บทที่ 2 ทฤษฎีแถวคอย

2.1 กล่าวนำ

สำหรับการวิเคราะห์สมรรถนะของเครือข่ายเมชไร้สายนั้นมีหลักการคำนวณทางคณิตศาสตร์อยู่มากมาย ซึ่งหนึ่งในแนวคิดที่นิยมใช้คือการวิเคราะห์ด้วย ทฤษฎีแถวคอย เพราะเป็นแนวคิดที่ให้ผลการวิเคราะห์ใกล้เคียงกับสิ่งที่เกิดขึ้นจริงในทางปฏิบัติและสามารถใช้สมการทางคณิตศาสตร์วิเคราะห์ผลได้ด้วย ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงได้นำทฤษฎีแถวคอยเป็นหลักสำหรับการวิเคราะห์สมรรถนะของเครือข่ายเมชไร้สาย ซึ่งรูปแบบที่ใช้จะเป็นแถวคอยแบบ M/M/1/K เท่านั้น โดยเนื้อหาในบทนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีแถวคอยและสมการพื้นฐานต่างๆ เพื่อสร้างความเข้าใจก่อนนำไปใช้วิเคราะห์สมรรถนะของเครือข่ายเมชไร้สาย ในบทถัดไป

2.2 แนวคิดของทฤษฎีแถวคอย

ในชีวิตประจำวันของบุคคลทั่ว ๆ ไปจะมีส่วนเกี่ยวข้องกับการเข้าคิว หรือระบบแถวคอย เช่น การรอรถประจำทาง การฝากหรือถอนเงินกับธนาคาร การรอรับบริการสาธารณสุข เป็นต้น เราจะเห็นได้ว่าการเข้ามารับบริการดังตัวอย่างข้างต้นจะเป็นบุคคล อย่างไรก็ดี ระบบแถวคอยมิได้จำกัดอยู่เฉพาะบุคคลเท่านั้น แต่ยังรวมถึงวัสดุ สิ่งของหรือสิ่งที่เราสนใจศึกษา เช่น รถยนต์ที่เข้ามารับบริการตรวจซ่อมบำรุง เอกสารที่นำเสนอเพื่อรอการอนุมัติ เครื่องบินที่รอเวลาการออกเดินทาง เป็นต้น ทั้งนี้ระบบแถวคอยจะขึ้นอยู่กับลักษณะและการจัดการของแถวคอยนั้น ๆ ซึ่งแถวคอยจะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อ ผู้มารับบริการ (Arrival) หรือลูกค้า (Customer) ที่เข้ามารับบริการยังหน่วยให้บริการ (Service Units) และยังไม่ได้รับบริการในทันที ดังนั้นผู้มารับบริการจึงต้องใช้เวลาในการรอเพื่อรับบริการ ในการแก้ปัญหาของระบบแถวคอยได้มีการพัฒนาศาสตร์ทางด้านนี้ขึ้นมา เรียกว่า ทฤษฎีแถวคอย

ทฤษฎีแถวคอยมีต้นกำเนิดมาจากผลงานของ Erlang, A.K.(1909) โดยทำการทดลองเกี่ยวกับปัญหาการรอคอยการต่อโทรศัพท์ของโอเปอเรเตอร์ ในขณะที่โอเปอเรเตอร์ไม่ว่าง เนื่องจากกำลังต่อโทรศัพท์ให้กับผู้อื่น เป็นปัญหาแรกที่เกิดขึ้นเกี่ยวกับการรอคอย ในกรณีที่มีโอเปอเรเตอร์คนเดียวให้บริการต่อโทรศัพท์ และต่อมาในปี ค.ศ. 1917 ได้ขยายขอบข่ายการแก้ปัญหาไปในกรณีที่มีโอเปอเรเตอร์ให้บริการต่อ

โทรศัพท์หลายคน การพัฒนาทางทฤษฎีและในการประยุกต์ในระยะต่อมามุ่งไปในการให้บริการต่อโทรศัพท์เป็นส่วนใหญ่จนกระทั่งในช่วงปลายสงครามโลกครั้งที่ 2 ที่มีการขยายผลงานเกี่ยวกับการแก้ปัญหาแถวคอยไปในด้านอื่นๆ ทฤษฎีแถวคอยเป็นทฤษฎีที่พัฒนาขึ้นด้วยรูปแบบการจำลองปัญหาทางคณิตศาสตร์ เพื่อใช้วิเคราะห์สภาวะของแถวคอยได้อย่างมีประสิทธิภาพวิธีหนึ่งที่ไม่มีความซับซ้อนสูงนัก โดยการศึกษาลักษณะรูปแบบทางทฤษฎีความเป็นไปได้ของหน่วยเข้ารับบริการและการให้บริการ แล้วหาผลลัพธ์เป็นค่าต่างๆ แสดงสภาวะของแถวคอย ผลลัพธ์ดังกล่าวจะช่วยในการตัดสินใจดำเนินการเกี่ยวกับการให้บริการที่ดีขึ้น

2.2.1 องค์ประกอบพื้นฐานในระบบแถวคอย

ประกอบด้วย 3 ส่วนคือ

1. ผู้ใช้บริการ (customer)
2. แถวคอย (queue)
3. หน่วยบริการ (server) ซึ่งอาจมี 1 หน่วยหรือมากกว่าก็ได้

ดังนั้นระบบแถวคอย หมายถึงแถวคอยและหน่วยบริการ ซึ่งจำนวนผู้ใช้บริการในระบบแถวคอยที่เวลาใด ๆ จะหมายถึงจำนวนผู้ใช้บริการในแถวคอยรวมกับจำนวนผู้ใช้บริการที่กำลังใช้บริการ ส่วนจำนวนผู้ใช้บริการในแถวคอยที่เวลาใด ๆ จะหมายถึงจำนวนผู้ใช้บริการที่อยู่ในแถวคอย

2.2.2 ปัจจัยที่มีผลต่อระบบแถวคอย

ปัจจัยต่าง ๆ ที่ส่งผลกระทบต่อระบบแถวคอย มีดังนี้

1. กระบวนการเข้าใช้ระบบ

ถ้าผู้ใช้บริการ มารับบริการเป็นเวลาที่แน่นอน ก็จะสามารถจัดให้มีหน่วยบริการตามเวลานั้น ๆ เพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาแถวคอยได้ แต่เนื่องจากการมาของผู้ใช้บริการขึ้นอยู่กับปัจจัยภายนอกหลายอย่าง ทำให้ช่วงเวลาห่างระหว่างการเข้าใช้งาน (Interarrival time) แตกต่างกันไป ซึ่งมีการแจกแจงเป็น แบบพัวซอง (Poisson) แบบเออร์แลงก์ (Erlang) แบบสม่ำเสมอ (Uniform) หรือรูปแบบอื่นๆกระบวนการเข้าใช้ระบบที่ใช้มากที่สุด คือแบบพัวซองที่เป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่ไม่ขึ้นต่อกัน มีการกระจายเหมือนกัน (Independent and Identically Distributed : IID) และมีการกระจายแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential) ในการวิเคราะห์ของทฤษฎีแถวคอยจะสมมุติว่าเวลาระหว่างการเข้าใช้งานเป็นลำดับของตัวแปรสุ่มที่ไม่ขึ้นต่อกัน ที่มีการกระจายเหมือนกัน

2. การกระจายของเวลาบริการ

เวลาที่ผู้ใช้บริการเข้าใช้งานในระบบแถวคอย ช่วงเวลาดังกล่าวเรียกว่าเวลาบริการ (Service Time) ซึ่งจะมีการแจกแจงที่แตกต่างกัน เช่น การแจกแจงแบบสม่ำเสมอ (Uniform) แบบเออร์แลงก์ (Erlang) แบบเอ็กซ์โปเนนเชียล หรือแบบอื่น ๆ โดยทั่วไปเวลาบริการจะสมมุติให้เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็น IID และมักใช้การกระจายแบบเอ็กซ์โปเนนเชียล

3. จำนวนหน่วยบริการ

ในระบบแถวคอย อาจมีจำนวนหน่วยบริการ 1 หน่วย หรือมากกว่าก็ได้ ซึ่งทุกหน่วยถือเป็นส่วนประกอบของระบบแถวคอย หน่วยบริการในระบบแถวรอคอยเดียวกันจะเป็นหน่วยที่เหมือนกัน ถ้าหน่วยบริการไม่เหมือนกันจำเป็นต้องแยกออกเป็นแถวคอยอื่น และพิจารณาหน่วยบริการที่เหมือนกันเป็นแถวคอยเดียวกันรูปแบบของหน่วยบริการมากกว่า 1 หน่วยอาจจัดวางในลักษณะขนานกันหรืออนุกรมกัน หรือ ทั้งสองอย่างผสมกันก็ได้

4. ขนาดของระบบ

ขนาดของระบบ จะเป็นจำนวนมากที่สุดของผู้ใช้บริการที่สามารถเข้ามาอยู่ในระบบ โดยขนาดของระบบจะรวมถึงผู้ใช้บริการที่กำลังใช้บริการอยู่ และผู้ใช้บริการที่รอการใช้งานอยู่ โดยทั่วไประบบจะมีขนาดที่จำกัดแต่อย่างไรก็ตามถ้าระบบมีขนาดใหญ่ประมาณค่าหนึ่ง เรามักจะสมมุติว่ามีขนาดเป็นอนันต์ เพื่อให้ง่ายต่อการคำนวณ

2.2.3 รูปแบบการบริการ

รูปแบบการบริการ คือ การเลือกลำดับของผู้ใช้บริการที่เข้ามารับบริการในระบบ ซึ่งอาจเป็นดังนี้

1. มาก่อนรับบริการก่อน (First Come First Served : FCFS)
2. มาทีหลังรับบริการก่อน (Last Come First Served : LCFS)
3. การให้บริการแบบทั่วไป (General Service Discipline : GD)
4. การให้การบริการแบบสุ่ม (Random Selection for Service : RSS)

2.2.4 สัญลักษณ์ที่ใช้ในแบบจำลองแถวคอย

ในระบบแถวคอย เรามักจะใช้สัญลักษณ์ในรูปแบบ A/S/c/K/SD โดยแต่ละตัวอักษรแสดงถึงพารามิเตอร์ดังนี้

A คือ กระบวนการเข้าใช้ระบบ (Arrival Process)

S คือ การกระจายของเวลาบริการ (Service Time Distribution) c คือ จำนวนเครื่องบริการ (Number of Servers)

K คือ ขนาดของระบบ (System Capacity)

SD คือ รูปแบบการบริการ (Service Discipline)

การกระจายของกระบวนการเข้าใช้ระบบ และเวลาบริการเรามักจะแสดงด้วยสัญลักษณ์ดังต่อไปนี้

M คือ เอ็กซ์โปเนนเชียล (Exponential)

Ek คือ เออร์แลงก์ (Erlang with parameter k)

D คือ ดีเทอมินิสทิก (Deterministic)

G คือ แบบทั่วไป (General)

แบบจำลองที่ใช้ในงานวิจัยนี้เป็นแบบจำลองที่ใช้หลักการของ Markovian property หรือ Memoryless property โดยแยกได้เป็น 5 แบบจำลองดังนี้

M/M/1/∞

M/M/1/K

M/M/c/∞

M/M/c/K

M/M/c/c

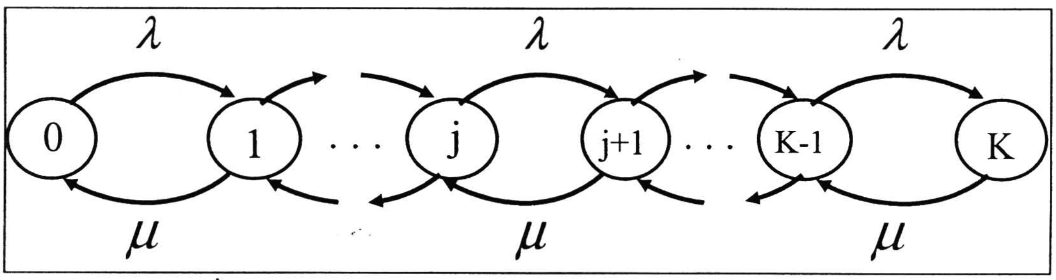
ในงานวิจัยนี้ได้มีการเข้าใช้บริการของแต่ละโหนดโดยใช้แบบจำลองของระบบการเข้าแถวคอย แบบ M/M/1/K

2.3 ระบบการเข้าแถวคอยแบบ M/M/1/K

ระบบคิวแบบ M/M/1/K (Gross and Harris., 1998) มีอัตราการเข้าใช้บริการเป็นแบบปัวซอง อัตราการให้บริการเป็นแบบเอ็กซ์โพเนลเชียล มีผู้ให้บริการ 1 เซิร์ฟเวอร์ มีรูปแบบการบริการเป็นแบบมาก่อน ได้สิทธิ์ในการรับบริการก่อน (First Come First Serve, FCFS) ยกเว้นเพียงแต่ระบบนี้มีจำนวนของคิวสำหรับให้ผู้ใช้บริการรอในระบบเป็นจำนวนจำกัด ซึ่งแตกต่างจากระบบคิวแบบ M/M/1 ที่มีจำนวนคิวแบบไม่จำกัด

ระบบคิวแบบ M/M/1/K จะจำกัดขนาดของผู้ใช้บริการที่อยู่ในระบบได้มากที่สุดเท่ากับ K คน ดังนั้นผู้ใช้บริการที่เข้ามารับบริการในขณะที่ระบบเต็มจะถูกบล็อกออกไปทันทีจำนวนผู้ใช้บริการที่อยู่ในระบบที่เวลา t หน่วยหรือ N(t) สามารถจำลองได้ด้วยมาคอฟเชนแบบเวลาต่อเนื่อง (continuous-time Makov chain) โดยสมมุติว่าที่เวลาหนึ่งจำนวนผู้ใช้บริการในระบบมีทั้งหมด j คนหรือ N(t)=j เมื่อเวลาผ่านไป t หน่วยเวลา

จะพบว่ามีเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นได้ 2 ลักษณะ คือ มีผู้ใช้บริการใหม่เข้าสู่ระบบด้วยอัตราการเข้าสู่ระบบเท่ากับ ทำให้ผู้ใช้บริการรวมในระบบมีจำนวนเพิ่มมากขึ้น และเมื่อผู้ใช้บริการสิ้นสุดการรับบริการและออกจากระบบด้วยอัตราเท่ากับ ทำให้จำนวนผู้ใช้บริการลดลง เนื่องจากลักษณะการเข้าสู่ระบบของผู้ใช้บริการมีการกระจายเป็นแบบเอ็กซ์โพเนนเชียล ซึ่งตัวแปรสุ่มประเภทนี้มีคุณสมบัติ เฉพาะคือ ไม่มีความจำ (memory less) ดังนั้นสถานะของระบบที่จะเกิดขึ้นในอนาคตไม่ได้ขึ้นกับเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในอดีต แต่จะขึ้นกับสถานะของระบบที่เวลาปัจจุบันเท่านั้น ซึ่งคุณสมบัติดังกล่าวเป็นคุณสมบัติ เฉพาะของมาร์คอฟเชน โดยสามารถแสดงภาพการเปลี่ยนแปลงสถานะได้ดังรูปที่ 3.4 เมื่อระบบมีจำนวนสถานะจำกัด {0,1,2,…,K}



รูปที่ 2-1 แผนภาพการเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบแถวคอยแบบ M/M/1/K

จากแผนภาพ สถานะ 0 คือสถานะที่ไม่มีผู้ใช้บริการในระบบ (N(t) = 0) ซึ่งเซิร์ฟเวอร์จะไม่ถูกใช้งาน เมื่อเวลาผ่านไป t หน่วยเวลา มีผู้เข้ามาใช้บริการในระบบ 1 คนด้วยอัตราเท่ากับ ทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงจากสถานะ 0 เป็นสถานะ 1 ซึ่งเป็นสถานะที่มีผู้ใช้งานในระบบอยู่หนึ่งคน (N(t) = 1) เมื่อผู้ใช้บริการเข้าสู่ระบบเพิ่มขึ้นสถานะปัจจุบันก็จะเปลี่ยนแปลงไปยังสถานะถัดไป ในทางกลับกันเมื่อผู้ใช้ บริการสิ้นสุดการรับบริการและออกจากระบบ สถานะปัจจุบันจะถูกเปลี่ยนกลับไปอยู่ในสถานะก่อนหน้า1สถานะ ระบบมีการเปลี่ยนแปลงจนกระทั่งเมื่อระบบอยู่ในสถานะ K ซึ่งเป็นสถานะที่มีผู้ใช้งานในระบบ K คน ถ้ามีผู้ใช้บริการรายใหม่เข้ามาในระบบก็จะถูกบล็อกทันที

2.3.1 ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบ j คน

จากแผนภาพการเปลี่ยนแปลงสถานะของระบบแถวคอยแบบ M/M/1/K นำมาใช้ในการหาสมการสมดุลโดยรวม (global balance equation) ได้ดังนี้

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$(\lambda+\mu)p_j = \lambda p_{j-1} + \mu p_{j+1} \qquad j = 1,2,...,K-1 \qquad (2\text{-}1)$$

$$\mu p_K = \lambda p_{K-1}$$

จากสมการ (2-1) สามารถเขียนใหม่ได้

$$\lambda p_j - \mu p_{j+1} = \lambda p_{j-1} - \mu p_j \tag{2-2}$$

จากสมการที่ (2-2) ถ้า j = 1 จะทำให้

$$\lambda p_{j-1} = \mu p_j \tag{2-3}$$

หรือ

$$\lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

ดังนั้น สมการที่ (2-3) จะกลายเป็น

$$\lambda p_{j-1} = \mu p_j \tag{2-4}$$

จะได้ ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบ j คนมีค่าเท่ากับ

$$p_j = \rho p_{j-1} \qquad \text{เมื่อ } j = 1,2,\ldots,K$$

หรือ

$$p_j = \rho^j p_0 \tag{2-5}$$

เมื่อ ρ คือ ปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบ

และ $\rho = \lambda / \mu$ ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบทั้งหมด j คน หรือ $P[N = j]$ สำหรับระบบที่จำกัดขนาดผู้ใช้บริการได้มากที่สุด K คน หาได้จากสมการ (2-5) ซึ่งสามารถหาค่า p_0 โดยอาศัยพื้นฐานของความน่าจะเป็นที่ว่า ผลรวมของความน่าจะเป็นของทุกสถานะต้องมีค่าเป็นหนึ่ง ดังนั้น

$$1 = \sum_{j=0}^{K} p_j = \rho^j p_0 \tag{2-6}$$

$$= (1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^K) p_0$$

$$= \left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho} \right) p_0$$

จาก $\sum_{j=0}^{K} p_j = 1$ ดังนั้น จะได้ p_0

$$\left(\frac{1-\rho^{K-1}}{1-\rho} \right) p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \tag{2-7}$$

ดังนั้น จากสมการที่ (2-5) จะได้ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบทั้งหมด j คน

$$P[N=j] \;=\; \rho^j p_0 \qquad (2\text{-}8)$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{K+1}} \qquad j=0,1,2,\ldots,K \qquad (2\text{-}9)$$

สำหรับกรณีปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบน้อยกว่า 1 ($\rho<1$)

สำหรับกรณีที่ปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบ เท่ากับ 1 ($\rho=1$) ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบทั้งหมด j คน หาได้จากสมการที่ (2-6) เช่นเดียวกัน

$$1=\sum_{j=0}^{K} p_j = \rho^j p_0$$

$$=(1+1+1^2+\ldots+1^K)p_0$$

$$=(K+1)p_0$$

จาก $\sum_{j=0}^{K} p_j = 1$ ดังนั้น จะได้

$$(K+1)p_0 = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{(K+1)} \qquad (2\text{-}10)$$

ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบทั้งหมด j คน เมื่อ $\rho=1$

$$P[N=j] \;=\; \rho^j p_0$$

$$=\frac{\rho^j}{K+1}$$

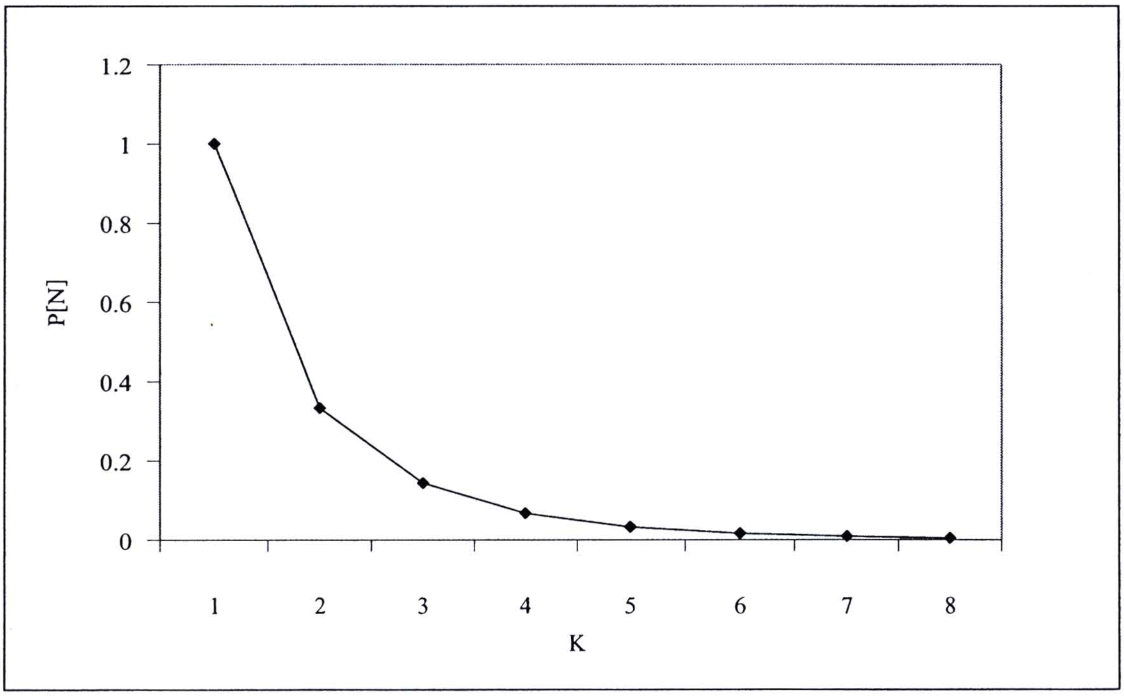
$$=\frac{1}{K+1} \qquad (2\text{-}11)$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบทั้งหมด j คน สำหรับระบบคิวแบบM/M/1/ K

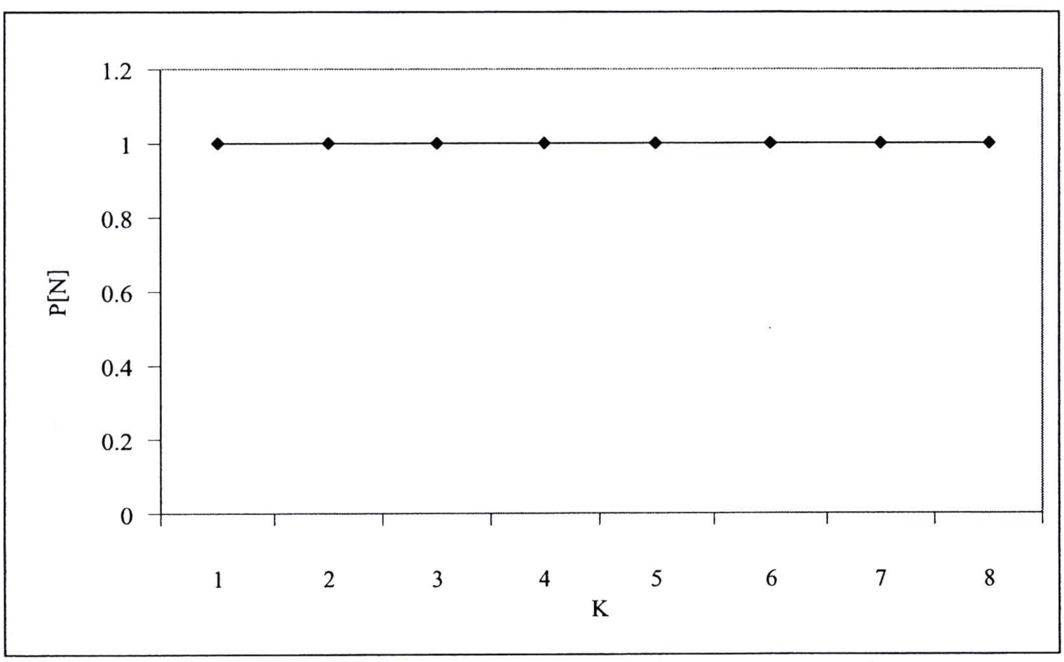
$$P[N=j] \;=\; \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{K+1}} & ;\ \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{K+1} & ;\ \rho = 1 \end{cases} \qquad (2\text{-}12)$$

ความน่าจะเป็นที่มีผู้ใช้บริการในระบบทั้งหมด j คน จะเห็นได้ว่าที่ $\rho=1$ จะทำให้ระบบมีความน่าจะเป็นที่เท่าๆกันหมดไม่ว่าstate ใดๆดังรูปที่ 3.6โดยมีค่าเป็นค่าคงที่ค่าหนึ่งจากสมการที่ (2-12) จะสังเกตเห็นว่า ที่ $\rho<1$ ถ้า K มีค่าเข้าใกล้ ∞ ดังรูปที่ 3.5 จะได้สมการเช่นเดียวกับแถวคอยแบบ M/M/1 นั่นคือ

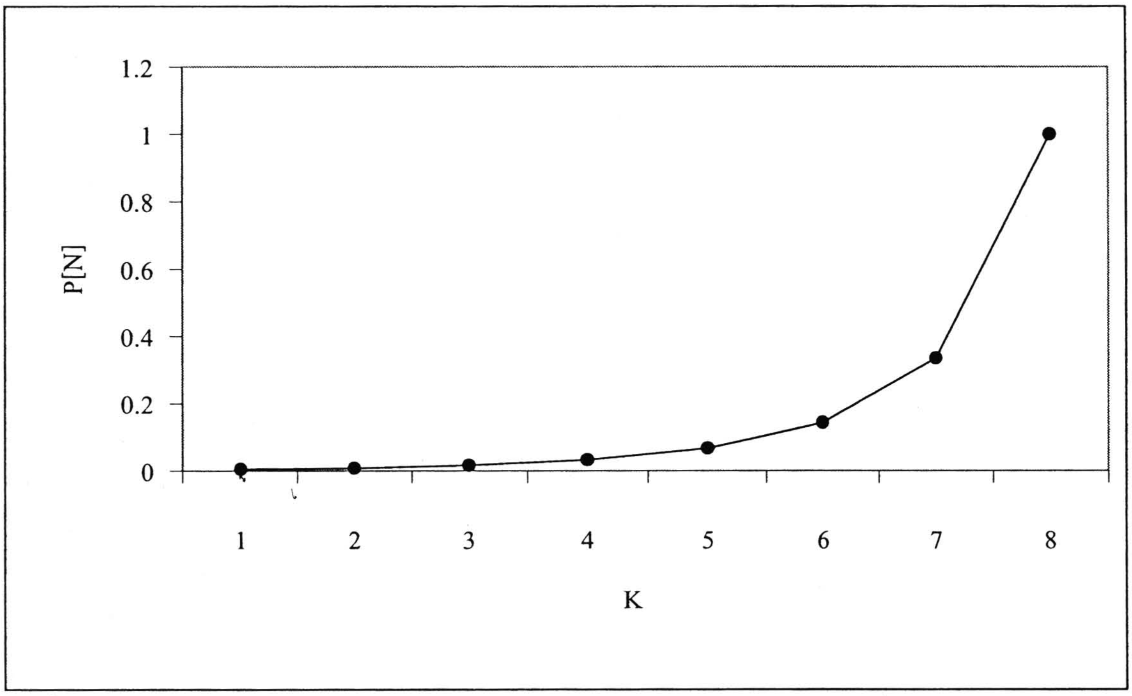
$$P[N = K] \;=\; (1-\rho)\rho^{K} \tag{2-13}$$



รูปที่ 2-2 แสดงความน่าจะเป็นสถานะอยู่ตัวสำหรับค่าของปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบกรณีที่ปริมาณทราฟฟิกในระบบน้อยกว่า 1



รูปที่ 2-3 แสดงความน่าจะเป็นสถานะอยู่ตัวสำหรับค่าของปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบเท่ากับ1



รูปที่ 2-4 แสดงความน่าจะเป็นสถานะอยู่ตัวสำหรับค่าของปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบกรณีมากกว่า 1

2.3.2 ค่าเฉลี่ยของจำนวนผู้ใช้งานในระบบ

ค่าเฉลี่ยของจำนวนผู้ใช้งานในระบบ(E[N]) จะแบ่งการคำนวณเป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 $\rho = 1$

$$
\begin{aligned}
E[N] &= \sum_{j=0}^{K} jP[N=j] \\
&= \sum_{j=0}^{K} j\left(\frac{1}{K+1}\right) \\
&= \frac{1}{K+1} \sum_{j=0}^{K} j \\
&= \frac{1}{K+1} (0+1+2+\ldots+K) \\
&= \frac{1}{K+1} \left[\frac{(K+0)(K+1)}{2}\right]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{K}{2} \qquad (2\text{-}14)$$

กรณีที่ 2 $\rho \neq 1$

จากสมการ(2-4)จะทำให้

$$E[N] = \sum_{j=0}^{K} jP[N=j]$$

$$E[N] = \sum_{j=0}^{K} j\rho p_{j-1}$$

จากสมการ (2-5) ทำให้ได้ว่า $p_{j-1} = \rho^{j-1} p_0$ ดังนั้น

$$E[N] = \sum_{j=0}^{K} j\rho\rho^{j-1} p_0$$

$$= p_0\rho \sum_{j=0}^{K} jp^{j-1}$$

$$= p_0\rho \sum_{j=0}^{K} \frac{d}{d\rho}(\rho^{j})$$

$$= p_0\rho \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{j=0}^{K} \rho^{j}\right)$$

$$= p_0\rho \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}\right)$$

$$= p_0\rho \frac{1-(K+1)\rho^{K} + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2}$$

จากสมการ (2-10) จะได้

$$E[N] = \rho\left(\frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right)\left(\frac{1-(K+1)\rho^{K} + K\rho K + 1}{(1-\rho)^2}\right)$$

$$= \frac{\rho\left[1-(K+1)\rho^{K}+K\rho K+1\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} \tag{2-15}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของจำนวนผู้ใช้งานในระบบ

$$E[N]=\begin{cases}\dfrac{\rho\left[1-(K+1)\rho^{K}+K\rho K+1\right]}{(1-\rho)(1-\rho^{K+1})} & ,\ \rho\neq 1\\[2ex] \dfrac{K}{2} & ,\ \rho=1\end{cases} \tag{2-16}$$

2.3.3 ค่าเฉลี่ยของเวลาทั้งหมดที่ใช้ในระบบ

จากทฤษฎีของ Little's Formula กล่าวว่าเมื่อระบบเข้าสู่สถานะอยู่ตัวจำนวนเฉลี่ยของผู้ใช้บริการที่อยู่ในระบบ E[N] มีค่าเท่ากับผลคูณของอัตราการเข้าสู่ระบบของผู้ใช้บริการโดยเฉลี่ยกับค่าเฉลี่ยของเวลาทั้งหมดที่ผู้ใช้บริการใช้ในระบบ

$$E[N]=\lambda E[T] \tag{2-17}$$

เมื่อ $E[T]$ คือ ค่าเฉลี่ยของเวลาทั้งหมดที่ใช้ในระบบ

$E[N]$ คือ จำนวนผู้ใช้บริการโดยเฉลี่ยของระบบ

λ คือ อัตราการเข้าใช้บริการในระบบ

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของเวลาที่ผู้ใช้บริการแต่ละคนอยู่ในระบบมีค่าเท่ากับ

$$E[T]=\frac{E[n]}{\lambda_a} \tag{2-18}$$

เมื่อ λ_a คือ อัตราการเข้าใช้บริการจริง

ในระบบคิวแบบM/M/1/K เมื่อมีผู้เข้ามาใช้บริการในระบบ ระบบสามารถให้บริการกับผู้ที่เข้ามาใช้บริการได้ส่วนหนึ่ง และอีกส่วนหนึ่งระบบจะทำการบล็อกผู้ใช้บริการออกจากระบบเมื่อระบบเต็มดังนั้นอัตราการเข้าใช้บริการในระบบจึงเกิดจากผลรวมของอัตราการเข้าใช้บริการจริง(λ_a)และอัตราการบล็อกผู้ใช้บริการ(λ_b) $\lambda = \lambda_a + \lambda_b$ ดังนั้นอัตราการเข้าใช้บริการจริง สามารถหาได้จาก

$$\lambda_a = \lambda - \lambda_b \tag{2-19}$$

เนื่องจากสัดส่วนของเวลาที่ระบบจะบล็อกผู้ใช้บริการที่เข้ามาใหม่มีค่าเท่ากับ $P[N(t) = K] = p_K$ ดังนั้นระบบจะบล็อกผู้ใช้บริการด้วยอัตราเท่ากับ $\lambda_b = \lambda p_K$ จากสมการ(2-19)จะได้

$$\begin{aligned} \lambda_a &= \lambda - \lambda p_K \\ &= \lambda(1 - p_K) \end{aligned} \tag{2-20}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของเวลาทั้งหมดที่ใช้ในระบบจริง

$$E[T] = \frac{E[n]}{\lambda(1 - p_K)} \tag{2-21}$$

ในระบบที่มีการบล็อกผู้ใช้บริการ ปริมาณทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบ(traffic intensity หรือ offered load) มักมีค่าไม่เท่ากับปริมาณทราฟฟิกที่ระบบรองรับจริง (carried load)

ค่าของทราฟฟิกที่ป้อนเข้าสู่ระบบมีค่าเท่ากับ

$$\text{offered load} = \lambda \times E[\tau] \quad = \lambda \times \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \tag{2-22}$$

และปริมาณทราฟฟิกที่ระบบรองรับจริงมีค่าเท่ากับ

$$\text{carried load} = \lambda_a \times E[\tau] \quad = \lambda_a \times \frac{1}{\mu} \quad = \frac{\lambda_a}{\mu} \tag{2-23}$$

2.4 กล่าวท้ายบท

บทนี้เป็นการปูพื้นฐานเรื่องทฤษฎีแถวคอยที่เป็นหลักการสำคัญสำหรับการนำไปวิเคราะห์สมรรถนะของเครือข่ายเมชไร้สาย โดยในบทถัดไปจะนำแถวคอยแบบ M/M/1/K ไปใช้ประยุกต์เข้ากับเครือข่ายเมชไร้สาย