ใบรับรองวิทยานิพนธ์

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ)

ปริญญา

สถิติ | สถิติ

สาขา | **ภาควิชา**

เรื่อง ตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปและการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

Beta Generalized Exponential Random Variable and Its Application in Reliability

นามผู้วิจัย นางสาวอารียา สุดสุข

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ....

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วินัย โพธิ์สุวรรณ์, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา ....

(รองศาสตราจารย์ประสิทธิ์ พยัคฆพงษ์, M.S.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

....

(รองศาสตราจารย์กัญจนา ธีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ .... **เดือน** .... **พ.ศ.** ....

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

ตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปและการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

Beta Generalized Exponential Random Variable and Its Application in Reliability

โดย

นางสาวอารียา สุดสุข

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ)
พ.ศ. 2555

อารียา สุดสุข 2555: ตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปและการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้ ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ) สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก: ผู้ช่วยศาสตราจารย์วินัย โพธิ์สุวรรณ์, Ph.D. 149 หน้า

การวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป โดยพิจารณาถึงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง และการสร้างค่าตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผัน ประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ โดยใช้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง 20, 50, 100, และ 250 จำนวน 500 ชุด กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในแต่ละขนาดตัวอย่างเป็น $a = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$, $b = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$, $\alpha = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$ และ $\lambda = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$ ใช้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทำการทดลองตามสถานการณ์ที่กำหนดโดยการสร้างค่าของตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผัน ประมวลผลด้วยโปรแกรม R และ WinBUGS ทดสอบสารูปสนิทดีด้วยสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง นอกจากนี้ได้เสนอการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

ผลการวิจัยพบว่า การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจำแนกได้ 2 ลักษณะคือ มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a \le 1$ และ $0 < \alpha \le 1$ และจะมีลักษณะที่เบ้ขวาเมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ และ $\alpha > 1$ เมื่อพารามิเตอร์ $b > 0$ และ $\lambda > 0$ ลักษณะรูปร่างฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงมี 3 ลักษณะคือ จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียวเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a < 1$ และ $0 < \alpha < 1$ จะมีลักษณะคงที่ เมื่อพารามิเตอร์ $a = 1$ และ $\alpha = 1$ และจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ และ $\alpha > 1$ โดยที่พารามิเตอร์ $b > 0$ และ $\lambda > 0$ ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α มีค่าเพิ่มขึ้น และจะมีค่าลดลงเมื่อพารามิเตอร์ b หรือ λ มีค่าเพิ่มขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งจะไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ สำหรับวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์จะพบว่า วิธีเบส์มีประสิทธิภาพสูงกว่าการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณี

____________________ ________________________________ ___ / ___ / ___

ลายมือชื่อนิสิต ลายมือชื่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

Areeya Sudsukh 2012: Beta Generalized Exponential Ramdom Variable and Its Application in Reliability. Master of Science (Statistics), Major Filed: Statistics, Department of Statistics. Thesis Advisor: Assistant Professor Winai Bodhisuwan, Ph.D. 149 pages.

This aim is to study some probability properties of the beta generalized exponential random variable; *i.e*., probability density function, cumulative distribution function, reliability function, hazard function, moment generating function, characteristic function, exact value of mean, variance, skewness coefficient, kurtosis coefficient and generating of random variate using inverse transform technique. Studying and comparing parameter estimation technique by the method of maximum likelihood and method of Bayes with gamma prior distribution is included. In this study we consider parameters $a = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$, $b = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$, $\alpha = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$ and $\lambda = 0.5,\ 1.0,\ 2.0$ with sample sizes of 20, 50, 100 and 250. Each case was evaluated through mean square error which using R and WinBUGS with running 500 replications. Moreover, studying goodness-of-fit test by Komogoluv-Smirnov test and Anderson-Darling test. Furthermore, this research presented the application of reliability analysis based on beta generalized exponential distribution.

The results found that, the beta generalized exponential random variable can be classified into two shapes of distribution. It is monotonically decresing function in the choice $0 < a \le 1$ and $0 < \alpha \le 1$. It skewd to the right in the choice $a > 1$ and $\alpha > 1$ when $b > 0$ and $\lambda > 0$. The hazard rate functions are classified as monotonically decreasing function, constant function and monotonically non-decreasing function in the case $0 < a < 1$, $0 < \alpha < 1$, $a = 1$, $\alpha = 1$ and $a > 1$, $\alpha > 1$ respectively where parameters $b > 0$ and $\lambda > 0$. The mean and variance will be increased when parameter a and α are increased and decresed when parameter b and λ are increased. The value of skewness coefficient and kurtosis coefficient do not depend on the parameter λ. Under comparison of parameter estimation technique, method of Bayes gives a smaller mean square error than the method of maximum likelihood in almost of tested cases.

____________________ ____________________ ___ / ___ / ___

Student's signature Thesis Advisor's signature

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วินัย โพธิ์สุวรรณ์ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ให้ได้คำปรึกษาในการเรียน การค้นคว้าวิจัย ตลอดจนการตรวจแก้ไขวิทยานิพนธ์จนกระทั่งเสร็จสมบูรณ์

ขอขอบพระคุณ อาจารย์ ดร. ธิดาพร ศุภภากร ประธารกรรมการสอบ และ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. เสาวณิต สุขภารังษี ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาสถิติทุกท่าน ที่ได้อบรมสั่งสอนและให้ความรู้อันเป็นประโยชน์อย่างยิ่งในการนำไปใช้ต่อไป

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอขอบพระคุณบิดา มารดา ญาติพี่น้องและเพื่อน ที่เป็นกำลังใจและให้ความช่วยเหลือสนับสนุนมาโดยตลอด

อารียา สุดสุข

มีนาคม 2555

สารบัญ

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่ **หน้า**

สารบัญภาพ

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ **หน้า**

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่ หน้า

ตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป
และการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

Beta Generalized Exponential Random Variable

and Its Applicationin in Reliability

คำนำ

การวัดอายุการใช้งาน เช่น ระยะเวลาที่ชิ้นส่วนอุปกรณ์จะหมดอายุการใช้งานหรือได้รับการซ่อมแซมในช่วงเวลาที่ต่อเนื่องกัน ระยะเวลาสำหรับการเกิดโรค ระยะเวลาการเติบโตของเซลล์มะเร็ง ระยะเวลาการแพร่ระบาดของโรค ระยะเวลาที่รอดชีวิตของผู้ป่วยจากการได้รับการรักษาทางแพทย์ เป็นต้น ค่าที่ได้จากการวัดอาจอยู่ในรูปของจำนวนครั้ง จำนวนวันหรือจำนวนรอบของการล้มเหลวสำหรับชิ้นส่วนอุปกรณ์ หรืออาจอยู่ในรูปของระยะเวลาที่มีหน่วยเป็นวินาที นาที หรือชั่วโมง ซึ่งมักนิยมเรียกว่าข้อมูลอายุ (lifetime data) ในทางสถิตินั้นค่าที่ได้จากการวัดและลักษณะการเกิดเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นแบบไม่แน่นอนดังกล่าวข้างต้น คือค่าของตัวแปรสุ่ม (random variable) และการทดลองสุ่ม (random experiment) ตามลำดับ การจัดทำข้อสรุปเกี่ยวกับข้อมูลชีวิตที่ต้องการนี้สามารถทำได้โดยใช้ตัวแบบความน่าจะเป็น (probability model) หรือฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (probability density function) ที่ใช้อธิบายลักษณะของการทดลองสุ่มนั้นๆ

จำนวนวันหรือจำนวนรอบของการล้มเหลวสำหรับชิ้นส่วนอุปกรณ์เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง (discrete random variable) และระยะเวลาที่มีหน่วยเป็นวินาที นาที หรือชั่วโมง เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง (continuous random variable) ดังนั้นจะใช้ฟังก์ชันความน่าจะเป็นในการอธิบายรูปแบบหรือลักษณะการเกิดขึ้นภายใต้ตัวแปรสุ่มทั้ง 2 ชนิดนี้ โดยจะเรียกว่าฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability mass function) สำหรับตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องและเรียกว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

ฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญที่ใช้อธิบายตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องนั้นมีหลายการแจกแจง เช่น ฟังก์ชันแจกแจงความน่าจะเป็นของการแจกแจงเบอร์นูลลี (Bernulli distribution) การแจกแจงทวินาม (Binomial distribution) และการแจกแจงพัวซอง (Poisson distribution) เป็นต้น

ส่วนฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นที่สำคัญที่ใช้อธิบายตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง เช่น ฟังชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential distribution) การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull distribution) การแจกแจงลอกปกติ (Lognormal distribution) การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution) การแจกแจงอินเวอร์สเกาส์เซียน (Inverse Gaussian distribution) และการแจกแจงลอกโลจิสติ (Log Logistic distribution) เป็นต้น การแจกแจงดังที่ได้กล่าวมาข้างต้นเรียกการแจกแจงชั่วชีวิต (lifetime distribution) หรือรูปแบบการแจกแจงความล้มเหลว (failure distribution)

ต่อมาได้มีนักวิจัยทำการพัฒนารูปแบบการแจกแจงชั่วชีวิตของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องโดยใช้การแจกแจงแบบผสมระหว่างการแจกแจงเบตาและการแจกแจงอื่นๆ ได้เป็นการแจกแจงแบบผสมที่มีจำนวนพารามิเตอร์เท่ากับจำนวนพารามิเตอร์ของทั้ง 2 การแจกแจง ทำให้การแจกแจงชั่วชีวิตใหม่นี้ มีความเหมาะสมกับข้อมูลหรือสถานการณ์ต่างๆได้ดียิ่งขึ้น เช่น การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล (Beta Exponential distribution) การแจกแจงเบตากัมเบล (Beta Gumbel distribution) การแจกแจงเบตาไวบูลล์ (Beta Weibull distribution) และการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (Beta Generalized Exponential distribution) เป็นต้น

การแจกแจงแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มี 4 พารามิเตอร์ ซึ่งพัฒนาขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตา (Beta distribution) และการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (Generalized Exponential distribution) โดยมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}, \quad x>0$$

เมื่อ $a>0,\ b>0,\ \lambda>0$ และ $\alpha>0$

งานวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (method of maximum likelihood) และวิธีเบส์ (Bayes method) พร้อมทั้งเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (mean square error : MSE) การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง โดยการสร้างค่าตัวแปรสุ่มให้มีลักษณะ

เป็นไปตามสถานการณ์ที่กำหนดขึ้น นอกจากนี้ยังศึกษาการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้กับข้อมูลจริง โดยมีการศึกษาสมบัติความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้

1. รูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

2. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

3. ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

4. ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

5. ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

6. ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

7. การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีการแปลงผกผัน

วัตถุประสงค์

1. เพื่อศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

2. เพื่อศึกษาและพัฒนาโปรแกรมการทดสอบสารูปสนิทดีของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ (Kolmogorov-Smirnov test statistic, KS) และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง (Anderson- Darling test statistic, AD)

3. เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์

4. เพื่อศึกษาการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางในทั่วไปในเชิงการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

ขอบเขตการวิจัย

ขอบเขตการวิจัยมีดังนี้

1. ศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปดังนี้

1.1 รูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

1.3 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

1.4 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

1.5 ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

1.6 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

1.7 การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีการแปลงผกผัน

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์ โดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์

2.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ a, b, λ และ α เท่ากับ 0.5, 1.0, 2.0

2.2 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 20, 50, 100, 250

2.3 กรณีการประมาณค่าด้วยวิธีเบส์ใช้การแจกแจงแกมมา เป็นการแจกแจงก่อน (prior distribution) สำหรับพารามิเตอร์ a, b, λ และ α

2.4 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเป็นเกณฑ์

3. การทดสอบสารูปสนิทดีโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

4. ประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริงเพื่อการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ซึ่งจะทำการศึกษาดังนี้

4.1 การทดสอบสารูปสนิทดีด้วยตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

4.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์

4.3 การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้โดยหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ทราบถึงสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

2. ได้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

3. เป็นแนวทางในการเลือกใช้วิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มเบตาเอ็กซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปและมีประสิทธิภาพภายใต้สถานการณ์ต่างๆ

4. ได้โปรแกรมสำหรับการทดสอบสารูปสนิทดี โดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

5. ประยุกต์กับข้อมูลจริงสำหรับการวิเคราะห์ทางด้านความเชื่อถือได้ที่อายุการใช้งานมีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

การตรวจเอกสาร

ในการตรวจเอกสารจะศึกษาค้นคว้าเกี่ยวกับทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่สำคัญของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป รวมถึงการแจกแจง และงานวิจัยอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. ตัวแปรสุ่มต่อเนื่องและฟังก์ชันการแจกแจง

Casella and Berger (1990) ได้กล่าวถึงตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องและฟังก์ชันการแจกแจงดังนี้

บทนิยาม 1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้าเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริง X เป็นจำนวนจริง จะเรียก X ว่าตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง

บทนิยาม 2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง จะเขียนแทนฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ X ด้วย $f_X(x)$ สำหรับทุก $x \in R$ โดยจะต้องสอดคล้องกับสมบัติทั้ง 2 ข้อต่อไปนี้

1. $f_X(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dt = 1$

บทนิยาม 3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ฟังก์ชัน $F(x)$ กำหนดโดย

$$F(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad ; \qquad -\infty < t < \infty$$

โดยที่ $f(t)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ x ที่จุด t

เรียก $F(x)$ ว่า ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของ X (Cumulative Distribution Function of X)

สมบัติของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม มีดังนี้

1. $0 \le F(x) \le 1$

2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$

3. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a \le b$ แล้ว $F(a) \le F(b)$ นั่นคือ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ค่าไม่ลดลงของ x (nondecreasing function of x)

4. $F(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องของ x นั่นคือ $F(a^-) \le F(a^+)$ สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

5. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$P(X = a) = P(X = b) = 0$$

$$P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b)$$

$$= P(a < x < b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)dx$$

6. ความสัมพันธ์ระหว่าง $f(x)$ และ $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

และ $$f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$$

2. ค่าคาดหมายและความแปรปรวน (Expectation and Variance)

Casella and Berger (1990) ได้กล่าวถึงเกี่ยวกับค่าคาดหมายและความแปรปรวนดังนี้

บทนิยาม 4 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ ค่าคาดหมายของ X คือ $E(X)$ โดยที่

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

บทนิยาม 5 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x)$ ความแปรปรวนของ X คือ $Var(X)$ โดยที่

$$Var(X) = E[\{X - E(X)\}^2] = \int_{-\infty}^{\infty} \{x - E(X)\}^2 f(x)dx$$

บทนิยาม 6 โมเมนต์ที่ r รอบจุดกำเนิด (the rth moment about the origin) ของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$\mu_r' = E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \quad ; r = 0,1,2,...$$

ถ้า $r = 0$ จะได้ $\mu_0' = E(X^0) = E(1) = 1$

ถ้า $r = 1$ จะได้ $\mu_1' = E(X^1) = E(X)$ หรือเป็นค่าคาดหมายของ X

ถ้า $r = 2$ จะได้ $\mu_2' = E(X^2)$

ถ้า $r = 3$ จะได้ $\mu_3^{'} = E(X^3)$

ถ้า $r = 4$ จะได้ $\mu_4^{'} = E(X^4)$

บทนิยาม 7 โมเมนต์ที่ r รอบค่าเฉลี่ย (the rth moment about the mean) ของตัวแปรสุ่ม X เขียนแทนด้วย μ_r โดยที่

$$\mu_r = E(X-\mu)^r = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^r f(x)dx \qquad ; r = 0,1,2,...$$

ถ้า $r = 0$ จะได้ $\mu_0 = E(X-\mu)^0 = E(1) = 1$

ถ้า $r = 1$ จะได้ $\mu_1 = E(X-\mu)^1 = E(X) - \mu = 0$

ถ้า $r = 2$ จะได้ $\mu_2 = E(X-\mu)^2$ เป็นค่าความแปรปรวนตัวแปรสุ่ม X

ถ้า $r = 3$ จะได้ $\mu_3 = E(X-\mu)^3$

ถ้า $r = 4$ จะได้ $\mu_4 = E(X-\mu)^4$

บทนิยาม 8 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดของตัวแปรสุ่ม X (moment generating function of X) เขียนแทนด้วย $M_x(t)$ โดยที่

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

สมบัติของฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดมีดังนี้

1. หาค่าฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดได้ สำหรับการแจกแจงหนึ่ง ๆจะมีเพียงฟังก์ชันเดียว

2. จาก $M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$

ได้ว่า $M_X^n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{tx} f(x)dx$

และ $M_X^n(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx = E(X^n)$

บทนิยาม 9 ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของ X (characteristic function of X) เขียนแทนด้วย $\phi_X(t)$ คือค่าคาดหมายของฟังก์ชัน e^{itX} เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ และ t เป็นตัวแปรค่าจริง

$$\phi_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)dx$$

สมบัติของฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ มีดังนี้

1. หาค่าได้เสมอ

2. การแจกแจงหนึ่ง ๆ จะมีเพียงฟังก์ชันลักษณะเฉพาะเพียงฟังก์ชันเดียว

3. จาก $\phi_X(t) = M_X(it)$

ได้ว่า $\phi_X^n(t) = i^n M_X^n(t)$

และ $\phi_X^n(0) = i^n M_X^n(0) = i^n E(X^n)$

Casella and Berger (1990) ได้กล่าวถึงวิธีหาค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (α_3) และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (α_4) โดยอาศัยโมเมนต์รอบค่าเฉลี่ยดังนี้

สัมประสิทธิ์ความเบ้ $$\alpha_3 = \frac{m_3}{\sigma^3} = \frac{m_3}{m_2(m_2)^{1/2}}$$

โดยที่ σ คือ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

m_2 คือ โมเมนต์ที่ 2 รอบค่าเฉลี่ย

และ m_3 คือ โมเมนต์ที่ 3 รอบค่าเฉลี่ย

การพิจารณาลักษณะของเส้นโค้ง จากสัมประสิทธิ์ความเบ้มีดังนี้

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ $\alpha_3 = 0$ จะได้เส้นโค้งรูปแบบสมมาตร

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ $\alpha_3 > 0$ เป็นเส้นโค้งเบ้ขวาหรือเบ้ทางบวก

ถ้าสัมประสิทธิ์ความเบ้ $\alpha_3 < 0$ เป็นเส้นโค้งเบ้ซ้ายหรือเบ้ทางลบ

สัมประสิทธิ์ความโด่ง $$\alpha_3 = \frac{m_4}{\sigma^4} = \frac{m_4}{m_2^2}$$

โดยที่ σ คือ ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

m_2 คือ โมเมนต์ที่ 2 รอบค่าเฉลี่ย

และ m_4 คือ โมเมนต์ที่ 3 รอบค่าเฉลี่ย

การพิจารณาลักษณะของเส้นโค้ง จากสัมประสิทธิ์ความโด่งมีดังนี้

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโด่ง $\alpha_4 = 3$ เส้นโค้งมีความโด่งปกติ

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโด่ง $\alpha_4 > 3$ เป็นเส้นโค้งมีความโด่งมากกว่าปกติ

ถ้าสัมประสิทธิ์ความโด่ง $\alpha_4 < 3$ เป็นเส้นโค้งมีความโด่งน้อยกว่าปกติ

3. ความเชื่อถือได้ (Reliability)

ความเชื่อถือได้ คือ ความน่าจะเป็นที่ระบบหรือผลิตภัณฑ์จะสามารถทำงานได้อย่างสมบูรณ์ตามที่ออกแบบไว้ภายใต้สภาพแวดล้อมปกติและช่วงเวลาที่กำหนด (Rausand and Hoyland, 2004)

กำหนดให้

T คือ ตัวแปรสุ่มของเวลาที่ระบบเกิดข้อผิดพลาดหรืออายุการใช้งาน

$f(t)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการเกิดความล้มเหลว ณ เวลา t สามารถกำหนดฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ได้ดังนี้

$$F(t) = P(T < t)$$

$$= \int_0^t f(t)dt \qquad \text{โดยที่ } F(t) = 0 \text{ เมื่อ } t < 0$$

3.1 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (reliability function)

กำหนดให้ $R(t)$ คือ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$R(t) = P(T \geq t)$$

$$= 1 - P(T < t)$$

$$= 1 - F(t)$$

$$= 1 - \int_0^t f(x)dx$$

$$= \int_t^\infty f(x)dx$$

3.2 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง (hazard rate function)

กำหนดให้ $h(t)$ แทนฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง คือ อัตราการเกิดความล้มเหลวในทันทีทันใด ณ เวลา t ใดๆ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T \le t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P([t < T \le t + \Delta t] \cap [T > t])}{P(T > t)} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(t < T \le t + \Delta t)}{P(T > t)} \\
&= \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{R(t)} [-R'(t)] \\
&= \frac{f(t)}{R(t)}
\end{aligned}
$$

หรือ

$$h(t) = \frac{d}{dt}[-\log R(t)]$$

4. วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

4.1 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

บทนิยาม 14 ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น (likelihood function) ของตัวอย่างสุ่มคือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ โดยที่เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นเขียนแทนด้วย L หรือ $L(\theta)$ หรือ $L(\theta;x_1,...,x_n)$

$$L(\theta) \;=\; L(\theta;x_1,...,x_n) \;=\; f(x_1,...,x_n;\theta)$$

$$= \; f(x_1;\theta)...f(x_n;\theta)$$

$$= \; \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

บทนิยาม 15 ตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุด (maximum likelihood estimator) ของพารามิเตอร์ θ คือ $\hat{\theta} = \theta(X_1,...,X_n)$ ที่ทำให้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น $L(\theta)$ มีค่าสูงสุด

วิธีการหาตัวประมาณด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีขั้นตอนดังนี้

1. หาฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็น เมื่อมีพารามิเตอร์ j ตัว เมื่อ $j = 1,2,...,m$

$$\begin{aligned} L(\theta_j) \;&=\; L(\theta_j;x_1,...,x_n) \;=\; f(x_1,...,x_n;\theta_j) \\ &=\; f(x_1;\theta_j).f(x_1;\theta_j)...f(x_n;\theta_j) \\ &=\; \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_j) \end{aligned}$$

2. หา $\log L(\theta_j)$

$$\log L(\theta_j) \;=\; \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_j)$$

3. กำหนด $\frac{\partial^j}{\partial \theta_j} \log L(\theta_j) = 0$; j =1,2,…m

แก้ระบบสมการ m สมการที่ได้เพื่อหาค่า $\theta_1,...,\theta_m$ จะได้ $\hat{\theta}_1,...,\hat{\theta}_m$ เป็นตัวประมาณภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ $\theta_1,...,\theta_m$ ตามลำดับ

4.2 วิธีเบส์

แนวความคิดสถิติตามแนวของเบส์ (Bayesian approach) แตกต่างจากสถิติตามแนวดั้งเดิม (classical approach) กล่าวคือแนวดั้งเดิมนั้นการประมาณค่าพารามิเตอร์ θ จะเริ่มจากการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x;\theta)$ และถือว่าพารามิเตอร์ θ เป็นค่าคงที่ซึ่งไม่ทราบค่า แต่ในแนวคิดของเบส์จะใช้ความรู้เดิมหรือข้อมูลเดิมเกี่ยวกับ θ ให้เป็นประโยชน์ในการประมาณ θ ให้ได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นจึงถือว่า θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ ซึ่งมีการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง

4.2.1 ทฤษฎีบทของเบส์ (Bayes' theorem)

บทนิยาม 16 ถ้า C_1 และ C_2 เป็นเหตุการณ์ใดๆ ใน S และ $P(C_i) \neq 0$ ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์ C_2 เมื่อเหตุการณ์ C_1 ได้เกิดขึ้นแล้วคือ (ประสิทธิ์, 2545)

$$P(C_2 / C_1) = \frac{P(C_1 \cap C_2)}{P(C_1)} \quad \text{เมื่อ } P(C_1) > 0$$

ทฤษฎีบท 1 ถ้าปริภูมิตัวอย่าง S ถูกแบ่งออกเป็น k เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน คือเหตุการณ์ $C_1,\ C_2,...,\ C_k$ เมื่อ $P(C_i) > 0$ เมื่อ $i = 1,2,3,...,k$ และถ้า C เป็นเหตุการณ์ใดๆ ใน S จะได้ว่า (ประสิทธิ์, 2545)

$$P(C) = \sum_{i=1}^{k} P(C_i) P(C / C_i)$$

ทฤษฎีบท 2 ถ้าปริภูมิตัวอย่าง S ถูกแบ่งออกเป็น k เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน คือเหตุการณ์ $C_1,\ C_2,...,\ C_k$ เมื่อ $P(C_i) > 0$ เมื่อ $i = 1,2,3,...,k$ และถ้า C เป็นเหตุการณ์ใดๆ ใน S จะได้ว่า (ประสิทธิ์, 2545)

$$P(C_j / C) = \frac{P(C_j)P(C / C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(C_i)P(C / C_i)}$$

สำหรับในทฤษฎีของเบส์ เรียก $P(C_i)$ ว่าความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นก่อน (prior probabilities) ของ C_i เมื่อ $i = 1,2,3,...,k$ และเรียก $P(C_i / C)$ ว่าความน่าจะเป็นที่เกิดขึ้นทีหลัง (posterior probabilities)

ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x;\theta) = f(x|\theta)$ โดยที่ θ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม Θ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $g(\theta)$ และ $f(x|\theta)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional density function) ของ X เมื่อกำหนด $\Theta = \theta$ ให้

บทนิยาม 17 ฟังก์ชัน $g(\theta)$ เรียกว่า ฟังก์ชันการแจกแจงก่อน (prior distribution function) ของ Θ และ $h(\theta | x_1,...,x_n)$ เรียกว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ Θ เมื่อกำหนด $X_1 = x_1,...,X_n = x_n$ ให้ หรือเรียกว่า ฟังก์ชันการแจกแจงภายหลัง (posterior distribution function) ของ Θ

ฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ เมื่อกำหนด $\Theta = \theta$ ให้ คือ

$$\begin{aligned} f(x_1,...,x_n | \theta) &= f(x_1|\theta)...f(x_n|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \end{aligned}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ เมื่อกำหนด θ ให้ และฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ θ คือ

$$f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta) \quad = \quad f(x_1 \mid \theta)...f(x_n \mid \theta)g(\theta)$$

$$f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} f(x_i \mid \theta)g(\theta)$$

ดังนั้นการแจกแจงภายหลังของ θ คือ

$$h(\theta \mid x_1,...,x_n) \quad = \quad \frac{f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)}{\int f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d\theta}$$

บทนิยาม 18 ให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x \mid \theta)$ โดยที่ θ เป็นค่าของตัวแปรเชิงสุ่ม Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $g(\theta)$ ตัวประมาณแบบโพสทีเรียเบส์ (posterior bayes estimator) ของฟังก์ชัน $\tau(\theta)$ เทียบกับฟังก์ชันการแจกแจงก่อน $g(\theta)$ คือ

$$\widehat{\tau(\theta)} \quad = \quad E(\tau(\Theta) \mid X_1,...,X_n)$$

$$= \quad \int \tau(\theta)h(\theta \mid x_1,...,x_n)d(\theta)$$

$$= \quad \frac{\int \tau(\theta)f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d(\theta)}{\int f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d\theta}$$

4.2.2 วิธีหาฟังก์ชันการแจกแจงหลังและตัวประมาณแบบโพสทีเรียเบส์

ขั้นที่ 1 หาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ เมื่อกำหนด θ ให้

$$f(x_1,...,x_n \mid \theta) \quad = \quad f(x_1 \mid \theta)...f(x_n \mid \theta)$$

ขั้นที่ 2 หาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $X_1,...,X_n$ เมื่อกำหนด θ ให้ และฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ θ

$f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)$ และหา $\int f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d\theta$

ขั้นที่ 3 หาฟังก์ชันการแจกแจงภายหลังของ θ

$$h(\theta \mid x_1,...,x_n) \quad = \quad \frac{f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)}{\int f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d\theta}$$

ขั้นที่ 4 หาตัวประมาณแบบโพสทีเรียเบส์ของฟังก์ชัน $\tau(\theta)$

$$\widehat{\tau(\theta)} \quad = \quad \frac{\int \tau(\theta)f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d(\theta)}{\int f(x_1,...,x_n \mid \theta)g(\theta)d\theta}$$

5. การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี

การทดสอบสารูปสนิทดี เป็นวิธีการทางสถิติที่ใช้ทดสอบว่าข้อมูลที่ได้มานั้นมีลักษณะการแจกแจงเป็นไปตามที่คาดหวังหรือไม่ โดยมีหลักการของสถิติทดสอบคือ การวัดระยะห่างที่สุดระหว่างกราฟของ $F_n(X)$ และ $F(X)$ ซึ่ง $F_n(X)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของตัวอย่าง หรือ ความถี่สะสมที่สังเกตได้ในรูปของสัดส่วน (empirical distribution function) และ $F(X)$ แทนฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สะสมภายใต้ H_0 (hypothesized distribution function) ซึ่งมีการทดสอบหลายวิธีคือ วิธีโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และวิธีแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง เป็นต้น

5.1 ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ

Conover (1980) ได้เสนอการคำนวณตัวสถิติทดสอบนี้ คำนวณจาก

$$KS \;=\; \max(D^+, D^-)$$

$$D^+ \;=\; \sup_{1 \le i \le n}\{S(x_i) - F_0(x_i)\} \;=\; \max\left(\frac{i}{n} - F_0(x_i)\right)$$

$$D^- \;=\; \sup_{1 \le i \le n}\{F_0(x_i) - S(x_{i-1})\} \;=\; \max\left(F_0(x_i) - \frac{i-1}{n}\right)$$

โดยที่

$S(x_i)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์ของข้อมูลทั้งหมด

$F_0(x_i)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงที่คาดหวังไว้ของ x_i ซึ่งมีการเรียงลำดับของข้อมูลเมื่อ $i = 1, 2, ..., n$

n แทน จำนวนข้อมูลทั้งหมด

เกณฑ์การตัดสินใจ จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (H_0) เมื่อค่าสถิติทดสอบ KS ที่คำนวณค่า p-values มีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

5.2 ตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

Stephens (1974) ได้เสนอตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง เพื่อใช้ทดสอบลักษณะของประชากรว่ามีการแจกแจงตามที่คาดหวังไว้หรือไม่ ซึ่งตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงเป็นวิธีการที่ได้มาจากการดัดแปลงจากตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ

การทดสอบด้วยตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง สามารถใช้ได้กับข้อมูลที่อยู่ในสเกลอันดับ (ordinal scale) และลักษณะการแจกแจงของประชากรจากการสุ่มตัวอย่างเป็นแบบต่อเนื่อง

ถ้าให้ $x_1, x_2, ..., x_n$ เป็นลำดับของข้อมูลในตัวอย่างขนาด n จากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวอย่าง $F_0(x_i)$

ตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง คำนวณค่าได้ตามรูปแบบดังนี้

$$AD = -n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(2i-1)\ln(F_0(x_i)) + (2(n-i)+1)\ln(1-F_0(x_i))]$$

เมื่อ $F_0(x_i)$ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมตามการแจกแจงที่คาดหวังไว้ ของ x_i ซึ่งมีการเรียงลำดับจากน้อยไปหามาก

n คือ จำนวนค่าสังเกต

ซึ่งทำการดัดแปลง โดยคำนวณเป็น

$$AD^* = AD\left(1+\frac{0.75}{n}+\frac{2.25}{n^2}\right)$$

เกณฑ์การตัดสินใจ ปฏิเสธสมมติฐานหลัก (H_0) เมื่อค่าสถิติทดสอบ AD^* ที่คำนวณค่า p-values มีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

5.3 วิธีการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีสำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1 กำหนดสมมติฐาน

H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป
H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ (α)

3 เลือกสถิติทดสอบและคำนวณค่าสถิติทดสอบ ในงานวิจัยนี้ได้เลือกใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และ ตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

4 หาค่าวิกฤตของสถิติทดสอบที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดไว้

5 เกณฑ์การตัดสินใจ จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (H_0) เมื่อค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และค่าสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง มีค่า p-value ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่ศึกษา

6 สรุปผลการทดสอบสมมติฐาน

6. การสร้างค่าตัวแปรสุ่ม

การสร้างค่าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ที่มีการแจกแจงแบบผสมระหว่างการแจกแจงเบตากับการแจกแจงใดๆ ด้วยวิธีการแปลงผกผัน (Inverse transform) (Law and Kelton, 2000) มีขั้นตอนดังนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ B เป็นการแจกแจงเบตาที่มีพารามิเตอร์ a และ b

ขั้นที่ 2 กำหนดให้ $B = F(x)$ เมื่อ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ที่ต้องการนำมาผสมกับการแจกแจงเบตา

ขั้นที่ 3 แก้สมการ $x_i = F^{-1}(B)$ เมื่อ $i = 1, 2, ..., n$

$F^{-1}(B)$ สามารถหาค่าได้เนื่องจาก $0 \leq B \leq 1$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน $F(B)$ จะอยู่ในช่วง [0,1]

7. การสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบผสม

การสร้างตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบผสมระหว่างการแจกแจงเบตา กับการแจกแจงใดๆ ที่ต้องการนำมาผสม

กำหนดให้ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของตัวแปรสุ่ม X ที่ต้องการนำมาผสม ดังนั้นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมและฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสามารถหาได้จาก (Eugene *et al*., 2002)

7.1 ฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็นสะสมคือ

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw$$

เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$

Eugene *et al*.(2002); Nadarajah and Kotz (2004, 2006) ได้กล่าวถึงรูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันการแจกแจงน่าจะเป็นสะสมดังนี้

$$F(x) = I_{G(x)}(a,b) \quad \text{เมื่อ } a>0 \text{ , } b>0$$

โดยที่

$$I_y(a,b) = \frac{B_y(a,b)}{B(a,b)}$$

ซึ่ง $I_y(a,b)$ แทนอัตราส่วนฟังก์ชันเบตาบางส่วน (Incomplete Beta function ratio)

$B_y(a,b) = \int_0^y w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$ แทนฟังก์ชันเบตาบางส่วน(Incomplete Beta function)

และ $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$

$= \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ เป็นฟังก์ชันเบตา (Beta function)

7.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงที่ถูกสร้างขึ้นด้วย $F(x)$ จะได้จากการหาอนุพันธ์ภายใต้เครื่องหมายอินทิเกรต จะได้

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}(G(x))^{a-1}(1-G(x))^{b-1}G'(x)$$

(ดูบทพิสูจน์ในภาคผนวก ข)

8. การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปได้สร้างและพัฒนาขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตา และการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ถ้ากำหนดให้ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันแจกแจงสะสมของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ α และ λ ดังนี้

$$G(x) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}$$

เมื่อ $x \geq 0$, $\alpha > 0$ และ $\lambda > 0$

จะได้ว่าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเขียนแทนด้วย $X \sim BGE(a,b,\lambda,\alpha)$ (Barreto-Souza *et al.*, 2008)

8.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a,b,λ และ α จะมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x})^{\alpha a - 1}\{1 - (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1} \qquad ; x > 0$$

เมื่อ $a > 0, b > 0, \lambda > 0$ และ $\alpha > 0$

8.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a,b,λ และ α จะมีฟังก์ชันแจกแจงน่าจะเป็นสะสมอยู่ในรูปทั่วไปดังนี้

$$F(x) = I_{1-\exp(-\lambda x)^{\alpha}}(a,b)$$

เมื่อ $x \geq 0$, a > 0 , b > 0 , $\lambda > 0$

8.2.1 เมื่อ $b > 0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j (1-e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)}}{\Gamma(b-j)\, j!(a+j)}$$

หรือ

$$F(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j G_{\lambda,\alpha(a+j)}(x)}{\Gamma(b-j)\, j!(a+j)}$$

8.2.2 เมื่อ $b > 0$ และเป็นจำนวนเต็ม จะได้

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j (1-e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)}}{(a+j)}$$

หรือ

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} \frac{(-1)^j G_{\lambda,\alpha(a+j)}(x)}{(a+j)}$$

8.3 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ และ α จะมีฟังก์ชันความเชื่อถือได้ดังนี้

$$R(x) = \frac{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}{B(a,b)}$$

เมื่อ $x \geq 0$, a > 0 , b > 0 , $\lambda > 0$

8.4 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ และ α จะมีฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงดังนี้

$$h(x) = \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}}{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}$$

เมื่อ $x \geq 0$, a > 0 , b > 0 , $\lambda > 0$

8.5 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด

เมื่อ X แทนตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ดังนั้นฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดอยู่ในรูปดังนี้

$$M_X(t) = \int_0^{\infty} e^{xt}\frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}dx$$

เมื่อ $x \geq 0$, a > 0 , b > 0 , $\lambda > 0$

8.6 ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

เมื่อ X แทนตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ดังนั้นฟังก์ชันลักษณะเฉพาะจะอยู่ในรูปดังนี้

$$\phi_X(t) = \int_0^{\infty} e^{ixt}\frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}dx$$

$x \geq 0$, a > 0 , b > 0 , $\lambda > 0$

8.7 โมเมนต์

โมเมนต์ที่ n ของตัวแปรสุ่ม X สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสามารถเขียนได้เป็น

8.7.1 เมื่อ $b>0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนโมเมนต์ที่ r ได้เป็น

$$E(X^r) \;=\; \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^r B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+r}}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{d^r}{dp^r}B(p,\alpha(a+j))\Bigg|_{p=1}$$

ดังนั้นจะแสดงรูปทั่วไปของโมเมนต์ที่ 1 ถึง โมเมนต์ที่ 4 ได้ดังนี้

$$E(X) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)\,j!}c_j$$

$$E(X^2) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)\,j!}d_j$$

$$E(X^3) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)\,j!}e_j$$

$$E(X^4) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)\,j!}f_j$$

8.7.2 เมื่อ $b>0$ และเป็นจำนวนเต็ม จะเขียนโมเมนต์ได้เป็น

$$E(X^r) \;=\; \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^{j+r}\,\frac{d^rB(p,\alpha(a+j))}{dp^r}\Big|_{p=1}$$

จะแสดงรูปทั่วไปของโมเมนต์ที่ 1 ถึง โมเมนต์ที่ 4 ได้ดังนี้

$$E(X) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^j}{a+j}c_j$$

$$E(X^2) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^j}{a+j}d_j$$

$$E(X^3) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{a+j}e_j$$

$$E(X^4) \;=\; \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^{j}}{a+j}f_j$$

โดยที่

$$c_j \;=\; \psi(\alpha(a+j)+1) \;-\; \psi(1)$$

$$d_j \;=\; c_j^2 + \psi'(1) \;-\psi'(\alpha(a+j)+1)$$

$$e_j \;=\; \text{-c}_j[c_j^2 \;+\; 3\{\psi'(1)-\psi'(\alpha(a+j)+1)\}] \;+\; \psi''(1) \;-\; \psi''(\alpha(a+j)+1)$$

$$f_i \;=\; \{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(\alpha(a+j)+1)\}[c_j^2+3\{\psi'(1)-\psi'(\alpha(a+j)+1)\}]$$

$$+2c_j^2\{\psi'(1)-\psi'(\alpha(a+j)+1)\}-4c_j\{\psi''(1)-\psi''(\alpha(a+j)+1)\}$$

$$+\psi'''(1)+\psi'''(1+\alpha(a+j))$$

จากสมการในข้างต้นใช้หลักของ Euler’s psi function ในรูป

$\psi(x) \;=\; \dfrac{\partial \ln\Gamma(x)}{\partial x}$ หรือ $\psi(x) \;=\; \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ ในการหารูปทั่วไปของโมเมนต์ที่ 1 ถึงโมเมนต์ที่ 4 Barreto-Souza *et al*. (2008)

8.8 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน (mean and variance)

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = E(X)$$

$$\text{ความแปรปรวน} = E[\{X - E(X)\}]^2$$

8.9 ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (skewness coefficient and kurtosis coefficient)

$$\text{ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้} = \frac{E[\{X - E(X)\}]^3}{\sigma_3}$$

$$\text{ค่าสัมประสิทธ์ความโด่ง} = \frac{E[\{X - E(X)\}]^4}{\sigma_4}$$

8.10 การประมาณค่าพารามิเตอร์

8.10.1 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ให้ $X_1, ..., X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป จะได้ฟังก์ชันภาวะน่าจะเป็นของตัวอย่างสุ่มคือ

$$L(a,b,\alpha,\lambda;x_1,x_2,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;a,b,\alpha,\lambda)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}\}^{b-1}$$

$$L = \frac{\alpha^n \lambda^n}{B(a,b)}.e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n} x_i}.[\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda x_i})]^{a\alpha-1}.[\prod_{i=1}^{n} 1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}]^{b-1}$$

$$\therefore \ \log L \ = \ n\log(\alpha) \ + n\log(\lambda) \ - n\log(B(a,b)) \ - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$+ (a\alpha - 1)\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda x_i}) \ + (b\text{-}1)\sum_{i=1}^{n}\log(1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha})$$

และหาอนุพันธ์ย่อยเทียบกับพารามิเตอร์ a,b,α และ λ จะได้สมการดังนี้

$$\frac{\partial \log L}{\partial a} \ = \ n\varphi(a,b) \ - n\varphi(a) \ + \alpha\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda x_i}) \ = \ 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} \ = \ n\varphi(a,b) \ - n\varphi(b) \ + \sum_{i=1}^{n}\log(1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}) \ = \ 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} \ = \ \frac{n}{\alpha} \ + a\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda x_i}) \ - (b-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}.\log(1-e^{-\lambda x_i})}{1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}} \ = \ 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} \ = \ \frac{n}{\lambda} \ \text{-}\sum_{i=1}^{n} x_i + (a\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i e^{-\lambda x_i}}{1-e^{-\lambda x_i}} - \alpha(b\text{-}1)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i e^{-\lambda x_i}(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha-1}}{1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}} \ = \ 0$$

ตัวประมาณ MLE ของพารามิเตอร์ a,b,λ และ α จะหาได้จากสมการข้างต้น (ดูโปรแกรมในภาคผนวก ข)

8.9.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์

วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีเบส์สำหรับพารามิเตอร์ a,b,λ และ α ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่ $a>0,\ b>0,\ \lambda>0$ และ $\alpha>0$ ในการหาตัวประมาณแบบเบส์ของพารามิเตอร์ดังกล่าว จะกำหนดให้ทั้งหมดมีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบแกมมา

วิธีหาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลังและตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังสำหรับการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปมีดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้พารามิเตอร์ a,b,λ และ α มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา และกำหนดให้ $X_1,...,X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x\,|\,a,b,\lambda,\alpha) = \dfrac{\alpha\lambda}{B(a,b)}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}$ เมื่อ $x>0,\ a>0, b>0,\ \lambda>0, \alpha>0$ เขียนแทนด้วย $BGE(a,b,\lambda,\alpha)$

ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมจะได้

$$f(x_1,...,x_n\,|\,a,b,\lambda,\alpha) = \frac{\alpha^n\lambda^n}{B(a,b)^n}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}.[\prod_{i=1}^{n}1-e^{-\lambda x_i}]^{\alpha a-1}.[\prod_{i=1}^{n}1-(1-e^{-\lambda x_i})^{\alpha}]^{b-1}$$

2. หาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลังร่วมของ a,b,λ และ α คือ

$$f(a,b,\lambda,\alpha\,|\,x_1,...,x_n) = \frac{f(x_1,...,x_n\,|\,a,b,\lambda,\alpha)\pi_1(a)\pi_1(b)\pi_1(\lambda)\pi_1(\alpha)}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x_1,...,x_n\,|\,a,b,\lambda,\alpha)\pi_1(a)\pi_1(b)\pi_1(\lambda)\pi_1(\alpha)d(a)d(b)d(\lambda)d(\alpha)}$$

เมื่อ

$\pi(a)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ a

$\pi(b)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ b

$\pi(\lambda)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ λ

$\pi(\alpha)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ α

3. ตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a,b,λ และ α คือ

$$\widehat{BGE_B} = E_{a,b,\lambda,\alpha|x_1,...,x_n}(BGE(a,b,\lambda,\alpha))$$

$$\widehat{BGE_B} = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty BGE_{a,b,\lambda,\alpha} f(x_1,...,x_n \mid a,b,\lambda,\alpha)\pi_1(a)\pi_1(b)\pi_1(\lambda)\pi_1(\alpha)d(a)d(b)d(\lambda)d(\alpha)}{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(x_1,...,x_n \mid a,b,\lambda,\alpha)\pi_1(a)\pi_1(b)\pi_1(\lambda)\pi_1(\alpha)d(a)d(b)d(\lambda)d(\alpha)}$$

การแก้สมการเพื่อหาตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังนี้ค่อนข้างยุ่งยากและมีขั้นตอนในการหาที่ซับซ้อน ดังนั้นเมื่อทราบฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์ a,b,λ และ α แล้วจะทำการหาค่าประมาณด้วยวิธีของเบส์ของพารามิเตอร์โดยใช้โปรแกรม WinBUGS (Spiegelhalter et al., 2003) ซึ่งคำนวณหาค่าประมาณได้เมื่อกำหนดให้การแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์เป็นดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนสำหรับพารามิเตอร์ a, b, λ และ α

พารามิเตอร์				การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$			
a	b	λ	α	a	b	λ	α
0.5	0.5	0.5	0.5	(25,50)	(25,50)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(25,50)	(25,50)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(25,50)	(25,50)	(40,20)
		1.0	0.5	(25,50)	(25,50)	(20,20)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(25,50)	(20,20)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(25,50)	(20,20)	(40,20)
		2.0	0.5	(25,50)	(25,50)	(40,20)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(25,50)	(40,20)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(25,50)	(40,20)	(40,20)
	1.0	0.5	0.5	(25,50)	(20,20)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(20,20)	(25,50)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(20,20)	(25,50)	(40,20)
		1.0	0.5	(25,50)	(20,20)	(20,20)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(20,20)	(20,20)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(20,20)	(20,20)	(40,20)

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พารามิเตอร์				การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$			
a	b	λ	α	a	b	λ	α
0.5	1.0	2.0	0.5	(25,50)	(20,20)	(40,20)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(20,20)	(40,20)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(20,20)	(40,20)	(40,20)
	2.0	0.5	0.5	(25,50)	(40,20)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(40,20)	(25,50)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(40,20)	(25,50)	(40,20)
		1.0	0.5	(25,50)	(40,20)	(20,20)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(40,20)	(20,20)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(40,20)	(20,20)	(40,20)
		2.0	0.5	(25,50)	(40,20)	(40,20)	(25,50)
			1.0	(25,50)	(40,20)	(40,20)	(20,20)
			2.0	(25,50)	(40,20)	(40,20)	(40,20)
1.0	0.5	0.5	0.5	(40,40)	(50,100)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(20,20)	(10,20)	(10,20)	(20,20)
			2.0	(20,20)	(25,50)	(25,50)	(40,20)
		1.0	0.5	(40,40)	(50,100)	(40,40)	(50,100)
			1.0	(40,40)	(50,100)	(40,40)	(40,40)
			2.0	(40,40)	(50,100)	(40,40)	(80,40)
		2.0	0.5	(40,40)	(50,100)	(80,40)	(50,100)
			1.0	(20,20)	(10,20)	(40,20)	(20,20)
			2.0	(40,40)	(50,100)	(80,40)	(80,40)
	1.0	0.5	0.5	(20,20)	(20,20)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(20,20)	(20,20)	(10,20)	(20,20)
			2.0	(20,20)	(10,10)	(5,10)	(40,20)

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พารามิเตอร์				การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$			
a	b	λ	α	a	b	λ	α
1.0	1.0	1.0	0.5	(20,20)	(20,20)	(20,20)	(10,20)
			1.0	(20,20)	(10,10)	(10,10)	(10,10)
			2.0	(20,20)	(10,10)	(10,10)	(40,20)
		2.0	0.5	(40,40)	(10,10)	(40,20)	(10,20)
			1.0	(40,40)	(4,4)	(16,8)	(20,20)
			2.0	(20,20)	(20,20)	(40,20)	(40,20)
	2.0	0.5	0.5	(40,40)	(40,20)	(5,10)	(5,10)
			1.0	(40,40)	(5.71,2.86)	(1,2)	(20,20)
			2.0	(40,40)	(8,4)	(0.33,0.33)	(80,40)
		1.0	0.5	(20,20)	(16,8)	(2.5,2.5)	(0.5,1)
			1.0	(4,4)	(16,8)	(4,4)	(2,2)
			2.0	(20,20)	(5.33,2.67)	(2,2)	(40,20)
		2.0	0.5	(10,10)	(8,4)	(8,4)	(2.5, 5)
			1.0	(20,20)	(40,20)	(40,20)	(20,20)
			2.0	(40,40)	(40,20)	(40,20)	(80,40)
2.0	0.5	0.5	0.5	(80,40)	(50,100)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(40,20)	(25,50)	(25,50)	(20,20)
			2.0	(40,20)	(25,50)	(25,50)	(40,20)
		1.0	0.5	(80,40)	(50,100)	(40,40)	(50,100)
			1.0	(80,40)	(50,100)	(40,40)	(40,40)
			2.0	(80,40)	(50,100)	(40,40)	(40,80)
		2.0	0.5	(80,40)	(50,100)	(80,40)	(50,100)
			1.0	(80,40)	(50,100)	(80,40)	(20,20)
			2.0	(80,40)	(50,100)	(80,40)	(80,40)

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พารามิเตอร์				การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$			
a	b	λ	α	a	b	λ	α
2.0	1.0	0.5	0.5	(40,20)	(20,20)	(25,50)	(25,50)
			1.0	(40,20)	(20,20)	(10,20)	(20,20)
			2.0	(40,20)	(10,10)	(5,10)	(40,20)
		1.0	0.5	(40,20)	(20,20)	(20,20)	(10,20)
			1.0	(40,20)	(10,10)	(10,10)	(10,10)
			2.0	(40,20)	(10,10)	(10,10)	(40,20)
		2.0	0.5	(80,40)	(10,10)	(40,20)	(10,20)
			1.0	(80,40)	(4,4)	(16,8)	(20,20)
			2.0	(16,8)	(2.5,2.5)	(6.67,3.33)	(16,8)
	2.0	0.5	0.5	(80,40)	(40,20)	(5,10)	(5,10)
			1.0	(80,40)	(5.71,2.86)	(1,2)	(20,20)
			2.0	(80,40)	(8,4)	(0.33,0.33)	(80,40)
		1.0	0.5	(40,20)	(16,8)	(2.5,2.5)	(0.5,1)
			1.0	(5.33,2.67)	(16,8)	(4,4)	(2,2)
			2.0	(40,20)	(5.33,2.67)	(2,2)	(40,20)
		2.0	0.5	(16,8)	(4,2)	(4,2)	(0.33,0.67)
			1.0	(4,2)	(16,8)	(16,8)	(2,2)
			2.0	(40,20)	(16,8)	(16,8)	(40,20)

จากตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในแต่ละพารามิเตอร์ที่กำหนด ซึ่งได้จากการทดลองสร้างตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปตามสถานการณ์ต่างๆ เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 และทำการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และนำค่าที่ได้ไปหาค่าประมาณพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนที่สอดคล้องกัน

8.9.3 การเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์

คำนวณค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองระหว่างค่าประมาณกับค่า ดังนี้

$$\text{MSE} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_i - \theta)^2$$

โดยที่ n แทน จำนวนรอบของการซ้ำ

MSE แทน ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง

θ แทน ค่าพารามิเตอร์ที่สนใจศึกษา

$\hat{\theta}_i$ แทน ค่าประมาณพารามิเตอร์ในการทำซ้ำครั้งที่ $i = 1, 2, \ldots, n$

8.10 การสร้างค่าตัวแปรสุ่ม

กำหนดให้ B เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b ดังนั้นตัวกำเนิดตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่หาด้วยวิธีการแปลงผกผัน (Law and Kelton, 2000) คือ

$$X_i = -\frac{1}{\lambda}[\ln(1 - B^{\frac{1}{\alpha}})] \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \ldots, n$$

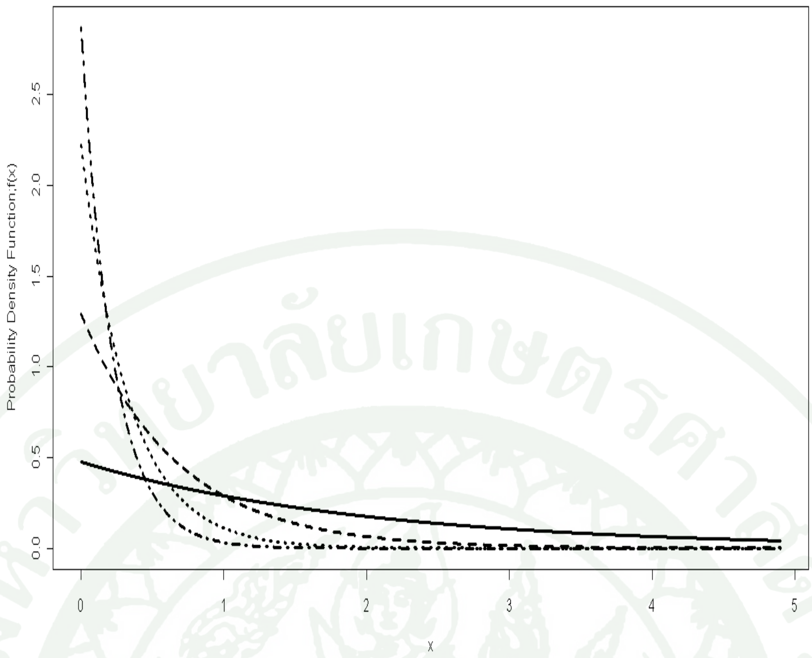
9. การแจกแจงอื่นๆ ที่เกี่ยวข้อง

9.1 การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ เขียนแทนด้วย $X \sim Exp(\lambda)$ จะมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \lambda \exp(-\lambda x) \qquad \text{เมื่อ } x > 0 \text{ , } \lambda > 0$$

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$



ภาพที่ 1 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $\lambda = 0.5, 1.5, 3.0$ และ 4.5

9.2 การแจกแจงเบตา

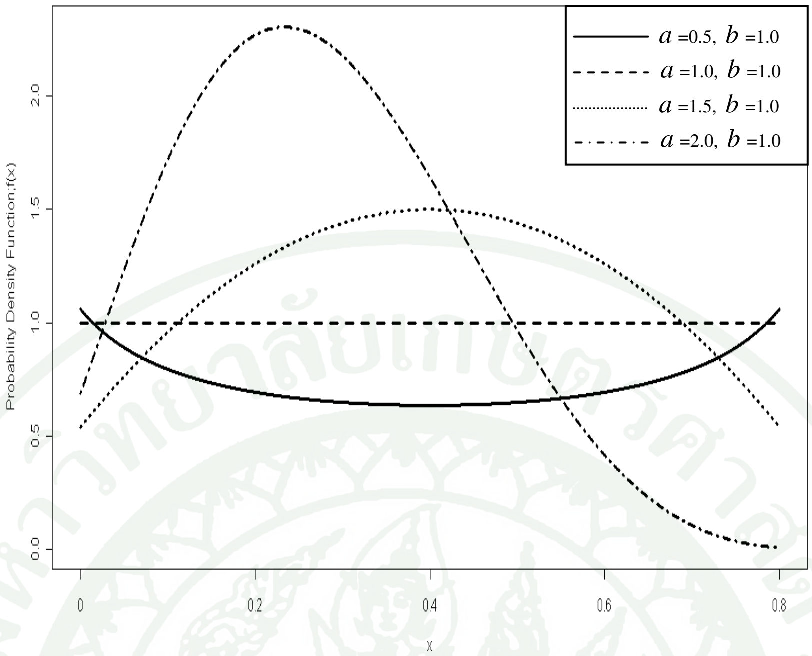
เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b เขียนแทนด้วย $X \sim Beta(a,b)$ จะมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \qquad \text{เมื่อ } 0 < x < 1 \text{ , } a > 0 \text{ , } b > 0$$

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$

ข้อสังเกต

สำหรับการแจกแจงเบตา ถ้าพารามิเตอร์ $a = 1$ และ $b = 1$ จะได้การแจกแจงยูนิฟอร์มในช่วง (0,1)



ภาพที่ 2 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเมื่อ a=0.5, 1.0, 1.5, 2.0 และ b=0.5, 1.0, 1.5, 2.0

9.3 การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

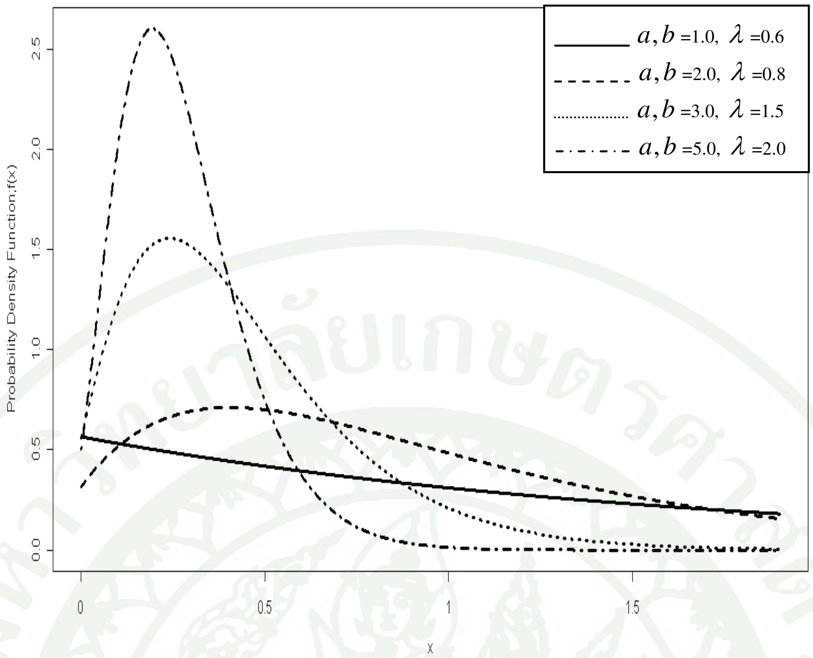
เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a,b และ λ เขียนแทนด้วย $X \sim BE(a,b,\lambda)$ จะมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) \;=\; \frac{\lambda}{B(a,b)}\exp(-b\lambda x)(1-\exp(-\lambda x))^{a-1} \qquad \text{เมื่อ } x \ge 0\ , a>0\ , b>0\ , \lambda>0$$

$$= \; 0 \qquad\qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$

ข้อสังเกต

สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ถ้าพารามิเตอร์ $a=1$ และ $b=1$ จะได้ $f(x) \;=\; \lambda\exp(-\lambda x)$ ซึ่งมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล



ภาพที่ 3 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $a,\ b$ = 1.0, 2.0, 3.0, 5.0 และ λ = 0.6, 0.8, 1.5, 2.0

9.4 การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

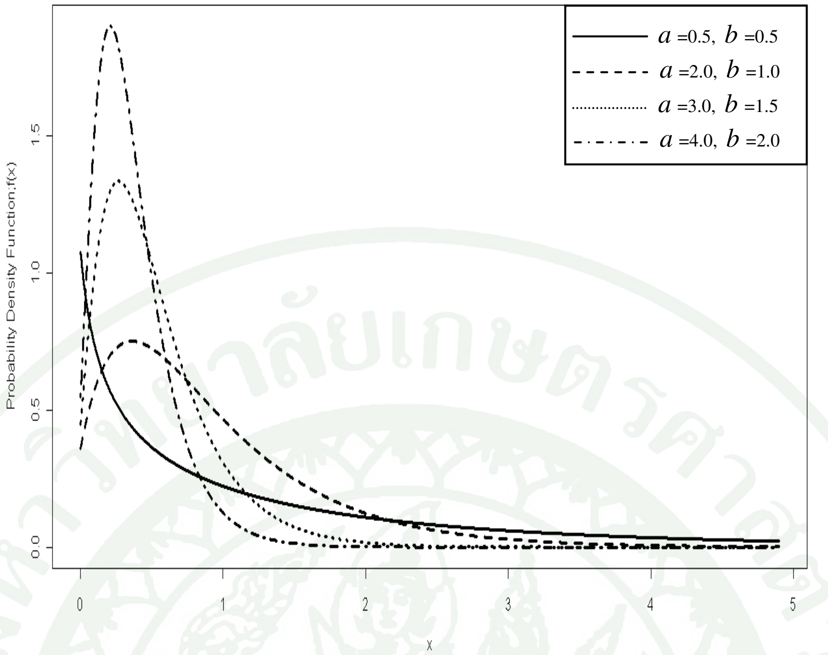
เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a และ λ เขียนแทนด้วย $X \sim GE(a,\lambda)$ จะมีฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \alpha\lambda\exp(-\lambda x)(1-\exp(-\lambda x))^{a-1} \qquad \text{เมื่อ } x>0,\ \alpha>0,\ \lambda>0$$

$$= 0 \qquad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$

ข้อสังเกต

สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ถ้าพารามิเตอร์ $\alpha = 1$ จะได้ $f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$ ซึ่งมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล



ภาพที่ 4 กราฟแสดงโค้งของการแจกเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป เมื่อ $a = 0.5, 1.0, 1.5, 3.0$,b=1.0

10. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ดาริกา (2552) ได้ทำการศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล โดยพิจารณาถึงฟังชันก์ความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ผลเฉลยรูปแบบปิด (ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง) รูปแบบฟังก์ชันของโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ผลบวกของตัวแปรสุ่มโดยใช้เทคนิคผลการประสาน ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง การสร้างค่าของตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผัน และการทดสอบภาวะสารูปสนิทดี ได้ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา โดยใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ นอกจากนี้ได้เสนอการประยุกต์ทางความเชื่อถือได้กับข้อมูลจริง ผลการวิจัยพบว่า การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมี a เป็นพารามิเตอร์รูปร่าง b และ λ เป็นพารามิเตอร์สเกล ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนจะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ λ มีค่าสูงขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง จะไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ ลักษณะรูปร่างฟังก์ชันชันอัตราความเสี่ยงมี 3 ลักษณะคือ มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียว มี

ลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเพียงอย่างเดียว และจะมีลักษณะฟังก์ชันคงที่ เมื่อพารามิเตอร์ $0 < a < 1$, $a \geq 1$ และ $a = 1$ ตามลำดับ สำหรับวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์จะพบว่า วิธีเบส์มีประสิทธิภาพสูงกว่าการประมาณด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณี

Barreto-Souza *et al*. (2008) ได้นำเสนอการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป เป็นการแจกแจงแบบผสมระหว่างการแจกแจงเบตาและการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ได้ทำการกล่าวถึงสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงนี้เบื้องต้น โดยได้นำเสนอแนวคิดเกี่ยวกับการสร้างตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล การสร้างค่าของตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันหนาแน่นความน่าจะเป็น มีการปรับปรุงสูตรของฟังก์ชันน่าจะเป็นสะสม ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด โมเมนต์ที่ r ฟังก์ชันน่าจะเป็นและโมเมนต์เวียนบังเกิดของสถิติลำดับให้อยู่ในรูปอย่างง่าย รวมไปถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และแสดง Information Matrix สำหรับการประมาณค่าแบบช่วงและการทดสอบสมมติฐาน และมีการนำการแจกแจงนี้ไปทดสอบภาวะสารรูปสนิทดี สำหรับทดสอบความเหมาะสมของการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป และใช้ทดสอบเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงนี้กับการแจกแจงย่อย อาทิ การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล และการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล เป็นต้น

Eugene *et al*. (2002) ได้นำเสนอการแจกแจงเบตา-นอร์มัล (Beta-Normal distribution) เป็นการแจกแจงแบบผสม ระหว่างการแจกแจงเบตา (Beta distribution) และการแจกแจงปกติ (Normal distribution) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับลักษณะโดยทั่วไปของการแจกแจงนี้ กล่าวคือ ทำการศึกษาเกี่ยวกับสมบัติต่างๆ ของรูปร่าง การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด พบว่าการแจกแจงนี้ค่อนข้างที่จะเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะรูปแบบได้ดี อีกทั้งยังมีลักษณะการแจกแจงแบบสมมาตรที่มีลักษณะหางยาวอีกด้วย แต่บางครั้งอาจจะเกิดการแจกแจงที่มีลักษณะเบ้ และมีฐานนิยมสองค่าพร้อมทั้งได้ทำการศึกษาโดยนำเอาไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

Cordeiro *et al*. (2008) ได้นำเสนอการแจกแจงเบตาไวบูลล์ เป็นการแจกแจงแบบผสมระหว่างการแจกแจงเบตาและการแจกแจงไวบูลล์ ได้ศึกษาสมการทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวกับสมบัติเบื้องต้นของการแจกแจงนี้ ได้มีการปรับปรุงสมการโมเมนต์ ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด ได้กล่าวถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าการแจกแจงนี้จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ได้กว้างขวางยิ่งขึ้นกว่าการแจกแจงไวบูลล์ซึ่งการแจกแจงแบบไวบูลล์ใช้มากในความเชื่อถือได้ทางวิศวกรรมและชีววิทยาบางสาขา

Maynard (2004) ได้ทำการศึกษาการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งมี 3 พารามิเตอร์ เป็นการแจกแจงแบบผสม ระหว่างการแจกแจงเบตา และการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล ได้ทำการศึกษาสมบัติที่เกี่ยวข้อง เช่น โมเมนต์ การประมาณค่าโดยวิธีโมเมนต์ และภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ได้ทำการตรวจสอบภาวะสารูปสนิทดีของการแจกแจงดังกล่าวเทียบกับการแจกแจงอื่นๆ เช่น การแจกแจงไวบูลล์ การแจกแจงแกมมา และการแจกแจงเบตา-นอร์มัล การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป เป็นต้น อีกทั้งได้ศึกษาฟังก์ชันอัตราเสี่ยง โดยทำการเทียบกับการแจกแจงไวบูลล์ แกมมา และเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ซึ่งผลการศึกษาที่ได้จากการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลให้ผลที่เหมาะสมกว่าโดยที่ลักษณะของฟังก์ชันอัตราเสี่ยงมีลักษณะคล้ายกันกับการแจกแจงไวบูลล์ แกมมา และเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

Narajah and Kotz (2004) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงเบตากัมเบล เป็นการแจกแจงแบบผสมระหว่างการแจกแจงเบตา และการแจกแจงกัมเบล ได้ศึกษาถึงลักษณะโดยรวมที่เกี่ยวข้องกับสมบัติของการแจกแจงนี้ ได้อธิบายผลวิเคราะห์รูปร่างฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง ได้หาสมการทั่วไปในการใช้หาค่าโมเมนต์ที่ Asymptotic distribution ของค่าสถิติลำดับสูงสุด การวัดความเบ้ ความโด่ง รวมถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าการแจกแจงที่ได้ศึกษานี้จะถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในทางวิศวกรรม

Narajah and Kotz (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับหลักเกณฑ์โดยทั่วไปเกี่ยวกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งได้กล่าวถึงสมบัติต่างๆ ของการแจกแจงนี้ ทั้งในด้านการแสดงถึงที่มาของฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ แสดงรูปทั่วไปของโมเมนต์ที่ 1 ถึงโมเมนต์ที่ 4 ความแปรปรวน ความเบ้ ความโด่ง ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของค่าเฉลี่ย ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของค่ามัธยฐาน ลักษณะการแจกแจงของผลรวมและอัตราส่วน Asymptotic distribution ของค่าสถิติลำดับ และได้กล่าวถึงการประมาณค่าพารามเตอร์โดยใช้วิธีโมเมนต์ และวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด รวมถึงรูปแบบสมการสำหรับ Fisher information matrix ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์

2. โปรแกรม R และ WinBUGS

วิธีการ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาเชิงทดลองเพื่อศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็น เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ศึกษาการทดสอบภาวะสารูปสนิทดี ด้วยตัวสถิติทดสอบ โคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง รวมถึงการประยุกต์ทางความเชื่อถือได้สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ซึ่งวิธีการวิจัยจะเสนอเป็นลำดับต่อไปนี้

1. ศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็น

1.1 ลักษณะรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

1.3 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

1.4 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

1.5 รูปแบบฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

1.6 คำนวณหาค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของพารามิเตอร์ a, b, λ และ α ตามที่ได้กำหนดไว้

1.7 การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

2. ศึกษาวิธีทดสอบภาวะสารูปสนิทดี

ได้ศึกษาวิธีทดสอบภาวะสารูปสนิทดี 2 วิธีการ สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ได้ศึกษาดังนี้ คือ

2.1 ศึกษาและพัฒนาโปรแกรมด้วยภาษาโปรแกรม R (R Development Core Team, 2011) สำหรับการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีด้วยตัวสถิติโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ

2.2 ศึกษาและพัฒนาโปรแกรมสำหรับการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีด้วยตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

3. ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ โดยมีขั้นตอนดังนี้

3.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ที่ใช้ในแต่ละสถานการณ์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

3.2 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 20, 50, 100, 250

3.3 ทำการจำลองสถานการณ์ตามค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้น โดยการสร้างค่าตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

3.4 นำข้อมูลที่ได้ในข้อ 3.1-3.3 มาประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์

3.5 หาค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณค่าพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี และทำการเปรียบเทียบ ถ้าวิธีใดให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณค่าน้อยกว่าจะสรุปว่าเป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ดีสำหรับการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

4. การประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

ได้มีการนำข้อมูลจริงมาประยุกต์ใช้กับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ดังนี้

4.1 ประมาณค่าพารามิเตอร์ของข้อมูลชุดนี้ ด้วยวิธีการประมาณ 2 วิธี คือ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์

4.2 ทดสอบสารูปสนิทดี ด้วยตัวสถิติโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง ที่ระดับนัยสำคัญ .05

4.3 ทำการเปรียบเทียบสารูปสนิทดี กับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป และ เอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งเป็นกรณีพิเศษของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ด้วยวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แบบภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ผลและวิจารณ์

ผล

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นเบื้องต้นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ อีกทั้งยังศึกษาการทดสอบสารูปสนิทดีด้วยตัวสถิติโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง และได้ศึกษาการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้กับข้อมูลจริง โดยผลการศึกษาแบ่งออกเป็น 4 หัวข้อดังนี้

1. สมบัติเชิงความน่าจะเป็น

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์

3. การทดสอบสารูปสนิทดี

4. การประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

จากการศึกษาได้ดังต่อไปนี้

1. สมบัติเชิงความน่าจะเป็น

สมบัติเชิงความน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปศึกษาตามหัวข้อดังต่อไปนี้

1.1 ลักษณะและรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะมีลักษณะฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นคือ

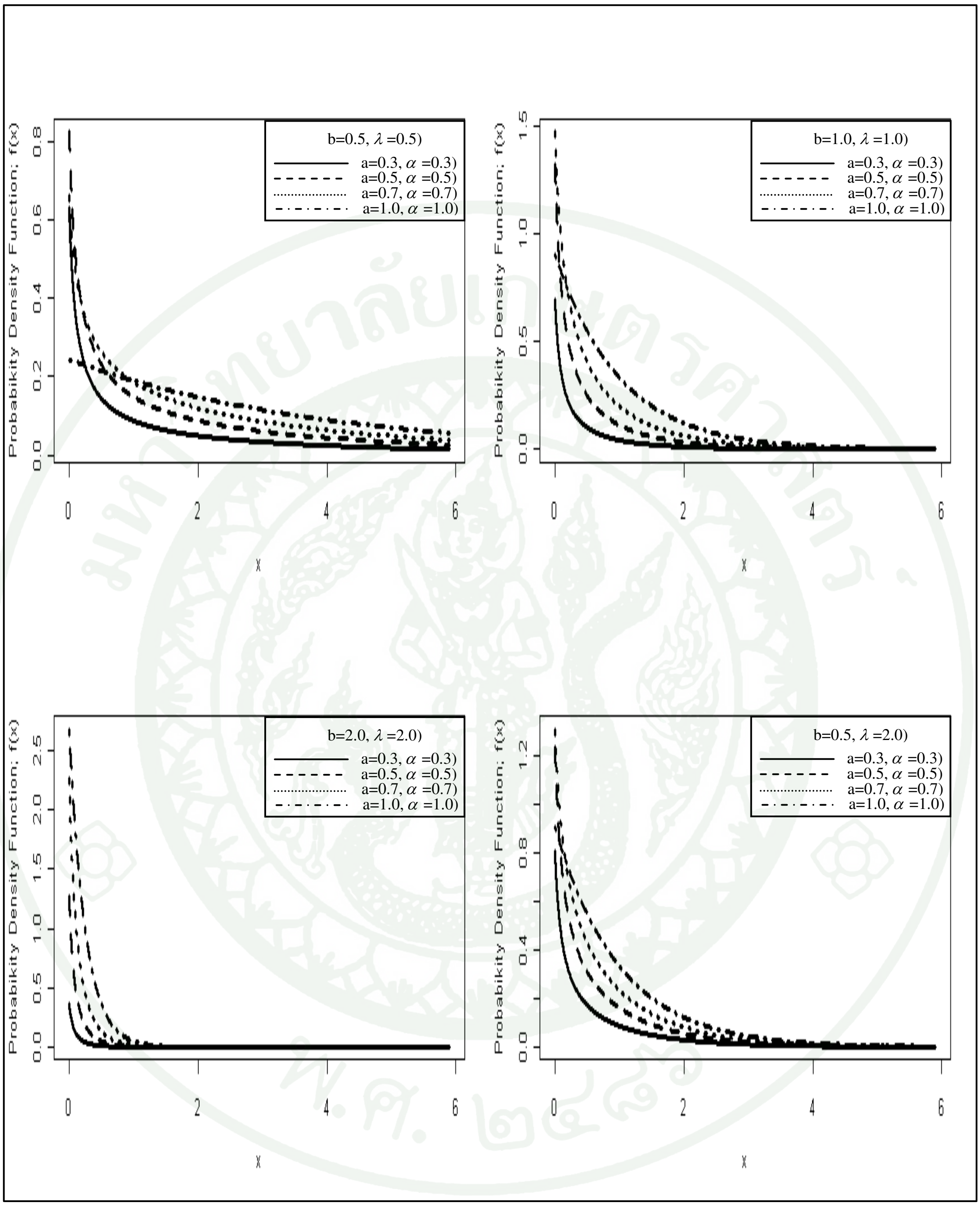
$$f(x) \;=\; \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}(1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha})^{b-1}, \quad x>0$$

จากการศึกษาลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปซึ่งเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี 4 พารามิเตอร์ คือ a,b,λ และ α โดยทำการศึกษาจากการเขียนกราฟตามค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ผลที่ได้พบว่า รูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป สามารถจัดแบ่งได้ 2 ลักษณะดังนี้

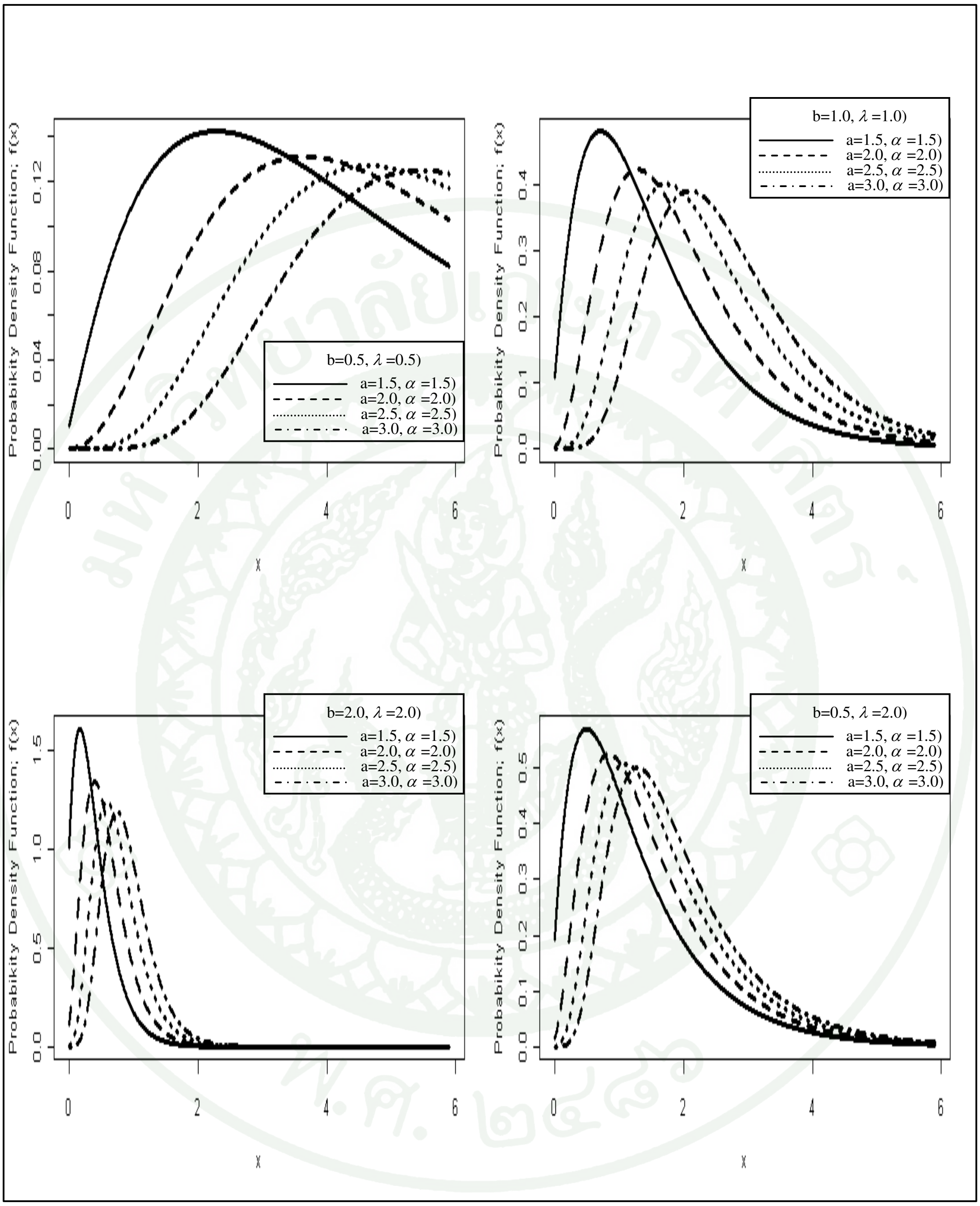
กรณีที่ 1 พารามิเตอร์ $0<a\leq 1, 0<\alpha\leq 1, b>0$ และ $\lambda>0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียว และมีค่าไม่เป็นลบ

กรณีที่ 2 พารามิเตอร์ $a>1, \alpha>1, b>0$ และ $\lambda>0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่ม ฟังก์ชันลด มีค่าไม่เป็นลบ และมีการแจกแจงในลักษณะที่เบ้ขวา

ผลจากการเขียนกราฟทั้ง 2 ลักษณะข้างต้นจะพบว่ารูปร่างลักษณะของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a และ α โดยไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ b และ λ ในทุกๆ กรณีที่ได้ทำการศึกษา ดังนั้นกล่าวได้ว่าพารามิเตอร์ a และ α เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) ส่วนพารามิเตอร์ b และ λ เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (scale parameter) โดยศึกษาได้จากภาพที่ 5-6



ภาพที่ 5 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a \le 1, 0 < \alpha \le 1, b > 0$ และ $\lambda > 0$



ภาพที่ 6 กราฟแสดงโค้งการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อพารามิเตอร์ $a > 0, \alpha > 0, b > 0$ และ $\lambda > 0$

1.2 ลักษณะและรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

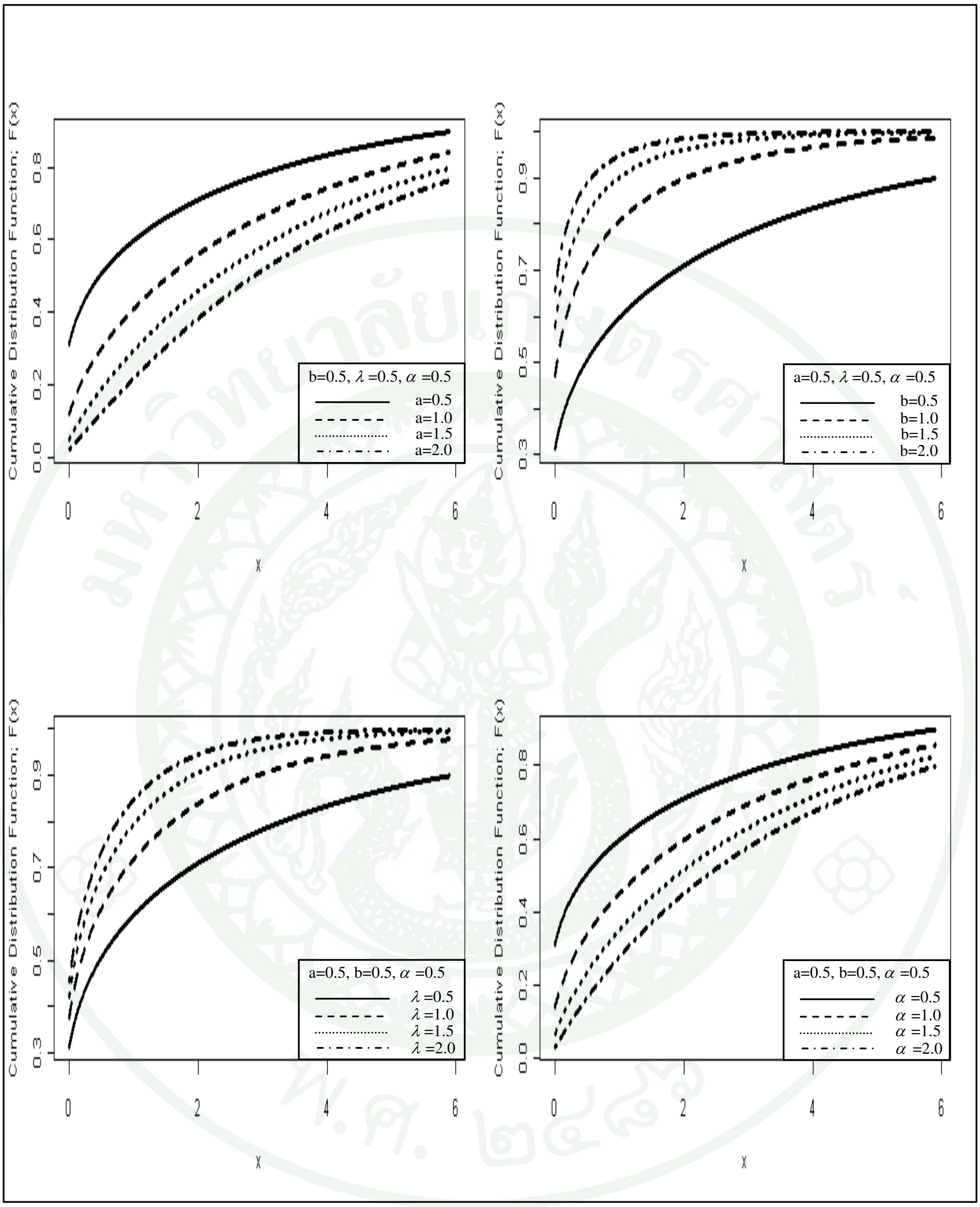
ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะมีลักษณะฟังก์ชันน่าจะเป็นสะสมคือ

$$F(x) = \frac{B_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(a,b)}{B(a,b)} \quad ,x>0$$

จากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสามารถเขียนกราฟได้ดังภาพที่ 7 จากภาพสามารถจัดแบ่งลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมได้เป็น 2 ลักษณะตามฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมดังนี้

กรณีที่ 1 พารามิเตอร์ $a>0$ หรือ $\alpha>0$ และ $b>0,\lambda>0$ พบว่าเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α พารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ลักษณะกราฟจะโค้งชันลดลง ดังนั้นการลู่เข้าสู่ 1 จะลดลง

กรณีที่ 2 พารามิเตอร์ $b>0$ หรือ $\lambda>0$ และ $a>0,\alpha>0$ พบว่าเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α พารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ลักษณะกราฟจะโค้งชันเพิ่มขึ้น ดังนั้นการลู่เข้าสู่ 1 จะเพิ่มขึ้น



ภาพที่ 7 กราฟแสดงโค้งการแจกแจงสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป เมื่อพารามิเตอร์ $a > 0, \alpha > 0, b > 0$ และ $\lambda > 0$

1.3 ลักษณะและรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความน่าเชื่อถือ

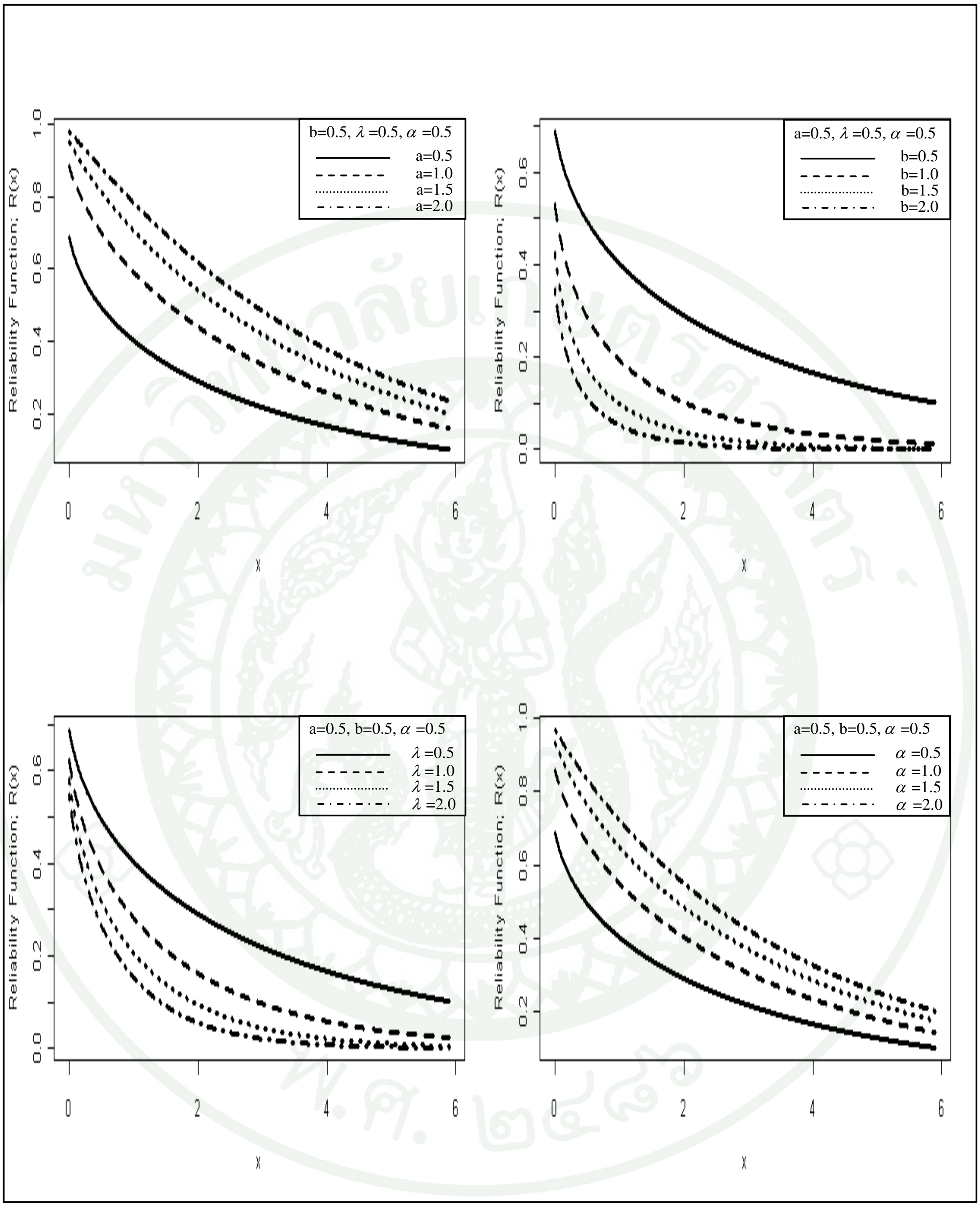
ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะมีลักษณะฟังก์ชันความน่าเชื่อถือได้คือ

$$R(x) = \frac{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}{B(a,b)} \quad ,x>0$$

จากฟังก์ชันความน่าเชื่อถือได้ของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสามารถเขียนกราฟได้ดังภาพที่ 8 จากภาพสามารถจัดแบ่งลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความเชื่อถือได้เป็น 2 ลักษณะดังนี้

กรณีที่ 1 พารามิเตอร์ $a>0$ หรือ $\alpha>0$ และ $b>0,\lambda>0$ พบว่าเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α พารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ลักษณะกราฟจะโค้งชันลดลง ดังนั้นการลู่เข้าสู่ 0 จะลดลง

กรณีที่ 2 พารามิเตอร์ $b>0$ หรือ $\lambda>0$ และ $a>0,\alpha>0$ พบว่าเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α พารามิเตอร์เพิ่มขึ้น ลักษณะกราฟจะโค้งชันเพิ่มขึ้น ดังนั้นการลู่เข้าสู่ 0 จะเพิ่มขึ้น



ภาพที่ 8 กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อ พารามิเตอร์ $a > 0, \alpha > 0, b > 0$ และ $\lambda > 0$

1.4 ลักษณะและรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

ตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะมีลักษณะฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงคือ

$$h(x) = \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}(1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha})^{b-1}}{B(a,b)I_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}, \quad x > 0$$

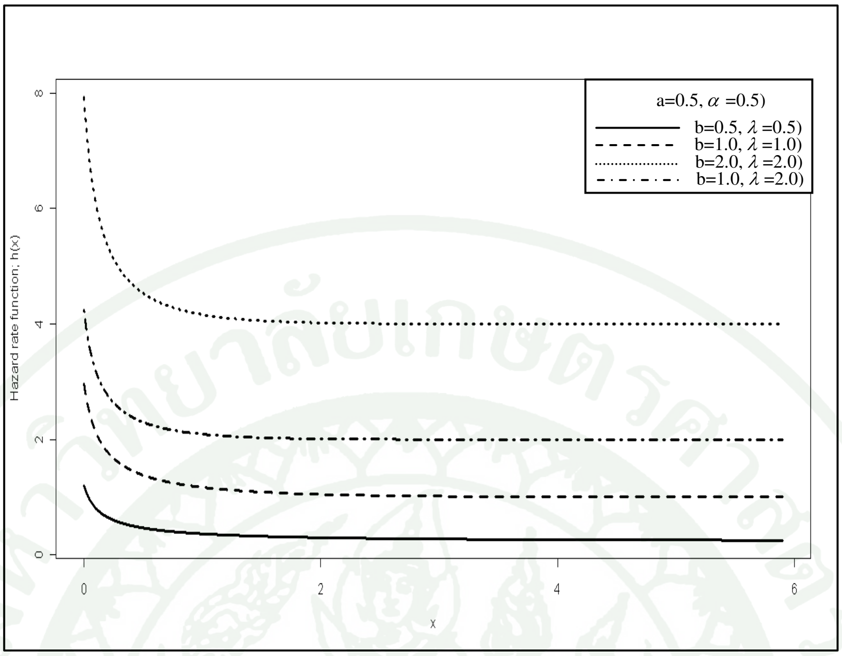
จากการศึกษาลักษณะของฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงสำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป โดยทำการศึกษาจากการเขียนกราฟตามค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ผลที่ได้พบว่า รูปร่างของฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสามารถจัดแบ่งได้ 3 ลักษณะดังนี้

กรณีที่ 1 พารามิเตอร์ $0 < a < 1, 0 < \alpha < 1, b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียว และมีค่าไม่เป็นลบ

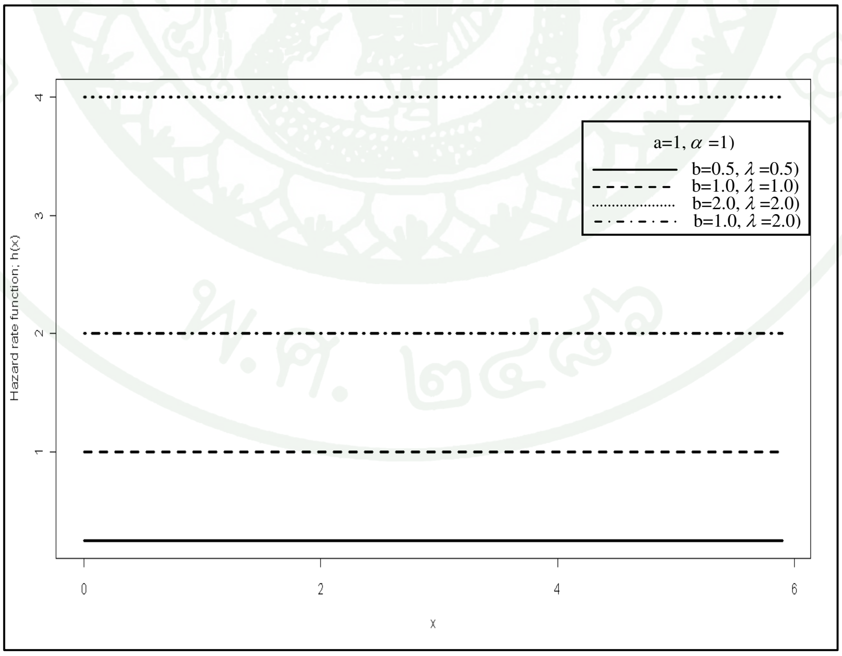
กรณีที่ 2 พารามิเตอร์ $a = 1, \alpha = 1, b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันคงที่

กรณีที่ 3 พารามิเตอร์ $a > 1, \alpha > 1, b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มอย่างเดียว และมีค่าไม่เป็นลบ

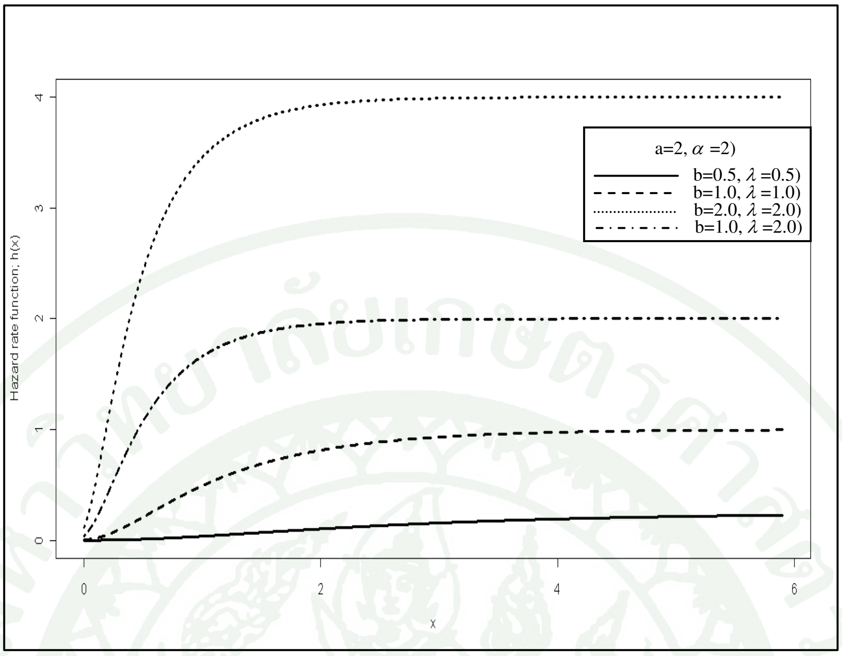
ผลจากการเขียนกราฟทั้ง 3 ลักษณะข้างต้นจะพบว่ารูปร่างลักษณะของฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงสำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a และ α โดยไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ b และ λ ในทุกๆ กรณีที่ได้ทำการศึกษา โดยศึกษาได้จาดภาพที่ 9-11



ภาพที่ 9 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อ พารามิเตอร์ $0 < a < 1, 0 < \alpha < 1$ และ $b > 0, \lambda > 0$



ภาพที่ 10 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อ พารามิเตอร์ $a = 1, \alpha = 1$ และ $b > 0, \lambda > 0$



ภาพที่ 11 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อพารามิเตอร์ $a > 0, \alpha > 0$ และ $b > 0, \lambda > 0$

1.5 รูปแบบฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด และฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

จากการศึกษาฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ สามารถหารูปแบบฟังก์ชันเหล่านี้ได้ดังนี้

ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด

1 เมื่อ $b > 0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดได้เป็น

$$M_X(t) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\, j!} B(1 - t/\lambda, \alpha(a+j)) \quad \text{เมื่อ } t < \lambda$$

2 เมื่อ $b>0$ และเป็นจำนวนเต็ม จะเขียนฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดได้เป็น

$$M_X(t)=\frac{\alpha}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j B(1-t/\lambda,\alpha(a+j)) \quad \text{เมื่อ } t<\lambda$$

ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

1 เมื่อ $b>0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม จะเขียนฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดได้เป็น

$$\phi_X(t)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}B(1-ti/\lambda,\alpha(a+j)) \quad \text{เมื่อ } i=-1$$

2 เมื่อ $b>0$ และเป็นจำนวนเต็ม จะเขียนฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดได้เป็น

$$\phi_X(t)=\frac{\alpha}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j B(1-ti/\lambda,\alpha(a+j)) \quad \text{เมื่อ } i=-1$$

1.6 ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

จากโมเมนต์ที่1 ,2 ,3 และ โมเมนต์ที่ 4 รอบจุดกำเนิด สามารถคำนวณหาค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง สำหรับพารามิเตอร์ a,b,λ และ α ตามพารามิเตอร์ที่กำหนดได้ดังนี้

ตารางที่ 2 ค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของพารามิเตอร์ พารามิเตอร์ a, b, λ และ α

พารามิเตอร์				ค่าที่แท้จริง			
a	b	λ	α	ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้	ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง
0.5	0.5	0.5	0.5	2.020	10.761	2.860	14.487
			1.0	2.773	13.159	2.417	11.398
			2.0	3.719	15.273	2.094	9.511
		1.0	0.5	1.010	2.690	2.860	14.487
			1.0	1.386	3.290	2.417	11.398
			2.0	1.859	3.818	2.094	9.511
		2.0	0.5	0.505	0.673	2.860	14.487
			1.0	0.693	0.822	2.417	11.398
			2.0	0.930	0.955	2.094	9.511
	1.0	0.5	0.5	0.700	1.790	3.594	21.527
			1.0	1.227	2.841	2.632	13.083
			2.0	2.000	4.000	2.000	9.000
		1.0	0.5	0.350	0.448	3.594	21.527
			1.0	0.614	0.710	2.632	13.083
			2.0	1.000	1.000	2.000	9.000
		2.0	0.5	0.175	0.112	3.594	21.527
			1.0	0.307	0.178	2.632	13.083
			2.0	0.500	0.250	2.000	9.000
	2.0	0.5	0.5	0.225	0.247	4.542	33.906
			1.0	0.561	0.618	2.763	14.301
			2.0	1.167	1.194	1.795	7.773

ตารางที่ 2 (ต่อ)

พารามิเตอร์				ค่าที่แท้จริง			
a	b	λ	α	ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้	ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง
0.5	2.0	1.0	0.5	0.112	0.062	4.542	33.906
			1.0	0.280	0.155	2.763	14.301
			2.0	0.583	0.299	1.795	7.773
		2.0	0.5	0.056	0.015	4.542	33.907
			1.0	0.140	0.039	2.763	14.301
			2.0	0.292	0.075	1.795	7.773
1.0	0.5	0.5	0.5	3.014	13.935	2.298	10.648
			1.0	4.000	16.000	2.000	8.998
			2.0	5.142	17.496	1.805	8.071
		1.0	0.5	1.507	3.484	2.298	10.648
			1.0	2.000	4.000	2.000	8.998
			2.0	2.571	4.374	1.805	8.070
		2.0	0.5	0.754	0.871	2.298	10.648
			1.0	1.000	1.000	2.000	8.998
			2.0	1.285	1.094	1.805	8.071
	1.0	0.5	0.5	1.227	2.841	2.632	13.083
			1.0	2.000	4.000	2.000	9.000
			2.0	3.000	5.000	1.610	7.080
		1.0	0.5	0.614	0.710	2.632	13.083
			1.0	1.000	1.000	2.000	9.000
			2.0	1.500	1.250	1.610	7.080
		2.0	0.5	0.307	0.178	2.632	13.083
			1.0	0.500	0.250	2.000	9.000
			2.0	0.750	0.313	1.610	7.080

ตารางที่ 2 (ต่อ)

พารามิเตอร์				ค่าที่แท้จริง			
a	b	λ	α	ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้	ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง
1.0	2.0	0.5	0.5	0.455	0.487	3.126	17.623
			1.0	1.000	1.000	2.000	9.000
			2.0	1.833	1.583	1.390	5.986
		1.0	0.5	0.227	0.122	3.126	17.623
			1.0	0.500	0.250	2.000	9.000
			2.0	0.917	0.396	1.390	5.986
		2.0	0.5	0.114	0.030	3.126	17.623
			1.0	0.250	0.063	2.000	9.000
			2.0	0.458	0.099	1.390	5.986
2.0	0.5	0.5	0.5	4.174	16.350	1.954	8.766
			1.0	5.333	17.778	1.771	7.918
			2.0	6.594	18.659	1.663	7.472
		1.0	0.5	2.087	4.087	1.954	8.765
			1.0	2.667	4.444	1.771	7.917
			2.0	3.297	4.665	1.663	7.471
		2.0	0.5	1.043	1.022	1.954	8.766
			1.0	1.333	1.111	1.771	7.918
			2.0	1.648	1.166	1.663	7.472
	1.0	0.5	0.5	2.000	4.000	2.000	9.000
			1.0	3.000	5.000	1.610	7.080
			2.0	4.167	5.694	1.387	6.194
		1.0	0.5	1.000	1.000	2.000	9.000
			1.0	1.500	1.250	1.610	7.080
			2.0	2.083	1.424	1.387	6.194

ตารางที่ 2 (ต่อ)

พารามิเตอร์				ค่าที่แท้จริง			
a	b	λ	α	ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้	ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง
2.0	1.0	2.0	0.5	0.500	0.250	2.000	9.000
			1.0	0.750	0.313	1.610	7.080
			2.0	1.042	0.356	1.387	6.194
	2.0	0.5	0.5	0.879	0.877	2.172	10.097
			1.0	1.667	1.444	1.493	6.444
			2.0	2.700	1.926	1.133	5.098
		1.0	0.5	0.439	0.219	2.172	10.097
			1.0	0.833	0.361	1.493	6.444
			2.0	1.350	0.481	1.133	5.098
		2.0	0.5	0.220	0.055	2.172	10.097
			1.0	0.417	0.090	1.493	6.444
			2.0	0.675	0.120	1.133	5.098

จากตารางที่ 2 พบว่าค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α มีค่าเพิ่มขึ้น และจะมีค่าลดลงเมื่อพารามิเตอร์ b หรือ λ มีค่าเพิ่มขึ้น

ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ จะมีค่าลดลงเมื่อพารามิเตอร์ a หรือ α มีค่าเพิ่มขึ้น ส่วนพารามิเตอร์ b นั้น เมื่อมีค่าเพิ่มขึ้นจะทำให้ค่าค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงนี้มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ พารามิเตอร์ $a \le 1$ หรือ $\alpha \le 1$ จะมีค่าคงที่ พารามิเตอร์ $a = 1$ และ $\alpha = 1$ และมีค่าลดลงเมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ หรือ $\alpha > 1$

สำหรับกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ พารามิเตอร์ $a = 1$ และ $\alpha = 1$ เมื่อพารามิเตอร์ b และ λ มีค่าใดๆ แล้วจะได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งจะมีค่าคงที่ ไม่มีการ

เปลี่ยนแปลงใดๆ จะมีค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเท่ากับ 2.000 และ 9.000 ตามลำดับ

1.7 การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

การสร้างค่าตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, ..., X_n$ ที่มีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ และ α สามารถทำได้ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $B \sim B(a,b)$ นั่นคือกำหนดให้ B มีการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b

ขั้นที่ 2 แทนค่า B ลงในสูตรดังต่อไปนี้

$$X_i = -\frac{1}{\lambda}[\ln(1-B^{\frac{1}{\alpha}})] \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, ..., n$$

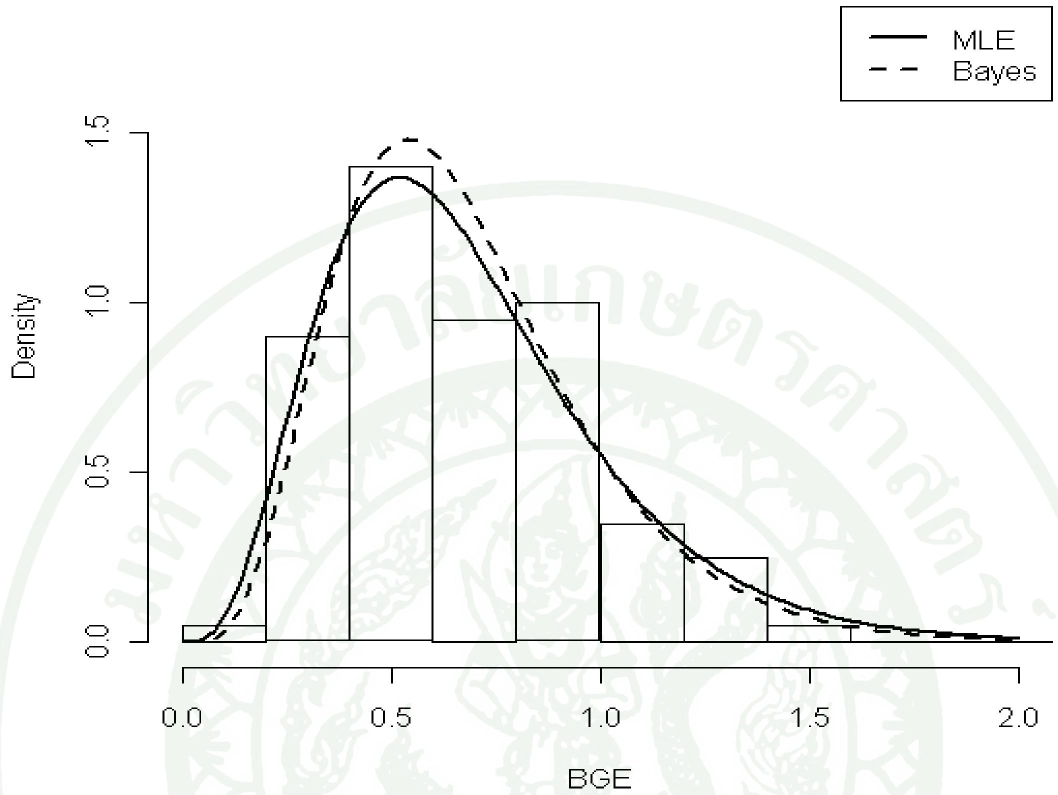
จากสูตรข้างต้นจะทำให้ตัวแปรสุ่มที่ได้มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ และ α ซึ่งสามารถสร้างตัวแปรสุ่มได้โดยการพัฒนาโปรแกรม R ได้ดังนี้

เขียนโปรแกรม R สำหรับการสร้างตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป เมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ (ดูโปรแกรมในภาคผนวก ข)

จะได้ค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a,b,\lambda,\alpha = 2,2,2,2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ ดังนี้

0.4245541	0.3415085	0.9576739	1.0058174	0.6141994
0.6156738	0.4524845	0.5617926	0.8345432	0.7872328
0.5440426	0.9704820	0.2878799	0.4387388	0.5968559
0.5327502	0.4841001	0.9395217	1.1902290	0.3028110
0.3647384	0.6651940	0.2736679	0.9183091	0.7520611
0.4177177	0.5004574	0.6628234	0.1359464	0.2732448
0.6253476	0.5179020	0.6426854	0.3777827	0.7651737
0.3495616	0.9174759	0.2356259	0.5928888	0.5096336
0.8249767	0.3012211	0.2968921	0.6588177	0.4862974
0.8486266	1.0394127	0.4790791	0.4186654	1.0167853
0.6941269	1.2267480	0.8825478	0.9268861	1.5832014
0.5158401	0.9431703	0.5501995	0.2692853	0.8363881
0.2092461	1.2818672	0.2855668	0.3541108	0.8773327
0.9358979	0.7432963	0.6001307	1.3497436	0.8248320
0.6651005	0.4998715	0.4975836	0.4925676	0.5530934
0.5627639	0.5652993	0.7151214	0.8336165	0.7450451
1.3336781	0.8209442	0.5575405	0.5879119	1.0747002
0.9105339	2.2240796	1.1978190	0.5999987	0.2083330
0.8804818	0.4998974	1.3500032	0.8099329	0.2075965
0.6885765	0.7448257	1.1592641	0.2379313	0.6261389

จากค่าตัวแปรสุ่มสามารถเขียนกราฟได้ดังภาพที่ 12



ภาพที่ 12 ฮิสโตแกรมแสดงค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป เทียบกับโค้งของการแจกแจงสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ ดังนี้

2. การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี

2.1 ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ

ทำการทดสอบตัวแปรสุ่มว่ามีการแจกแจงตามที่คาดหวังซึ่งสามารถคำนวณค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟโดยใช้โปรแกรม R ภายใต้สถานการณ์ที่กำหนดดังนี้ พารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ จากค่าตัวแปรสุ่มที่ได้ในข้อที่ 1.6

คำสั่งโปรแกรม R สำหรับการทดสอบโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟสำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (ดูโปรแกรมในภาคผนวก ข)

2.2 ตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

ทำการทดสอบตัวแปรสุ่มว่ามีการแจกแจงตามที่คาดหวังซึ่งสามารถคำนวณค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงโดยใช้โปรแกรม R ภายใต้สถานการณ์ที่กำหนดดังนี้ พารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ จากค่าตัวแปรสุ่มที่ได้ในข้อที่ 1.6

คำสั่งโปรแกรม R สำหรับการทดสอบ โดยใช้ตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงสำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (ดูโปรแกรมในภาคผนวก ข)

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวน สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ด้วยพารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$

ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน
0.6849	0.1146

ตารางที่ 4 ค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และค่าสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$

สถิติทดสอบ							
โคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ				แอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง			
MLE	p-value	Bayes	p-value	MLE	p-value	Bayes	p-value
0.0588	0.8798	0.0709	0.6962	2.791	0.9529	0.5523	0.6938

จากตารางที่ 3 และ 4 พบว่าตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a, b, \lambda, \alpha = 2, 2, 2, 2$ และขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0.6849 ค่าความแปรปรวนเท่ากับ 0.1146 พบว่าค่าสถิติโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟและค่าสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงด้วยการประมาณค่าพารามิเตอร์ของทั้ง 2 วิธี ให้ค่า p-value มากกว่าระดับนัยสำคัญทุกกรณี แสดงว่าข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

3. การประมาณค่าพารามิเตอร์

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ ซึ่งทำการศึกษาด้วยการจำลองค่าตัวแปรสุ่มตามลักษณะที่กำหนด และทำการจำลองซ้ำจำนวน 500 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดขึ้น โดยใช้ MSE เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20,50,100 และ 250 กำหนดพารามิเตอร์ a, b, λ และ α เท่ากับ 0.5, 1.0 และ 2.0 จะมีทั้งหมด 324 กรณี

ผลที่ได้พบว่าการประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ ด้วยวิธีเบส์เกือบทั้งหมดจะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 4 ตัวที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE จะพบว่าวิธีเบส์ ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่า MSE มีแนวโน้มลดลง ในตารางที่ 5 ภาพที่ 13-14

ยกเว้น 3 กรณีที่บางพารามิเตอร์ วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด จะให้ค่าประมาณพารามิเตอร์นี้ใกล้เคียงกว่าวิธีเบส์ คือ

1. เมื่อพารามิเตอร์ a, b, λ และ α มีค่าเท่ากับ 0.5, 0.5, 0.5 และ 2.0

2. เมื่อพารามิเตอร์ a, b, λ และ α มีค่าเท่ากับ 0.5, 0.5, 1.0 และ 2.0

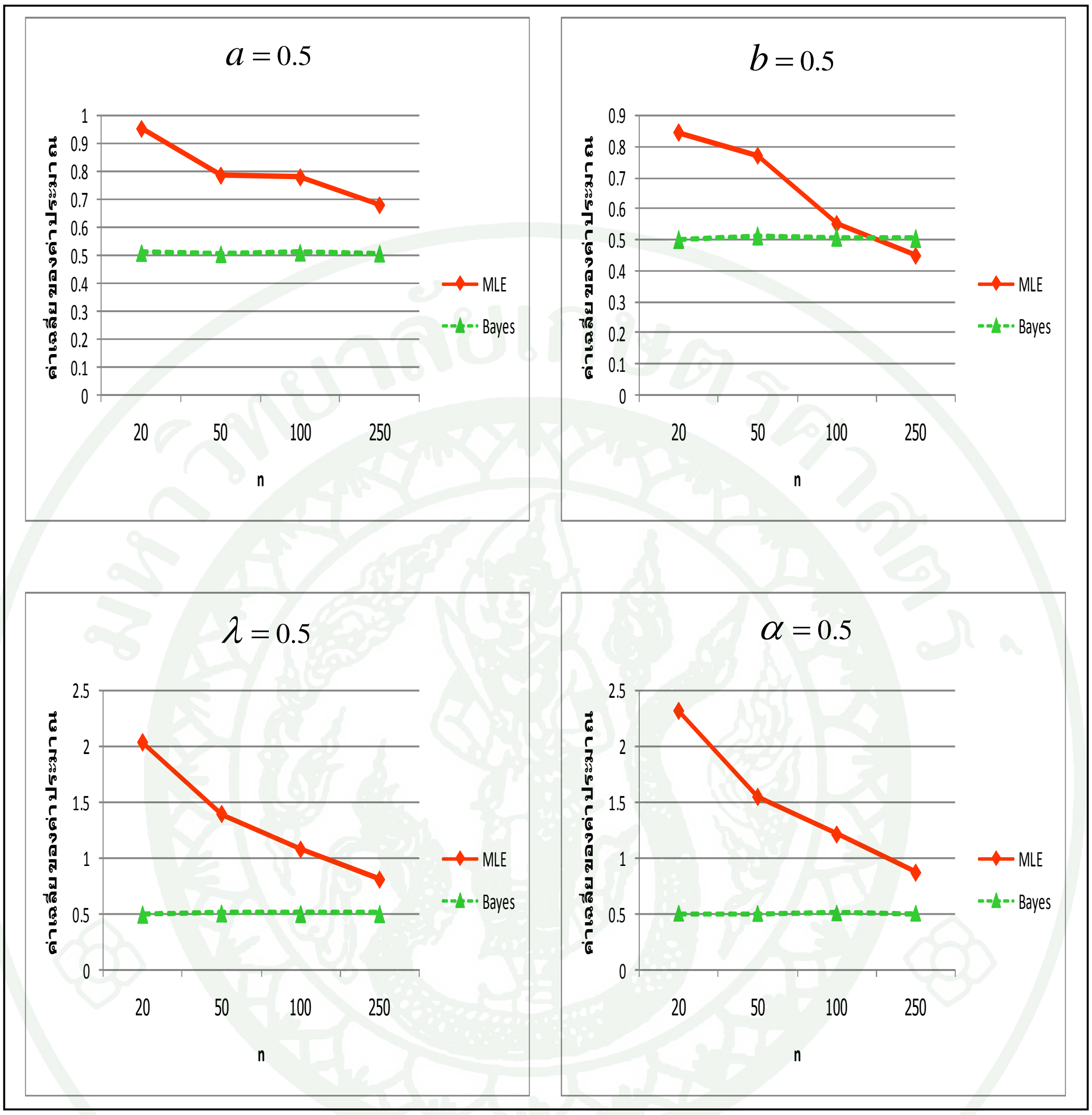
3. เมื่อพารามิเตอร์ a, b, λ และ α มีค่าเท่ากับ 2.0, 1.0, 2.0 และ 2.0

ในตารางที่ 6-8 ภาพที่ 15-20

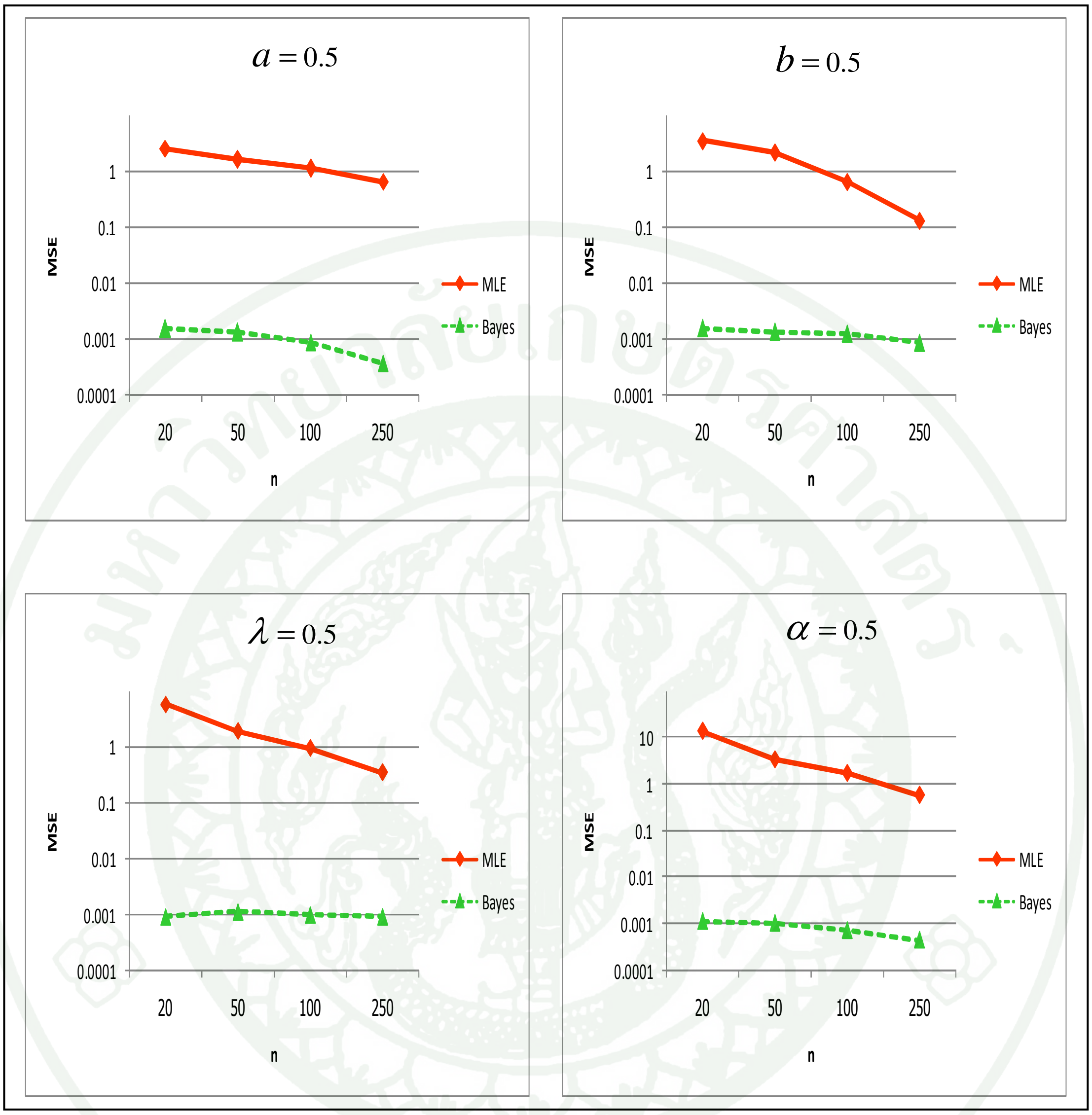
ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ $\alpha = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ MLE	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ Bayes	MSE MLE	MSE Bayes
20	a	0.952	*0.507	2.492	1.502×10^{-3}
	b	0.844	*0.499	3.457	1.54×10^{-3}
	λ	2.027	*0.501	5.761	9.07×10^{-4}
	α	2.305	*0.507	13.321	1.144×10^{-3}
50	a	0.784	*0.503	1.594	1.306×10^{-3}
	b	0.769	*0.511	2.170	1.33×10^{-3}
	λ	1.392	*0.510	1.911	1.116×10^{-3}
	α	1.541	*0.505	3.257	1.044×10^{-3}
100	a	0.778	*0.509	1.110	8.64×10^{-4}
	b	0.551	*0.506	0.646	1.228×10^{-3}
	λ	1.078	*0.506	0.944	9.82×10^{-4}
	α	1.206	*0.510	1.652	7.26×10^{-4}
250	a	0.677	*0.506	0.637	3.71×10^{-4}
	b	0.449	*0.503	0.131	8.45×10^{-4}
	λ	0.810	*0.506	0.342	9.17×10^{-4}
	α	0.867	*0.507	0.561	4.5×10^{-4}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 13 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยค่าประมาณของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a,b,λ,α เมื่อกำหนด $a=0.5$, $b=0.5$, $\lambda=0.5$ และ $\alpha=0.5$



ภาพที่14 กราฟเปรียบเทียบ MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ, α เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ $\alpha = 0.5$

จากตางที่ 5 และภาพที่ 13-14 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a,b,λ,α เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ $\alpha = 0.5$

พารามิเตอร์ a การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE จะพบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ b การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์ จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

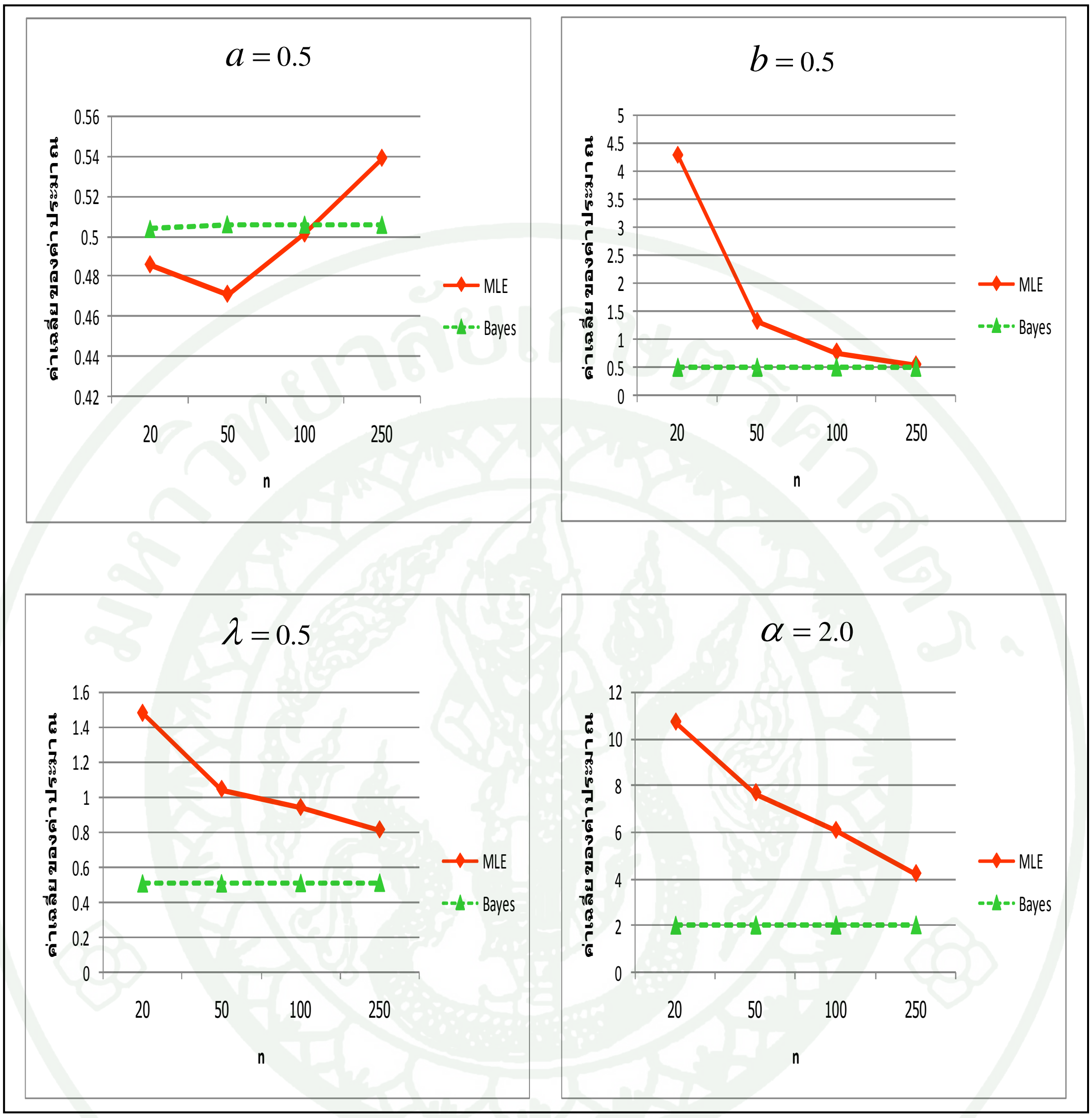
พารามิเตอร์ λ การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ α การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

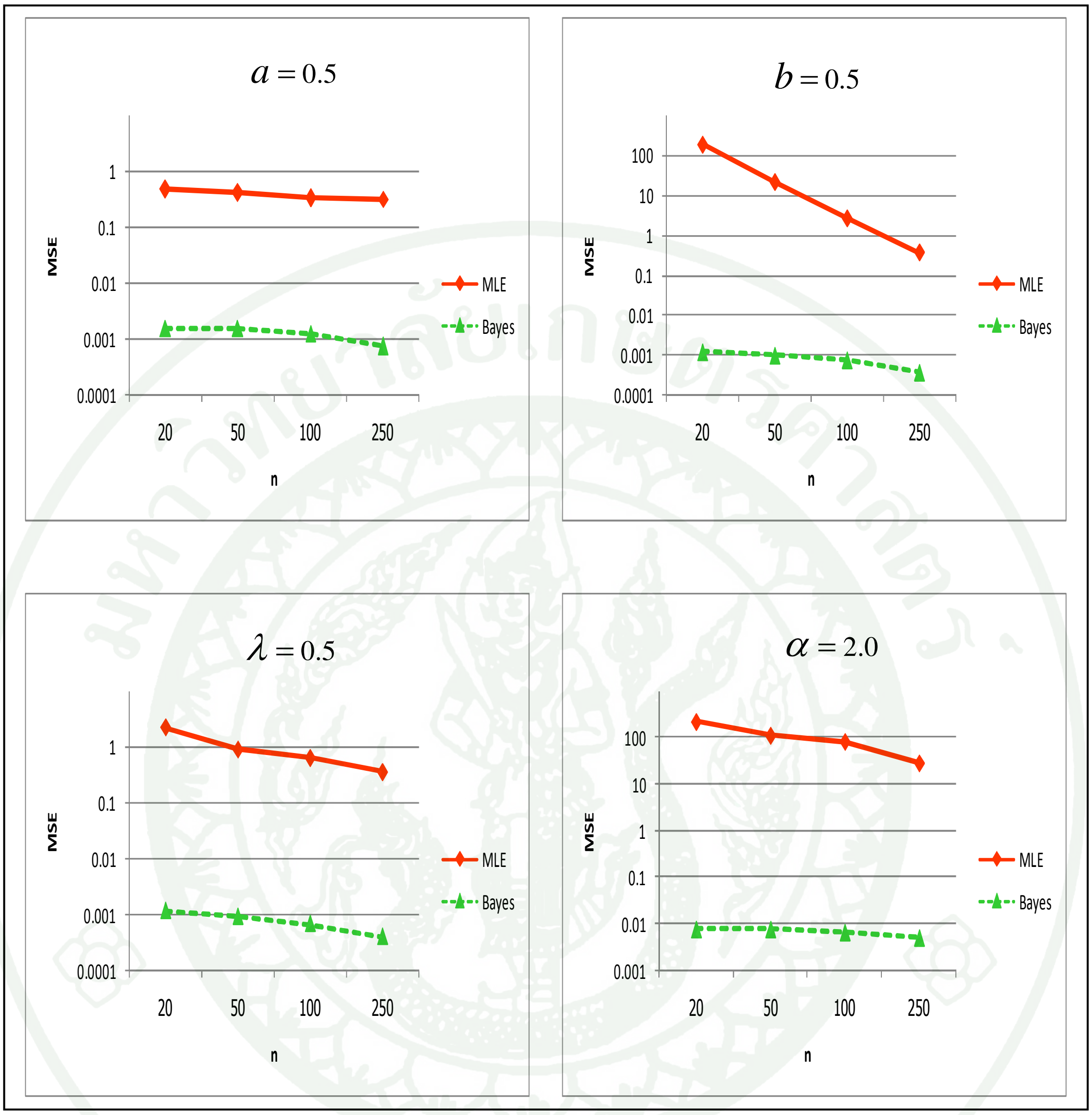
ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ $\alpha = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ (*parameter*)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ MLE	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ Bayes	MSE MLE	MSE Bayes
20	a	0.486	*0.504	0.469	1.542×10^{-3}
	b	4.290	*0.504	184.824	1.184×10^{-3}
	λ	1.475	*0.505	2.220	1.196×10^{-3}
	α	10.699	*2.008	216.740	7.756×10^{-3}
50	a	0.471	*0.506	0.402	1.527×10^{-3}
	b	1.319	*0.504	210.609	9.64×10^{-4}
	λ	1.043	*0.505	0.887	9.3×10^{-4}
	α	7.680	*2.016	110.132	7.748×10^{-4}
100	a	*0.501	0.506	0.324	1.234×10^{-3}
	b	0.767	*0.506	2.561	7.4×10^{-4}
	λ	0.938	*0.507	0.628	6.88×10^{-4}
	α	6.077	*2.015	81.312	6.646×10^{-3}
250	a	0.538	*0.506	0.318	7.3×10^{-4}
	b	0.539	*0.505	0.347	3.57×10^{-4}
	λ	0.810	*0.508	0.35	3.99×10^{-4}
	α	4.225	*2.017	28.178	5.07×10^{-3}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 15 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยค่าประมาณของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a,b,λ,α เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ $\alpha = 2.0$



ภาพที่ 16 กราฟเปรียบเทียบ MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a,b,λ,α เมื่อกำหนด $a=0.5$, $b=0.5$, $\lambda=0.5$ และ $\alpha=2.0$

จากตางที่ 6 และภาพที่ 15-16 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a,b,λ,α เมื่อกำหนดพารามิเตอร์ $a=0.5$, $b=0.5$, $\lambda=0.5$ และ $\alpha=2.0$

พารามิเตอร์ a การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยและวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ยกเว้นกรณีที่ขนาดตัวอย่างที่ 100 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะให้ค่าประมาณพารามิเตอร์นี้ใกล้เคียงกว่าและวิธีเบส์ เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ b การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยและวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE จะพบว่าวิธีเบส์วิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างจะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

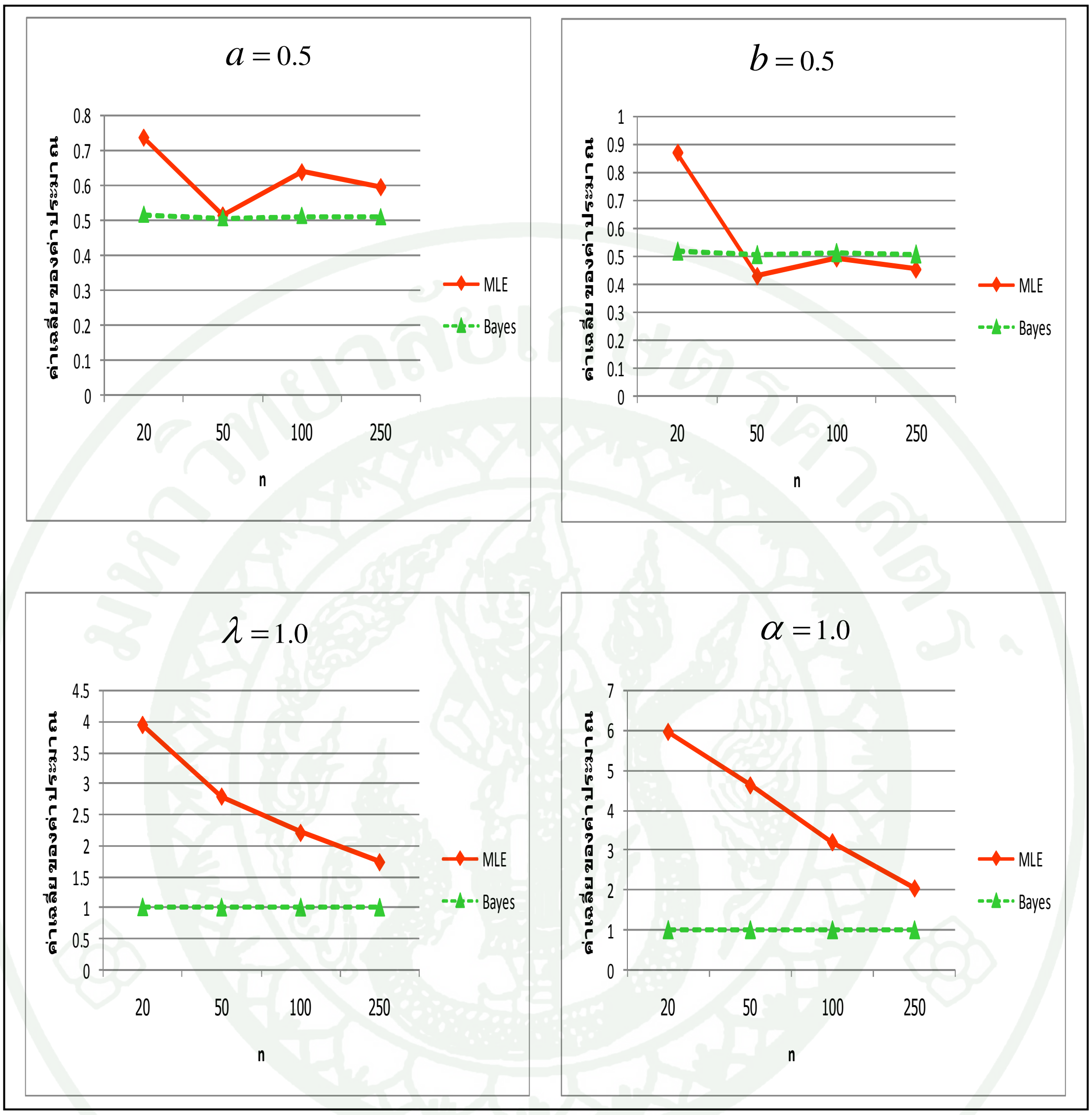
พารามิเตอร์ λ การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ ด้วยและวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE จะพบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ α การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยและวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นอย่างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

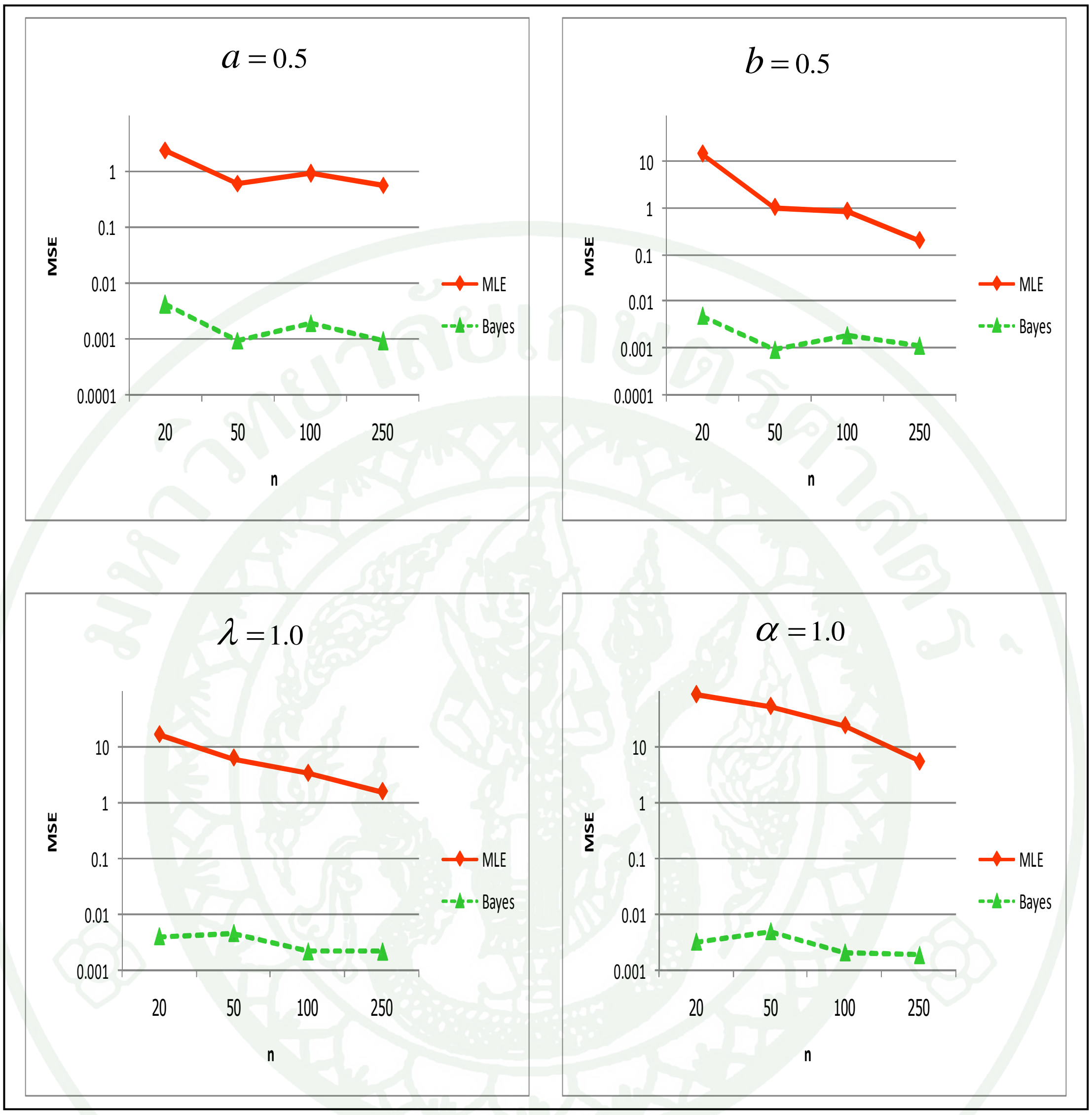
ตารางที่ 7 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ $\alpha = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง	**พารามิเตอร์**	**ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ**		**MSE**	
(n)	(*parameter*)	**MLE**	**Bayes**	**MLE**	**Bayes**
20	a	0.733	*0.516	2.382	4.06×10^{-3}
	b	0.876	*0.517	14.513	4.953×10^{-3}
	λ	3.933	*1.019	16.170	4.122×10^{-3}
	α	5.947	*1.017	84.277	3.219×10^{-3}
50	a	0.512	*0.505	0.593	9.52×10^{-4}
	b	0.430	*0.505	1.037	9.46×10^{-4}
	λ	2.789	*1.016	6.190	4.699×10^{-3}
	α	4.615	*1.016	52.242	4.919×10^{-3}
100	a	0.635	*0.513	0.886	1.929×10^{-3}
	b	*0.493	0.512	0.852	1.925×10^{-3}
	λ	2.208	*1.015	3.297	2.231×10^{-3}
	α	3.199	*1.015	24.064	2.073×10^{-3}
250	a	0.593	*0.509	0.557	9.11×10^{-4}
	b	0.454	*0.507	0.199	1.153×10^{-3}
	λ	1.741	*1.014	1.552	2.221×10^{-3}
	α	2.052	*1.014	5.556	1.866×10^{-3}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 17 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยค่าประมาณของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ, α เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ $\alpha = 1.0$



ภาพที่ 18 กราฟเปรียบเทียบ MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ, α เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ $\alpha = 1.0$

จากตางที่ 7 และภาพที่ 17-18 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณและค่า MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ, α เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ $\alpha = 1.0$

พารามิเตอร์ a การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ b การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ยกเว้นกรณีขนาดตัวอย่างที่ 100 วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีค่าประมาณพารามิเตอร์นี้ใกล้เคียงกว่าวิธีเบส์ เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้น ค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

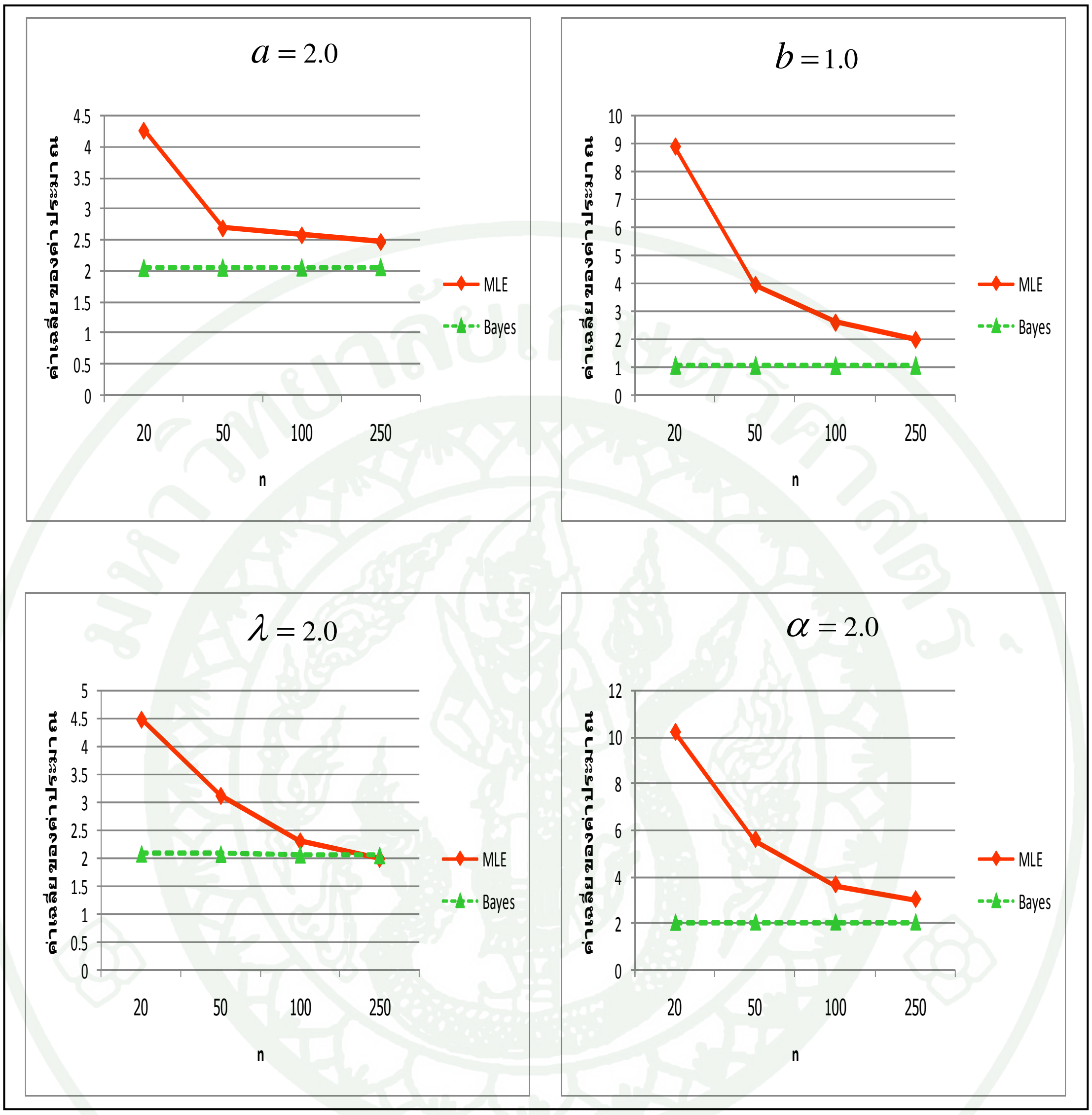
พารามิเตอร์ λ การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ α การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

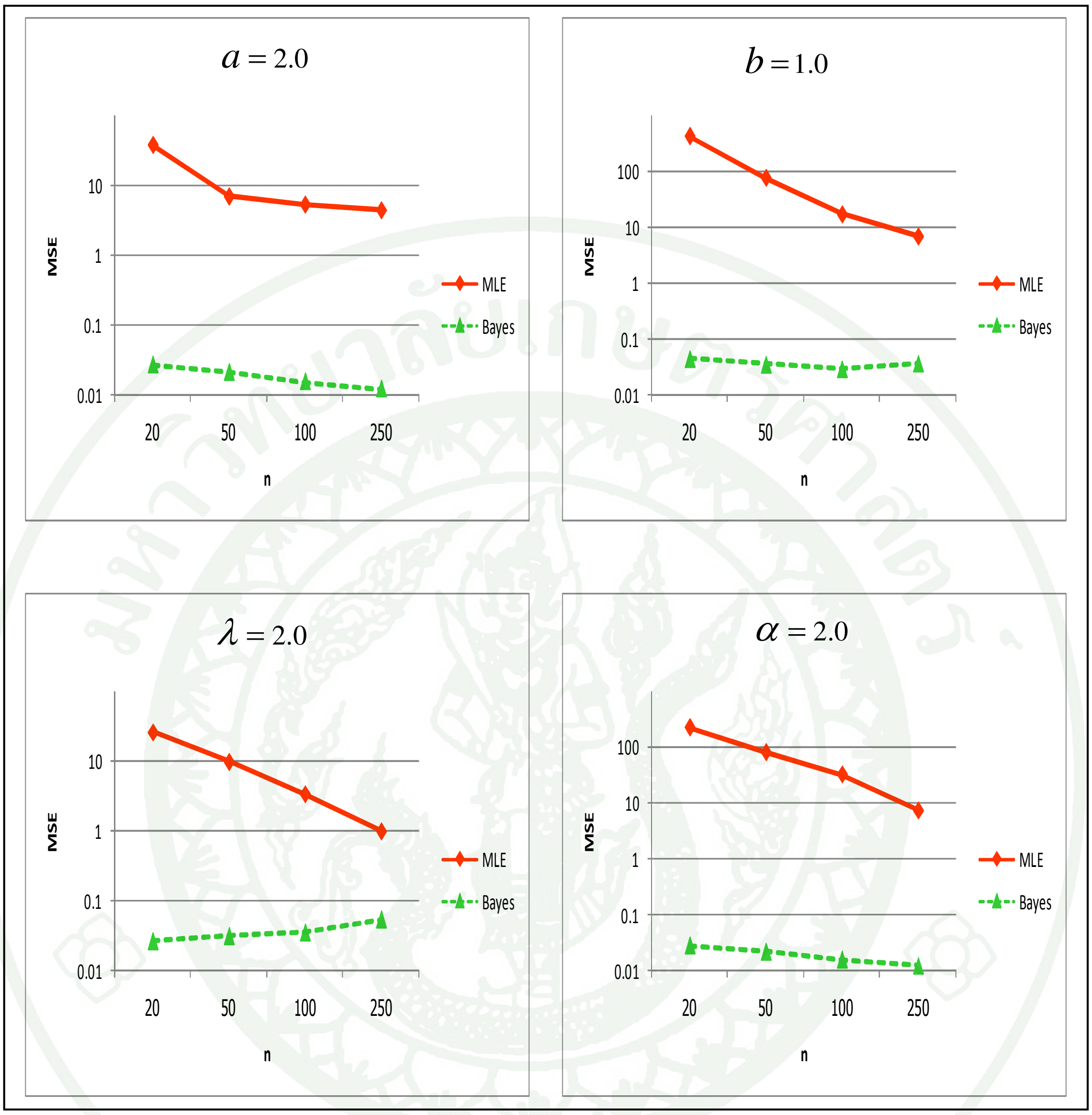
ตารางที่ 8 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0, b = 1.0, \lambda = 2.0$ และ $\alpha = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง	**พารามิเตอร์**	**ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ**		**MSE**	
(n)	**($parameter$)**	**MLE**	**Bayes**	**MLE**	**Bayes**
20	a	4.252	*2.037	37.001	0.027
	b	8.863	*1.088	408.047	0.045
	λ	4.476	*2.075	25.538	0.026
	α	10.205	*2.043	216.857	0.028
50	a	2.679	*2.043	6.940	0.021
	b	3.948	*1.085	74.491	0.035
	λ	3.113	*2.073	9.676	0.030
	α	5.589	*2.047	78.576	0.022
100	a	2.565	*2.045	5.343	0.016
	b	2.603	*1.075	16.955	0.029
	λ	2.300	*2.057	3.346	0.035
	α	3.649	*2.047	31.462	0.016
250	a	2.460	*2.051	4.435	0.012
	b	1.997	*1.087	6.852	0.037
	λ	*1.987	2.045	0.984	0.053
	α	3.017	*2.054	7.180	0.012

หมายเหตุ *ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 19 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยค่าประมาณ ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ, α เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ และ $\alpha = 2.0$



ภาพที่ 20 กราฟเปรียบเทียบ MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a,b,λ,α เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ และ $\alpha = 2.0$

จากตางที่ 8 และภาพที่ 19-20 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ, α ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ และ $\alpha = 2.0$

พารามิเตอร์ a การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างเมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ b การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นอย่างมากเมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ λ การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดค่อนข้างมาก ยกเว้นกรณีขนาดตัวอย่างที่ 250 ค่าประมาณพารามิเตอร์นี้มีค่าใกล้เคียงกว่าวิธีเบส์เมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน สำหรับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดพบว่าเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

พารามิเตอร์ α การประมาณค่าพารามิเตอร์นี้ด้วยวิธีเบส์จะมีค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นอย่างมากเมื่อพิจารณาในส่วนของค่า MSE พบว่าวิธีเบส์จะมีค่า MSE ต่ำกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกขนาดตัวอย่างและมีค่าใกล้เคียงกัน ทั้ง 2 วิธีเมื่อตัวอย่างมีขนาดใหญ่ขึ้นค่า MSE มีแนวโน้มลดลง

4. ความประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

ในการทำวิจัยครั้งนี้ได้นำการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปมาใช้กับข้อมูลจริงเพื่อแสดงการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

ข้อมูลจริง

Kalbfleisch และ Lawless (1992) เก็บรวบรวมระยะเวลาการใช้งานของผ้าเบรค (หน่วย: 1000 กม.) (Lawless, 2003)

38.7	56.2	124.6	77.6	53.9	86.7	68.9	52.0	110.0	55.9
49.2	50.5	64.0	63.7	79.4	43.8	95.7	77.2	101.2	83.8
42.4	54.9	83.0	83.0	47.4	100.6	78.1	68.9	59.4	123.5
73.8	54.0	143.6	24.8	61.4	67.6	83.6	78.7	27.8	69.0
46.7	49.2	43.4	68.8	72.8	89.5	18.6	165.5	33.6	101.9
44.1	44.8	69.6	68.8	54.0	60.3	92.6	79.5	69.0	87.6
61.9	72.2	74.8	89.1	37.2	103.6	42.4	55.0	75.2	38.8
39.3	107.8	32.9	65.0	44.2	82.6	34.3	46.8	58.4	74.4
49.8	81.6	51.5	65.1	50.8	88.0	405.6	124.5	105.6	
46.3	45.2	31.8	59.3	65.5	42.4	20.8	92.5	56.2	

จากข้อมูลจริงทำการศึกษาตามลักษณะของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปได้ดังนี้

4.1 การทดสอบภาวะสารูปสนิทดี

จากข้อมูลทำการทดสอบการแจกแจงของข้อมูลโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง

ตารางที่ 9 ค่าเฉลี่ย และค่าความแปรปรวน สำหรับข้อมูลจริง

ค่าเฉลี่ย	**ค่าความแปรปรวน**
67.730	714.375

ตารางที่ 10 ค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และค่าสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ สำหรับข้อมูลจริงด้วยการประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี

สถิติทดสอบ							
โคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ				**แอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง**			
MLE	**p-value**	**Bayes**	**p-value**	**MLE**	**p-value**	**Bayes**	**p-value**
0.0426	0.9943	0.0472	0.9811	0.127	0.9997	0.1357	0.9994

จากตารางที่ 9-10 พบว่าระยะเวลาในการใช้งานของผ้าเบรคมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 67.730×10^3 กม. ค่าความแปรปรวน 714.375×10^3 กม.^{2} สถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีค่าเท่ากับ 0.0426 ค่า p-value เท่ากับ 0.9943 สำหรับวิธีเบส์มีค่าเท่ากับ 0.0472 ค่า p-value เท่ากับ 0.9811 และสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิงที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดมีค่าเท่ากับ 0.127 ค่า p-value เท่ากับ 0.9997 สำหรับวิธีเบส์มีค่าเท่ากับ 0.1357 ค่า p-value เท่ากับ 0.9994 แสดงว่า ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่ระดับในสำคัญ 0.05 และการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเหมาะสมกับข้อมูลชุดนี้มากกว่าการประมาณค่าเบส์

4.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์

จากข้อมูลจริงนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ได้ดังตารางต่อไปนี้

ตารางที่ 11 ค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดสำหรับข้อมูลจริง

พารามิเตอร์	**ค่าประมาณพารามิเตอร์**
a	1.3955
b	2.3077
λ	0.025
α	4.7904

ตารางที่ 12 ค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์สำหรับข้อมูลจริง

พารามิเตอร์	**ค่าประมาณของพารามิเตอร์**
a	1.3950
b	2.3230
λ	0.0255
α	4.7900

ดังนั้นจากค่าประมาณของพารามิเตอร์ที่ได้จากทั้ง 2 วิธีนำมาเขียนกราฟการแจกแจงตามลักษณะของข้อมูลดังภาพที่ 21

4.3 การวิเคราะห์ทางความเชื่อถือได้โดยหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

4.3.1 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นดังนี้

$$R(x) \;=\; \frac{B_{1-(1-e^{-0.025x})^{4.79}}(2.308, 1.396)}{B(1.396, 2.308)}$$

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์เป็นดังนี้

$$R(x) \;=\; \frac{B_{1-(1-e^{-0.026x})^{4.79}}(2.323, 1.395)}{B(1.395, 2.323)}$$

จากฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสามารถเขียนโค้งความเชื่อถือได้สำหรับข้อมูลจริงดังภาพที่ 22

4.3.2 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

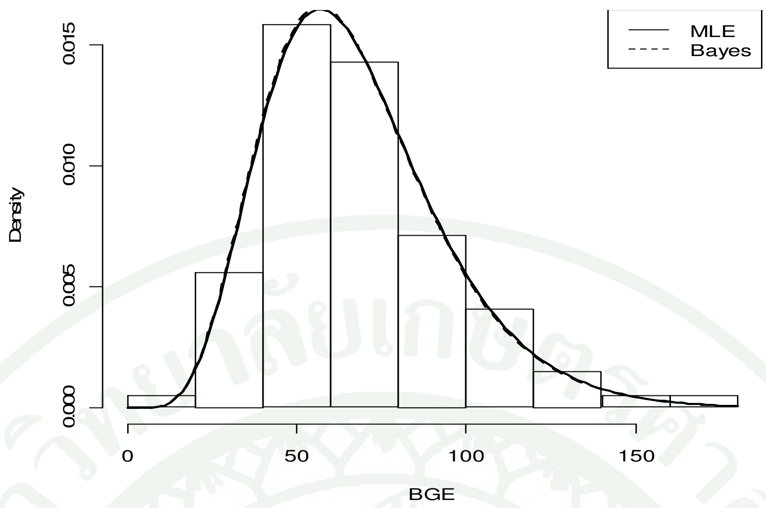
ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นดังนี้

$$h(x) \;=\; \frac{(4.79)(0.025)e^{-0.025x}(1-e^{-0.025x})^{(4.79)(1.396)-1}(1-(1-e^{-0.025x})^{1.396})^{2.308-1}}{B(1.396, 2.308)I_{1-(1-e^{-0.025x})^{4.79}}(2.308, 1.396)}$$

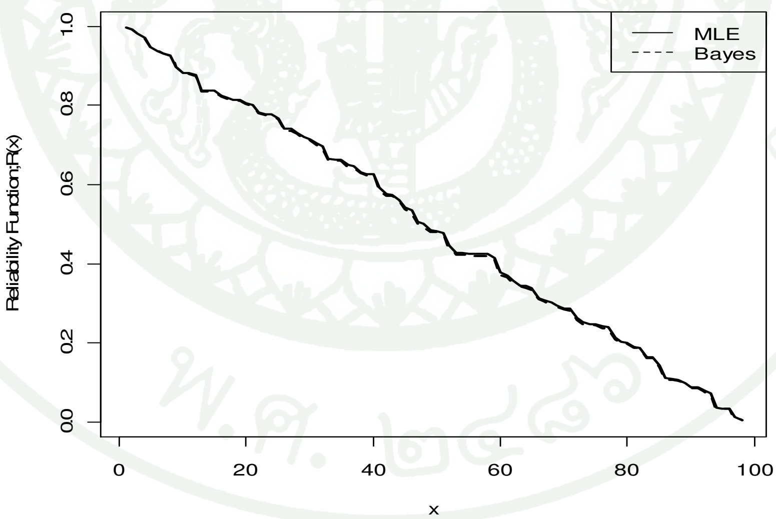
ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์เป็นดังนี้

$$h(x) \;=\; \frac{(4.79)(0.025)e^{-0.025x}(1-e^{-0.025x})^{(4.79)(1.396)-1}(1-(1-e^{-0.025x})^{1.396})^{2.308-1}}{B(1.396, 2.308)I_{1-(1-e^{-0.025x})^{4.79}}(2.308, 1.396)}$$

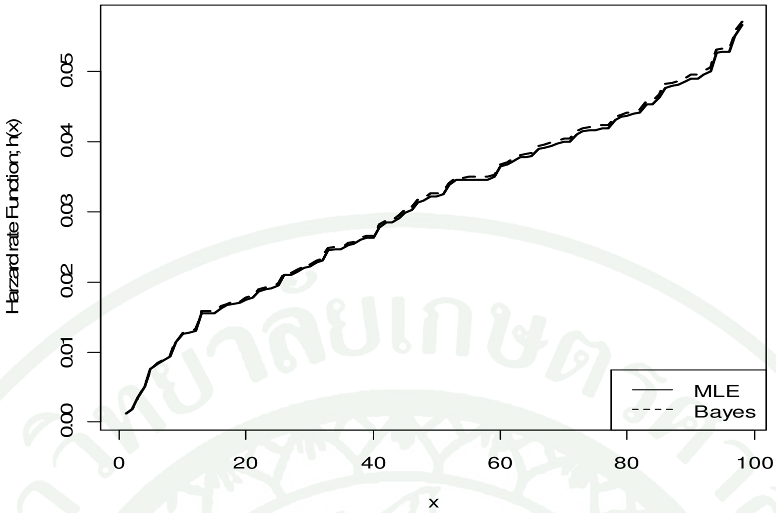
จากฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปสามารถเขียนโค้งอัตราความเสี่ยงสำหรับข้อมูลจริงดังภาพที่ 23



ภาพที่ 21 ฮิสโตแกรมแสดงลักษณะของข้อมูลจริงเปรียบเทียบกับโค้งการแจกแจงของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์



ภาพที่ 22 กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์



ภาพที่ 23 กราฟแสดงโค้งฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์

4.4 เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและทดสอบภาวะสารูปสนิทดีโดยตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ ด้วยการแจกแจงที่เป็นกรณีพิเศษของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (BGE) ดังนี้คือ การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล (BE) การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (GE) และการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล

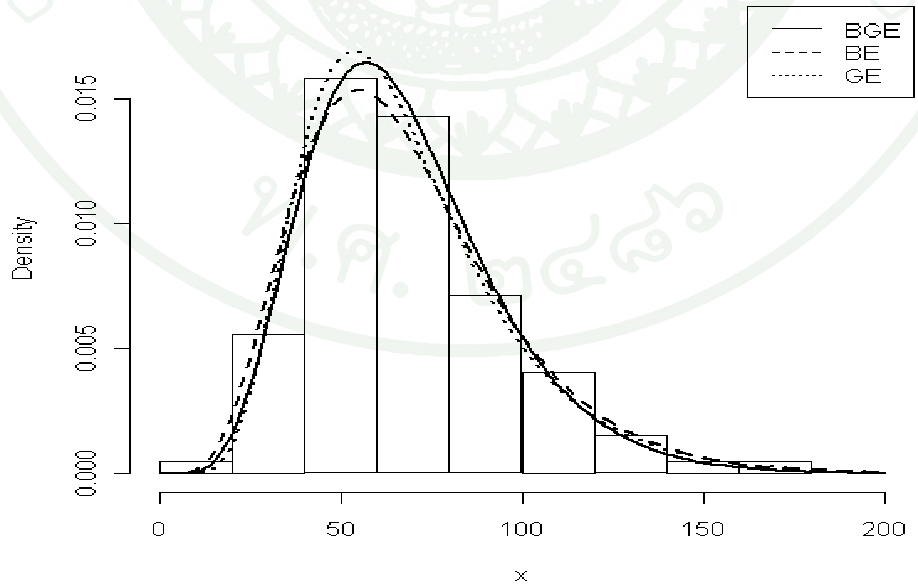
จากข้อมูลทำการทดสอบการแจกแจงของข้อมูลโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด ตามการแจงแจงทั้ง 4 การแจกแจงข้างต้นได้ดังตารางที่ 13 และภาพที่ 14

ตารางที่ 13 ค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟสำหรับข้อมูลจริง

การแจกแจง	ค่าประมาณพารามิเตอร์				สถิติทดสอบ KS	
	a	b	λ	α	KS	p-value
BGE	1.395	2.323	0.026	4.790	0.0426	0.9943
BE	6.404	2.361	0.022	-	0.0648	0.8053
GE	-	-	0.044	10.612	0.0571	0.9065
Exponential	-	-	0.015	-	0.3434	0.0001

จากตารางที่ 13 พบว่า

สถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดของ BGE มีค่าเท่ากับ 0.0426 ค่า p-value เท่ากับ 0.9943 สำหรับ BE มีค่าเท่ากับ 0.0648 ค่า p-value เท่ากับ 0.8053 สำหรับ GE มีค่าเท่ากับ 0.0571 ค่า p-value เท่ากับ 0.9065 และ Exponential มีค่าเท่ากับ 0.3434 ค่า p-value เท่ากับ 0.0001 แสดงว่า ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 ข้อมูลชุดนี้มีเหมาะสมกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปมากที่สุดดังภาพที่ 24



ภาพที่ 24 ฮิสโตแกรมแสดงลักษณะของข้อมูลจริงเปรียบเทียบกับโค้งการแจกแจง BGE, BE และ GE ด้วยพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

วิจารณ์

จากผลการศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปพบว่าลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันการแจกแจงสะสม และลักษณะรูปร่างฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a และ α เท่านั้น สำหรับฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม ฟังก์ชันความน่าเชื่อถือ ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง ฟังก์ชันให้เกิดโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง ซึ่งผลจากการศึกษาดังกล่าวสอดคล้องกับผลงานวิจัยของ Barreto-Souza *et al*. (2008) สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE พบว่าวิธีเบส์มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด เนื่องจากให้ค่า MSE ต่ำกว่าทุกกรณี เนื่องจากวิธีเบส์มีการนำการแจกแจงก่อนเข้ามาพิจารณาในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยที่วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดจะทำการพิจารณาจากฟังก์ความชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเท่านั้น จึงส่งผลให้ส่วนมากแล้ววิธีเบส์ให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่า โดยขนาดตัวอย่างมีผลต่อค่า MSE ของวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดอย่างเห็นได้ชัด แต่ไม่มีผลต่อวิธีเบส์

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็น เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ ทดสอบสารูปสนิทดีด้วยตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง อีกทั้งยังได้ศึกษากาประยุกต์ทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป จากผลการศึกษาสามรถสรุปได้ดังนี้

สมบัติเชิงความน่าจะเป็น

ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ, α จะพบว่า

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}(1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha})^{b-1}, \quad x>0$$

$$F(x) = \frac{B_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(a,b)}{B(a,b)} \quad ,x>0$$

$$R(x) = \frac{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}{B(a,b)} \quad ,x>0$$

$$h(x) = \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}(1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha})^{b-1}}{B(a,b)I_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}, \quad x>0$$

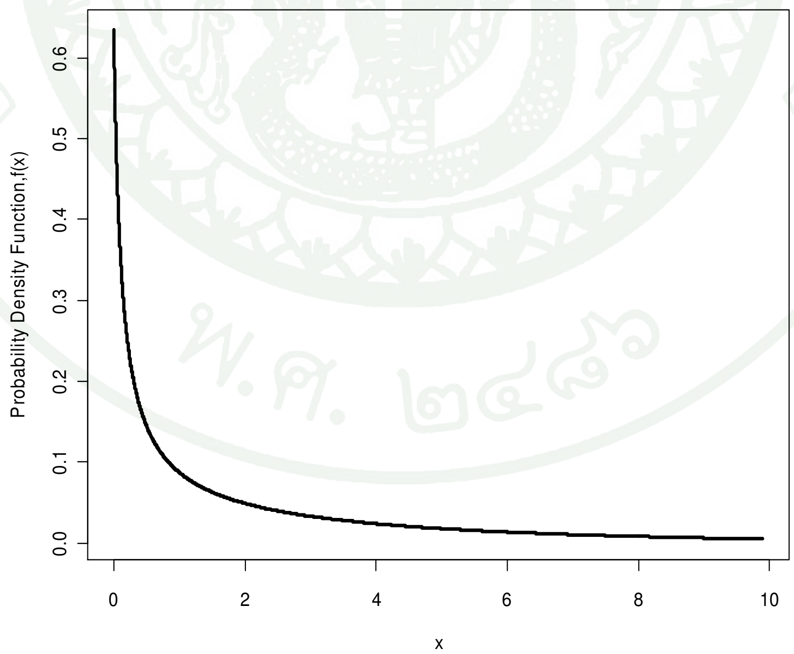
$$M_x(t) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}B(1-t/\lambda,\alpha(a+j))$$ เมื่อ $b>0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม

$$M_x(t) = \frac{\alpha}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} (-1)^j B(1-t/\lambda, \alpha(a+j))$$ เมื่อ $b > 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

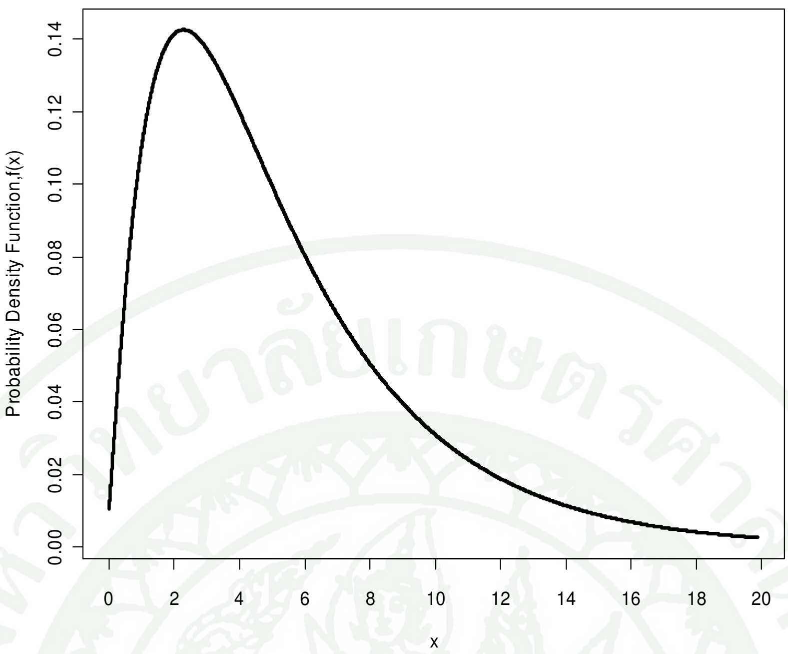
$$Q_x(t) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\, j!} B(1-ti/\lambda, \alpha(a+j))$$ เมื่อ $b > 0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม

$$Q_x(t) = \frac{\alpha}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{b-1} \binom{b-1}{j} (-1)^j B(1-ti/\lambda, \alpha(a+j))$$ เมื่อ $b > 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

จากการศึกษาลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป สามารถสรุปลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นได้ 2 ลักษณะคือ กราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a \leq 1$ และ $0 < \alpha \leq 1$ และกราฟจะมีลักษณะมีการแจกแจงในลักษณะที่เบ้ขวาเมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ และ $\alpha > 1$ เมื่อพารามิเตอร์ $b > 0$ และ $\lambda > 0$ ดังภาพที่ 25



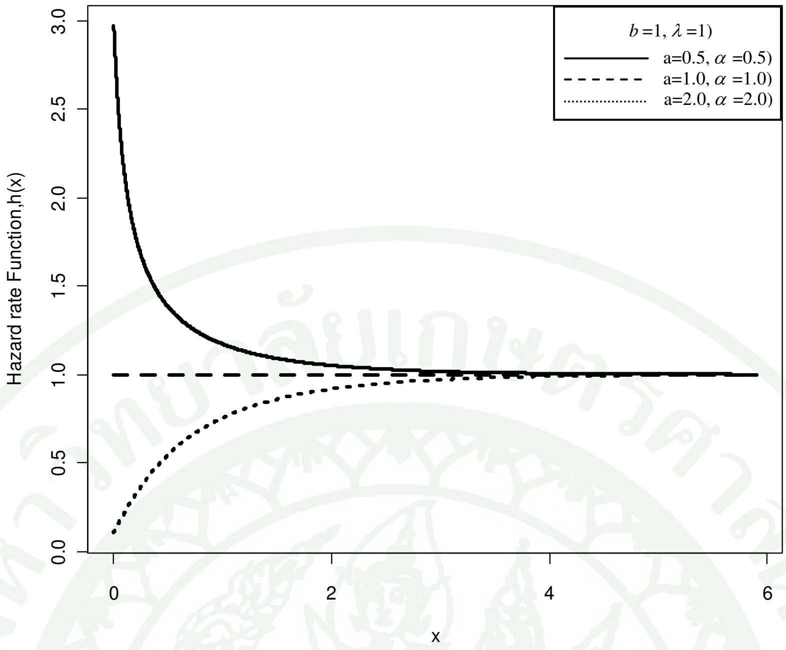
ภาพที่ 25 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อ $0 < a \leq 1$



ภาพที่ 26 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันหนาแน่นความน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อ $a > 1$

จากการศึกษาฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงสามารถสรุปลักษณะรูปร่างได้เป็น 3 ลักษณะคือ กราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียวเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a < 1$ และ $0 < \alpha < 1$ จะมีลักษณะคงที่ เมื่อพารามิเตอร์ $a = 1$ และ $\alpha = 1$ และมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ และ $\alpha > 1$ โดยที่พารามิเตอร์ $b > 0$ และ $\lambda > 0$ สรุปดังภาพที่ 27

จากการคำนวณหาค่าที่แท้จริงสำหรับพารามิเตอร์ a, b, λ และ α ตามพารามิเตอร์ที่กำหนด สามารถสรุปได้ว่า ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปจะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ λ มีค่าสูงขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งจะไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ และสำหรับกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ $a = 1$ และ $\alpha = 1$ เมื่อทุกๆ พารามิเตอร์ b และ λ เป็นค่าจำนวนจริงบวกใดๆ แล้วค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งมีค่าเท่ากับ 2.00 และ 9.00 ตามลำดับ



ภาพที่ 27 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปเมื่อกำหนดให้ $a,\ \alpha = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0,\ \lambda = 1.0$

การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป โดยกำหนดให้ B เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b ดังนั้นตัวกำเนิดตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปที่หาด้วยวิธีการแปลงผกผันคือ

$$X_i \ = \ -\frac{1}{\lambda}[\ln(1 - B^{\frac{1}{\alpha}})] \quad \text{เมื่อ} \quad i = 1, 2, ..., n$$

วิธีการทดสอบสารูปสนิทดี

ศึกษาวิธีการทดสอบสารูปสนิทดี 2 วิธีคือ ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ได้ดังนี้

คำสั่งโปรแกรม R สำหรับการทดสอบสารูปสนิทดีโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติทดสอบแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป (ดูโปรแกรมในภาคผนวก ข)

วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 50, 100 และ 250 โดยที่พารามิเตอร์ที่กำหนดในแต่ละขนาดตัวอย่างเป็น a =0.5, 1.0, 2.0, b =0.5, 1.0, 2.0, λ =0.5, 1.0, 2.0, และ α =0.5, 1.0, 2.0

การศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นการศึกษาเชิงทดลอง โดยการสร้างข้อมูลตัวแปรสุ่มตามเงื่อนไขที่กำหนด และวิเคราะห์ผลด้วยโปรแกรม R และ WinBUGS ซึ่งในแต่ละกรณีจะทำการทดลองซ้ำๆ กันเป็นจำนวน 500 ครั้ง และเกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองซึ่งสามารถสรุปผลการศึกษาได้ดังนี้

จากผลการวิจัยพบว่าประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์ให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณี และให้ค่า MSE ต่ำกว่าทุกกรณี

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดในทุกกรณีที่ศึกษานั้นพบว่า เมื่อมีขนาดใหญ่ขึ้นค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าลดลง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์ในทุกกรณีที่ศึกษานั้นพบว่า ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าต่ำและใกล้เคียงกัน

ดังนั้นจะกล่าวได้ว่าวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปคือ การประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์นั่นเอง

การประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

จากการนำเอาข้อมูลจริงของระยะเวลาการใช้งานผ้าเบรคพบว่า ข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 67.730×10^3 กม. ค่าความแปรปรวน 714.375×10^3 กม.^{2} และเมื่อทำการทดสอบภาวะสารูปสนิทดีด้วยตัวสถิติโคลโมโกรอฟ-สมีร์นอฟ และตัวสถิติแอนเดอร์สัน-ดาร์ลิง พบว่า ข้อมูลชุดนี้มีการแจก

แจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์ ซึ่งทำให้ได้ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของข้อมูลดังกล่าวเป็นดังนี้

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดคือ

$$R(t) = \frac{B_{1-(1-e^{-0.025t})^{4.79}}(2.308, 1.396)}{B(1.396, 2.308)}$$

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์เป็นดังนี้

$$R(t) = \frac{B_{1-(1-e^{-0.026t})^{4.79}}(2.323, 1.395)}{B(1.395, 2.323)}$$

ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดคือ

$$h(t) = \frac{(4.79)(0.025)e^{-0.025t}(1-e^{-0.025t})^{(4.79)(1.396)-1}(1-(1-e^{-0.025t})^{1.396})^{2.308-1}}{B(1.396, 2.308)I_{1-(1-e^{-0.025t})^{4.79}}(2.308, 1.396)}$$

ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีเบส์เป็นดังนี้

$$h(t) = \frac{(4.79)(0.025)e^{-0.025t}(1-e^{-0.025t})^{(4.79)(1.396)-1}(1-(1-e^{-0.025t})^{1.396})^{2.308-1}}{B(1.396, 2.308)I_{1-(1-e^{-0.025t})^{4.79}}(2.308, 1.396)}$$

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะจากผลการศึกษา

จากการศึกษาพบว่าเมื่อข้อมูลที่นำมาศึกษามีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดและวิธีเบส์ให้ประสิทธิภาพใกล้เคียงกันในตัวอย่างขนาดใหญ่ แต่วิธีเบส์ให้ประสิทธิภาพดีที่สุด ซึ่งการประมาณค่าในแต่ละวิธีนั้นก็มีข้อดีและข้อเสียแตกต่างกันออกไปเช่น วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการที่ไม่ยุ่งยากและสามารถหาค่าประมาณพารามิเตอร์ได้โดยใช้โปรแกรมคำนวณออกมาได้ แม้จะให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองมากกว่าแต่ก็เป็นวิธีที่ใช้ในการประมาณอย่างแพร่หลาย สำหรับวิธีเบส์ซึ่งมีวิธีการคำนวณค่อนข้างยุ่งยาก และใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และที่สำคัญจำเป็นที่จะต้องเลือกการแจกแจงก่อนให้เหมาะสมกับการแจกแจงที่ต้องการศึกษา แต่ทั้งนี้วิธีเบส์เป็นวิธีที่ให้ประสิทธิภาพดีกว่า และให้ความแม่นยำสูงกว่าในการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรศึกษาสมบัติเชิงความน่าจะเป็นอื่นๆ ที่เกี่ยวกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

2. ศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์รูปแบบอื่นๆ

3. เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีภาวะน่าจะเป็นสูงสุด และวิธีเบส์โดยใช้เกณฑ์พิจารณาอื่นๆ

4. ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีเบส์โดยใช้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงอื่น

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

ดาริกา แย้มรับบุญ. 2552. **สมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล.** วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ประสิทธิ์ พยัคฆพงษ์. 2545. **สถิติเชิงคณิตศาสตร์ทฤษฎีและการประยุกต์.** พิมพ์ครั้งที่2. สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์, กรุงเทพฯ.

ปัจยาการ พรมแดน. 2552. **สถิติทดสอบภาวะสารูปสนิทดีสำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป.** วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

Barreto-Souza, W., A. Santos and G. Cordeiro. 2008. **The Beta Generalized Exponential Distribution**. arXiv:0809.1889[stat.me]. Available Source: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0809/0809.1889v1.pdf, December 27, 2008.

Eugene, N, C. Lee and F. Famoye. 2002. Beta-Mormal Distribution and Its Application. **Communications in Statistic Theory and Methods** 31 (4):497-512.

Casella, G. and Roger L. Berger. 1990. **Statistic Inference**. Wadsworth Publishing Company, California.

Conover, W.J. 1980. **Practical Nonparameter Statistics**. 2nd ed. John Woley & Sons, New York.

Cordeiro, G. M., Ortega, E.M.M., and Nadarajah, S. 2010. The Beta Weibull Distribution**.** **Journal of the Franklin Institute** 347(8):1399-1429

Lawless, J.F. 2003. **Statistical models and Methods for Lifetime Data**. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, Hoboken, New Jersey.

Maynard, J. 2004. **The Class of Beta-exponential Distribution**: Properties, Estimation, and Applications. JSM 2004 Online Program. Available Source: http://www.amstat.org/meetings/jsm/2004/onlineprogram/index.cfm, December 9, 2008

Nadarajah, S. and S. Kotz. 2004. The Beta Gumbel Distribution. **Matheatical Problems in Engineering** (4):323-332.

Nadarajah, S. and S. Kotz. 2006. The Beta Exponential Distribution. **Reliability Engineering and System Safety** (91):689-697.

Ntzoufras, I. 1973. **Bayesian Modeling Using WinBUGS**. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.

R Development Core Team, 2011. **R: A language and environment for statistical computing**. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Spiegelhalter, D.J., A.Thomas, and N.G.Best. 2003. **WinBUGS Version 1.43 User Manual.** MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

Stephens, M.A. 1974. EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. **Journal of the American Statistical Association** September (69): 730-737.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

บทพิสูจน์

1. ฟังก์ชันการแจกแจงสะสม

1.1 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมสะสมในรูปแบบทั่วๆ ไป

พิสูจน์

จาก $f(x) = \dfrac{1}{B(a,b)} G(x)^{a-1}\{1-G(x)\}^{b-1} g(x)$

เมื่อ $x > 0, a > 0, b > 0$

เนื่องจาก $F(x) = P(X \le x)$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x G(x)^{a-1}\{1-G(x)\}^{b-1} g(x)dx$$

กำหนดให้ $x = G(x)$ และ $dx = g(x)dx$

เมื่อ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมที่สนใจ

เพราะฉะนั้น

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} G(x)^{a-1}\{1-G(x)\}^{b-1} g(x)dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} G(G(x))^{a-1}\{1-G(G(x))\}^{b-1} g(G(x))g(x)dx$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} G(G(x))^{a-1}\{1-G(G(x))\}^{b-1} g(G(x))g(x)\frac{dG(G(x))}{g(G(x))g(x)}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} G(G(x))^{a-1}\{1-G(G(x))\}^{b-1} d\{G(G(x))\}$$

กำหนดให้ $w = G(G(x))$ และ $1-w = 1-G(G(x))$

ดังนั้น

$$F(x) \quad = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw$$

จาก $B_y(a,b) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{y} w^{a-1}(1-w)^{b-1} dw$

ดังนั้น $F(x) \; = \; \frac{B_{G(x)}(a,b)}{B(a,b)}$

1.2 ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

พิสูจน์

จาก $f(x) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}$

เมื่อ $x > 0, \;\; a > 0, b > 0, \lambda > 0, \alpha > 0$

เนื่องจาก $F(x) \; = \; P(X \le x)$

$$= \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} \int_0^{x} e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1} dx$$

กำหนดให้ $x \; = \; (1-e^{-\lambda x})^{\alpha}$ และ $dx \; = \; \alpha\lambda(1\text{-}e^{-\lambda x})^{\alpha-1} dx$

เมื่อ $G(x)=(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

เพราะฉะนั้น

$$F(x) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}\}^{b-1}\alpha\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}dx$$

$$F(x)=\frac{\alpha^2\lambda^2}{B(a,b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}\}^{b-1}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}\times$$

$$\frac{d(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}}{\alpha^2\lambda^2(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha-1}e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha-1}}$$

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} \{(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}\}^{a-1}\{1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}\}^{b-1}d(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}$$

กำหนดให้ $w=(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}$ และ $1-w=1-(1-e^{-\lambda(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}})^{\alpha}$

ดังนั้น

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$$

จาก $B_y(a,b)=\dfrac{1}{B(a,b)}\displaystyle\int_0^{y} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$

ดังนั้น $F(x) = \dfrac{B_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(a,b)}{B(a,b)}$

1.2.1 เมื่อ $b > 0$ และไม่เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

จาก $F(x) \quad = \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$

และ $(1-z)^{b-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} z^j$ เมื่อ $|z|<1$ และ $b>0$ และเป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $F(x) \quad = \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!} w^j dw$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \int_0^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{j+a-1} dw$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \frac{w^{a+j}}{a+j} \Big|_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!} \frac{w^{a+j}}{a+j} \Big|_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}$$

$$= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!a+j} (1-e^{-\lambda x})^{a+j}$$

1.2.2 เมื่อ $b > 0$ และเป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

จาก $F(x) \;=\; \dfrac{1}{B(a,b)} \displaystyle\int_{0}^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a-1}(1-w)^{b-1}dw$

และการกระจายทวินาม $(q+p)^{n} = \displaystyle\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^{x}q^{n-x}$ เมื่อ $n > 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)}\int_{0}^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a-1}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-w)^{j}1^{b-1-j}dw$$

$$= \frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^{j}\int_{0}^{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}} w^{a+j-1}dw$$

$$= \frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^{j}\frac{w^{a+j}}{a+j}\Big|_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^{j}}{a+j}(1-e^{-\lambda x})^{a+j}$$

2. ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

พิสูจน์

ถ้า X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ และ α จะได้ฟังก์ชันความเชื่อถือได้อยู่ในรูปแบบ

$$R(x) = 1 - F(x)$$

เนื่องจาก $F(x) = I_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(a,b) = \dfrac{B_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(a,b)}{B(a,b)}$

จะได้ $R(x) = 1-\dfrac{B_{(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(a,b)}{B(a,b)}$

จากสมบัติ

$I_{y}(a,b) = 1-I_{1-y}(b,a)$

ดังนั้น $R(x) = \dfrac{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}{B(a,b)}$

3. ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

พิสูจน์

ถ้า X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ และ α จะได้ฟังก์ชันอัตรความเสี่ยงอยู่ในรูปแบบ

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

เนื่องจาก $f(x) = \dfrac{\alpha\lambda}{B(a,b)}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}$

และ $R(x) = \dfrac{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}{B(a,b)}$

จะได้ว่า $$h(x) = \frac{\dfrac{\alpha\lambda}{B(a,b)}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}}{\dfrac{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}{B(a,b)}}$$

$$= \frac{\alpha\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}}{B_{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}}(b,a)}$$

4. ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

4.1 เมื่อ $b > 0$ และไม่เป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

จาก $M_X(t) = \dfrac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{xt}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}dx$

และ $(1-z)^{b-1} = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!}z^j$ เมื่อ $|z|<1$ และ $b>0$ และเป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $M_X(t) = \dfrac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\displaystyle\int_0^{\infty} e^{xt}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(b)}{\Gamma(b-j)j!}((1-e^{-\lambda x})^{\alpha})^j dx$

$$= \frac{\alpha\lambda\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)-1}dx$$

กำหนดให้ $u = e^{-\lambda x}$ ได้ว่า $du = -\lambda e^{-\lambda x}dx$

และ $x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln u$

จะได้ $M_X(t) = \dfrac{\alpha\lambda\Gamma(b)}{B(a,b)}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\int_1^{0} e^{(t-\lambda)-\frac{1}{\lambda}\ln u}(1-u)^{\alpha(a+j)-1}\frac{du}{-\lambda e^{-\lambda x}}$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\int_0^{1} e^{(-\frac{t}{\lambda}+1)\ln u}(1-u)^{\alpha(a+j)-1}\frac{du}{u}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}\int_0^1 u^{(1-\frac{t}{\lambda})-1}(1-u)^{\alpha(a+j)-1}du$$

$$\therefore\ M_X(t) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}B(1-\frac{t}{\lambda},\alpha(a+j))$$

เมื่อฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่ม X แทนด้วย $\phi_X(t) = E(\exp(itx))$ และจากฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด เพราะฉะนั้นจะทำให้สามารถหาฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปได้เป็น

$$\therefore\ \phi_X(t) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}B(1-\frac{t}{\lambda},\alpha(a+j))$$

โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ ซึ่งเป็น complex number

4.2 เมื่อ $b > 0$ และเป็นจำนวนจริง

พิสูจน์

จาก $$M_X(t) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\int_0^{\infty} e^{xt}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\{1-(1-e^{-\lambda x})^{\alpha}\}^{b-1}dx$$

และการกระจายทวินาม $(q+p)^n = \sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}p^x q^{n-x}$ เมื่อ $n > 0$ และเป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $$M_X(t) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\int_0^{\infty} e^{xt}e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha a-1}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j(1-e^{-\lambda x})^{\alpha j}1^{b-j-1}dx$$

$$= \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j\int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x}(1-e^{-\lambda x})^{\alpha(a+j)-1}dx$$

กำหนดให้ $u = e^{-\lambda x}$ ได้ว่า $du = -\lambda e^{-\lambda x}dx$

และ $x = -\frac{1}{\lambda}\ln u$

จะได้ $$M_X(t) = \frac{\alpha\lambda}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j\int_1^0 e^{(t-\lambda)-\frac{1}{\lambda}\ln u}(1-u)^{\alpha(a+j)-1}\frac{du}{-\lambda e^{-\lambda x}}$$

$$= \frac{\alpha}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j\int_0^1 e^{(t-\lambda)-\frac{1}{\lambda}\ln u}(1-u)^{\alpha(a+j)-1}\frac{du}{u}$$

$$= \frac{\alpha}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j\int_0^1 u^{(1-\frac{t}{\lambda})-1}(1-u)^{\alpha(a+j)-1}du$$

$$\therefore\ M_X(t) = \frac{\alpha}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j B(1-\frac{t}{\lambda},\alpha(a+j))$$

เมื่อฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่ม X แทนด้วย $\varphi_x(t) = E(\exp(itx))$ และจากฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด เพราะฉะนั้นจะทำให้สามารถหาฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป ได้เป็น

$$\therefore\ \phi_X(t) = \frac{\alpha}{B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}(-1)^j B(1-\frac{ti}{\lambda},\alpha(a+j))$$

โดยที่ $i = \sqrt{-1}$ ซึ่งเป็น complex number

5. โมเมนต์ที่ r รอบจุดกำเนิด

5.1 เมื่อ $b > 0$ และไม่เป็นจำนวนเต็ม มีรูปแบบทั่วไปของโมเมนต์ดังนี้

$$E(X^r) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^r B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+r}}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{d^r}{dp^r}B(p,\alpha(a+j))\,|_{p=1}$$

โมเมนต์ที่ 1

พิสูจน์

$$E(X) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!}\frac{d}{dp}B(p,\alpha(a+j))|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!}\frac{d}{dp}\frac{\Gamma(p)\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!}\Gamma(\alpha(a+j))\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))\Gamma'(p)-\Gamma(p)\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!}\left[\Gamma(\alpha(a+j))\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]|_{p=1} \quad (1)$$

แทนค่า $p=1$ ลงในสมการ (1) จะได้

$$= \frac{\alpha\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{\Gamma(b-j)j!}\left[\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(\alpha(a+j)+1)}\Gamma'(1)-\Gamma(1)\psi(1+\alpha(a+j)+1)\right]$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(-1)}{\Gamma(b-j)j!}\left[\frac{(\alpha(a+j)-1)!}{(\alpha(a+j))!}\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}-\psi(\alpha(a+j)+1)\right]$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(\alpha(a+j))^{-1}}{\Gamma(b-j)j!}\left[\psi(\alpha(a+j)+1)-\psi(1)\right]$$

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!}\left[\psi(\alpha(a+j)+1)-\psi(1)\right]$$

หรือ

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!}c_j$$

เมื่อ $c_j = \psi(\alpha(a+j)+1)-\psi(1)$

และ $\psi(b) = \dfrac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)}$

โมเมนต์ที่2

พิสูจน์

$$E(X^2) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+2}}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{d^2}{dp^2}B(p,\alpha(a+j))\,|_{p=1}$$

จากโมเมนต์ที่ 1 สมการที่ (1)

$$E(X^3) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}(-1)^2}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{d}{dp}\left[\frac{d}{dp}B(p,\alpha(a+j))\right]|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)\,j!}\left[\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))\Gamma''(p)-\Gamma'(p)\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))[\Gamma(p)\psi'(p+\alpha(a+j))+\psi(p+\alpha(a+j))\Gamma'(p)]}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}$$

$$\left.+\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j)\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right]|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j}\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)\,j!}\left[\frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-\frac{\Gamma(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+\frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\Bigg]\Big|_{p=1}$$

$$= \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)j!}\Bigg[\frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-2\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$-\frac{\Gamma(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+\frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\Bigg]\Big|_{p=1} \qquad (2)$$

แทนค่า $p=1$ ลงในสมการที่ (2) จะได้

$$E(X^2) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(\alpha(a+j)+1)}\big[\Gamma''(1)-2\Gamma'(1)\psi(\alpha(a+j)+1)$$

$$-\Gamma(1)\psi'(\alpha(a+j)+1)+\Gamma(1)\psi^2(\alpha(a+j+1))\big]$$

เนื่องจาก $\psi'(b) = \frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)}-\frac{\Gamma'(b)\Gamma'(b)}{\Gamma^2(b)}$ หรือ $\psi'(b) = \frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)}-\psi^2(b)$

และ $c_j^2 = \psi^2(\alpha(a+j)+1)-2\psi(\alpha(a+j)+1)\psi(1)+\psi^2(1)$

นำค่าที่ได้ลงสมการข้างบน เพราะฉะนั้น

$$E(X^2) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(\alpha(a+j)+1)}\times$$

$$\big[[\psi'(1)+\psi^2(1)]-2\psi(1)\psi(\alpha(a+j)+1)-\psi'(\alpha(a+j)+1)+\psi^2(\alpha(a+j+1))\big]$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^2 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(\alpha(a+j)+1)}\times$$

$$\left[(\psi^2(\alpha(a+j+1)) - 2\psi(\alpha(a+j)\psi(1)+\psi^2(1)) + \psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j)+1)\right]$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!}[c_j^2 + \psi'(1) - \psi'(\alpha(a+j+1)]$$

โมเมนต์ที่ 3

พิสูจน์

$$E(X^3) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+3}\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)j!}\frac{d^3}{dp^3}B(p,\alpha(a+j))|_{p=1}$$

จากสมการที่ (2) จะได้ว่า

$$E(X^3) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+3}}{\Gamma(b-j)j!}\times\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))} - 2\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))} + \frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]|_{p=1}$$

$$E(X^3) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(-1)^3\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)j!}\times$$

$$\left[\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))\Gamma'''(p) - \Gamma''(p)\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-2\left(\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))[\Gamma'(p)\psi'(p+\alpha(a+j)) + \psi(p+\alpha(a+j))\Gamma''(p)]}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j)\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right)$$

$$-\left(\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))[\Gamma(p)\psi''(p+\alpha(a+j))+\psi'(p+\alpha(a+j))\Gamma'(p)]}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$\left.-\frac{\Gamma(p)\psi'(p+\alpha(a+j))\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right)$$

$$+\left(\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))\Gamma(p)2\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$+\frac{\Gamma(p+\alpha(a+j))[\psi^2(p+\alpha(a+j))\Gamma'(p)]}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}$$

$$\left.\left.-\frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)\Gamma'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma^2(p+\alpha(a+j))}\right)\right]\Big|_{p=1}$$

$$E(X^3) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(-1)\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)j!}\left[\frac{\Gamma'''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-2\frac{\Gamma'(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-2\frac{\Gamma''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+2\frac{\Gamma'(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$-\frac{\Gamma(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma'(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+\frac{\Gamma(p)\psi'(p+\alpha(a+j))\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+2\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$\left.+\frac{\Gamma'(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi^3(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]\Big|_{p=1}$$

$$E(X^3) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(-1)\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)j!}\left[\frac{\Gamma'''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-3\frac{\Gamma'(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+3\frac{\Gamma'(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+3\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi^3(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\Bigg]\Bigg|_{p=1} \quad (3)$$

แทนค่า $p=1$ ลงในสมการที่ (3)

เนื่องจาก $\psi'(b) \;=\; \dfrac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)}-\psi^2(b)$

และ $\psi''(b) \;=\; \dfrac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)}-3\psi(b)\psi'(b)-\psi^3(b)$

จะได้

$$E(X^3)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(-1)}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\Big[\{\psi''(1)+3\psi(1)\psi'(1)\}+\psi^3(1)\}$$

$$-3[\psi'(1)+\psi^2(1)]\psi(1+\alpha(a+j))-3\psi(1)\psi'(1+\alpha(a+j))+3\psi(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$-\Gamma(1)\psi''(1+\alpha(a+j))+3\Gamma(1)\psi(1+\alpha(a+j))\psi'(1+\alpha(a+j)-\Gamma(1)\psi^3(1+\alpha(a+j)\Big]$$

$$E(X^3) \;=\; \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(-1)}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\Big[\psi''(1)+3\psi(1)\psi'(1)\}+\psi^3(1)$$

$$-3\psi'(1)\psi(1+\alpha(a+j))-3\psi^2(1)\psi(1+\alpha(a+j))-3\psi(1)\psi'(1+\alpha(a+j))$$

$$+3\psi(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))-\Gamma(1)\psi''(1+\alpha(a+j))-\Gamma(1)\psi^3(1+\alpha(a+j)$$

$$+3\Gamma(1)\psi(1+\alpha(a+j))\psi'(1+\alpha(a+j)\Big]$$

$$E(X^3)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^3 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(-1)}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\times$$

$$\left[-\psi^3(1+\alpha(a+j)+3\psi(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))-3\psi^2(1)\psi(1+\alpha(a+j))+\psi^3(1)\right.$$

$$-3\psi'(1)\{\psi(1+\alpha(a+j))-\psi(1)\}+3\psi'(1+\alpha(a+j))\{\psi(1+\alpha(a+j))-\psi(1)\}$$

$$\left.+\psi''(1)-\psi''(1+\alpha(a+j))\right]$$

$$E(X^3)=\frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!}\left[-c_j[c_j^2+3\{\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}]\right.$$

$$\left.+\psi''(1)-\psi''(1+\alpha(a+j))\right]$$

โมเมนต์ที่ 4

พิสูจน์

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+4}\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)j!}\frac{d^4}{dp^4}B(p,\alpha(a+j))|_{p=1}$$

จากสมการที่ (3) จะได้ว่า

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j+4}}{\Gamma(b-j)j!}\times\frac{d}{dp}\left[\frac{\Gamma'''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-3\frac{\Gamma'(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+3\frac{\Gamma'(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$\left.+3\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi^3(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]|_{p=1}$$

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)\,j!}\left[\frac{\Gamma''''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma'''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-3\frac{\Gamma''(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma'''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+3\frac{\Gamma''(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$-3\frac{\Gamma'(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma''(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma'(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+3\frac{\Gamma'(p)\psi'(p+\alpha(a+j))\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+6\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+3\frac{\Gamma''(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma'(p)\psi^3(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma'(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+\frac{\Gamma(p)\psi''(p+\alpha(a+j))\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$-\frac{\Gamma'(p)\psi^3(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+\frac{\Gamma(p)\psi^4(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+3\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi''(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+3\frac{\Gamma(p)[\psi'(p+\alpha(a+j))]^2}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$\left.+3\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-3\frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]\Big|_{p=1}$$

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(b-j)\,j!}\left[\frac{\Gamma''''(p)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-4\frac{\Gamma'''(p)\psi(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right.$$

$$-6\frac{\Gamma''(p)\psi'(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+6\frac{\Gamma''(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-4\frac{\Gamma'(p)\psi''(p+\alpha(a+j))}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$-4\frac{\Gamma'(p)\psi^3(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}-\frac{\Gamma(p)\psi'''(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+\frac{\Gamma(p)\psi^4(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+3\frac{\Gamma(p)[\psi'(p+\alpha(a+j))]^2}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}+12\frac{\Gamma'(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$+4\frac{\Gamma(p)\psi(p+\alpha(a+j))\psi''(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}$$

$$\left.-6\frac{\Gamma(p)\psi^2(p+\alpha(a+j)\psi'(p+\alpha(a+j)}{\Gamma(p+\alpha(a+j))}\right]\Big|_{p=1} \qquad (4)$$

แทนค่า $p=1$ ลงในสมการที่ (4)

เนื่องจาก $\psi'(b) \;=\; \dfrac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)}-\psi^2(b)$

$$\psi''(b) \;=\; \frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)}-3\psi(b)\psi'(b)-\psi^3(b)$$

และ $\psi'''(b) \;=\; \dfrac{\Gamma''''(b)}{\Gamma(b)}-4\psi(b)\psi''(b)-3\left(\psi'(b)\right)^2-6\psi^2(b)\psi'(b)-\psi^4(b)$

จะได้

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\big[\psi'''(1)+4\psi''(1)\psi(1)-4\psi''(1)\psi(1+\alpha(a+j))$$

$$+6\psi'(1)\psi^2(1)-6\psi'(1)\psi'(1+\alpha(a+j))+6\psi'(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))+3[\psi'(1)]^2+\psi^4(1)$$

$$-4\psi(1)\psi''(1+\alpha(a+j))-4\psi(1)\psi^3(1+\alpha(a+j))-6\psi^2(1)\psi'(1+\alpha(a+j))$$

$$+\psi'''(1+\alpha(a+j))+6\psi^2(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))-4\psi^3(1)\psi(1+\alpha(a+j))$$

$$+4\psi''(1+\alpha(a+j))\psi(1+\alpha(a+j))-6\psi'(1+\alpha(a+j))\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$+3[\psi'(1+\alpha(a+j))]^2+12\psi(1)\psi(1+\alpha(a+j))\psi'(1+\alpha(a+j))$$

$$-12\psi(1)\psi'(1)\psi(1+\alpha(a+j))\Big]$$

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\Big[\{\psi^4(1+\alpha(a+j))-4\psi(1)\psi^3(1+\alpha(a+j))$$

$$-4\psi^3(1)\psi(1+\alpha(a+j))+6\psi^2(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))+\psi^4(1)\}+\{\psi'(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$-2\psi(1)\psi'(1)\psi(1+\alpha(a+j))+\psi'(1)\psi^2(1)\}+\{-\psi'(1+\alpha(a+j))\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$+2\psi(1)\psi(1+\alpha(a+j))\psi'(1+\alpha(a+j))-\psi^2(1)\psi'(1+\alpha(a+j))\}$$

$$+\{3\psi'(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))-6\psi(1)\psi'(1)\psi(1+\alpha(a+j))+3\psi'(1)\psi^2(1)+3[\psi'(1)]^2$$

$$-3\psi'(1)\psi'(1+\alpha(a+j))\}+\{-3\psi'(1+\alpha(a+j))\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$+6\psi(1)\psi(1+\alpha(a+j))\psi'(1+\alpha(a+j))-3\psi^2(1)\psi'(1+\alpha(a+j))$$

$$-3\psi'(1)\psi'(1+\alpha(a+j))+3[\psi'(1+\alpha(a+j))]^2\}+\{2\psi'(1)\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$-4\psi(1)\psi'(1)\psi(1+\alpha(a+j))+2\psi'(1)\psi^2(1)\}+\{-2\psi'(1+\alpha(a+j))\psi^2(1+\alpha(a+j))$$

$$+4\psi(1)\psi(1+\alpha(a+j))\psi'(1+\alpha(a+j))-2\psi'(1+\alpha(a+j))\psi^2(1)\}$$

$$+\{4\psi''(1+\alpha(a+j))\psi(1+\alpha(a+j))-4\psi(1)\psi''(1+\alpha(a+j))$$

$$-4\psi''(1)\psi(1+\alpha(a+j))+4\psi''(1)\psi(1)\}+\psi'''(1)+\psi'''(1+\alpha(a+j))\Big]$$

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)\,j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\Big[\{c_j^4+\psi'(1)c_j^2-\psi'(1+\alpha(a+j))c_j^2\}$$

$$+3\psi'(1)\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}$$

$$-3\psi'(1+\alpha(a+j))\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}+\psi'(1)\{2c_j^2\}$$

$$-\psi'(1+\alpha(a+j))\{2c_j^2\}-\psi''(1+\alpha(a+j))\{-4c_j\}+\psi''(1)\{-4c_j\}$$

$$+\psi'''(1)+\psi'''(1+\alpha(a+j))\Big]$$

$$E(X^4)=\frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^4 B(a,b)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{\Gamma(b-j)j!}\frac{\Gamma(\alpha(a+j))}{\Gamma(1+\alpha(a+j))}\Big[c_j^2\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}$$

$$+3\psi'(1)\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}$$

$$-3\psi'(1+\alpha(a+j))\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}+\psi'(1)\{2c_j^2\}-\psi'(1+\alpha(a+j))\{2c_j^2\}$$

$$-\psi''(1+\alpha(a+j))\{-4c_j\}+\psi''(1)\{-4c_j\}+\psi'''(1)+\psi'''(1+\alpha(a+j))\Big]$$

$$E(X^4)=\frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j(a+j)^{-1}}{\Gamma(b-j)j!}\Big[(\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}\times$$

$$\{c_j^2+3(\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j)))\})+2c_j^2\{\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}-4c_j\{\psi''(1)$$

$$-\psi''(1+\alpha(a+j))\}+\psi'''(1)+\psi'''(1+\alpha(a+j))\Big]$$

5.2 เมื่อ $b>0$ เป็นจำนวนเต็ม มีรูปแบบทั่วไปของโมเมนต์ดังนี้

$$E(X^r) = \frac{\alpha\Gamma(b)}{\lambda^r B(a,b)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{d^r}{dp^r}B(p,\alpha(a+j))|_{p=1}$$

ในทำนองเดียวกันกับ 5.1 จะได้ทั้ง 4 โมเมนต์ดังนี้

โมเมนต์ที่ 1

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^j}{(a+j)}\left[\psi(\alpha(a+j)+1)-\psi(1)\right]$$

โมเมนต์ที่2

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^j}{(a+j)}\times$$

$$\left[(\psi^2(\alpha(a+j+1))-2\psi(\alpha(a+j)\psi(1)+\psi^2(1))+\psi'(1)-\psi'(\alpha(a+j)+1)\right]$$

โมเมนต์ที่ 3

$$E(X^3) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{b-1}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^{j+1}}{(a+j)}\Big[-c_j[c_j^2+3\{\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}]$$

$$-\psi''(1+\alpha(a+j))\Big]$$

โมเมนต์ที่ 4

$$E(X^4) = \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4\Gamma(a)}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{b-1}{j}\frac{(-1)^j}{(a+j)}\Big[(\{c_j^2+\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}\times$$

$$\{c_j^2+3(\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j)))\})+2c_j^2\{\psi'(1)-\psi'(1+\alpha(a+j))\}-4c_j\{\psi''(1)$$

$$-\psi''(1+\alpha(a+j))\}+\psi'''(1)+\psi'''(1+\alpha(a+j))\Big]$$

6. การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไปด้วยวิธีการแปลงผกผัน (Inverse transform)

1. สร้างตัวแปรสุ่ม $B \sim Beta(a,b)$

2. กำหนดให้ $G(x) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}$ เป็นฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

3. $x = G^{-1}(B)$

ดังนั้นได้ว่า

$$B = G(x)$$

$$B = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha}$$

$$B^{\frac{1}{\alpha}} = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\ln e^{-\lambda x} = \ln(1 - B^{\frac{1}{\alpha}})$$

$$-\lambda x = \ln(1 - B^{\frac{1}{\alpha}})$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - B^{\frac{1}{\alpha}})$$

เพราะฉะนั้นจะทำให้ได้ว่าตัวแปรสุ่ม X ที่ได้จะเป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวางนัยทั่วไป

ภาคผนวก ข

โปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัย

โปรแกรม R

```
#######################################################################################
function of Beta Generalized Exponential Distribution
#######################################################################################

########################## probability density function ##########################

x<-seq(0.1,10,0.001)
a<-0.3
b<-0.5
lambda<-0.5
alpha<-0.3
f1<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
   *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))
b<-1
lambda<-1
f2<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))
b<-1.5
lambda<-1.5
f3<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))
b<-2.0
lambda<-0.5
f4<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))
matplot(cbind(f1,f2,f3,f4),type="l",col=1,xaxt = "n",lwd=3,ylab="Probability Density
Function; f(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000,8000,10000),
```

```
,labels = expression(0,2,4,6,8,10))

###################     cumulative distribution & reliability function   ###################

x<-seq(0.1,10,0.001)
a<-1.5
b<-0.5
lambda<-0.5
alpha<-1.5
F1<-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)   #cumulative function#
R1<-1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)   #reliability function#
a<-1.5
alpha<-2.0
F2<-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
R2<-1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
a<-2.0
alpha<-1.5
F3<-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
R3<-1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
a<-2.0
alpha<-2.0
F4<-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
R4<-1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
matplot(cbind(F1,F2,F3,F4),type="l",col=1,xaxt = "n",lwd=3,ylab="Cumulative
Function; F(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000,8000,10000),
    ,labels = expression(0,2,4,6,8,10))
matplot(cbind(R1,R2,R3,R4),type="l",col=1,xaxt = "n",lwd=3,ylab="Reliability
Function; R(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000,8000,10000),
```

```
    ,labels = expression(0,2,4,6,8,10))

##############################    hazard rate function    ##############################

x<-seq(0.1,6,0.001)
a<-0.5
b<-0.5
lambda<-0.5
alpha<-0.5
h1<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b))
b<-1
lambda<-1
h2<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b))
b<-1.5
lambda<-1.5
h3<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b))
b<-2.0
lambda<-2.0
h4<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))
    *((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b))
matplot(cbind(h1,h2,h3,h4),type="l",col=1,xaxt = "n",lwd=3,ylab="h(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,2000, 4000,6000),
    ,labels = expression(0,2,4,6))
```

##

Calculate exact value for mean, variance

##

```
a<-1.0
b<-1.0
lambda<-1.0
alpha<-1.0
EX<-function(x) {alpha*lambda/beta(a,b)*exp(-lambda*x)
    *(1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1)*(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)}
ex<-integrate(EX,lower=0,upper=Inf)
EX1<-function(x) {x*alpha*lambda/beta(a,b)*exp(-lambda*x)
    *(1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1)*(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)}
ex1<-integrate(EX1,lower=0,upper=Inf)
EX2<-function(x) {x*x*alpha*lambda/beta(a,b)*exp(-lambda*x)
    *(1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1)*(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)}
ex2<-integrate(EX2,lower=0,upper=Inf)
EX3<-function(x) {x*x*x*alpha*lambda/beta(a,b)*exp(-lambda*x)
    *(1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1)*(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)}
ex3<-integrate(EX3,lower=0,upper=Inf)
EX4<-function(x) {x*x*x*x*alpha*lambda/beta(a,b)*exp(-lambda*x)
    *(1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1)*(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)}
ex4<-integrate(EX4,lower=0,upper=Inf)
Expec<-cbind(a,b,lambda,alpha,ex,ex1,ex2,ex3,ex4)
write.table(Expec,file="EX.xls",sep="\t",append=T)
```

##

Simulations of Beta Exponential random variable

##

```
for(i in 1:n){
x[i]={-1/lambda}*{log(1-((r[i])^(1/alpha)))}}
print<-x
}
BGE<-rbetaBGE(100,2,2,2,2)
```

##

test of goodness of fit

##

```
rbetaBGE<-function(n,a,b,lambda,alpha)
{
x<-rep(0,n)
r<-rbeta(n,a,b)
for(i in 1:n){
x[i]={-1/lambda}*{log(1-((r[i])^(1/alpha)))}}
sample<-x}
num<-20
ar<-2
br<-2
lambdar<-2
alphar<-2
sample<-rbetaBGE(num,ar,br,lambdar,alphar)
BGE<-sample
mle_a<-coef(est)[1]
mle_b<-coef(est)[2]
```

```
mle_lambda<-coef(est)[3]
mle_alpha<-coef(est)[4]
x<-BGE
library(stats4)    #package of KS#
library(ADGofTest)     #package of AD#
pBGE<-function(x,a,b,lambda,alpha)
        {
        pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
        }
ks.test(x,pBGE,mle_a,mle_b,mle_lambda,mle_alpha)
ad.test(x,pBGE,mle_a,mle_b,mle_lambda,mle_alpha)

########################################################################################
            Estimate parameter for Beta Generalized Exponential random variacles
########################################################################################

rbetaBGE<-function(n,a,b,lambda,alpha)
{
x<-rep(0,n)
r<-rbeta(n,a,b)
for(i in 1:n){
x[i]={-1/lambda}*{log(1-((r[i])^(1/alpha)))}}
sample<-x}
m<-500
num<-20
ar<-2
br<-2
lambdar<-2
alphar<-2
mlea.hat<-rep(0,m)
```

```
mleb.hat<-rep(0,m)
mlelambda.hat<-rep(0,m)
mlealpha.hat<-rep(0,m)
bayes_a.hat<-rep(0,m)
bayes_b.hat<-rep(0,m)
bayes_lambda.hat<-rep(0,m)
bayes_alpha.hat<-rep(0,m)
for(j in 1:m)
{
sample<-rbetaBGE(num,ar,br,lambdar,alphar)
BGE<-sample

##############################    method of MLE    ##############################

est_mle<-function(a,b,lambda,alpha){
n<-num
x<-BGE
lnL<- -((n*log(alpha)) +(n*log(lambda)) -(n*log(beta(a,b))) -(lambda*sum(x))
    +((alpha*a-1)*sum(log(1-exp(-lambda*x))))
    +((b-1)*(sum(log(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)))))}
library(stats4)
est<- mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=ar,b=br,lambda=lambdar,alpha=alphar))
mlea.hat[j]<-coef(est)[1]
mleb.hat[j]<-coef(est)[2]
mlelambda.hat[j]<-coef(est)[3]
mlealpha.hat[j]<-coef(est)[4]
```

```
##############################      method of Bayes      ##############################

library(R2WinBUGS)
datal<-data.frame(BGE)
N<-nrow(datal)
BGE<-datal$BGE
data<-list("N","BGE")
inits<-function(){list(a=2.0,b=2.0,lambda=2.0,alpha=2.0)}
output<-bugs(data,inits,model.file="D:/2.0,2.0,2.0,2.0.txt",
parameters = c("a","b","lambda","alpha"),
debug =FALSE,n.chains = 1,n.iter=15000,
bugs.directory="C:/Program Files/WinBUGS14")
bayes_a.hat[j]<-output$mean$a
bayes_b.hat[j]<-output$mean$b
bayes_lambda.hat[j]<-output$mean$lambda
bayes_alpha.hat[j]<-output$mean$alpha
}
para<-cbind(mlea.hat,mleb.hat,mlelambda.hat,mlealpha.hat,bayes_a.hat,bayes_b.hat,
     bayes_lambda.hat,bayes_alpha.hat)
write.table(para,file="para.xls",sep="\t",append=T)

##################################################################################

mleAV_a<-mean(mlea.hat)
mleAV_b<-mean(mleb.hat)
mleAV_lambda<-mean(mlelambda.hat)
mleAV_alpha<-mean(mlealpha.hat)
mleest_par<-c(mleAV_a,mleAV_b,mleAV_lambda,mleAV_alpha)
mleMSEa<-(sum((mlea.hat-ar)^2))/m
mleMSEb<-(sum((mleb.hat-br)^2))/m
```

```
mleMSElambda<-(sum((mlelambda.hat-lambdar)^2))/m
mleMSEalpha<-(sum((mlealpha.hat-alphar)^2))/m
mleMSE<-c(mleMSEa,mleMSEb,mleMSElambda,mleMSEalpha)

################################ Output MLE ################################
mleest_par
mleMSE
#################################################################################

bayesAV_a<-mean(bayes_a.hat)
bayesAV_b<-mean(bayes_b.hat)
bayesAV_lambda<-mean(bayes_lambda.hat)
bayesAV_alpha<-mean(bayes_alpha.hat)
bayesest_par<-c(bayesAV_a,bayesAV_b,bayesAV_lambda,bayesAV_alpha)
bayesMSEa<-(sum((bayes_a.hat-ar)^2))/m
bayesMSEb<-(sum((bayes_b.hat-br)^2))/m
bayesMSElambda<-(sum((bayes_lambda.hat-lambdar)^2))/m
bayesMSEalpha<-(sum((bayes_alpha.hat-alphar)^2))/m
bayesMSE<-c(bayesMSEa,bayesMSEb,bayesMSElambda,bayesMSEalpha)

################################ Output Bayes ################################
bayesest_par
bayesMSE
#################################################################################
```

```
################################################################################
        application of reliability with Beta Generalized Exponential distribution (real data)
################################################################################

BGE<-c(38.7,49.2,42.4,73.8,46.7,44.1,61.9,39.3,49.8,46.3,56.2,50.5,54.9,54,49.2,44.8,72.2,107.8
        ,81.6,45.2,124.6,64,83,143.6,43.4,69.6,74.8,32.9,51.5,31.8,77.6,63.7,83.0,24.8,68.8,68.8
        ,89.1,65,65.1,59.3,53.9,79.4,47.4,61.4,72.8,54,37.2,44.2,50.8,65.5,86.7,43.8,100.6,67.6
        ,89.5,60.3,103.6,82.6,88,42.4,68.9,95.7,78.1,83.6,18.6,92.6,42.4,34.3,105.6,20.8,52.0,77.2
        ,68.9,78.7,165.5,79.5,55,46.8,124.5,92.5,110,101.2,59.4,27.8,33.6,69,75.2,58.4,105.6
        ,56.2,55.9,83.8,123.5,69,101.9,87.6,38.8,74.7)

##########################      method of MLE for real data      #########################

est_mle<-function(a,b,lambda,alpha)
         {
         n<-num
         x<-BGElnL<- -((n*log(alpha)) +(n*log(lambda)) -(n*log(beta(a,b))) -(lambda*sum(x))

        +((alpha*a-1)*sum(log(1-exp(-lambda*x)))) +((b-1)
        *(sum(log(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)))))
         }
num<-length(BGE)
library(stats4)
al<-1.5
bl<-0.1
lambdal<-0.1
alphal<-1.5
est<-mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=al,b=bl,lambda=lambdal,alpha=alphal))
summary(est)
```

```
############################## prior of Bayes ##############################

m_a<-coef(est)[1]
m_b<-coef(est)[2]
m_lambda<-coef(est)[3]
m_alpha<-coef(est)[4]
var_a<-0.00001
var_b<-vcov(est)[6]
var_lambda<-vcov(est)[11]
var_alpha<-0.00001
var<-c(var_a,var_b,var_lambda,var_alpha)
var
prior_a_a<-(m_a^2)/var_a
prior_b_a<-(m_a)/var_a
prior_a_b<-(m_b^2)/var_b
prior_b_b<-(m_b)/var_b
prior_a_lambda<-(m_lambda^2)/var_lambda
prior_b_lambda<-(m_lambda)/var_lambda
prior_a_alpha<-(m_alpha^2)/var_alpha
prior_b_alpha<-(m_alpha)/var_alpha
prior_a<-c(prior_a_a,prior_a_b,prior_a_lambda,prior_a_alpha)
prior_b<-c(prior_b_a,prior_b_b,prior_b_lambda,prior_b_alpha)
prior_a
prior_b

############################## KS of BGE (MLE) ##############################

mle_a<-coef(est)[1]
mle_b<-coef(est)[2]
mle_lambda<-coef(est)[3]
```

```
mle_alpha<-coef(est)[4]
x<-BGE
pBGE<-function(x,a,b,lambda,alpha)
{         pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
}
ks.test(x,pBGE,mle_a,mle_b,mle_lambda,mle_alpha)

##############################    KS of BGE (Bayes)    ##############################

mle_a<-1.395
mle_b<-2.323
mle_lambda<-0.02554
mle_alpha<-4.79
x<-BGE
pBGE<-function(x,a,b,lambda,alpha)
{
          pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
}
ks.test(x,pBGE,mle_a,mle_b,mle_lambda,mle_alpha)

##################################    KS of BE    ##################################

est_mle<-function(a,b,lambda)
          {
          alpha<-1
          n<-num
          x<-BGE
          lnL<- -((n*log(alpha)) +(n*log(lambda)) -(n*log(beta(a,b))) -(lambda*sum(x))
+((alpha*a-1)*sum(log(1-exp(-lambda*x)))) +((b-1)*(sum(log(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)))))
          }
```

```
num<-length(BGE)
library(stats4)
est<-mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=0.5,b=1.5,lambda=0.1))
summary(est)
mle_a<-coef(est)[1]
mle_b<-coef(est)[2]
mle_lambda<-coef(est)[3]
x<-BGE
pBE<-function(x,a,b,lambda)
{
        pbeta((1-exp(-lambda*x)),a,b)
}
ks.test(x,pBE,mle_a,mle_b,mle_lambda)

###################################    KS of GE    ###################################

est_mle<-function(lambda,alpha)
        {
        a<-1
        b<-1
        n<-num
        x<-BGE
        lnL<- -((n*log(alpha)) +(n*log(lambda)) -(n*log(beta(a,b))) -(lambda*sum(x))
+((alpha*a-1)*sum(log(1-exp(-lambda*x)))) +((b-1)*(sum(log(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)))))
        }
num<-length(BGE)
library(stats4)
est<-mle(minuslogl=est_mle,start=list(lambda=0.2,alpha=15))
summary(est)
mle_lambda<-coef(est)[1]
```

```
mle_alpha<-coef(est)[2]
x<-BGE
pGE<-function(x,lambda,alpha)
{
        a<-1
        b<-1
        pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
}
ks.test(x,pGE,mle_lambda,mle_alpha)

##############################   KS of exponential   ##############################

require(MASS)
fitdistr(BGE,"exponential")
require(stats)
rate<-0.014764595
ks.test(BGE,"pexp",rate)

##############################   AD of BGE (MLE)   ##############################

est_mle<-function(a,b,lambda,alpha)
        {
        n<-num
        x<-BGE
        lnL<- -((n*log(alpha)) +(n*log(lambda)) -(n*log(beta(a,b))) -(lambda*sum(x))
+((alpha*a-1)*sum(log(1-exp(-lambda*x)))) +((b-1)*(sum(log(1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)))))
        }
num<-length(BGE)
library(stats4)
al<-1.5
```

```
bl<-0.1
lambdal<-0.1
alphal<-1.5
est<-mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=al,b=bl,lambda=lambdal,alpha=alphal))
summary(est)
mle_a<-coef(est)[1]
mle_b<-coef(est)[2]
mle_lambda<-coef(est)[3]
mle_alpha<-coef(est)[4]
library(ADGofTest)
x<-BGE
pBGE<-function(x,a,b,lambda,alpha)
{
        pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
}
ad.test(x,pBGE,mle_a,mle_b,mle_lambda,mle_alpha)

############################    AD of BGE (Bayes)    ############################

mle_a<-1.395
mle_b<-2.323
mle_lambda<-0.02554
mle_alpha<-4.79
library(ADGofTest)
x<-BGE
pBGE<-function(x,a,b,lambda,alpha)
{
        pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
}
ad.test(x,pBGE,mle_a,mle_b,mle_lambda,mle_alpha)
```

```
####################    histogram and density function (BGE)    ####################

x<-sort(BGE)
BGE<-x
hist(BGE,prob=TRUE,main="")
## estimate of mle ##
a1<-1.39550903
b1<-2.30773089
lambda1<-0.02549634
alpha1<-4.79042287
## estimate of bayes ##
a<-1.395
b<-2.323
lambda<-0.02554
alpha<-4.79
T<-function(x)((alpha1*lambda1/beta(a1,b1))*(exp(-lambda1*x))*((1-exp(-
lambda1*x))^((alpha1*a1)-1))*((1-(1-exp(-lambda1*x))^alpha1)^(b1-1)))
U<-function(x)((alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-
1))*((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)))
curve(T,col=1,lty=1,lwd=2,add=TRUE)
curve(U,col=1,lty=2,lwd=2,add=TRUE)
legend('topright',c("MLE","Bayes"),lwd=1.5,lty=1:2,cex=1)

########################    reliability function for real data    ########################

R1<-1-pbeta((1-exp(-lambda1*x))^alpha1,a1,b1)
R2<-1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b)
matplot(cbind(R1,R2),type="l",col=1,lwd=2,ylab="Reliability Function;R(x)",xlab="x")
legend("topright",c("MLE","Bayes"),lty=1:2,lwd=1.5,cex=1)
```

```
########################## hazard function for real data ##########################

H1<-(alpha1*lambda1/beta(a1,b1))*(exp(-lambda1*x))*((1-exp(-lambda1*x))^((alpha1*a1)-
1))*((1-(1-exp(-lambda1*x))^alpha1)^(b1-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda1*x))^alpha1,a1,b1))
H2<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))*((1-(1-
exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b))
matplot(cbind(H1,H2),type="l",col=1,lwd=2,ylab="Harzard rate Function; h(x)",xlab="x")
legend("bottomright",c("MLE","Bayes"),lty=1:2,lwd=1.5,cex=1)

########################## hazard function for real data ##########################

H1<-(alpha1*lambda1/beta(a1,b1))*(exp(-lambda1*x))*((1-exp(-lambda1*x))^((alpha1*a1)-
1))*((1-(1-exp(-lambda1*x))^alpha1)^(b1-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda1*x))^alpha1,a1,b1))
H2<-(alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-1))*((1-(1-
exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1))/(1-pbeta((1-exp(-lambda*x))^alpha,a,b))
matplot(cbind(H1,H2),type="l",col=1,lwd=2,ylab="Harzard rate Function; h(x)",xlab="x")
legend("bottomright",c("MLE","Bayes"),lty=1:2,lwd=1.5,cex=1)

###################### histogram and density (BGE, BE, GE) ######################

x<-sort(BGE)
BGE<-x
hist(BGE,prob=TRUE,main="")
## estimate of mle bge ##
a<-1.39550903
b<-2.30773089
lambda<-0.02549634
alpha<-4.79042287
## estimate of mle be ##
a1<-6.40392113
```

```
b1<- 2.36090321
lambda1<-0.02176824
alpha1<-1
## estimate of mle ge ##
a2<-1
b2<-1
lambda2<-0.04388069
alpha2<-10.61213444
bge<-function(x)((alpha*lambda/beta(a,b))*(exp(-lambda*x))*((1-exp(-lambda*x))^((alpha*a)-
1))*((1-(1-exp(-lambda*x))^alpha)^(b-1)))
be<-function(x)((alpha1*lambda1/beta(a1,b1))*(exp(-lambda1*x))*((1-exp(-
lambda1*x))^((alpha1*a1)-1))*((1-(1-exp(-lambda1*x))^alpha1)^(b1-1)))
ge<-function(x)((alpha2*lambda2/beta(a2,b2))*(exp(-lambda2*x))*((1-exp(-
lambda2*x))^((alpha2*a2)-1))*((1-(1-exp(-lambda2*x))^alpha2)^(b2-1)))
curve(bge,col=1,lty=1,lwd=2,add=TRUE)
curve(be,col=1,lty=2,lwd=2,add=TRUE)
curve(ge,col=1,lty=3,lwd=2,add=TRUE)
legend('topright',c("BGE","BE","GE"),lwd=1.5,lty=1:3,cex=1)
```

โปรแกรม WinBUGS

1. เกี่ยวกับโปรแกรม WinBUGS

WinBUGS (Windows Baysian inference Using Ginns Sampling) เป็นโปรแกรมทางสถิติซึ่งถูกพัฒนาขึ้นจากโปรแกรมที่มีชื่อว่า BUGS สำหรับวัตุประสงค์ในการสร้างมานั้นเพื่อทำวิเคราะห์ข้อมูลเบส์ โดยใช้เทคนิค Markov Chain Monte Carlo และต่อมาได้พัฒนาให้ใช้ได้กับระบบปฏิบัติการ Windows นั่นคือโปรแกรม WinBUGS

2. ประมาณค่าพารามิเตอร์วิธีเบส์ด้วยโปรแกรม WinBUGS ซึ่งประมวลผลภายใต้โปรแกรม R

โดยจะต้องทำการ Download Package R2WinBUGS ของโปรแกรม R เพราะต้องใช้คำสั่ง bugs ในการประมวลผล WinBUGS ในโปรแกรม R โดยมีขั้นตอนดังนี้

2.1 เลือก Package บนแถบเครื่องมือ และเลือก Install package(s) จะขึ้นหน้าต่าง CRAN mirror

2.2 เลือก Thailand จะขึ้นหน้าต่าง Packages เลือก R2WinBUGS แล้วคลิกปุ่ม OK

2.3 กลับมาที่หน้าต่าง R console ทำการ load Package ขึ้นมาใช้ดังนี้
>library(“R2WinBUGS”) โดยที่โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ได้กล่าวถึงมาแล้วในโปรแกรม R ข้างต้น

3. BUGS code

```
################################   model of Bayes    ################################

model;
{
  a ~ dgamma(40,20)
  b ~ dgamma(16,8)
  lambda ~ dgamma(16,8)
  alpha~ dgamma(40,20)
  c<-10000
  for( i in 1 : N ) {
        zeros[i]<-0
        zeros[i] ~ dpois(zeros.mean[i])
        zeros.mean[i]<- -l[i] + c
        l[i]<-log(alpha) + log(lambda) - loggam(a) - loggam(b) + loggam(a+b) - lambda*BGE[i]
+ ((alpha*a)-1)*log(1-exp(-lambda*BGE[i])) + (b-1)*log(1-pow(1-exp(-lambda*BGE[i]),alpha))
  }
}

#save file as 2.0,2.0,2.0,2.0.txt #

#########################    estimate parameter for real data      #########################

model;
{
  a ~ dgamma(194744.5,139550.9)
  b ~ dgamma(2.728611,1.182378)
  lambda ~ dgamma(297.1732,11655.52)
  alpha~ dgamma(2294815,479042.3)
```

```
  c<-10000
  for( i in 1 : N ) {
          zeros[i]<-0
          zeros[i] ~ dpois(zeros.mean[i])
          zeros.mean[i]<- -l[i] + c
          l[i]<-log(alpha) + log(lambda) - loggam(a) - loggam(b) + loggam(a+b) - lambda*x[i] +
((alpha*a)-1)*log(1-exp(-lambda*x[i])) + (b-1)*log(1-pow(1-exp(-lambda*x[i]),alpha))
  }
}
```

```
Data;
list(x=c(38.7,49.2,42.4,73.8,46.7,44.1,61.9,39.3,49.8,46.3,56.2,50.5,54.9,54,49.2,44.8,72.2,107.8
        ,81.6,45.2,124.6,64,83,143.6,43.4,69.6,74.8,32.9,51.5,31.8,77.6,63.7,83.0,24.8,68.8,68.8
        ,89.1,65,65.1,59.3,53.9,79.4,47.4,61.4,72.8,54,37.2,44.2,50.8,65.5,86.7,43.8,100.6,67.6
        ,89.5,60.3,103.6,82.6,88,42.4,68.9,95.7,78.1,83.6,18.6,92.6,42.4,34.3,105.6,20.8,52.0,77.2
        ,68.9,78.7,165.5,79.5,55,46.8,124.5,92.5,110,101.2,59.4,27.8,33.6,69,75.2,58.4,105.6
        ,56.2,55.9,83.8,123.5,69,101.9,87.6,38.8,74.7),N=98)
```

```
initial;
list(a=1.39550903,b=2.30773089,lambda=0.02549634,alpha=4.79042287)
```

4. การแสดงผล

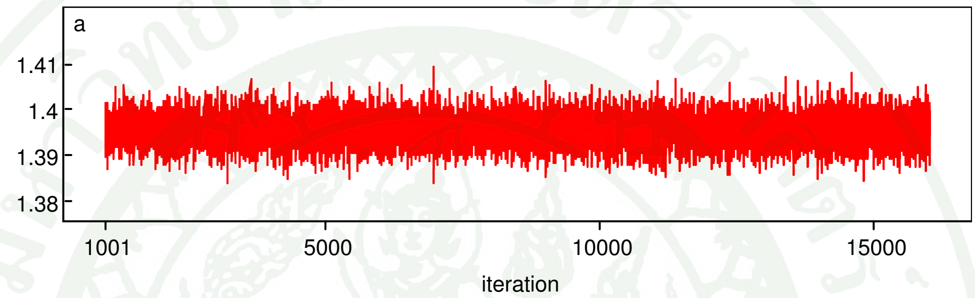
การแสดงผลสามารถแสดงได้ในทั้ง 2 ส่วนโปรแกรมทั้งในส่วนของโปรแกรม R และแสดงผลใน WinBUGS

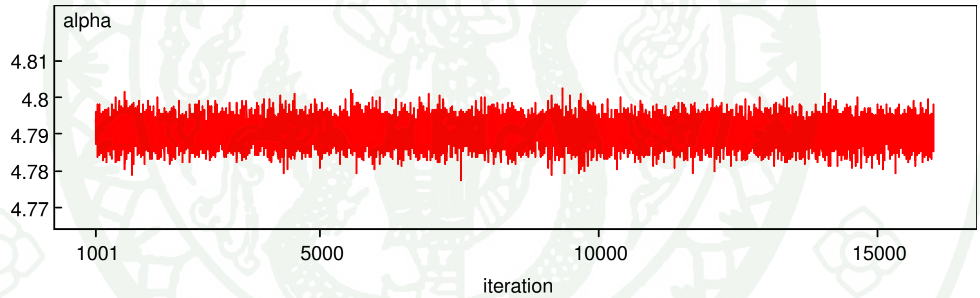
การแสดงผลในโปรแกรม R ในส่วนของฟังก์ชัน bugs() ใช้คำสั่ง “debug=FALSE” และสำหรับการแสดงผลในโปรแกรม WinBUGS ในส่วนของฟังก์ชัน bugs() ใช้คำสั่ง “debug=TRUE” และผลลัพธ์ที่ได้จะขึ้นอยู่บนหน้าต่างของโปรแกรม WinBUGS กรณีตัวอย่างในการวิเคราะห์ผลข้อมูลจริงได้แสดงตัวอย่างผลการวิเคราะห์ในโปรแกรม WinBUGS ดังนี้

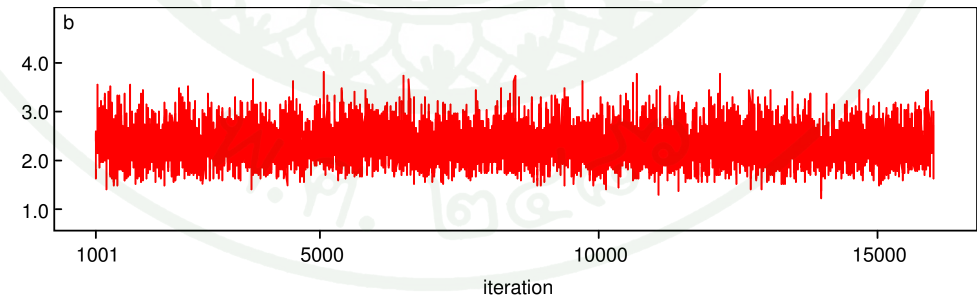
Node statistic

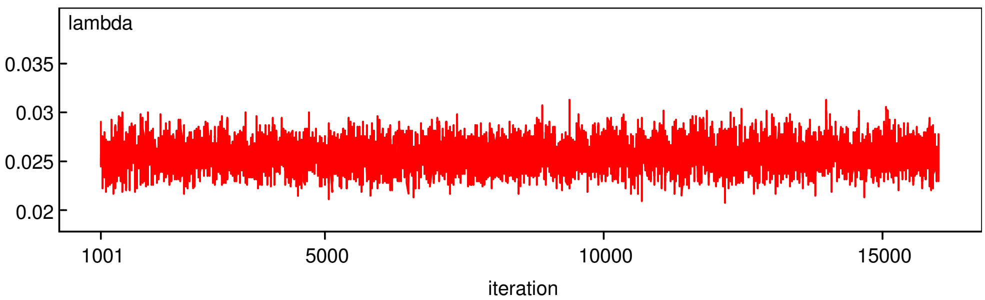
node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
a	1.395	0.003176	2.645E-5	1.389	1.395	1.402	1001	15000
alpha	4.79	0.003191	2.351E-5	4.784	4.79	4.797	1001	15000
b	2.323	0.3431	0.006188	1.712	2.303	3.063	1001	15000
lambda	0.02554	0.001353	2.431E-5	0.02296	0.02549	0.02826	1001	15000

history

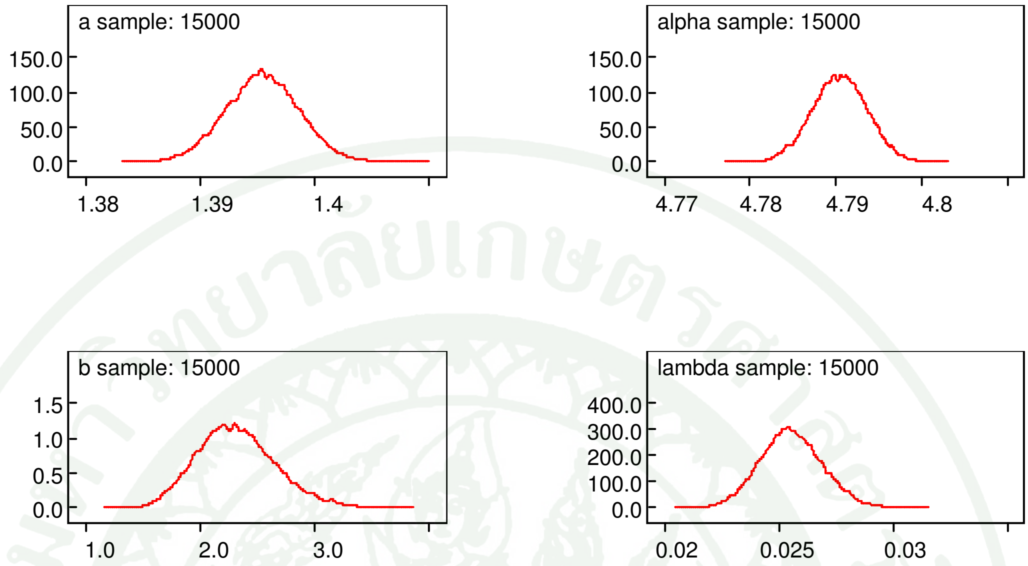








Kernel density



ความหมายของค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ผล

node คือ ตัวแปรที่เราต้องการประมาณค่าในที่นี้คือค่า a, b, λ และ α

mean คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรที่ต้องการประมาณ

sd คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าที่ได้จากการจำลอง

MC error คือ ค่าความผิดพลาดของขบวนการมอนติคาโล ลักษณะค่าที่ดีจะมีค่าเข้าใกล้ 0

median คือ ค่ามัธยฐานหรือค่าเปอร์เซ็นไทล์ที่ 50 ที่ได้จากการจำลอง

start คือ ค่าเริ่มต้นของข้อมูลที่ทำการจำลอง

sample คือ จำนวนตัวอย่างที่ได้จากการจำลอง

ลักษณะของ history เป็นกราฟระหว่างค่าสังเกตกับค่าเฉลี่ย ค่าเริ่มต้นถึงค่าสุดท้ายขึ้นอยู่กับการ update ลักษณะกราฟที่ดีต้องมีการแกว่งขึ้นลงรอบค่าเฉลี่ยอย่างสม่ำเสมอ (stationary)

ลักษณะของ density กราแจกแจงก่อนมีลักษณะแบบใดลักษณะกราฟของการแจกแจงหลังต้องมีลักษณะเป็นแบบนั้นโดยกราฟจะต้องมีลักษณะ smooth

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นางสาวอารียา สุดสุข
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 6 กันยายน 2527
สถานที่เกิด	อำเภอสองพี่น้อง จังหวัดสุพรรณบุรี
ประวัติการศึกษา	วท.บ. (คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	-
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	โครงการพัฒนากำลังคนด้านวิทยาศาสตร์ (ทุนเรียนดีวิทยาศาสตร์แห่งประเทศไทย)