,v----%
for k=1:nscen
        for i=1:n
                for j=1:nvar
                        check=check+aijk(i+uv_i,j)*x_initial(j);
                end
                if check>rhs(i+uv_i,1)
                        aijk(i+uv_i,nvar+2)=0;
                        aijk(i+uv_i,nvar+3)=-1;
                end
                if check==rhs(i+uv_i,1)
                         aijk(i+uv_i,nvar+2)=0;
                        aijk(i+uv_i,nvar+3)=0;
                end
                if check<rhs(i+uv_i,1)
                        aijk(i+uv_i,nvar+2)=1;
                        aijk(i+uv_i,nvar+3)=0;
                end
                ba(i+uv_i)=rhs(i+uv_i)-check;
                check=0;
         end
        uv_i=uv_i+n;
        uv_j=0;
end
uv_i=0;
```

```
%----Solve r,s----%
for k=1:nscen
    for i=1:n
        for j=1:n
            check=check+aijk(j+nscen*n+rs_i,i+rs_ii)*x_initial(i+rs_ii,1);
            rs_ii=rs_ii+n;
        end
        if check==1 && rhs(i+n*nscen+rs_i)==0
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+4)=0;
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+5)=-1;
        end
        if check==1 && rhs(i+n*nscen+rs_i)==1
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+4)=0;
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+5)=0;
        end
        if check==0 && rhs(i+n*nscen+rs_i)==0
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+4)=0;
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+5)=0;
        end
        if check==0 && rhs(i+n*nscen+rs_i)==1
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+4)=1;
            aijk(i+n*nscen+rs_i,nvar+5)=0;
        end
        da(i+rs_i)=rhs(i+n*nscen+rs_i)-check;
        check=0;
        rs_ii=0;
    end
    rs_i=rs_i+n;
end
rs_i=0;
```

```
%----Solve g,h,e,f ----%
for k=1:nscen
    for i=1:n
        g(i+ghef_i,1)=aijk(i+ghef_i,nvar+2)*joint_prob(k);
        h(i+ghef_i,1)=aijk(i+ghef_i,nvar+3)*joint_prob(k);
        e(i+ghef_i,1)=aijk(i+ghef_i+n*nscen,nvar+4)*joint_prob(k);
        f(i+ghef_i,1)=aijk(i+ghef_i+n*nscen,nvar+5)*joint_prob(k);
    end
    ghef_i=ghef_i+n;
end
ghef_i=0;

%----Solve y,w----%
for i=1:n*nscen
    if ba(i)>0
        y(i)=g(i);
    else y(i)=h(i);
    end
    if da(i)>0
        w(i)=e(i);
    else w(i)=f(i);
    end
end

%----Solve Max Sub Problem (Upper bound)----%
for j=1:nvar
    sum_cost=sum_cost+(x_initial(j,1)'*cost(j,1));
end
upper_bound=((y'*ba+w'*da)/total_joint_prob)*improve_ub/nscen+sum_cost;
sum_cost=0;
```

```
if Min_upperbound >= upper_bound
        Min_upperbound = upper_bound;
End

%----Create Objective Function----%
for j=nvar
        obj(1,nvar+1)=T;
end
%----Create aijk_1 (optimized cut)----%
for k=1:nscen
        for i=1:n
                for j=1:nvar
                        ay(i+ay_ii,j)=y(i+(n*ay1))'*aijk(i+ay_i,j);
                        aw(i+ay_ii,j)=w(i+(n*ay1))'*aijk(i+ay_i,j);
                end
        end
        ay_ii=ay_ii+n;
        ay_i=ay_i+n;
        ay1=k;
end
ay1=0;
ay_i=0;
ay_ii=0;
for k=1:nscen
        for i=1:n
                for j=1:nvar
                        sum_ay(i,j)=sum_ay(i,j)+ay(i+sum_ay_i,j);
                end
        end
        sum_ay_i=sum_ay_i+n;
end
```

```
for k=1:nscen
    for i=1:n
        for j=1:nvar
            sum_aw(i,j)=sum_aw(i,j)+aw(i+sum_aw_i,j);
        end
    end
    sum_aw_i=sum_aw_i+n;
end
sum_aw_i=0;
for i=1:n
    for j=1:nvar
        sum_ay_aw(1,j)=sum_ay_aw(1,j)+(sum_ay(i,j)+sum_aw(i,j));
    end
end
for i=1:n
    for j=1:nvar
        aijk_1(1+ncon+aijk_1_i,j)=cost(j,1)-sum_ay_aw(1,j);
    end
end
aijk_1_i=aijk_1_i+1;
for i=1:n
    aijk_1(ncon+1+aijk_1_ii,nvar+1)=-T;
end

%----Create Cut_RHS (rhs_1)----%
for i=1:ncon
    rhs_1(i)=1;
end
for i=1:n*nscen
    by(i)=y(i)'*rhs(i);
end
```

```
for k=1:nscen
        for i=1:n
                sum_by=sum_by+by(i+by_i);
        end
        by_i=by_i+n;
end
by_i=0;
for i=1:n*nscen
        dw(i)=w(i)'*rhs(i+n*nscen);
end
for k=1:nscen
        for i=1:n
                sum_dw=sum_dw+dw(i+dw_i);
        end
        dw_i=dw_i+n;
end
dw_i=0;
for i=1:n
        rhs_1(1+ncon+rhs_1_i,1)=-(sum_by+sum_dw);
end

%----Check Feasible Solution----%
options = optimset('LargeScale','off','Simplex','on');
 for i=1:ncon
        rhs_2(i)=rhs_1(i);
 end
 for i=1:rhs_2_i
        rhs_2(ncon+i)=rhs_1(ncon+i);
 end
```

```
while inf==-2
            T=T+T_inc
           aijk_1(ncon+1+aijk_1_ii,nvar+1)=-T;
           obj(1,nvar+1)=T;
           x_initial(nvar+1)=1;
           [x,z,inf] = bintprog(obj,aijk_1,rhs_2,[],[],[],options);
end
if or(inf<-2,inf>-2)
           obj(1,nvar+1)=T;
            Lower_bound_1=T;
end
for j=1:nvar+1
            x_initial(j)=x(j);
end
for j=1:nvar+1
           record_x(p,j)=x(j,1);
end
aerror=Min_upperbound-Lower_bound_1;
record_Lower_bound(p)=Lower_bound_1
record_upper_bound(p)=upper_bound
record_Min_upper_bound(p)=Min_upperbound
g=sparse(nscen,1);
h=sparse(nscen,1);
e=sparse(nscen,1);
f=sparse(nscen,1);
ba=sparse(n*nscen,1);
da=sparse(n*nscen,1);
ay=sparse(n,nvar);
aw=sparse(n,nvar);
sum_ay_i=0;
sum_ay=sparse(n,nvar);
```

```
sum_aw=sparse(n,nvar);
sum_ay_aw=sparse(1,nvar);
sum_by=0;
sum_dw=0;
aijk_1_ii=aijk_1_ii+1;
rhs_1_i=rhs_1_i+1;
rhs_2_i=rhs_2_i+1;
p=p+1;
inf=-2;
T=Lower_bound_1;
upper_bound=0;
end
toc;
```

ภาคผนวก ข

ข้อมูลของตัวปัญหาที่มีจำนวนการจับคู่งานกับทรัพยากรเท่ากับ 2 และ 3
โดยมีจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5

ตารางผนวกที่ ข1 ข้อมูลของปัญหาที่จำลองขึ้นมาที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2 และจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
1	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.6733 & 0.4296 \\ 0.4517 & 0.6099 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.3664 & 0.3692 \\ 0.6850 & 0.5979 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	4.9272	4.9271
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0001	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
2	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.5308 & 0.7792 \\ 0.9340 & 0.1299 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.7094 & 0.7547 \\ 0.2760 & 0.2760 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	5.4648	5.4647
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0001	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.0155 & 0.9841 \\ 0.1672 & 0.1062 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.8055 & 0.5767 \\ 0.1829 & 0.2399 \end{bmatrix}$	
3	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	3.4840	3.4840
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
4	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.2518 & 0.2904 \\ 0.6171 & 0.2653 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.3724 & 0.1981 \\ 0.4897 & 0.3395 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	4.6883	4.6883
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
5	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.4574 & 0.8754 \\ 0.5181 & 0.9436 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.8244 & 0.9827 \\ 0.7302 & 0.3439 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	5.9982	5.9981
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0001	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
6	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.4170 & 0.2060 \\ 0.9479 & 0.9479 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.0835 & 0.6260 \\ 0.6609 & 0.7298 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	5.0973	5.0975
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0002	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
7	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.7218 & 0.8778 \\ 0.5724 & 0.0707 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.5038 & 0.4896 \\ 0.8770 & 0.3531 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	5.4533	5.4534
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0001	

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
8	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.0626 & 0.4362 \\ 0.8266 & 0.3945 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.8844 & 0.7209 \\ 0.0186 & 0.6748 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	5.5043	5.5044
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0001	

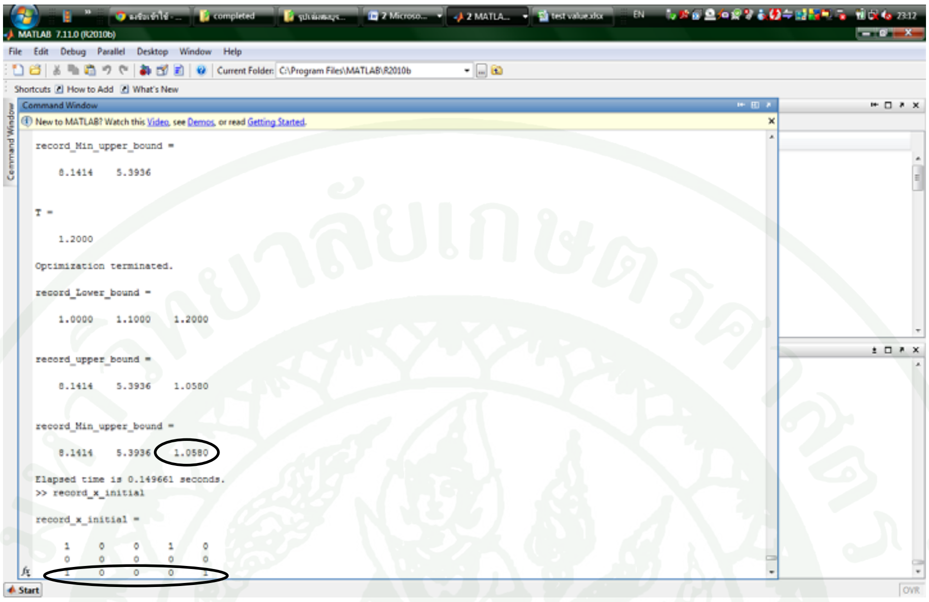
ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
9	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.9622 & 0.1858 \\ 0.1930 & 0.3416 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.6253 & 0.5431 \\ 0.4391 & 0.2874 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	5.1789	5.1792
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0003	

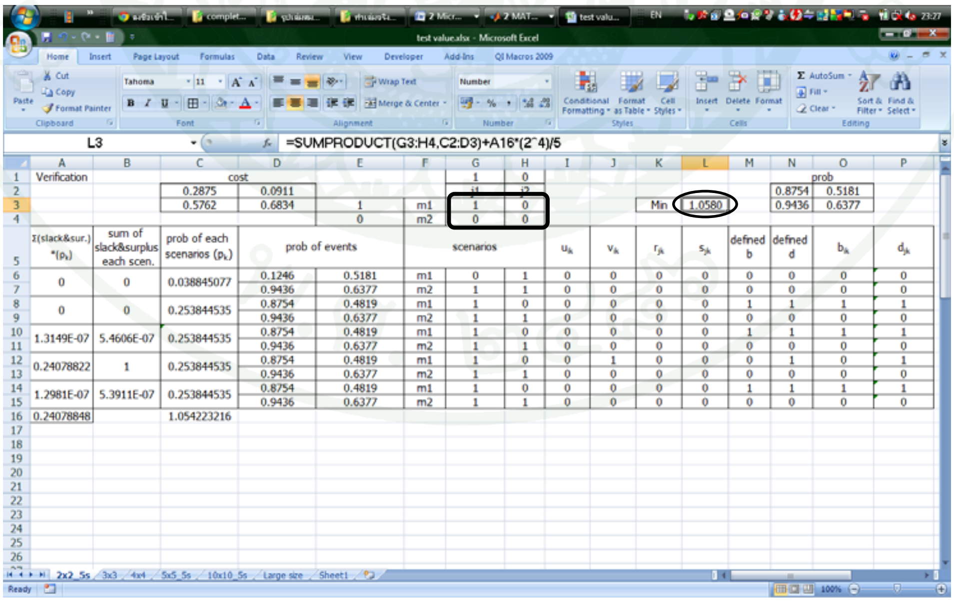
ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.2875 & 0.0911 \\ 0.5762 & 0.6834 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_5$	
10	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.8754 & 0.5181 \\ 0.9436 & 0.6377 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	1.0580	1.0580
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0	

ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b และโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ซึ่งมีจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5



ภาพผนวกที่ ข1 ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2



ภาพผนวกที่ ข2 ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 2

ตารางผนวกที่ ข2 ข้อมูลของปัญหาที่จำลองขึ้นที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3 และจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
1	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.7817 & 0.6477 & 0.4509 \\ 0.5470 & 0.2963 & 0.7447 \\ 0.1890 & 0.6868 & 0.1835 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.7792 & 0.9340 & 0.1299 \\ 0.5686 & 0.4694 & 0.0119 \\ 0.3371 & 0.1622 & 0.7943 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	89.4791	89.4788
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0003	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
2	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.1068 & 0.6538 & 0.4942 \\ 0.7791 & 0.7150 & 0.7757 \\ 0.8909 & 0.3342 & 0.4468 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.3685 & 0.6256 & 0.7802 \\ 0.0811 & 0.9294 & 0.7757 \\ 0.4868 & 0.4359 & 0.4468 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	236.6381	236.6490
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0109	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.4231 & 0.9717 & 0.2167 \\ 0.7851 & 0.4251 & 0.1937 \\ 0.6213 & 0.5552 & 0.4835 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
3	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.3906 & 0.3901 & 0.3404 \\ 0.7993 & 0.1178 & 0.8116 \\ 0.9647 & 0.7841 & 0.5572 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	222.0260	221.8273
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.1987	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
4	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.0440 & 0.7118 & 0.7092 \\ 0.0730 & 0.0584 & 0.7122 \\ 0.1167 & 0.1272 & 0.8090 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.4643 & 0.0661 & 0.6993 \\ 0.2386 & 0.3594 & 0.2886 \\ 0.6620 & 0.1516 & 0.2884 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	179.8617	179.8592
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0025	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
5	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.1160 & 0.8782 & 0.9859 \\ 0.6926 & 0.4544 & 0.4174 \\ 0.7481 & 0.4184 & 0.6765 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.6316 & 0.6663 & 0.0316 \\ 0.0978 & 0.1683 & 0.4521 \\ 0.9032 & 0.7870 & 0.5241 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน$\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	187.0039	186.9996
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0043	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.3255 & 0.7847 & 0.4714 \\ 0.0358 & 0.1759 & 0.7218 \\ 0.4735 & 0.1527 & 0.3411 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.1909 & 0.4283 & 0.4820 \\ 0.1206 & 0.5895 & 0.2262 \\ 0.3846 & 0.5830 & 0.2518 \end{bmatrix}$	
6	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	252.3331	252.3307
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0024	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.6692 & 0.1904 & 0.3689 \\ 0.4607 & 0.9816 & 0.1546 \\ 0.8555 & 0.6448 & 0.3763 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
7	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.1978 & 0.0305 & 0.7441 \\ 0.5000 & 0.4799 & 0.9047 \\ 0.6099 & 0.6177 & 0.8594 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	288.7385	288.7404
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0019	

ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.0320 & 0.6147 & 0.3624 \\ 0.0495 & 0.4896 & 0.1925 \\ 0.1231 & 0.2055 & 0.1465 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_5$	
8	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.2703 & 0.1971 & 0.8271 \\ 0.4299 & 0.8878 & 0.3912 \\ 0.7691 & 0.3968 & 0.8085 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	202.1169	202.1183
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0014	

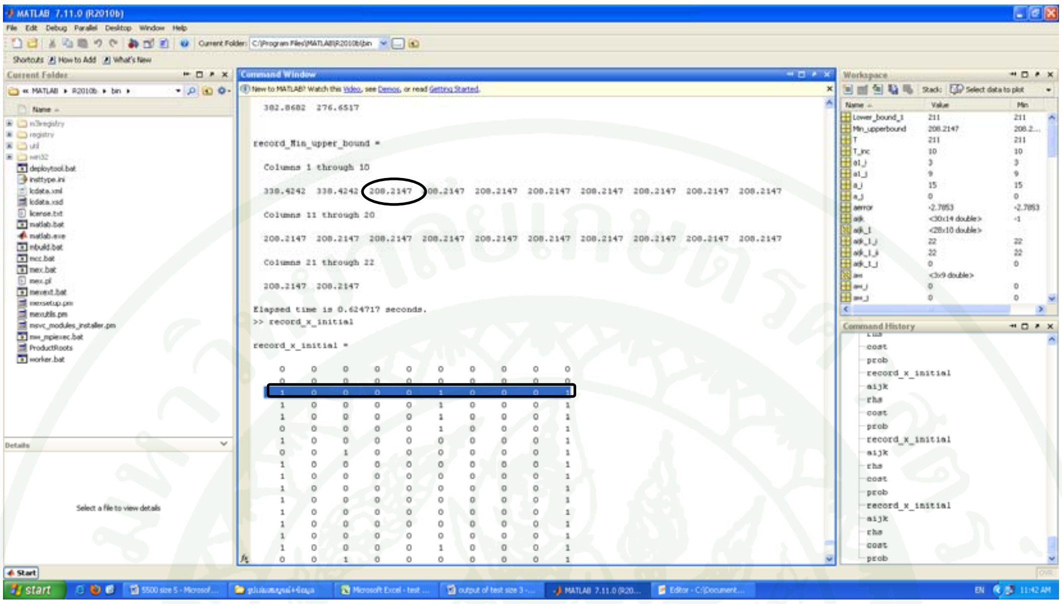
ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
9	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.0538 & 0.4896 & 0.8770 \\ 0.3531 & 0.4496 & 0.9635 \\ 0.0423 & 0.9730 & 0.1892 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.1771 & 0.8296 & 0.7669 \\ 0.9345 & 0.1079 & 0.1822 \\ 0.0991 & 0.4898 & 0.1932 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk}\right)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	210.9324	210.9355
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0031	

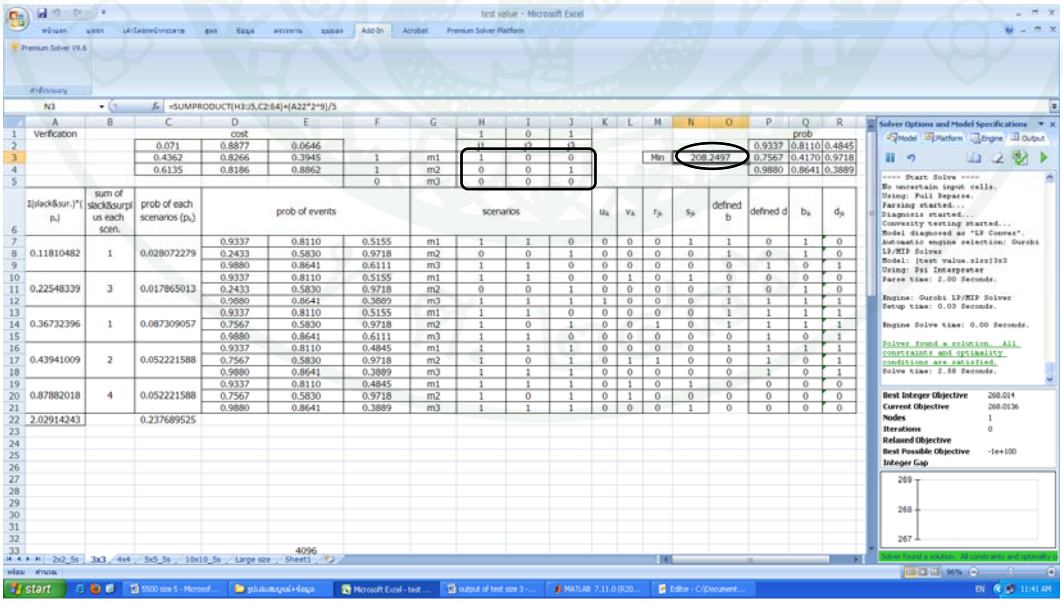
ตารางผนวกที่ ข2 (ต่อ)

ครั้งที่	ข้อมูลของตัวปัญหา	วิธีการแบ่งส่วนของเบนเดอร์	วิธีการหาคำตอบที่เหมาะสม
10	ต้นทุนการจัดงาน	$\begin{bmatrix} 0.0710 & 0.8877 & 0.0646 \\ 0.4362 & 0.8266 & 0.3945 \\ 0.6135 & 0.8186 & 0.8862 \end{bmatrix}$	
	เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $_k$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}_5$	
	ความน่าจะเป็นของการจับคู่ทรัพยากรกับงาน	$\begin{bmatrix} 0.9337 & 0.8110 & 0.4845 \\ 0.7567 & 0.4170 & 0.9718 \\ 0.9880 & 0.8641 & 0.3889 \end{bmatrix}$	
	ค่าทางขวามือของข้อจำกัดที่ไม่แน่นอน $\left(b_{ik}, d_{jk} \right)$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{i2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{i3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{i5}$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{j2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{j4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{j5}$	
	ค่าเป้าหมาย	208.2147	208.2497
	ตัวแปรตัดสินใจที่เหมาะสม	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	
	ค่าความแตกต่างระหว่าง 2 วิธี	0.0350	

ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b โปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ซึ่งมีจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ 5



ภาคผนวกที่ ข3 ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูป MATLAB R2010b ที่มีจำนวนการจับคู่ทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3



ภาคผนวกที่ ข4 ตัวอย่างการแก้ปัญหาด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปไมโครซอฟต์เอ็กซ์เซลโซลเวอร์-กูโรบิ ที่มีจำนวนการจับคู่ของทรัพยากรกับงานเท่ากับ 3

ภาคผนวก ค

ตัวอย่างปัญหาการจัดงานเชิงเส้นแบบเฟ้นสุ่ม

กรณีศึกษา การมอบหมายคนไข้ให้กับพยาบาลดูแล

กรณีศึกษา การมอบหมายคนไข้ให้พยาบาลดูแล

ในการวางแผนการทำงานของพยาบาลในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง ประกอบด้วย 4 ขั้นตอนหลัก ได้แก่

1. การจัดทำงบประมาณของพยาบาล
2. การจัดทำตารางเวลาการทำงานของพยาบาล
3. การปรับเปลี่ยนเวรการทำงานของพยาบาล
4. การมอบหมายคนไข้ให้พยาบาลดูแล

ซึ่งในงานวิจัยนี้จะมุ่งเน้นไปที่ขั้นตอนที่สุดท้าย คือการมอบหมายคนไข้ให้พยาบาลดูแล และวัตถุประสงค์ คือ การลดภาระงานของพยาบาล (ภาระงาน คือ เวลาในการทำงานของพยาบาล) ซึ่งในการทำงานของพยาบาลนั้น อาจมีความไม่แน่นอนเกิดขึ้น เช่น พยาบาลลาป่วย ไม่สามารถมาทำงานได้ หรือพยาบาลดูแลคนไข้คนอื่นอยู่ หรือคนไข้ที่ถูกกำหนดให้พยาบาลดูแลไม่ต้องพักหรือนอนที่โรงพยาบาล ดังนั้นพยาบาลจึงว่างงาน เวลาในการทำงานของพยาบาลจะเป็นลักษณะการเข้ากะ ซึ่งใน 1 วันมี 3 กะ และ 1 กะทำงาน 8 ชั่วโมง ดังนั้น เวลาในการทำงานทั้งหมด เท่ากับ $24 \times 30 = 720$ ชั่วโมง และในงานวิจัยต้องอาศัยข้อมูลเบื้องต้น ดังนี้

- เวลาที่พยาบาลแต่ละคนที่ต้องดูแลคนไข้แต่ละประเภท (ชั่วโมง) (t_{ij})
- ความน่าจะเป็นที่พยาบาลแต่ละคนจะสามารถดูแลคนไข้แต่ละประเภทได้ (p_{ij})
- เหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (a_{ijk}) แสดงในสื่ออินเตอร์เน็ต ดังนี้

  https://www.dropbox.com/s/x8r4n31sxew4vhn/%E0%B8%81%E0%B8%A3%E0%B8%93%E0%B8%B5%E0%B8%A8%E0%B8%B6%E0%B8%81%E0%B8%A9%E0%B8%B2%20%E0%B8%81%E0%B8%B2%E0%B8%A3%E0%B8%A1%E0%B8%AD%E0%B8%9A%E0%B8%AB%E0%B8%A1%E0%B8%B2%E0%B8%A2%E0%B8%84%E0%B8%99%E0%B9%84%E0%B8%82%E0%B9%89%E0%B9%83%E0%B8%AB%E0%B9%89%E0%B8%9E%E0%B8%A2%E0%B8%B2%E0%B8%9A%E0%B8%B2%E0%B8%A5%E0%B8%94%E0%B8%B9%E0%B9%81%E0%B8%A5.docx

กำหนดให้ i แทนจำนวนพยาบาลที่ทำงานอยู่ในกะนั้น โดยที่ $i=1,2,...,5$

j แทนประเภทของคนไข้ โดยที่ $j=1,2,...,5$

k แทนจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยที่ $k=1,2,...,100$

เวลาที่พยาบาลแต่ละคนที่ต้องดูแลคนไข้แต่ละประเภท

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} 441 & 237 & 314 & 188 & 394 \\ 346 & 421 & 245 & 365 & 134 \\ 531 & 325 & 323 & 135 & 236 \\ 266 & 331 & 398 & 199 & 235 \\ 261 & 369 & 276 & 346 & 211 \end{bmatrix}$$

ความน่าจะเป็นที่พยาบาลแต่ละคนจะสามารถดูแลคนไข้แต่ละประเภทได้

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0.311 & 0.531 & 0.941 & 0.122 & 0.315 \\ 0.639 & 0.439 & 0.552 & 0.153 & 0.683 \\ 0.388 & 0.862 & 0.351 & 0.664 & 0.251 \\ 0.532 & 0.835 & 0.035 & 0.153 & 0.838 \\ 0.621 & 0.533 & 0.225 & 0.152 & 0.325 \end{bmatrix}$$

จากการทดลองพบว่า ภาระงานของพยาบาลเท่ากับ 311 ชั่วโมง

กรณีศึกษา การขึ้นรูปจานเมลามีน

ในกระบวนการขึ้นรูปจานเมลามีน เครื่องจักรแต่ละเครื่องนั้นจะถูกตั้งค่าลักษณะไว้ต่างกัน ในการขึ้นรูปจานที่มีลักษณะแตกต่างกันเช่นกัน ซึ่งในกระบวนการนี้จะมีการจับคู่เครื่องจักรกับงานไว้เบื้องต้นก่อน แต่มักจะเกิดความไม่แน่นอนขึ้น เช่น เครื่องจักรเสียทำให้ไม่สามารถทำงานนั้นได้ จึงต้องส่งงานนั้นไปทำที่เครื่องจักรอื่น ทำให้ต้องเสียค่าใช้จ่ายในการเปลี่ยนเครื่องจักร หรือในบางครั้งงานที่ถูกจัดตารางการผลิตไว้แล้ว ถูกยกเลิก จึงทำให้เสียต้นทุนเพิ่ม เพราะได้ทำการตั้งค่า

เครื่องจักรที่จะทำงานนั้นไว้แล้ว ดังนั้นวัตถุประสงค์ คือ ลดต้นทุนที่เกิดจากงานและต้นทุนส่วนเพิ่มจากความไม่แน่นอนและในงานวิจัยต้องอาศัยข้อมูลเบื้องต้น ดังนี้

- ต้นทุนที่เกิดจากการจัดงานและต้นทุนส่วนเพิ่มจากความไม่แน่นอน (บาท) (c_{ij})
- ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่งานกับทรัพยากร(p_{ij})
- จำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด (a_{ijk}) แสดงในสื่ออินเตอร์เน็ต ดังนี้
  https://www.dropbox.com/s/mtk2wbwf8nfbeo0/%E0%B8%81%E0%B8%A3%E0%B8%93%E0%B8%B5%E0%B8%A8%E0%B8%B6%E0%B8%81%E0%B8%A9%E0%B8%B2%20%E0%B8%81%E0%B8%B2%E0%B8%A3%E0%B8%82%E0%B8%B6%E0%B9%89%E0%B8%99%E0%B8%A3%E0%B8%B9%E0%B8%9B%E0%B8%88%E0%B8%B2%E0%B8%99%E0%B9%80%E0%B8%A1%E0%B8%A5%E0%B8%B2%E0%B8%A1%E0%B8%B5%E0%B8%99.docx

กำหนดให้ i แทนจำนวนทรัพยากร โดยที่ i=1,2,3

j แทนจำนวนงาน โดยที่ j=1,2,3

k แทนจำนวนเหตุการณ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยที่ k=1,2,...,100

ต้นทุนที่เกิดจากการจัดงานและต้นทุนส่วนเพิ่มจากความไม่แน่นอน

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดการจับคู่งานกับทรัพยากร

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} 0.830 & 0.590 & 0.142 \\ 0.593 & 0.726 & 0.428 \\ 0.211 & 0.265 & 0.993 \end{bmatrix}$$

จากการทดลองพบว่า ต้นทุนในการจัดงานเท่ากับ 3.1654 บาท

ประวัติการศึกษาและการทำงาน

ชื่อ	นางสาวจารุวรรณ แก้วแสนซาว
เกิดวันที่	24 มิถุนายน พ.ศ.2530
สถานที่เกิด	โรงพยาบาลแมคคอร์มิค อำเภอเมือง จังหวัดเชียงใหม่
ประวัติการศึกษา	วท.บ. (สถิติศาสตร์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ตำแหน่งปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ผลงานดีเด่นและ/หรือรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-