



ใบรับรองวิทยานิพนธ์
บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (สถิติ)

ปริญญา

สถิติ

สาขา

สถิติ

ภาควิชา

เรื่อง คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

Probability Properties of Beta Exponential Random Variable

นามผู้วิจัย นางสาวดาริกา เข้มรับบุญ

ได้พิจารณาเห็นชอบโดย

อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์วันัย โพธิ์สุวรรณ, Ph.D.)

หัวหน้าภาควิชา

(อาจารย์อ่ำไพ ทองธีรภาพ, Ph.D.)

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์รับรองแล้ว

(รองศาสตราจารย์กัญญา ชีระกุล, D.Agr.)

คณบดีบัณฑิตวิทยาลัย

วันที่ เดือน พ.ศ.

วิทยานิพนธ์

เรื่อง

คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

Probability Properties of Beta Exponential Random Variable

โดย

นางสาวดาริกา เข้มรับบุญ

เสนอ

บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
เพื่อความสมบูรณ์แห่งปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ)

พ.ศ. 2552

คาริกา เข้มรับบุญ 2552: คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (สถิติ) สาขาสถิติ ภาควิชาสถิติ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก:
ผู้ช่วยศาสตราจารย์วินัย โพธิ์สุวรรณ, Ph.D. 216 หน้า

การวิจัยนี้ได้ทำการศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล โดยพิจารณาถึงฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม ผลเฉลยรูปแบบปิด และค่าที่แท้จริงสำหรับค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง รูปแบบฟังก์ชันของโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ผลบวกของตัวแปรสุ่มโดยใช้เทคนิคผลการประสาน ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง การสร้างค่าของตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผัน และการทดสอบภาวะสารูปสันติ อีกทั้งได้ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดและวิธีของเบส์ที่มีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่าง 20, 40, 80, 100 และ 250 จำนวน 500 ชุด ค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดในแต่ละขนาดตัวอย่างเป็น $a = 0.5, 1.0, 2.0$, $b = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ ในการวิจัยนี้ใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ ทำการทดลองตามสถานการณ์ที่กำหนดโดยการสร้างค่าของตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผัน ประมวลผลด้วยโปรแกรม R และ WinBUGS นอกจากนี้ได้เสนอการประยุกต์ทางความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

ผลการวิจัยพบว่า การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมีลักษณะจำแนกได้ 2 ลักษณะคือ มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียวเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a \leq 1$ และจะมีลักษณะที่เบ้ขวาเมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ โดยที่พารามิเตอร์ $b > 0$ และ $\lambda > 0$ ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนจะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ λ มีค่าสูงขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง จะไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ ลักษณะรูปร่างฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงมี 3 ลักษณะคือ มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียว มีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเพียงอย่างเดียว และจะมีลักษณะฟังก์ชันคงที่ เมื่อพารามิเตอร์ $0 < a < 1$, $a > 1$ และ $a = 1$ ตามลำดับ โดยที่พารามิเตอร์ $b > 0$ และ $\lambda > 0$ สำหรับวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์จะพบว่า วิธีของเบส์มีประสิทธิภาพสูงกว่าการประมาณด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณี

Darika Yamrubboon 2009: Probability Properties of Beta Exponential Random Variable. Master of Science (Statistics), Major Field: Statistics, Department of Statistics. Thesis Advisor: Assistant Professor Winai Bodhisuwan, Ph.D. 216 pages.

This research is to study the probability properties of the beta exponential random variable; i.e., probability density function, cumulative distribution function, closed-form solution and exact value of mean, variance, skewness coefficient, kurtosis coefficient, characteristic function, moment generating function, reliability function, hazard function. In additions, sum of beta exponential variable using convolution technique, generating of random variate using inverse transform technique and goodness-of-fit test are investigated. Comparison of parameter estimation technique by the method of maximum likelihood and method of Bayes with gamma prior distribution is included. In this study we consider parameters $a = 0.5, 1.0, 2.0$, $b = 0.5, 1.0, 2.0$ and $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ with sample sizes of 20, 40, 80, 100 and 250 each case was run 500 replications and evaluated through mean square error (MSE) which using R and WinBUGS program. Furthermore, this research presented the application of reliability analysis based on beta exponential distribution.

The results of this research found that, the beta exponential random variables can be classified into two shapes of distribution. It is monotonically decreasing function if $0 < a \leq 1$ and it skewed to the right if $a > 1$ when parameter $b > 0$ and $\lambda > 0$. The mean and variance will be decreased when parameter λ is increased. However, the value of skewness coefficient and kurtosis coefficient do not depend on the parameter λ . There are three shapes of the hazard rate function which are monotonically decreasing function, monotonically increasing function and constant function if $0 < a \leq 1$, $a > 1$ and $a = 1$ respectively where parameter $b > 0$ and $\lambda > 0$. Under comparison of parameter estimation technique, method of Bayes gives a smaller mean square error than the method of maximum likelihood in almost of tested cases.

Student's signature

Thesis Advisor's signature

____ / ____ / ____

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยความกรุณาของผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วินัย โพรธิสุวรรณ อาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์หลัก ที่ได้ให้คำแนะนำ และข้อคิดเห็น ตลอดจนช่วยเหลือแก้ไขข้อบกพร่องต่างๆ เป็นอย่างดียิ่งจนกระทั่งวิทยานิพนธ์ฉบับนี้เสร็จสมบูรณ์ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้ง และขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง

ขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์อนันต์ชัย เกื่อนธรรม ประธานกรรมการสอบ และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. กุศยา ปลั่งพงษ์พันธ์ ผู้ทรงคุณวุฒิภายนอก ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำเพิ่มเติม เพื่อความสมบูรณ์ยิ่งขึ้นของวิทยานิพนธ์เล่มนี้

ขอขอบพระคุณคณาจารย์ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ ทุกท่านที่ประสิทธิประสาทความรู้ และประสบการณ์ทางด้านสถิติอันเป็นประโยชน์ต่อผู้วิจัย

สุดท้ายนี้ผู้วิจัยใคร่ขอขอบพระคุณบิดา ญาติพี่น้องและเพื่อน ที่เป็นกำลังใจและให้ความช่วยเหลือสนับสนุนมาโดยตลอด

ดารีกา เข้มรับบุญ
สิงหาคม 2552

สารบัญ

	หน้า
สารบัญ	(1)
สารบัญตาราง	(2)
สารบัญภาพ	(8)
คำนำ	1
วัตถุประสงค์	2
การตรวจเอกสาร	6
อุปกรณ์และวิธีการ	34
อุปกรณ์	34
วิธีการ	34
ผลและวิจารณ์	39
ผล	39
วิจารณ์	149
สรุปและข้อเสนอแนะ	150
สรุป	150
ข้อเสนอแนะ	157
เอกสารและสิ่งอ้างอิง	158
ภาคผนวก	160
ภาคผนวก ก พิสูจน์คุณสมบัติการแจกแจง	161
ภาคผนวก ข การแจกแจงก่อนหน้าและตารางของค่าวิกฤตสถิติทดสอบ	189
ภาคผนวก ค โปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัย	198
ประวัติการศึกษาและการทำงาน	216

สารบัญตาราง

ตารางที่		หน้า
1	ค่าพารามิเตอร์การแจกแจงก่อนสำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ	26
2	ค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของพารามิเตอร์ a , b และ λ	47
3	ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าสถิติทดสอบโคโลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a , b , $\lambda = 1, 1$, 1 และ $n=100$	59
4	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5$	61
5	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 1.0$	64
6	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 2.0$	67
7	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5$	70

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
8	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5, b = 1.0$ และ $\lambda = 1.0$	73
9	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5, b = 1.0$ และ $\lambda = 2.0$	76
10	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5, b = 2.0$ และ $\lambda = 0.5$	79
11	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5, b = 2.0$ และ $\lambda = 1.0$	82
12	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5, b = 2.0$ และ $\lambda = 2.0$	85
13	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5$	88

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
14	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 0.5$ และ $\lambda = 1.0$	91
15	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 0.5$ และ $\lambda = 2.0$	94
16	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5$	97
17	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 1.0$ และ $\lambda = 1.0$	100
18	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 1.0$ และ $\lambda = 2.0$	103
19	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 2.0$ และ $\lambda = 0.5$	106

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
20	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 2.0$ และ $\lambda = 1.0$	109
21	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0, b = 2.0$ และ $\lambda = 2.0$	112
22	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0, b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5$	115
23	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0, b = 0.5$ และ $\lambda = 1.0$	118
24	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0, b = 0.5$ และ $\lambda = 2.0$	121
25	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0, b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5$	124

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางที่		หน้า
26	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 1.0$	127
27	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 2.0$	130
28	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 2.0$ และ $\lambda = 0.5$	133
29	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 2.0$ และ $\lambda = 1.0$	136
30	ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 2.0$ และ $\lambda = 2.0$	139
31	ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ สำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี	143
32	ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) สำหรับข้อมูลจริง	143
33	ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับข้อมูลจริง	144

สารบัญตาราง (ต่อ)

ตารางผนวกที่	หน้า
ข1	ค่าการแจกแจงก่อนหน้าของวิธีประมาณค่าด้วยวิธีของเบส์เมื่อพิจารณา ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าเฉลี่ยของ ความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30
ข2	ค่าวิกฤตสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ

สารบัญภาพ

ภาพที่		หน้า
1	กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงแกมมาเมื่อ $a=0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0$	29
2	กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$	30
3	กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเมื่อ $a=1.0, 2.0, 3.0, 5.0$ และ $b = 1.0, 2.0, 3.0$	31
4	แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่า 2 วิธี สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล	37
5	กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $0 < a \leq 1, b > 0$ และ $\lambda > 0$	42
6	กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $a > 1, b > 0$ และ $\lambda > 0$	43
7	กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0, \lambda = 1.0$	44
8	กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $b = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, \lambda = 1.0$	45
9	กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, b = 1.0$	45
10	กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0, \lambda = 1.0$	51
11	กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $b = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, \lambda = 1.0$	52
12	กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, b = 1.0$	52
13	กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $0 < a < 1.0$ และ $b = 0.5, 1.0, 2.0, \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$	54

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
14	กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a > 1.0$ และ $b = 0.5, 1.0, 2.0$, $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$	54
15	กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a = 1.0$ และ $b = 0.5, 1.0, 2.0$, $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$	55
16	ฮิสโตแกรมแสดงค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เปรียบเทียบกับโค้งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a, b, \lambda = 1, 1, 1$ และ $n=100$	57
17	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 0.5, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	62
18	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 0.5, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	65
19	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 0.5, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	68
20	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 1.0, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	71
21	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 1.0, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	74
22	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 1.0, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	77

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
23	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 2.0, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	80
24	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 2.0, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	83
25	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 2.0, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	86
26	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 0.5, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	89
27	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 0.5, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	92
28	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 0.5, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	95
29	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 1.0, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	98
30	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 1.0, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	101

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
31	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 1.0, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	104
32	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 2.0, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	107
33	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 2.0, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	110
34	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0, b = 2.0, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	113
35	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 0.5, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	116
36	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 0.5, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	119
37	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 0.5, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	122
38	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 1.0, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	125

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
39	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 1.0, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	128
40	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 1.0, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	131
41	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 2.0, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ	134
42	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 2.0, \lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ	137
43	กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0, b = 2.0, \lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ	140
44	ฮิสโตแกรมแสดงลักษณะของข้อมูลจริงเปรียบเทียบกับโค้งการแจกแจงของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี MLE และวิธี Bayes	144
45	กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธี MLE และวิธี Bayes	146
46	กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธี MLE	147
47	กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธี Bayes	148

สารบัญภาพ (ต่อ)

ภาพที่		หน้า
48	กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $0 < a \leq 1$	152
49	กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a > 1$	153
50	กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อกำหนดให้ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0, \lambda = 1.0$	154

คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

Probability Properties of Beta Exponential Random Variable

คำนำ

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลอายุ (Life time data) มีหลายการแจกแจง (Maynard, 2004) เช่น การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential distribution) การแจกแจงไวบูลล์ (Weibull distribution) การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution) การแจกแจงปกติ (Normal distribution) และการแจกแจงลอกลอนอร์มัล (Lognormal distribution) เป็นต้น Nadarajah and Kotz (2006) ได้เสนอฟังก์ชันการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล (Beta Exponential distribution) ซึ่งมีคุณสมบัติที่น่าสนใจและนำไปประยุกต์ใช้เกี่ยวกับข้อมูลอายุ

การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี 3 พารามิเตอร์ ซึ่งการแจกแจงนี้ได้สร้างและพัฒนาขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตา (Beta distribution) และการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}$$

เมื่อ $x \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$

การวิจัยครั้งนี้ต้องการศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (method of maximum likelihood) และวิธีของเบย์ (method of Bayes) การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง โดยการสร้างค่าตัวแปรสุ่มให้มีลักษณะเป็นไปตามสถานการณ์ที่กำหนดขึ้น นอกจากนี้ยังศึกษาการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

วัตถุประสงค์

- เพื่อศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
- เพื่อศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลโดยใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (method of maximum likelihood) และวิธีของเบย์ (method of Bayes)
- เพื่อศึกษาการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลในเชิงการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

ขอบเขตการวิจัย

ขอบเขตการวิจัยมีดังนี้

- ทำการศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลดังต่อไปนี้
 - ลักษณะรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น
 - ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม
 - ผลเฉลยรูปแบบปิด (closed-form solution) ซึ่งประกอบไปด้วย
 - ค่าเฉลี่ย (mean)
 - ค่าความแปรปรวน (variance)
 - ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ (skewness coefficient)
 - ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (kurtosis coefficient)

1.4 คำนวณค่าที่แท้จริง (exact values) ของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน
ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง สำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ เมื่อกำหนด
ค่าพารามิเตอร์เป็นดังนี้

$$1.4.1 \quad a = 0.5, b = 0.5 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.2 \quad a = 0.5, b = 1.0 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.3 \quad a = 0.5, b = 2.0 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.4 \quad a = 1.0, b = 0.5 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.5 \quad a = 1.0, b = 1.0 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.6 \quad a = 1.0, b = 2.0 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.7 \quad a = 2.0, b = 0.5 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.8 \quad a = 2.0, b = 1.0 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

$$1.4.9 \quad a = 2.0, b = 2.0 \text{ และ } \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

1.5 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด (moment generating function) และฟังก์ชัน
ลักษณะเฉพาะ (characteristic function)

1.6 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน
โดยใช้เทคนิคผลการประสาน (convolution)

1.7 วิเคราะห์ความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลประกอบด้วย

1.7.1 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (reliability function)

1.7.2 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง (hazard rate function)

1.8 การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

1.9 การทดสอบภาวะสารูปสถิติโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ (Kolmogorov -Smirnov test statistic)

2. ประมาณค่าพารามิเตอร์ (parameter estimation) โดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์

2.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ใช้ในแต่ละสถานการณ์ซึ่งกำหนดเช่นเดียวกับข้อที่ 1.4

2.2 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 20, 40, 80, 100 และ 250

2.3 จำลองข้อมูลตามสถานการณ์ที่กำหนดโดยใช้โปรแกรม R

2.4 สร้างค่าตัวแปรสุ่มตามสถานการณ์ดังกล่าวข้างต้นโดยทำการจำลองซ้ำ 500 ครั้งในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนด

2.5 กรณิการประมาณค่าด้วยวิธีของเบส์ใช้การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution) เป็นการแจกแจงก่อน (prior distribution) สำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ

2.6 เปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองระหว่างค่าประมาณกับค่าจริง (mean square error : MSE)

3. นำการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมาศึกษากับข้อมูลจริงเพื่อแสดงการประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้ซึ่งจะทำการศึกษาดังนี้

1.1 การทดสอบภาวะสารูปสนิทธิ

1.2 การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์

1.3 การวิเคราะห์ทางความเชื่อถือได้โดยหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. ได้ทราบถึงคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
2. ได้ทราบถึงผลการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลโดยใช้วิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์
3. เป็นแนวทางในการเลือกใช้วิธีที่เหมาะสมในการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลได้อย่างเหมาะสมและมีประสิทธิภาพภายใต้แต่ละสถานการณ์
4. เป็นพื้นฐานในการประยุกต์ใช้กับข้อมูลที่มีคุณลักษณะเป็นการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
5. ใช้เป็นเอกสารอ้างอิงสำหรับผู้สนใจตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

การตรวจเอกสาร

ในการตรวจเอกสารจะกล่าวถึงทฤษฎีต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่สำคัญของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล รวมถึงงานวิจัยที่เกี่ยวข้องซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

1. แนวคิดทฤษฎีความน่าจะเป็น

แนวคิดของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่จะนำเสนอได้แก่ ตัวแปรสุ่มต่อเนื่องและคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น

1.1 ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variables)

นิยามที่ 1 ตัวแปรสุ่ม X จะเป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง ถ้าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม (cumulative distribution function: cdf.) เป็นเรนจ์ของฟังก์ชันค่าจริง x ของจำนวนจริง ($x \in R$)

ดังนั้นถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องแล้ว $P(X = x) = 0$ สำหรับทุก $x \in R$ ทำให้ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของ X เขียนได้ในรูป

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

$$= \int_{-\infty}^x f_X(x) dx$$

และจะเรียกฟังก์ชัน $f_X(x)$ ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น (probability density function: pdf.) ของ X ถ้า $f_X(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x)$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ X คือ $f_X(t)$ สำหรับทุก $x \in R$ จะมีคุณสมบัติที่สำคัญคือ

$$f_X(x) \geq 0 \text{ สำหรับทุกค่าของ } x$$

และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$$

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของ X คือ $F_X(x)$ สำหรับทุก $x \in R$ จะกล่าวได้ว่า (Hogg *et al.*, 2005)

$$1. \quad 0 \leq F_X(x) \leq 1$$

2. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ และ $a < b$ แล้ว

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x) dx$$

สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$

$$3. \quad F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

1.2 คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น (probability properties)

นักวิจัยหลายท่านกล่าวถึงคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่สำคัญในการศึกษาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มโดยจะกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญดังนี้

Eugene *et al.* (2002) ได้กล่าวถึงคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงเบตา - นอร์มัล (Beta–Normal distribution) เช่น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม รูปร่าง ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง ผลเฉลยรูปแบบปิดของโมเมนต์ที่ 1 ถึง โมเมนต์ที่ 4 จำนวนค่าที่แท้จริงสำหรับโมเมนต์ที่ 1 และการประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นต้น

Nadarajah and Kotz (2004) ได้กล่าวถึงคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงเบตาแกมเบล (Beta Gumbel distribution) เช่น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม รูปร่าง ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง โมเมนต์ และการประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นต้น

Barreto-Souza *et al.* (2008) ได้ทำการกล่าวถึงคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลวงนัยทั่วไป (Beta Generalized Exponential distribution) เช่น ฟังก์ชันการแจกแจง และสถิติลำดับ ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด โมเมนต์ และการประมาณค่าพารามิเตอร์ เป็นต้น

2. แนวคิดเกี่ยวกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล (Beta Exponential distribution)

การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเป็นการแจกแจงที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูลเกี่ยวกับอายุลักษณะของอัตราการชำรุด และมีการถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายในปัญหาการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ (Nadarajah and Kotz, 2006)

ให้ $G(x)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่ม X ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น และฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของตัวแปรสุ่มสามารถหาได้จาก (Eugene *et al.*, 2002)

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{G(x)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw$$

เมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$

ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงที่ถูกสร้างขึ้นด้วย $F(x)$ คือ

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)} (G(x))^{a-1} (1-G(x))^{b-1} G'(x)$$

ถ้า $G(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ ในกรณีนี้ตัวแปรสุ่ม X จะถูกเรียกว่ามีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เขียนแทนด้วย $BE(a,b,\lambda)$

2.1 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a > 0$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}$$

เมื่อ $x \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$

2.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม

Eugene *et al.* (2002); Nadarajah and Kotz (2004, 2006) ได้กล่าวถึงรูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมดังนี้

$$F(x) = I_{G(x)}(a, b) \quad \text{เมื่อ } a > 0, b > 0$$

โดยที่ $G(x)$ คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ นั่นคือ

$$G(x) = 1 - \exp(-\lambda x) \quad \text{เมื่อ } \lambda > 0$$

จะได้

$$F(x) = I_{1-\exp(-\lambda x)}(a, b)$$

โดยที่

$$I_y(a, b) = \frac{B_y(a, b)}{B(a, b)}$$

ซึ่ง $I_y(a, b)$ แทนอัตราส่วนฟังก์ชันเบตาบางส่วน (incomplete beta function ratio) และ

$$B_y(a, b) = \int_0^y w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw$$

ดังนั้นรูปแบบฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะอยู่ในรูป

$$F(x) = I_{1-\exp(-\lambda x)}(a, b)$$

2.3 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด (moment generating function)

ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X เขียนแทนด้วย $M_X(t)$ คือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชัน $\exp(tx)$ นั่นคือ

$$M_X(t) = E(\exp(tx)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) f_X(x) dx$$

เมื่อ X แทนตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะได้ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดอยู่ในรูป

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tx) \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{a-1} dx$$

2.4 ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ (characteristic function)

ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X แทนด้วย $\varphi_X(t)$ นั่นคือ ค่าคาดหวังของฟังก์ชัน $\exp(itx)$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ นั่นคือ

$$\varphi_X(t) = E(\exp(itx)) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dx$$

เมื่อ X แทนตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะได้ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะอยู่ในรูป

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{a-1} dx$$

2.5 โมเมนต์ (moments)

โมเมนต์ที่ n ของตัวแปรสุ่ม X สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล สามารถเขียนได้เป็น (Nadarajah and Kotz, 2006)

$$E(X^n) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n B(a, b)} \frac{\partial^n}{\partial p^n} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a+b-1}$$

ดังนั้นจะแสดงรูปทั่วไปของโมเมนต์ที่ 1 ถึง โมเมนต์ที่ 4 ได้ดังนี้

$$E(X) = \{\psi(a+b) - \psi(b)\} / \lambda$$

$$E(X^2) = \left\{ \psi'(b) - \psi'(a+b) + \psi^2(b) - 2\psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(a+b) \right\} / \lambda^2$$

$$E(X^3) = -[\psi''(b) - \psi''(a+b) + 3\psi(b)\psi'(b) - 3\psi(a+b)\psi'(b)$$

$$- 3\psi(b)\psi'(a+b) + 3\psi(a+b)\psi'(a+b) + \psi^3(b)$$

$$- 3\psi^2(b)\psi(a+b) + 3\psi(b)\psi^2(a+b) - \psi^3(a+b)] / \lambda^3$$

$$E(X^4) = [\psi'''(b) - 3\psi'''(a+b) + 4\psi(b)\psi''(b) - 4\psi(a+b)\psi''(b)$$

$$- 4\psi(b)\psi''(a+b) + 4\psi(a+b)\psi''(a+b) + 3\{\psi'(b)\}^2$$

$$- 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(b) + 6\psi^2(a+b)\psi'(b)$$

$$- 6\psi^2(a+b)\psi'(a+b) + \psi^4(b) - 4\psi^3(b)\psi(a+b)$$

$$+ 6\psi^2(b)\psi^2(a+b) - 4\psi(b)\psi^3(a+b) + \psi^4(a+b)] / \lambda^4$$

และจะได้ว่า

$$E[\{X - E(x)\}]^3 = \frac{\psi''(b) - \psi''(a+b)}{\lambda^3}$$

$$E[\{X - E(x)\}]^4 =$$

$$\frac{3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 + \psi'''(b) - \psi'''(a+b)}{\lambda^4}$$

จากสมการในข้อที่ 2.5 ข้างต้นใช้หลักของ Euler's psi function ในรูป

$$\psi(x) = \frac{\partial \ln \Gamma(x)}{\partial x} \text{ หรือ } \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \text{ (Nadarajah and Kotz, 2006) ในการหารูปทั่วไปของ}$$

โมเมนต์ที่ 1 ถึงโมเมนต์ที่ 4

2.6 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวน (mean and variance)

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = E(X)$$

$$\text{ความแปรปรวน} = E[\{X - E(x)\}]^2$$

2.7 ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง (skewness coefficient and kurtosis coefficient)

$$\text{ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้} = \frac{E[\{X - E(x)\}]^3}{\sigma^3(x)}$$

$$\text{ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง} = \frac{E[\{X - E(x)\}]^4}{\sigma^4(x)}$$

3. แนวคิดเกี่ยวกับเทคนิคผลการประสาน (convolution)

วิธีการหาการแจกแจงของตัวแปรสุ่มซึ่งได้จากผลบวกของตัวแปรสุ่มที่ทราบการแจกแจง และเป็นอิสระกันตั้งแต่ 2 ตัวขึ้นไปโดยใช้เทคนิคที่เรียกว่าผลการประสาน

ถ้ากำหนดให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่องที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ ที่เป็นอิสระกัน ตามลำดับ เมื่อ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ นิยามสำหรับทุกจำนวนจริง ดังนั้นผลบวกของตัวแปรสุ่ม X และ Y เป็น $Z = X + Y$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่น $f_Z(z)$ โดยที่ $f_Z(z)$ เรียกว่าผลการประสานของ $f_X(x)$ และ $f_Y(y)$ ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของ Z จะได้เป็น

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-w) f_Y(w) dw$$

4. แนวคิดเกี่ยวกับทฤษฎีความเชื่อถือได้ (reliability theory)

ความเชื่อถือได้ (reliability) สามารถนิยามได้ในรูปของความน่าจะเป็น กล่าวคือความเชื่อถือได้ คือ ความน่าจะเป็นที่ระบบหรือผลิตภัณฑ์จะสามารถทำงานได้ตามที่ออกแบบไว้อย่างสมบูรณ์ภายในช่วงเวลาที่กำหนดและภายใต้สิ่งแวดล้อมปกติ (Meeker and Escobar, 1998)

กำหนดให้

T แทน ระยะห่างระหว่างการเกิดความล้มเหลวของผลิตภัณฑ์

$f(t)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการเกิดความล้มเหลว ณ เวลา t

$F(t)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของระยะเวลาที่เกิดความล้มเหลว

จะได้ว่า

$$F(t) = P(T < t)$$

$$= \int_0^t f(x)dx$$

โดยที่ $F(t) = 0$ เมื่อ $t < 0$

4.1 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ (reliability function)

กำหนดให้ $R(t)$ แทน ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$R(t) = P(T \geq t)$$

$$= 1 - P(T < t)$$

$$= 1 - F(t)$$

$$= 1 - \int_0^t f(x)dx$$

$$= \int_t^\infty f(x)dx$$

4.2 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง (hazard rate function)

กำหนดให้ $h(t)$ แทน ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง โดยที่อัตราความเสี่ยง (hazard rate) คือ อัตราการเกิดความล้มเหลวในทันทีทันใด ณ เวลา t จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t < T \leq t + \Delta t \mid T > t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t \cdot R(t)} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R(t) - R(t + \Delta t)}{\Delta t \cdot R(t)} \\
&= \frac{1}{R(t)} \left[-\frac{d}{dt} R(t) \right] \\
&= \frac{f(t)}{R(t)}
\end{aligned}$$

5. แนวคิดการสร้างตัวแปรสุ่ม และการทดสอบภาวะสภาวะปกติ

5.1 การสร้างค่าของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

การสร้างค่าของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะพิจารณาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น นั่นคือ

$$f(x) = \frac{\lambda}{B(a, b)} \exp(-b\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{a-1} \quad \text{เมื่อ } x \geq 0, a > 0, b > 0, \lambda > 0$$

โดยกำหนดให้ B เป็นตัวแปรสุ่มที่มีจากการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b ดังนั้นตัวกำเนิดตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่หาด้วยวิธีการแปลงผกผัน (inverse transform) (Law and Kelton, 2000) คือ

$$X_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1 - B) \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

5.2 การทดสอบภาวะสารูปสนิทธิ (Goodness-of-Fit Test: GOF)

การทดสอบภาวะสารูปสนิทธิเป็นกระบวนการทางสถิติที่ใช้เพื่อทำการทดสอบการแจกแจงของประชากรว่ามีการแจกแจงตามที่คาดหวังไว้หรือไม่

โดยวิธีการทดสอบภาวะสารูปสนิทธิสำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมีขั้นตอนดังนี้

5.2.1 กำหนดสมมติฐาน

H_0 : ข้อมูลมีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

H_1 : ข้อมูลไม่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

5.2.2 กำหนดระดับนัยสำคัญทางสถิติ (α)

5.2.3 เลือกสถิติทดสอบและคำนวณค่าสถิติทดสอบ ซึ่งการทดสอบภาวะสารูปสนิทธิในงานวิจัยครั้งนี้เลือกใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ

5.2.4 หาค่าวิกฤตของสถิติทดสอบที่ระดับนัยสำคัญที่กำหนดไว้

5.2.5 เปรียบเทียบการตัดสินใจ จะปฏิเสธสมมติฐานหลัก (H_0) เมื่อค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟที่คำนวณได้มีค่ามากกว่าค่าวิกฤตในตาราง

5.2.6 สรุปผลการทดสอบสมมติฐาน

5.3 สถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ (Kolmogorov-Smirnov test statistic)

Conover (1980) ได้เสนอการคำนวณตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟตามรูปแบบดังนี้

$$KS = \max_{1 \leq i \leq n} \{D^+, D^-\}$$

เมื่อ

$$D^+ = \sup_{1 \leq i \leq n} \{S(x_i) - F_0(x_i)\} = \max \left(\frac{i}{n} - F_0(x_i) \right)$$

$$D^- = \sup_{1 \leq i \leq n} \{F_0(x_i) - S(x_{i-1})\} = \max \left(F_0(x_i) - \frac{i-1}{n} \right)$$

โดยที่

$S(x_i)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงความถี่สัมพัทธ์สะสมของข้อมูล

n แทน จำนวนข้อมูล

$F_0(x_i)$ แทน ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมการแจกแจงที่คาดหวังไว้ของ x_i
ซึ่งมีการเรียงลำดับของข้อมูลเมื่อ $i = 1, 2, \dots, n$

6. แนวคิดเกี่ยวกับวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์

6.1 วิธีความควรจะเป็นสูงสุด (method of maximum likelihood)

นิยามที่ 2 ให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มขนาด n จากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x; \theta)$, $\theta \in \Omega$ ฟังก์ชันความควรจะเป็น (likelihood function) ของตัวอย่างสุ่ม คือ ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นรวม $L = L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = L(\theta)$ ของตัวอย่างสุ่มที่เป็นฟังก์ชันของพารามิเตอร์ θ นั่นคือ $L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$ (ประชุม, 2545)

วิธีการหาตัวประมาณด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดมีขั้นตอนดังนี้คือ

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \cdot f(x_2; \theta) \dots f(x_n; \theta)$$

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n [f(x_i; \theta)]$$

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \ln \prod_{i=1}^n [f(x_i; \theta)]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \prod_{i=1}^n [f(x_i; \theta)]$$

ซึ่งจะได้สมการความควรจะเป็นสูงสุดเพื่อใช้หาค่าประมาณของ θ ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = 0$$

วิธีการหาตัวประมาณด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดของการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมีดังต่อไปนี้

จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะได้

$$L(a, b, \lambda) = \prod_i \frac{\lambda}{B(a, b)} \exp(-b\lambda x_i) (1 - \exp(-\lambda x_i))^{a-1}$$

$$\ln L(a, b, \lambda) = n \ln \lambda - n \ln B(a, b) - b\lambda \sum_i x_i + (a-1) \sum_i \ln \{1 - \exp(-\lambda x_i)\}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ $\ln L$ เทียบกับพารามิเตอร์ a , b และ λ ดังนี้

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = -n\psi(a) + n\psi(a+b) + \sum_i \ln \{1 - \exp(-\lambda x_i)\}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = -n\psi(b) + n\psi(a+b) - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - b \sum_{i=1}^n x_i + (a-1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i \exp(-\lambda x_i)}{1 - \exp(-\lambda x_i)}$$

ในการแก้สมการ $\frac{\partial \ln L}{\partial a}$, $\frac{\partial \ln L}{\partial b}$, $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}$ เพื่อหาค่า $\hat{a}$, $\hat{b}$ และ $\hat{\lambda}$ ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลนี้ค่อนข้างมีความซับซ้อนจึงใช้วิธีเชิงตัวเลขในการหาค่าประมาณดังกล่าวด้วยการใช้คำสั่งในโปรแกรม R (R Development Core Team, 2008) ดังนี้

```
est_mle <- function(a,b,l){
  n <- num
  x <- BE
  L <- -(n*log(l)-(n*log(beta(a,b)))-(b*l*sum(x))+((a-1)*(sum(log(1-(exp((-l)*x))))))) }
  rbetaexp <- function(n,a,b,l){
    x <- rep(0,n)
    r <- rbeta(n,a,b)
    for(i in 1:n) {
      x[i] <- (-1/l)*log(-r[i]+1)}
    sample<-x }
  num <- 100
  alpha <- 1
  Bta <- 1
  lambda <- 1
  sample <- rbetaexp(num,alpha,Bta,lambda)
  BE <- sample
  library(stats4)
  est <- mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=1,b=1,l=1))
  summary (est)
```

6.2 วิธีของเบย์ (method of Bayes)

Colosimo and Castillo (2007) ได้กล่าวถึงทฤษฎีเบื้องต้นของเบย์ดังนี้

ทฤษฎีเบื้องต้นความน่าจะเป็นของเหตุการณ์กล่าวคือ สำหรับเหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ที่อยู่ในเซตตัวอย่าง S ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของเหตุการณ์จะได้ว่า

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

และ

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

จากกฎการคูณของความน่าจะเป็นทั้งสองเหตุการณ์จะทำให้ได้ว่า $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

ดังนั้น

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$$

ถ้า A_i เป็นลำดับของเหตุการณ์แต่ละเหตุการณ์ใดๆที่ไม่เกิดร่วมกัน และ B เป็นเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นก่อนในทุกๆ เหตุการณ์ A (การรวมกันของสับเซตของ A_i) และ $P(B) > 0$ จะได้ว่า

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

เมื่อ $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$

ซึ่งจะเรียก $P(A_i | B)$ ว่าเป็นความน่าจะเป็นภายหลัง (posterior probability) สำหรับเหตุการณ์ A ใดๆ และเรียก $P(A_i)$ ว่าเป็นความน่าจะเป็นก่อน (prior probability) สำหรับเหตุการณ์ A ใดๆ

ประทุม (2545) ได้กล่าวถึงวิธีของเบส์ดังนี้

แนวความคิดสถิติตามแนวของเบส์ (Bayesian approach) แตกต่างจากสถิติตามแนวเดิม (classical approach) ในแนวเดิมการประมาณพารามิเตอร์ θ จะเริ่มจากการสุ่มตัวอย่างจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x; \theta)$ และถือว่าพารามิเตอร์ θ เป็นค่าคงที่ซึ่งไม่ทราบค่า แต่ในแนวของเบส์จะใช้ความรู้เดิมหรือข้อมูลเดิมเกี่ยวกับ θ ให้เป็นประโยชน์ในการประมาณ θ ให้ได้ดียิ่งขึ้น ดังนั้นจึงถือว่า θ เป็นค่าของตัวแปรสุ่ม Θ มีการแจกแจงความน่าจะเป็นรูปใดรูปหนึ่ง

ถ้าให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวอย่างสุ่มจากประชากรที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x; \theta) = f(x | \theta)$ โดยที่ θ เป็นตัวแปรสุ่ม Θ

ในที่นี้จะถือว่า $f(x | \theta)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข (conditional probability density function) ของตัวแปรสุ่ม X เมื่อกำหนดให้ว่า $\Theta = \theta$

ให้ตัวแปรสุ่ม Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $g(\theta)$ ซึ่งเรียกว่าฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อน (prior or initial probability density function) ของ Θ

และให้ $h(\theta | X_1, X_2, \dots, X_n)$ เป็นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่ม Θ เมื่อกำหนดให้ $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ เรียกฟังก์ชันนี้ว่า ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลัง (posterior probability density function) หรือ ฟังก์ชันความหนาแน่นปรับแก้ (revised probability density function) ของ Θ

ดังนั้นวิธีหาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลัง และตัวประมาณแบบเบส์ ภายหลังมีขั้นตอนดังนี้

6.2.1 หาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมหรือภายใต้ฟังก์ชันความควรจะเป็น (likelihood function) สำหรับของตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ เมื่อกำหนด $\Theta = \theta$ ดังนี้

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) \dots f(x_n | \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

6.2.2 หาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลังของ Θ ได้จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อน และฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขของตัวแปรสุ่ม X โดย

ให้ Θ มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนเป็น $g(\theta)$

ดังนั้น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นร่วมของ $X_1, X_2, \dots, X_n$ และ Θ ได้แก่

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) g(\theta) = f(x_1 | \theta) \dots f(x_n | \theta) g(\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta) g(\theta)$$

ดังนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลังของ Θ ได้แก่

$$\begin{aligned}
 h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)g(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)g(\theta)d(\theta)} \\
 &= \frac{\prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)}{\int \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)g(\theta)d(\theta)}
 \end{aligned}$$

6.2.3 หาตัวประมาณแบบเบส์ภายหลัง (posterior bayes estimator) ของฟังก์ชัน $\tau(\theta)$ เทียบกับฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อน $g(\theta)$ ได้แก่

$$\begin{aligned}
 \hat{\tau}(\theta) &= E(\tau(\Theta) | X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 &= \int \tau(\theta)h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)d\theta \\
 &= \frac{\int \tau(\theta)f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)g(\theta)d(\theta)}{\int f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)g(\theta)d(\theta)}
 \end{aligned}$$

วิธีการประมาณค่าด้วยวิธีของเบส์สำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ $a > 0$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$ ในการหาตัวประมาณแบบเบส์ของพารามิเตอร์ดังกล่าวจะกำหนดให้ทั้งหมดมีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแบบแกมมา

วิธีหาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลังและตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังสำหรับการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมีดังต่อไปนี้

1. กำหนดให้พารามิเตอร์ a , b และ λ จะมีการแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงแกมมา และกำหนดให้ $X_1, X_2, \dots, X_n$ เป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น $f(x|a, b, \lambda) = \frac{\lambda}{B(a, b)} \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}$ เมื่อ $x \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$ เขียนแทนด้วย $BE(a, b, \lambda)$

ดังนั้นจากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นเมื่อขึ้นอยู่กับฟังก์ชันความควรจะเป็นจะได้

$$l(x_1, x_2, \dots, x_n | a, b, \lambda) = \frac{\lambda^n}{B(a, b)^n} \exp(-b\lambda \sum_{i=1}^n x_i) \prod_{i=1}^n (1 - \exp(-\lambda x_i))^{a-1}$$

2. หาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นภายหลังร่วมของ a, b, λ คือ

$$l(a, b, \lambda | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{l(x_1, x_2, \dots, x_n | a, b, \lambda) \pi_1(a) \pi_2(b) \pi_3(\lambda)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty l(x_1, x_2, \dots, x_n | a, b, \lambda) \pi_1(a) \pi_2(b) \pi_3(\lambda) d(a) d(b) d(\lambda)}$$

เมื่อ

$\pi(a)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ a

$\pi(b)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ b

$\pi(\lambda)$ แทน ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นก่อนของพารามิเตอร์ λ

3. ตัวประมาณแบบเบส์ภายหลังของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a, b และ λ คือ

$$\begin{aligned} \hat{BE}_B &= E_{a, b, \lambda | x_1, x_2, \dots, x_n} (BE(a, b, \lambda)) \\ &= \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty BE(a, b, \lambda) l(x_1, x_2, \dots, x_n | a, b, \lambda) \pi_1(a) \pi_2(b) \pi_3(\lambda) d(a) d(b) d(\lambda)}{\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty l(x_1, x_2, \dots, x_n | a, b, \lambda) \pi_1(a) \pi_2(b) \pi_3(\lambda) d(a) d(b) d(\lambda)} \end{aligned}$$

การแก้สมการเพื่อหาตัวประมาณแบบเบสภายหลังนี้ค่อนข้างยุ่งยากและมีขั้นตอนในการหาที่ซับซ้อน ดังนั้นเมื่อทราบฟังก์ชันการแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์ a , b และ λ แล้วจะทำการหาค่าประมาณด้วยวิธีของเบสของพารามิเตอร์โดยใช้โปรแกรม WinBUGS (Spiegelhalter *et al.*, 2003) ซึ่งคำนวณหาค่าประมาณได้เมื่อกำหนดให้การแจกแจงก่อนของพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์เป็นดังนี้

ตารางที่ 1 ค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนสำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ

พารามิเตอร์			การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$		
a	b	λ	a	b	λ
0.5	0.5	0.5	(0.6,1.0)	(0.1,1.0)	(0.2,1.0)
		1.0	(0.2,1.0)	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)
		2.0	(0.2,1.0)	(0.7,1.0)	(2.0,1.0)
	1.0	0.5	(0.4,1.0)	(1.0,1.0)	(0.4,1.0)
		1.0	(0.1,1.0)	(1.2,1)	(1.0,1.0)
		2.0	(0.1,2.0)	(3.0,1.0)	(3.5,1.0)
	2.0	0.5	(0.1,1.5)	(2.5,1.0)	(1.2,1.0)
		1.0	(0.1,1.8)	(3.0,0.5)	(3.0,1.0)
		2.0	(0.3,1.7)	(6.0,0.5)	(6.0,1.0)
1.0	0.5	0.5	(2.6,0.9)	(0.1,2.0)	(0.2,1.9)
		1.0	(1.0,1.0)	(0.2,1.0)	(1.0,1.0)
		2.0	(0.7,1.0)	(0.5,1.0)	(2.0,1.0)
	1.0	0.5	(1.3,1.0)	(0.7,1.0)	(0.3,1.2)
		1.0	(0.9,1.0)	(1.0,1.0)	(0.9,1.0)
		2.0	(0.7,1.0)	(1.5,1.0)	(2.5,1.0)
	2.0	0.5	(0.8,1.0)	(2.0,1.0)	(0.4,1.0)
		1.0	(0.5,1.0)	(3.0,1.0)	(2.0,1.0)
		2.0	(0.5,1.3)	(5.0,0.5)	(6.0,1.0)

ตารางที่ 1 (ต่อ)

พารามิเตอร์			การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$		
a	b	λ	a	b	λ
2.0	0.5	0.5	(3.0,0.5)	(0.3,1.5)	(0.3,1.5)
		1.0	(2.5,1.0)	(0.2,1.2)	(1.0,1.5)
		2.0	(2.0,1.0)	(0.5,1.0)	(2.0,1.0)
	1.0	0.5	(4.0,1.0)	(0.5,1.5)	(0.8,3.0)
		1.0	(2.2,1.0)	(0.8,1.0)	(0.8,1.0)
		2.0	(1.8,1.0)	(1.0,1.0)	(2.2,1.0)
	2.0	0.5	(2.0,1)	(2.0,1.0)	(0.5,1.0)
		1.0	(2.0,1)	(2.0,1.0)	(1.0,1.0)
		2.0	(1.8,1.2)	(4.0,1.0)	(4.0,1.0)

จากตารางแสดงค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงก่อนที่เหมาะสมสำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลในแต่ละพารามิเตอร์ที่กำหนด ซึ่งได้ศึกษาจากการทดลองสร้างตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลตามสถานการณ์ต่างๆ เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30 ทำการจำลองซ้ำ 500 ครั้ง และกำหนดค่าการแจกแจงก่อนออกเป็น 3 กรณี ในแต่ละพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้น โดยจะทำการเลือกค่าการแจกแจงก่อนที่ให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ให้ค่าใกล้เคียงมากที่สุด และให้ค่า MSE ต่ำสุดในแต่ละพารามิเตอร์ที่กำหนดขึ้น

6.3 การเปรียบเทียบวิธีการประมาณพารามิเตอร์

คำนวณหาค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองระหว่างค่าประมาณกับค่าจริง (mean square error : MSE) ดังนี้

$$MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\hat{\theta}_i - \theta \right)^2$$

โดยที่ m แทน จำนวนรอบของการซ้ำ

MSE แทน ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง

θ แทน ค่าพารามิเตอร์ที่สนใจศึกษา

$\hat{\theta}_i$ แทน ค่าประมาณพารามิเตอร์ในการทำซ้ำครั้งที่ $i=1, 2, \dots, m$

7. การแจกแจงอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องในงานวิจัย

7.1 การแจกแจงแกมมา (Gamma distribution)

แกมมาฟังก์ชัน (Gamma function) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ Γ กำหนดได้ดังนี้

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} y^{r-1} \exp(-y) dy \quad ; r > 0, y > 0$$

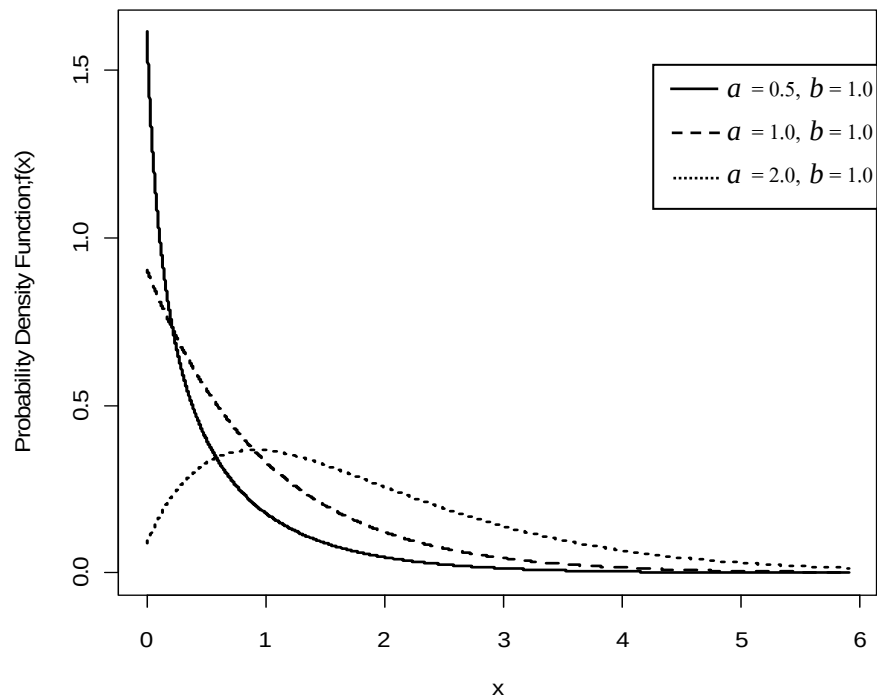
ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงแกมมาพร้อมด้วยพารามิเตอร์ a และ b เขียนแทนด้วย $X \sim \text{Gamma}(a, b)$ จะมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = f(x; a, b) = \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-x/b) \quad \text{เมื่อ } x > 0, a > 0, b > 0$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$

ข้อสังเกต

สำหรับการแจกแจงแกมมาถ้าพารามิเตอร์ $a=1$ จะได้ $f(x) = \frac{1}{b} \exp\left(\frac{-x}{b}\right)$ ซึ่งมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล



ภาพที่ 1 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงแกมมาเมื่อ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0$

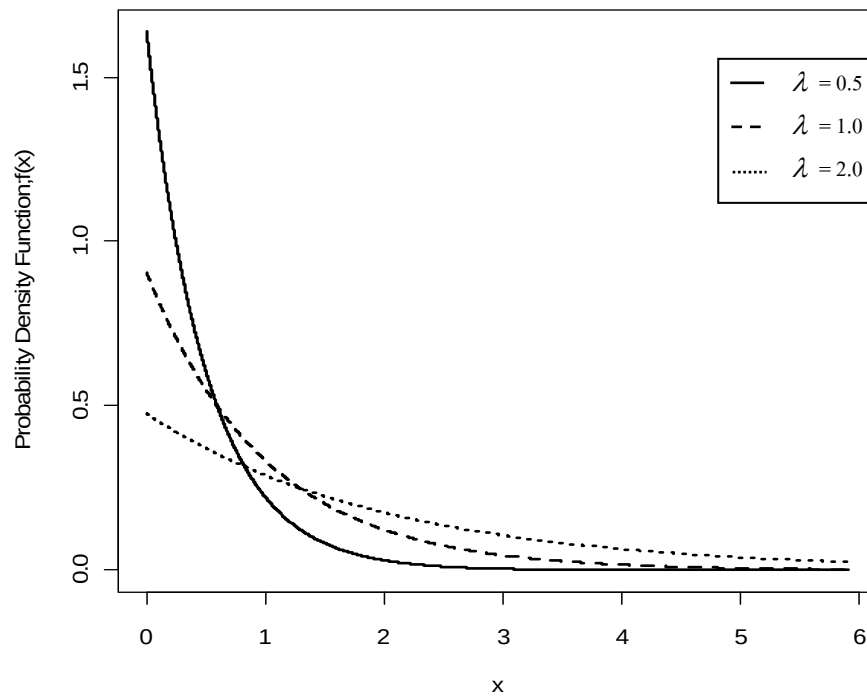
7.2 การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential distribution)

ตัวแปรสุ่ม X จะมีการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลพร้อมด้วยพารามิเตอร์ λ เขียนแทนด้วย $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ จะมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp(-x/\lambda) \quad \text{เมื่อ } x > 0, \lambda > 0$$

$$= 0$$

เมื่อ x มีค่าอื่น



ภาพที่ 2 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

7.3 การแจกแจงเบตา (Beta distribution)

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าอยู่ในช่วง $(0,1)$ จะมีการแจกแจงเบตาพร้อมด้วยพารามิเตอร์ a และ b เขียนแทนด้วย $X \sim \text{Beta}(a,b)$ จะมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x) = f(x; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} \quad \text{เมื่อ } 0 < x < 1, a > 0, b > 0$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ } x \text{ มีค่าอื่น}$$

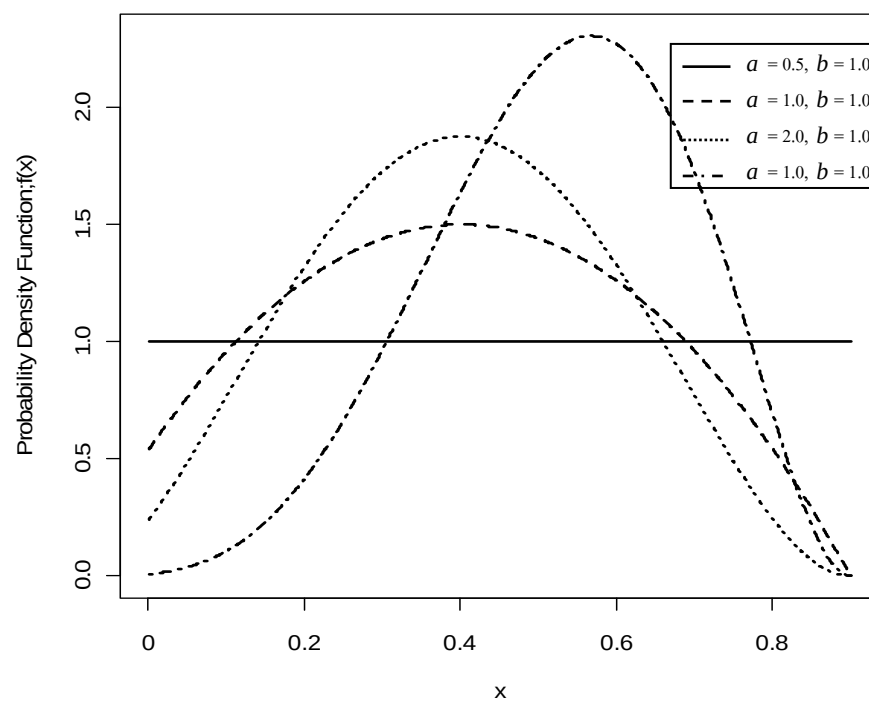
$$\text{โดยที่} \quad B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$$

$$= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

และ $B(a,b)$ เรียกว่า ฟังก์ชันเบตา (Beta function)

ข้อสังเกต

การแจกแจงเบตาจะลดรูปลงเป็นการแจกแจงยูนิฟอร์มในช่วง $(0,1)$ ถ้า $a=1$ และ $b=1$



ภาพที่ 3 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเมื่อ $a=1.0, 2.0, 3.0, 5.0$ และ $b=1.0, 2.0, 3.0$

8. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ธัญลักษณ์ (2547) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบไวบูลล์ และการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลสองพารามิเตอร์ ซึ่งวิธีการประมาณค่าที่ใช้ในการศึกษาคือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด วิธีกำลังสองน้อยที่สุด และวิธีโมเมนต์ โดยพิจารณาจากค่ารากที่สองของค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง สรุปได้ว่า ข้อมูลที่มีการแจกแจงแบบไวบูลล์ และการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียลสองพารามิเตอร์ขนาดตัวอย่างทุกขนาด และทุกกรณีทั้งหมด วิธีความควรจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีที่ดีที่สุด สำหรับทุกวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงทั้งสองจะมีความแม่นยำมากขึ้นเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

อุไรวรรณ และคณะ (2547) ได้ศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของความสูญเสียที่มีลักษณะการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อมีการตัดปลายทางขวาที่ให้ค่าพารามิเตอร์ใกล้เคียงพารามิเตอร์ของการแจกแจงสูญเสียที่แท้จริงด้วยวิธีการประมาณค่า 3 วิธี คือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด วิธีระยะห่างต่ำสุด และวิธีโมเมนต์โดยใช้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์แต่ละวิธีเป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบผลที่ได้พบว่าทุกสถานการณ์ค่าเฉลี่ยของกำลังสองของความคลาดเคลื่อนในวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีระยะห่างต่ำสุดมีค่าต่ำสุด รองลงมาเป็นวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีโมเมนต์จะมีค่าใกล้เคียงกัน

Eugene *et al.* (2002) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับลักษณะโดยทั่วไปของการแจกแจงเบตา – นอร์มัล (Beta-Normal distribution) กล่าวคือทำการศึกษาเกี่ยวกับคุณสมบัติต่างๆ ของรูปร่าง การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด โดยที่ทำการแจกแจงเบตา-นอร์มัลถูกสร้างขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบตา ซึ่งค่อนข้างที่จะเปลี่ยนแปลงไปตามลักษณะรูปแบบได้ดี อีกทั้งยังมีลักษณะการแจกแจงแบบสมมาตรที่มีลักษณะหางยาวอีกด้วย แต่บางครั้งอาจจะเกิดการแจกแจงที่มีลักษณะเบ้ และมีฐานนิยมสองค่าพร้อมทั้งได้ทำการศึกษาโดยนำเอาไปประยุกต์ใช้กับข้อมูลจริง

Maynard (2004) ได้ทำการศึกษาแบบโมเดลใหม่ที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลโดยทำการสร้างขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบตา โดยที่การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเป็นการแจกแจงที่มี 3 พารามิเตอร์ จึงได้ทำการศึกษาคุณสมบัติที่เกี่ยวข้อง เช่น โมเมนต์ การประมาณค่าโดยวิธีโมเมนต์ และ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด เมื่อได้ทำการตรวจสอบภาวะสารูปสถิติของการแจกแจงดังกล่าวเทียบกับการแจกแจงอื่นๆ เช่น ไวบูลล์

แกมมา และเบตา-นอร์มัล exponentiated-exponential เป็นต้น อีกทั้งได้มีการศึกษาฟังก์ชันอัตราเสี่ยงโดยทำการเทียบกับการแจกแจงไวบูลล์ แกมมา และexponentiated-exponential ซึ่งผลการศึกษาที่ได้การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลให้ผลที่เหมาะสมกว่าโดยที่ลักษณะของฟังก์ชันอัตราเสี่ยงมีลักษณะคล้ายกันกับการแจกแจงไวบูลล์ แกมมา และ exponentiated-exponential

Nadarajah and Kotz (2004) ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการแจกแจงเบตาคัมเบล (Beta Gumbel distribution) ซึ่งได้ถูกสร้างขึ้นมาจากตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบเบตาโดยทางผู้วิจัยได้ทำการศึกษาลักษณะโดยรวมที่เกี่ยวข้องกับคุณสมบัติทางคณิตศาสตร์ของการแจกแจงนี้โดยที่ได้กล่าวถึงการวิเคราะห์รูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง และได้ทำการแสดงให้เห็นภาพฟังก์ชันดังกล่าว รวมถึงทางคณะผู้วิจัยได้ทำการหาสมการทั่วไปในการใช้หาค่าของโมเมนต์ที่ n asymptotic distribution ของค่าสถิติลำดับสูงสุด การวัดค่าความเบ้ ความโด่ง รวมถึงวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดโดยผู้วิจัยหวังเป็นอย่างยิ่งว่าการแจกแจงที่ได้ทำการศึกษามีการถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างกว้างขวางในทางวิศวกรรม

Nadarajah and Kotz (2006) ได้ศึกษาเกี่ยวกับหลักเกณฑ์โดยทั่วไปเกี่ยวกับการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียล (Beta Exponential Distribution) ซึ่งจะกล่าวถึงคุณสมบัติต่างๆของการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ทั้งในด้านการแสดงถึงที่มาของโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ แสดงรูปทั่วไปของโมเมนต์ที่ 1 ถึงโมเมนต์ที่ 4 ความแปรปรวน ความเบ้ ความโด่ง ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของค่าเฉลี่ย ค่าเบี่ยงเบนเฉลี่ยของค่ามัธยฐาน ลักษณะการแจกแจงของผลรวมและอัตราส่วน asymptotic distribution ของค่าสถิติลำดับ และได้กล่าวถึงการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีโมเมนต์ และวิธีความควรจะเป็นสูงสุด รวมถึงรูปแบบสมการสำหรับ Fisher information matrix ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

อุปกรณ์และวิธีการ

อุปกรณ์

1. เครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์
2. โปรแกรม R และ WinBUGS

วิธีการ

การวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาเชิงทดลองเพื่อศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น และเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ รวมถึงการประยุกต์ทางความเชื่อถือได้สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ซึ่งวิธีการวิจัยจะเสนอเป็นลำดับดังต่อไปนี้

1. ศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น

ทำการศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลตามลักษณะที่กำหนดโดยทำการศึกษาตามลำดับดังต่อไปนี้

1.1 ลักษณะรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

1.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม

1.3 ผลเฉลยรูปแบบปิดของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

1.4 คำนวณค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของพารามิเตอร์ a , b และ λ

1.5 รูปแบบฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

1.6 การหาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน โดยใช้เทคนิคของผลการประสาน

1.7 วิเคราะห์ความเชื่อถือได้โดยทำการหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันอัตราความเสียหาย

1.8 การสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

1.9 การทดสอบภาวะสารูปสถิติโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ

2. ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์

การประมาณค่าพารามิเตอร์โดยใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ โดยมีขั้นตอนดังนี้

2.1 กำหนดค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ใช้ในแต่ละสถานการณ์

2.2 กำหนดขนาดตัวอย่างที่ใช้ในการศึกษาเท่ากับ 20, 40 , 80, 100 และ 250

2.3 ทำการสร้างค่าตัวแปรสุ่มให้มีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ประกอบด้วยพารามิเตอร์ a , b และ λ ตามสถานการณ์ที่กำหนดขึ้น

2.4 นำข้อมูลที่มีลักษณะตามที่กำหนดในข้อ 2.1–2.3 มาประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการ 2 วิธีคือวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์

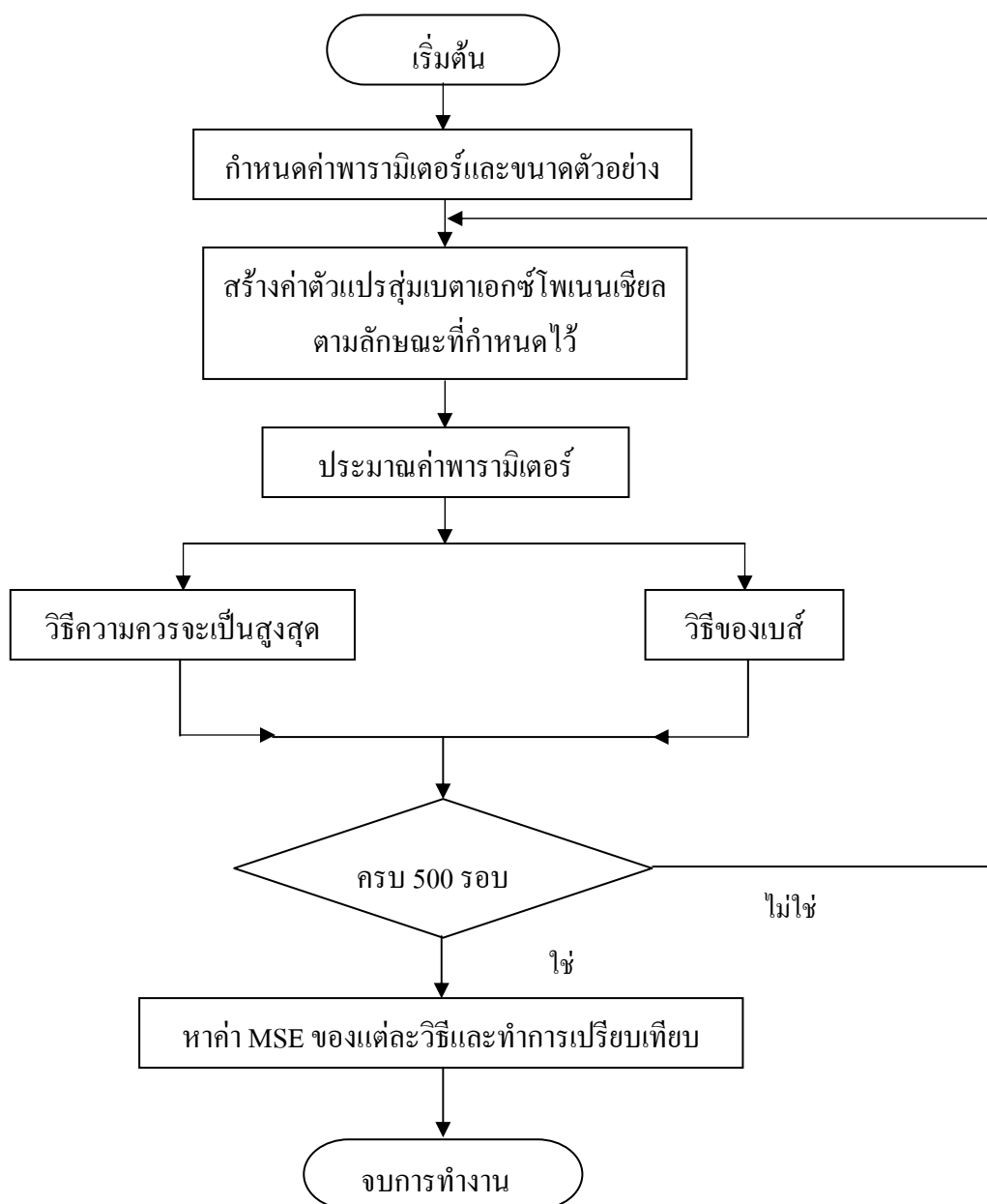
2.5 ทำการเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์โดยพิจารณาจากค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองของค่าประมาณเทียบกับค่าพารามิเตอร์ที่แท้จริง (MSE) และนำค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของทั้งสองวิธีมาเปรียบเทียบ ถ้าวิธีการใดให้ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองของการประมาณค่าน้อยกว่า จึงสรุปได้ว่าเป็นวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ดีสำหรับการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

3. การประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

โดยทั่วไปการแจกแจงที่ถูกนำมาใช้ทางการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้คือ การแจกแจงปกติ การแจกแจงไวบูลล์ การแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียล และการแจกแจงลอการิธึม เป็นต้น ซึ่งการแจกแจงดังกล่าวเป็นการแจกแจงที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลอายุเช่นเดียวกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลดังนั้นจึงแสดงการประยุกต์ทางความเชื่อถือได้ด้วยการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลกับข้อมูลจริง

แผนผังขั้นตอนโปรแกรมการทำงานการประมาณค่าพารามิเตอร์

การทำงานของโปรแกรมการประมาณค่าพารามิเตอร์มีขั้นตอนการศึกษาแสดงตามแผนผัง (Flow chart) ดังต่อไปนี้



ภาพที่ 4 แผนผังแสดงขั้นตอนการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการประมาณค่า 2 วิธี สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

สถานที่และระยะเวลาทำการวิจัย

ทำการวิจัยที่ภาควิชาสถิติ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์ ใช้ระยะเวลาในการวิจัยตั้งแต่เดือนพฤศจิกายน 2551 ถึงเดือนสิงหาคม 2552

ผลและวิจารณ์

ผล

งานวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล อีกทั้งศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ รวมถึงได้ศึกษาการประยุกต์ทางด้านการเชื่อถือได้โดยผลการศึกษาแบ่งออกเป็น 3 หัวข้อดังนี้

1. คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น
2. การประมาณค่าพารามิเตอร์
3. การประยุกต์ทางด้านการเชื่อถือได้

จากการศึกษาได้ผลดังต่อไปนี้

1. คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น

คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลทำการศึกษาตามหัวข้อดังนี้

1.1 ลักษณะรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

1.2 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม

1.3 ผลเฉลยรูปแบบปิดของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

1.4 คำนวณค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งสำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ

1.5 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

1.6 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน โดยใช้เทคนิคของผลการประสาน

1.7 การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลโดยทำการหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

1.8 การสร้างค่าของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

1.9 การทดสอบภาวะสารูปสนิติโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ

คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นได้ผลการศึกษาดังนี้

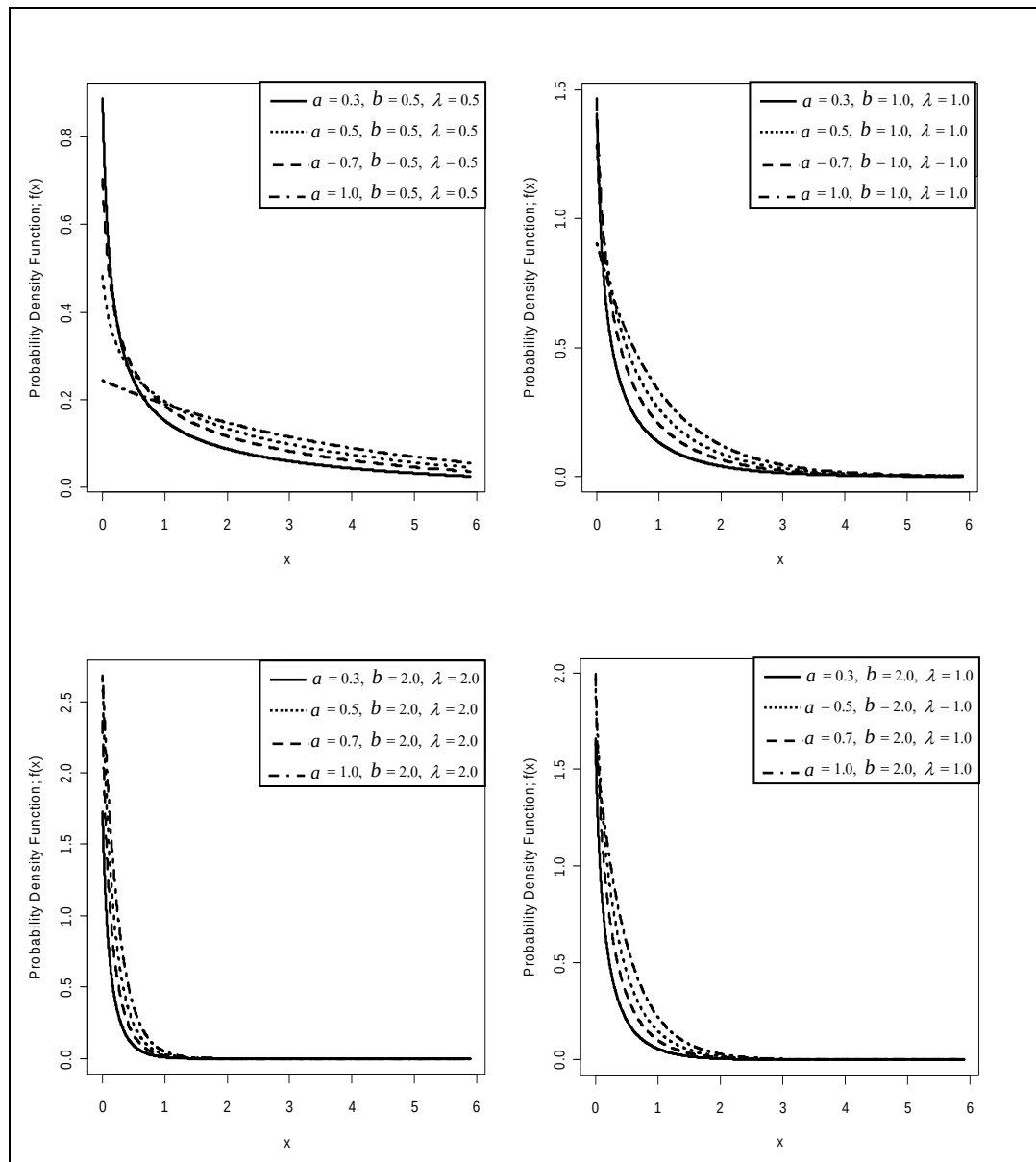
1.1 ลักษณะรูปร่างการแจกแจงของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น

จากการศึกษาลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลซึ่งเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องที่มี 3 พารามิเตอร์ คือ a , b และ λ โดยทำการศึกษาจากการวาดกราฟตามค่าพารามิเตอร์ต่างๆ ทำให้สามารถจัดแบ่งลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลได้ออกเป็น 2 ลักษณะดังนี้

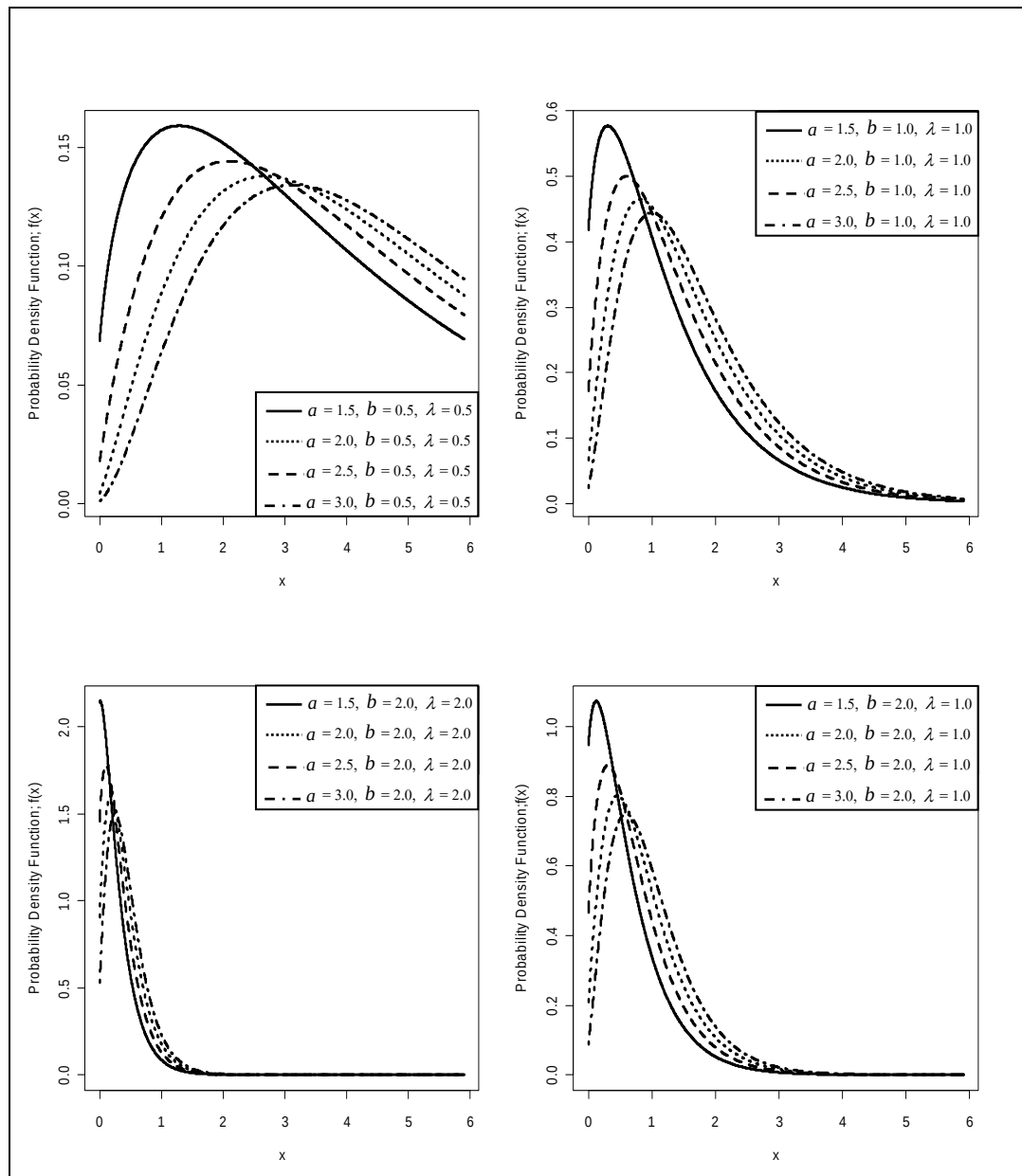
กรณีที่ 1 พารามิเตอร์ $0 < a \leq 1$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียว และมีค่าไม่เป็นลบ

กรณีที่ 2 พารามิเตอร์ $a > 1$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด มีการแจกแจงในลักษณะที่เบ้ขวาและมีค่าไม่เป็นลบ

ผลจากการวาดกราฟทั้ง 2 ลักษณะข้างต้นจะพบว่ารูปร่างลักษณะของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ a เพียงตัวเดียวโดยไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์ b และ λ ในทุกๆ กรณีที่ได้ทำการศึกษา ดังนั้นจะกล่าวได้ว่าพารามิเตอร์ a เป็นพารามิเตอร์แสดงรูปร่าง (shape parameter) สำหรับพารามิเตอร์ b และ λ เป็นพารามิเตอร์แสดงสเกล (scale parameter) โดยศึกษาได้จากภาพที่ 5-6



ภาพที่ 5 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $0 < a \leq 1$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$



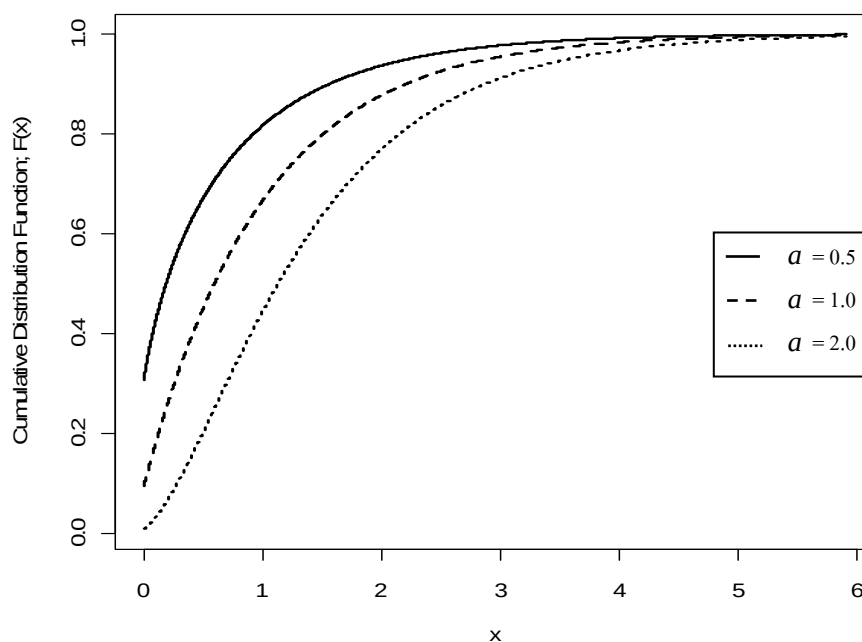
ภาพที่ 6 กราฟแสดงโค้งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a > 1$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$

1.2 ลักษณะฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม

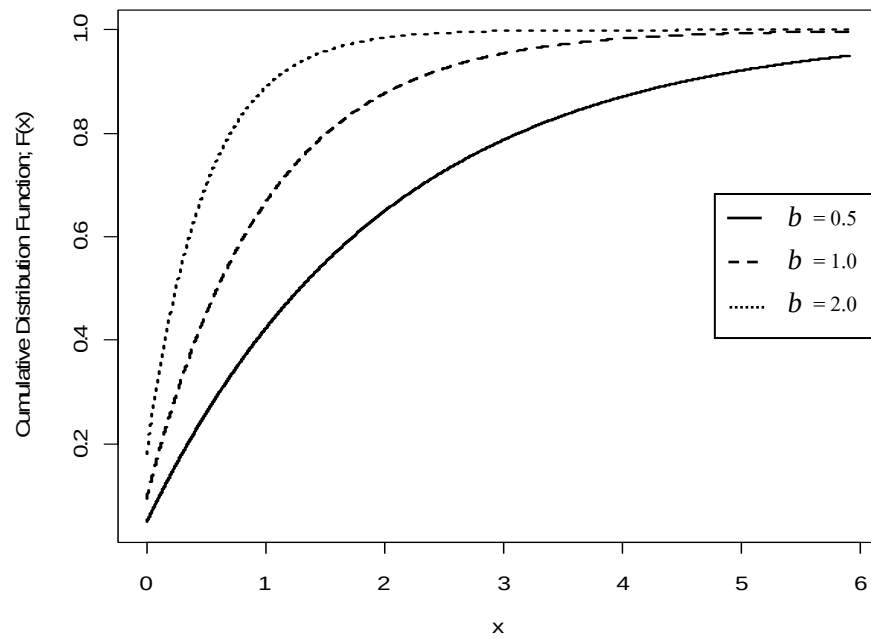
ตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะมีลักษณะฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมคือ

$$F(x) = \frac{B_{1-\exp(-\lambda x)}(a,b)}{B(a,b)}$$

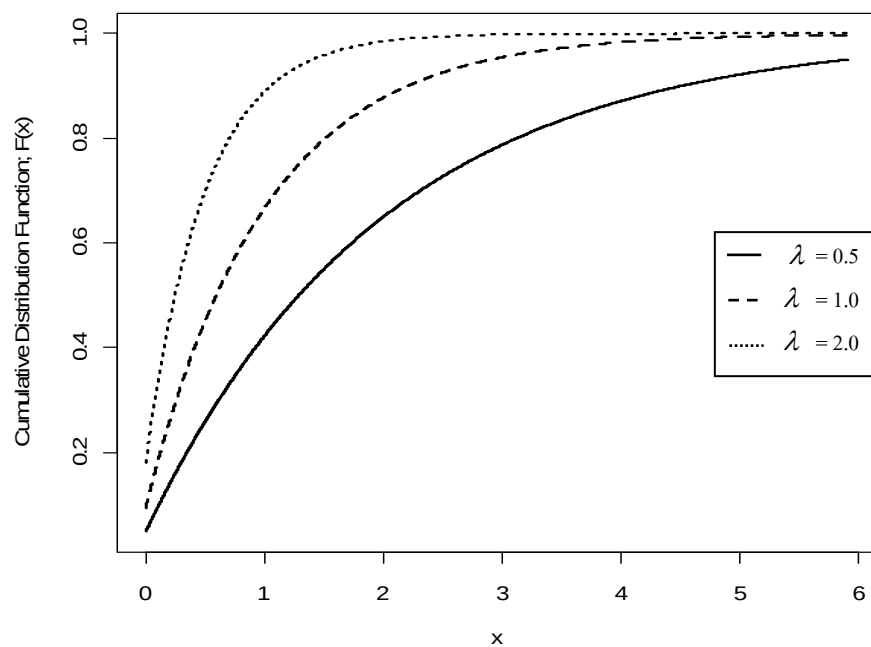
จากฟังก์ชันการแจกแจงสะสมของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถวาดกราฟได้ผลดังนี้



ภาพที่ 7 กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0, \lambda = 1.0$



ภาพที่ 8 กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
เมื่อ $b = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, \lambda = 1.0$



ภาพที่ 9 กราฟแสดงโค้งความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
เมื่อ
 $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, b = 1.0$

1.3 ผลเฉลยรูปแบบปิด

จากฟังก์ชันของโมเมนต์ที่ n ของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลทำให้ได้ผลเฉลยรูปแบบปิดของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง ได้ผลดังนี้

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = \frac{\psi(a+b) - \psi(b)}{\lambda}$$

$$\text{ค่าความแปรปรวน} = \frac{\psi'(b) - \psi'(a+b)}{\lambda^2}$$

$$\text{ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้} = \frac{\psi''(a+b) - \psi''(b)}{\{\psi'(b) - \psi'(a+b)\}^{3/2}}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

$$= \frac{3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 + \psi'''(b) - \psi'''(a+b)}{\{\psi'(b) - \psi'(a+b)\}^2}$$

1.4 คำนวณหาค่าที่แท้จริง

จากผลเฉลยรูปแบบปิดของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง สำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ สามารถคำนวณหาค่าที่แท้จริงของค่าต่างๆ ดังกล่าวไว้ข้างต้นตามพารามิเตอร์ที่กำหนดได้ผลดังนี้

ตารางที่ 2 ค่าที่แท้จริงของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของพารามิเตอร์ a , b และ λ

พารามิเตอร์			ค่าที่แท้จริง			
a	b	λ	ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้	ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง
0.5	0.5	0.5	2.773	13.160	2.417	11.400
		1.0	1.386	3.290	2.417	11.400
		2.0	0.693	0.822	2.417	11.400
	1.0	0.5	1.227	2.841	2.632	13.083
		1.0	0.614	0.710	2.632	13.083
		2.0	0.307	0.178	2.632	13.083
	2.0	0.5	0.561	0.618	2.763	14.301
		1.0	0.280	0.155	2.763	14.301
		2.0	0.140	0.039	2.763	14.301
	1.0	0.5	4.000	16.000	2.000	9.000
		1.0	2.000	4.000	2.000	9.000
		2.0	1.000	1.000	2.000	9.000
	1.0	0.5	2.000	4.000	2.000	9.000
		1.0	1.000	1.000	2.000	9.000
		2.0	0.500	0.250	2.000	9.000
1.0	2.0	0.5	0.400	0.160	2.000	9.000
		1.0	0.200	0.040	2.000	9.000
		2.0	0.250	0.0625	2.000	9.000

ตารางที่ 2 (ต่อ)

พารามิเตอร์			ค่าที่แท้จริง			
a	b	λ	ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้	ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง
2.0	0.5	0.5	5.333	17.778	1.771	7.920
		1.0	2.667	4.444	1.771	7.920
		2.0	1.333	1.111	1.771	7.920
	1.0	0.5	3.000	5.000	1.610	7.080
		1.0	1.500	1.250	1.610	7.080
		2.0	0.750	0.313	1.610	7.080
	2.0	0.5	1.667	1.444	1.493	6.444
		1.0	0.833	0.361	1.493	6.444
		2.0	0.417	0.090	1.493	6.444

จากตารางพบว่า

ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ λ มีค่าสูงขึ้น

ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะไม่ขึ้นอยู่กัพารามิเตอร์ λ จึงกล่าวได้ว่าถ้ากำหนดค่าพารามิเตอร์ a และ b เท่ากับค่าใดค่าหนึ่ง และกำหนดพารามิเตอร์ λ เป็นค่าใดๆ แล้วค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งจะมีค่าเท่ากัน เช่นกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เท่ากับ 2.632 และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเท่ากับ 13.083 ทุกๆ กรณีของค่าพารามิเตอร์ λ ที่เปลี่ยนแปลง

สำหรับกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ $a = 1.0$ เมื่อพารามิเตอร์ b และ λ เป็นค่าใดๆ แล้วจะได้ว่าค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงโดยมีค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้เท่ากับ 2.000 และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งเท่ากับ 9.000

1.5 ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

จากการศึกษาฟังก์ชัน โมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะสามารถหา
รูปแบบฟังก์ชันได้ผลดังนี้

ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด

$$M_x(t) = \frac{B(b - \frac{t}{\lambda}, a)}{B(a, b)}$$

ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

$$\varphi_x(t) = \frac{B(b - \frac{it}{\lambda}, a)}{B(a, b)} \quad \text{โดยที่ } i = \sqrt{-1}$$

1.6 ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันโดยใช้ เทคนิคของผลการประสาน

เป็นการหาฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นอิสระกัน

นำเอาตัวแปรสุ่ม 2 ตัวคือ X_1 และ X_2 ที่มีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมีฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นดังนี้

$$f_{x_1}(x_1) = \frac{\lambda_1}{B(a_1, b_1)} \exp(-b_1 \lambda_1 x_1) (1 - \exp(-\lambda_1 x_1))^{a_1 - 1}$$

เมื่อ $a_1 > 0, b_1 > 0, \lambda_1 > 0, x_1 > 0$

และ

$$f_{x_2}(x_2) = \frac{\lambda_2}{B(a_2, b_2)} \exp(-b_2 \lambda_2 x_2) (1 - \exp(-\lambda_2 x_2))^{a_2-1}$$

เมื่อ $a_2 > 0, b_2 > 0, \lambda_2 > 0, x_2 > 0$

นำฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X_1 และ X_2 มาหาผลบวกโดยใช้วิธีผลการประสานโดยแทนให้ $Z = X_1 + X_2$ ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงของผลบวกของตัวแปรสุ่มทั้งสองจะเขียนได้เป็น

$$f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) = f_{x_1}(x_1) \times f_{x_2}(x_2)$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มทั้ง 2 ตัวที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล และเป็นอิสระกัน โดยใช้เทคนิคของผลการประสานจะได้ผลดังนี้

$$f_z(z) = \frac{\kappa}{\lambda_2} \Gamma(a_1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(a_1 - i)} \exp(-i \lambda_1 z) B_{1-\exp(-\lambda_2 z)} \left(a_2, b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (i + b_1) \right)$$

$$\text{เมื่อ } \kappa = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \exp(-b_1 \lambda_1 z)}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)}$$

และ $a_1, a_2 > 0; b_1, b_2 > 0; \lambda_1, \lambda_2 > 0; z > 0$

1.7 การวิเคราะห์ความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

ในการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลจะนิยามในรูปของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นได้ผลดังนี้

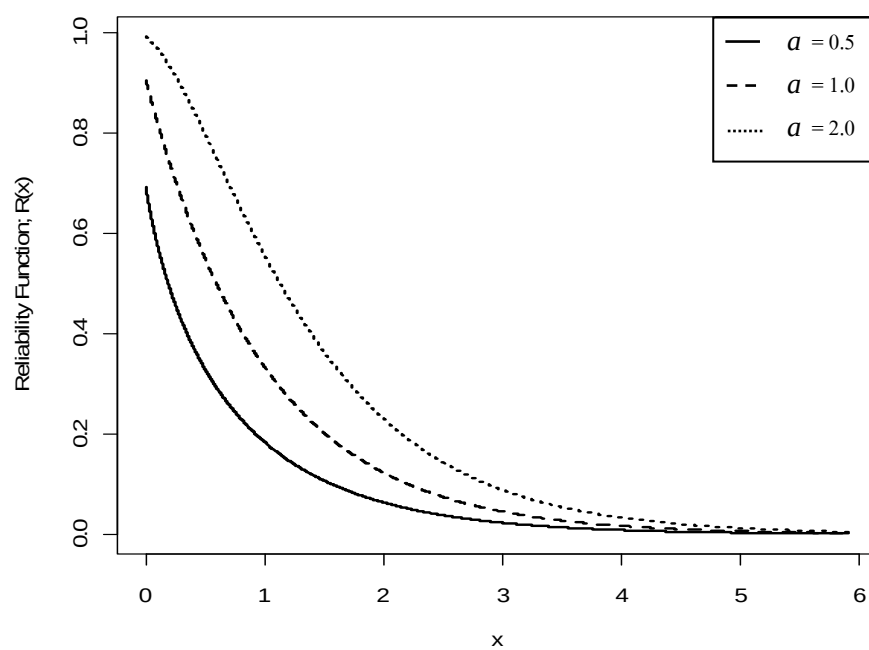
1.7.1 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

ถ้า X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a, b และ λ จะได้ฟังก์ชันความเชื่อถือได้อยู่ในรูป

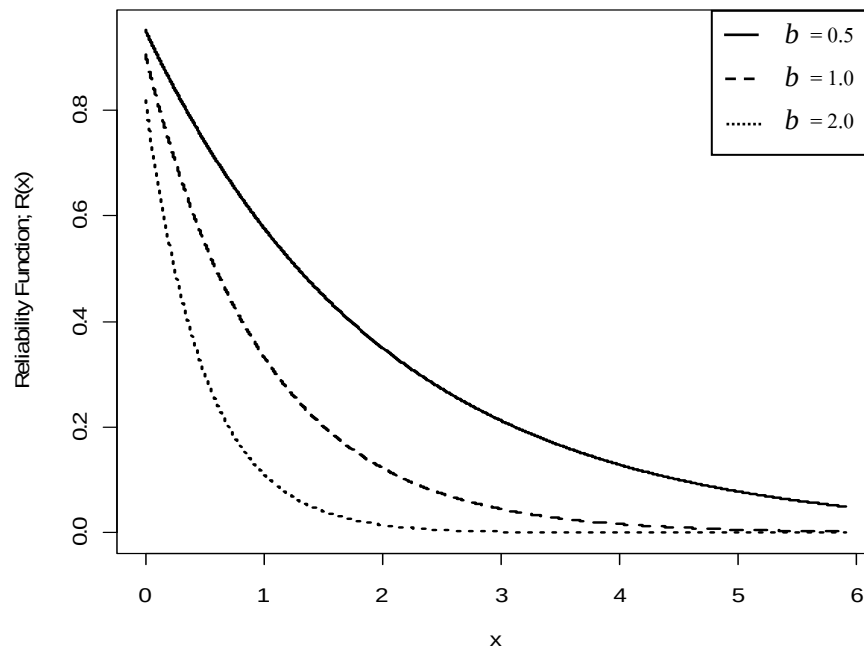
$$R(x) = 1 - F(x)$$

$$= \frac{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}{B(a, b)}$$

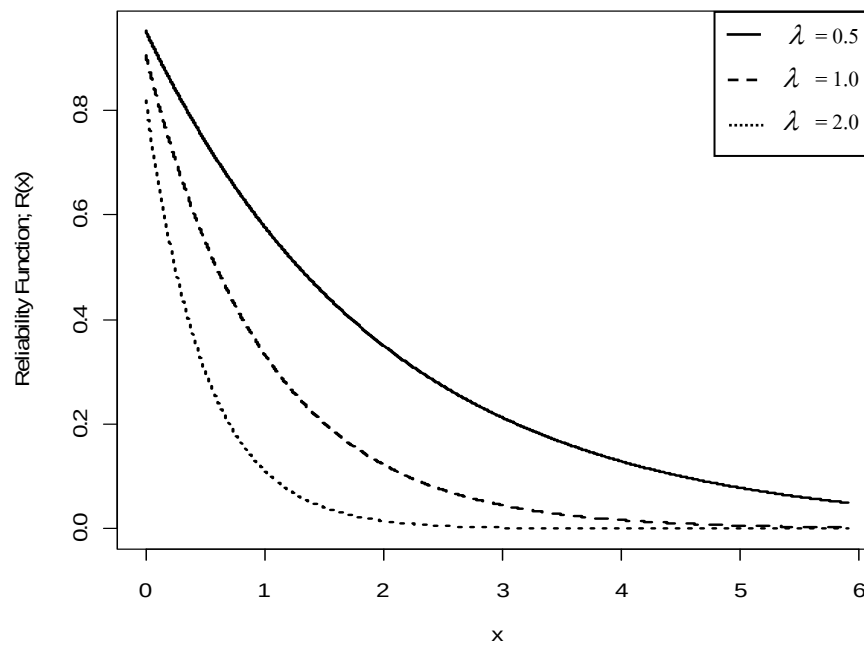
จากฟังก์ชันความเชื่อถือได้สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถวาดกราฟได้ดังนี้



ภาพที่ 10 กราฟแสดงฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0, \lambda = 1.0$



ภาพที่ 11 กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $b = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, \lambda = 1.0$



ภาพที่ 12 กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $a = 1.0, b = 1.0$

1.7.2 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงสำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

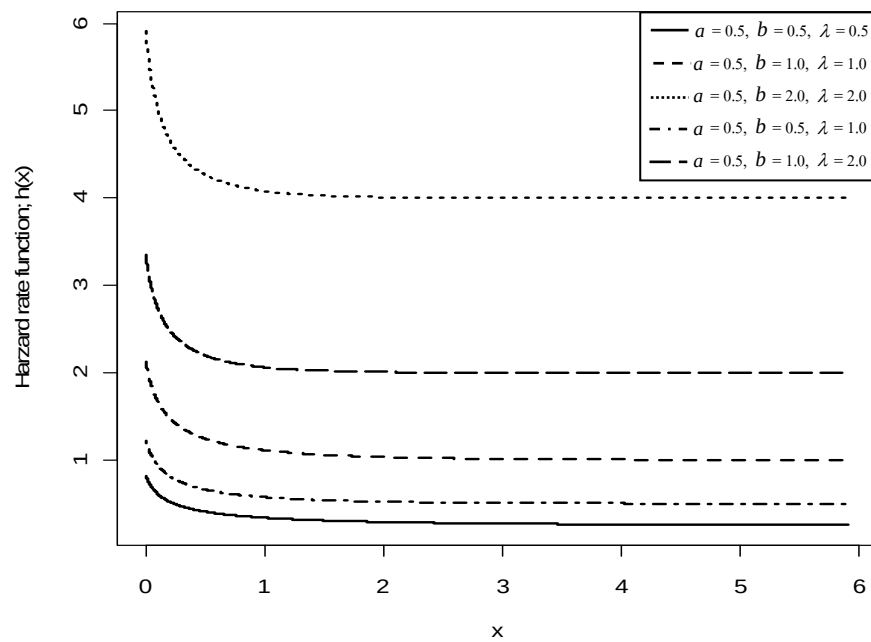
ถ้า X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a, b และ λ จะได้ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงจะอยู่ในรูป

$$h(x) = \frac{\lambda \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}}{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}$$

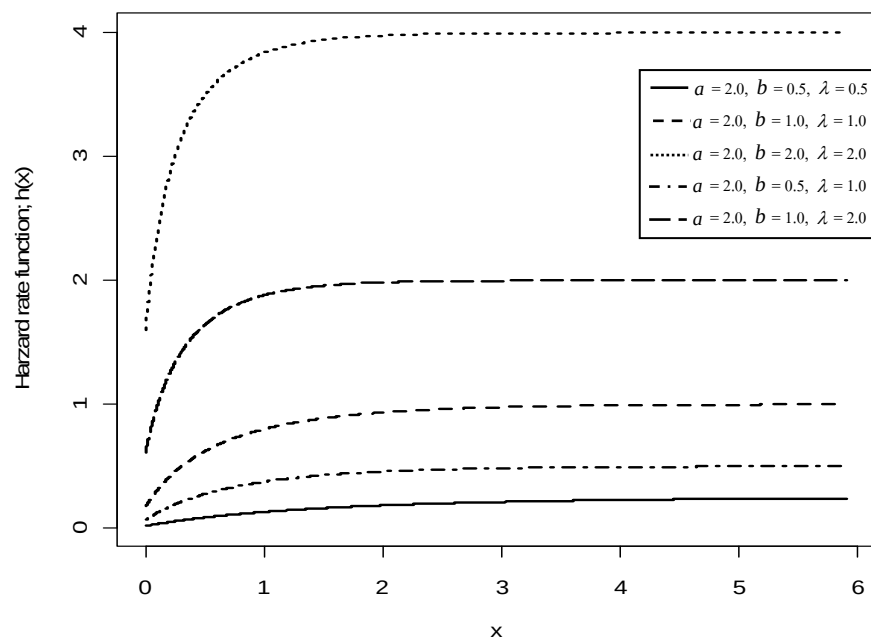
จากการศึกษาฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงสำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล โดยศึกษาได้จากภาพที่ 13-15 ทำให้สามารถจัดแบ่งลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลได้ออกเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1. กรณีที่พารามิเตอร์ $0 < a < 1$ โดยที่กำหนดให้ค่า b และ λ เป็นค่าจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 0 จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียว (monotonically decreases) และมีค่าไม่เป็นลบ
2. กรณีที่พารามิเตอร์ $a > 1$ โดยที่กำหนดให้ค่า b และ λ เป็นค่าจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 0 จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเพียงอย่างเดียว (monotonically increases) และมีค่าไม่เป็นลบ
3. กรณีที่พารามิเตอร์ $a = 1$ โดยที่กำหนดให้ค่า b และ λ เป็นค่าจำนวนจริงใดๆ ที่มีค่ามากกว่า 0 จะพบว่ากราฟจะเป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะคงที่

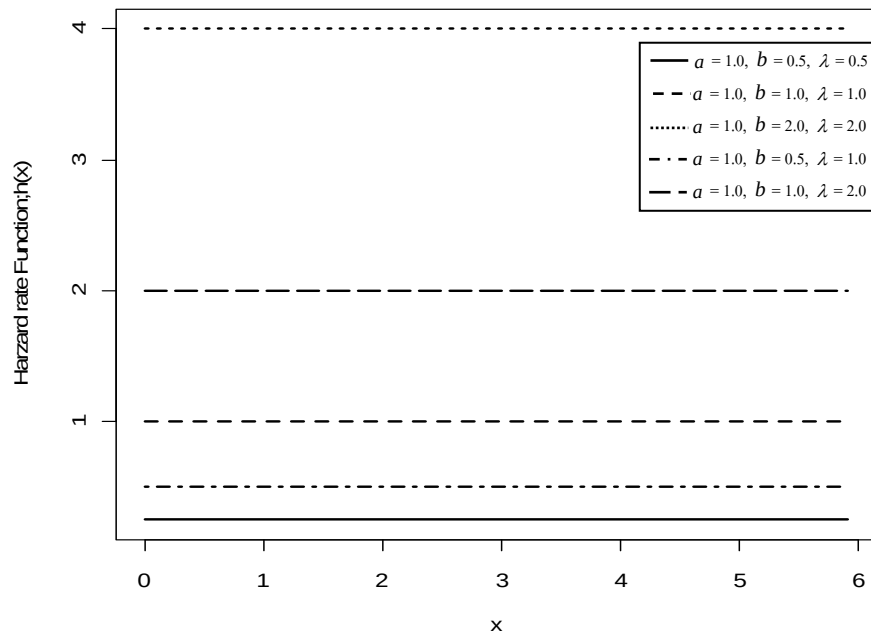
จากฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถวาดกราฟได้ดังนี้



ภาพที่ 13 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $0 < a < 1.0$
และ $b = 0.5, 1.0, 2.0, \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$



ภาพที่ 14 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a > 1.0$
และ
 $b = 0.5, 1.0, 2.0, \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$



ภาพที่ 15 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a = 1.0$

และ

$$b = 0.5, 1.0, 2.0, \lambda = 0.5, 1.0, 2.0$$

1.8 การสร้างค่าของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

การสร้างตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \dots, X_n$ ที่มีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a , b และ λ สามารถทำได้ดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 กำหนดให้ $B \sim B(a, b)$ นั่นคือกำหนดให้ B มีการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b

ขั้นที่ 2 แทนค่า B ลงในสูตรดังต่อไปนี้

$$X_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1-B)$$

เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, n$

จากสูตรข้างต้นจะทำให้ได้ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a , b และ λ ซึ่งสามารถสร้างตัวแปรสุ่มได้โดยการเขียนคำสั่งโปรแกรม R ได้ผลดังนี้

คำสั่งโปรแกรม R สำหรับการสร้างตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เมื่อกำหนดให้พารามิเตอร์ a , b , $\lambda = 1, 1, 1$ และ ขนาดตัวอย่าง (n) = 100 ดังนี้

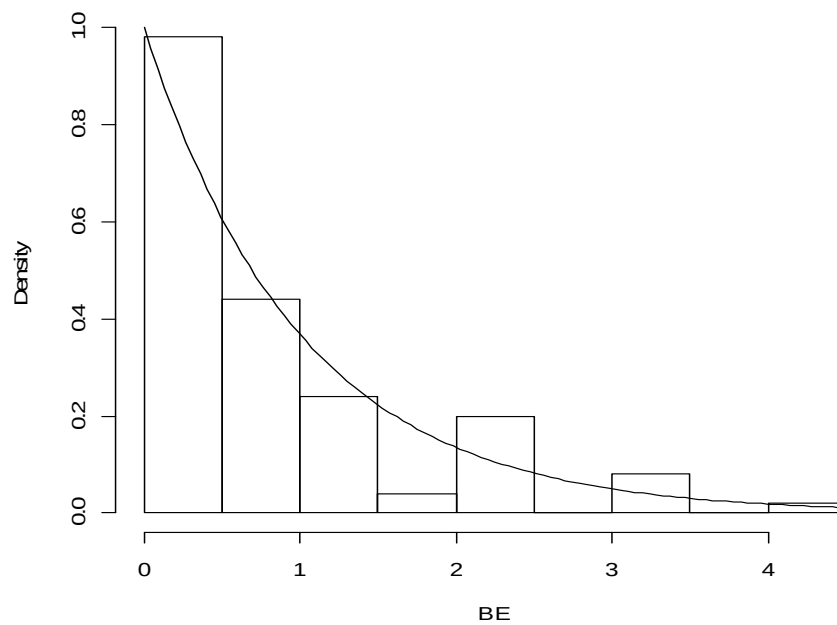
```
rbetaexp<-function(n,a,b,lambda){
  x<-rep(0,n)
  r<-rbeta(n,a,b)
  for(i in 1:n){
    x[i]=(-1/lambda)*log(-r[i]+1) }
  print(x)
}
BE<-rbetaexp(100,1,1,1)
```

จากคำสั่งข้างต้นได้ค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a , b , $\lambda = 1, 1, 1$ และ $n=100$ ดังนี้

2.139664867	0.305881033	0.068556915	1.194363880	1.489241839
0.016168012	0.305098787	3.198557654	0.980230235	0.079015391
2.374874402	0.885804947	0.029876540	1.370951295	0.457671996
2.025132612	0.666029240	0.544160277	2.070164557	0.099825269
0.040675976	0.924272409	0.106022422	0.372762874	1.014782593
0.231041091	0.322549389	0.324841078	0.043780077	0.268878818
0.283942990	0.741655202	1.377606524	0.339428899	3.314236108
0.601447514	0.565939094	0.762239211	0.480988062	0.211748141
2.071411345	4.347327182	1.039760531	0.963251266	0.924721348
3.265527348	0.002067753	0.190367375	0.311213461	0.843754661
0.899927472	0.015875037	0.415448337	0.355272501	0.447848560
2.447524194	1.287577440	0.219402817	0.555593446	0.472132586
0.949137228	0.887899457	0.007796596	3.179393819	1.049392068

0.353862433	1.090884938	0.641842002	0.365822484	0.138607842
0.975431785	0.036586687	0.430546643	0.045875480	1.429118378
1.387937542	2.070733960	1.621752794	1.813151934	0.627512433
0.151502519	2.100047849	0.184328592	0.465528828	0.063226356
0.953135921	0.212540788	0.997987211	2.155975562	0.010807456
0.280860873	0.098007752	0.475305278	0.131705056	0.702615133
1.323783904	0.152449893	0.074080014	2.089242645	0.179928530

จากค่าตัวแปรสุ่มสามารถวาดกราฟได้ผลดังนี้



ภาพที่ 16 ฮิสโตแกรมแสดงค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล เปรียบเทียบกับโค้งของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a, b, \lambda = 1, 1, 1$ และ $n = 100$

1.9 การทดสอบภาวะสารูปสนิทธิโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ

ทำการทดสอบตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงไว้ตามที่คาดหวังซึ่งสามารถคำนวณค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟโดยใช้โปรแกรม R ภายใต้สถานการณ์ที่กำหนดดังนี้ พารามิเตอร์ $a, b, \lambda = 1, 1, 1$ และ ขนาดตัวอย่าง $(n) = 100$ จากค่าตัวแปรสุ่มที่ได้ในข้อที่ 1.8 ในการทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟจะได้ผลดังนี้

คำสั่งโปรแกรม R สำหรับการทดสอบโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

```
ks_BE <- function(num,a,b,lambda){
est_mle <- function(alpha,Bta,l){
n <- num
x <- BE    #data#
L <- -(n*log(l)-(n*log(beta(alpha,Bta)))-(Bta*1*sum(x))+((alpha-1)*(sum(log(1-(exp((-l)*x)))))))
}
library(stats4)
est <- mle(minuslogl=est_mle,start=list(alpha=a,Bta=b,l=lambda))
summary (est)
a.hat<-coef(est)[1]
coef(est)[1]
b.hat<-coef(est)[2]
coef(est)[2]
lambda.hat<-coef(est)[3]
coef(est)[3]x<-sort(BE)
n<-length(x)
F<-pbeta(1-exp(-lambda.hat*x),a.hat,b.hat)
s<-(1:n)/n
si<-(1:n-1)/n
D<-max(abs(s-F))
d<-max(abs(si-F))
```

```

ks<-max(D,d)
ks
}
ks_BE(100,1,1,1)

```

ตารางที่ 3 ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a, b, \lambda = 1, 1, 1$ และ $n=100$

ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	สถิติทดสอบ โคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ
0.856	0.782	0.050

จากตารางพบว่าตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a, b, λ เท่ากับ 1, 1, 1 และ ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 0.856 ส่วนค่าความแปรปรวนเท่ากับ 0.782 ได้ค่าประมาณพารามิเตอร์และสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟมีค่าเท่ากับ 0.050 ซึ่งมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตในตารางสถิติโคลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ ซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.136 แสดงว่า ข้อมูลตัวแปรสุ่มชุดนี้มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

2. การประมาณค่าพารามิเตอร์

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์ของตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อใช้วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ 2 วิธี คือ วิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ ซึ่งทำการศึกษาด้วยการจำลองค่าตัวแปรสุ่มตามลักษณะที่กำหนด และทำการจำลองซ้ำจำนวน 500 ครั้ง ในแต่ละสถานการณ์ที่กำหนดขึ้น โดยใช้ MSE เป็นเกณฑ์ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพ เมื่อขนาดตัวอย่าง (n) เท่ากับ 20, 40, 80, 100, 250 และกำหนดค่าพารามิเตอร์ดังนี้

2.1 $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.2 $a = 0.5$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.3 $a = 0.5$, $b = 2.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.4 $a = 1.0$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.5 $a = 1.0$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.6 $a = 1.0$, $b = 2.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.7 $a = 5.0$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

2.8 $a = 5.0$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

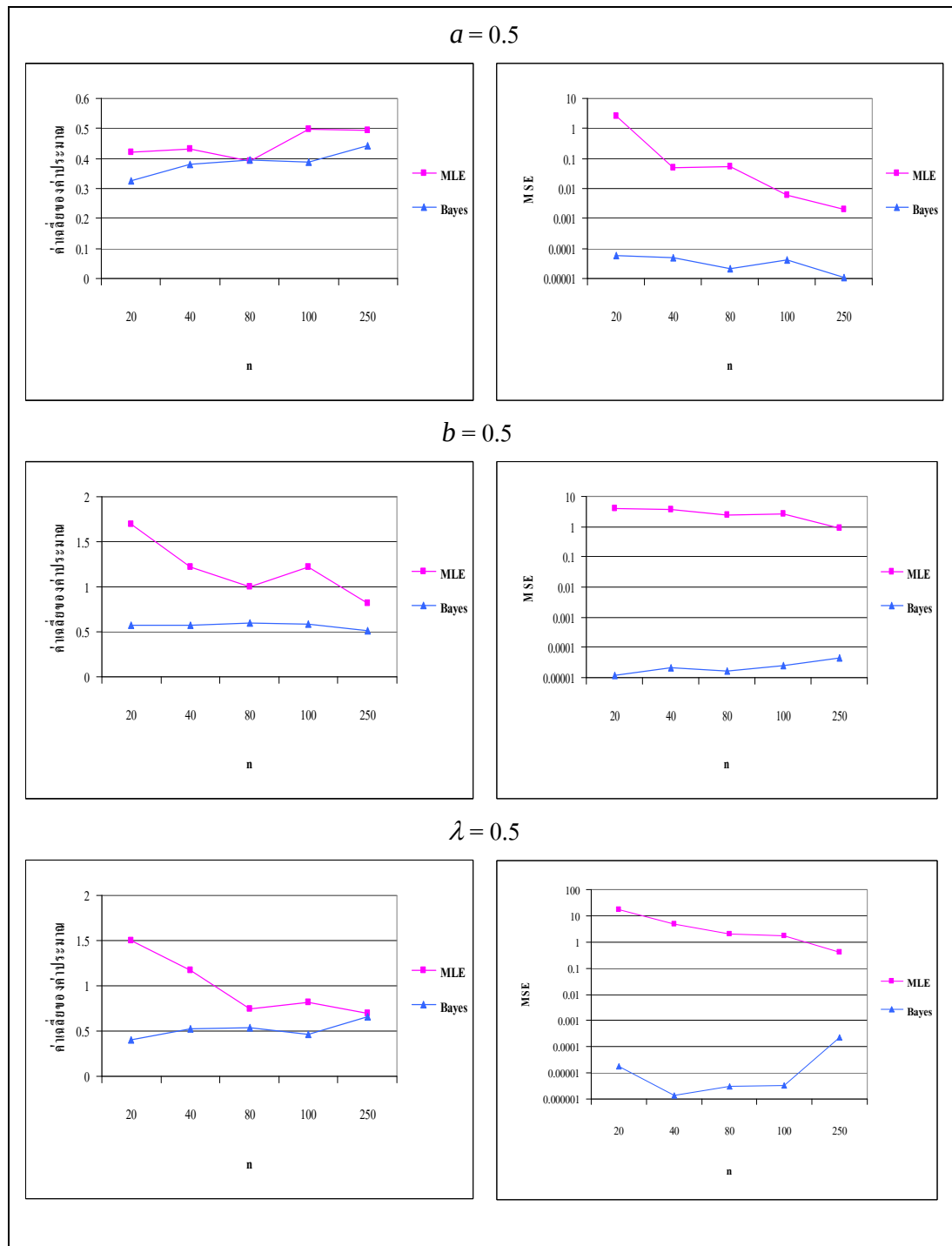
2.9 $a = 5.0$, $b = 2.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

ผลการประมาณค่าพารามิเตอร์แสดงดังในตารางที่ 4 ถึง 30 และภาพที่ 17 ถึง 43 ดังนี้

ตารางที่ 4 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับ
การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.419*	0.327	2.504	5.985×10^{-05}
	b	1.694	0.578*	3.877	1.237×10^{-05}
	λ	1.499	0.405*	17.947	1.820×10^{-05}
40	a	0.432*	0.379	0.051	4.862×10^{-05}
	b	1.221	0.579*	3.631	2.092×10^{-05}
	λ	1.165	0.521*	4.972	1.426×10^{-06}
80	a	0.392	0.396*	0.056	2.163×10^{-05}
	b	1.000	0.592*	2.425	1.702×10^{-05}
	λ	0.739	0.540*	2.021	3.166×10^{-06}
100	a	0.497*	0.389	0.006	4.115×10^{-05}
	b	1.217	0.588*	2.603	2.558×10^{-05}
	λ	0.817	0.469*	1.690	3.223×10^{-06}
250	a	0.494*	0.442	0.002	1.110×10^{-05}
	b	0.814	0.514*	0.897	4.326×10^{-05}
	λ	0.692	0.657*	0.407	2.212×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 17 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a, b, λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5, b = 0.5, \lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 4 และภาพที่ 17 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

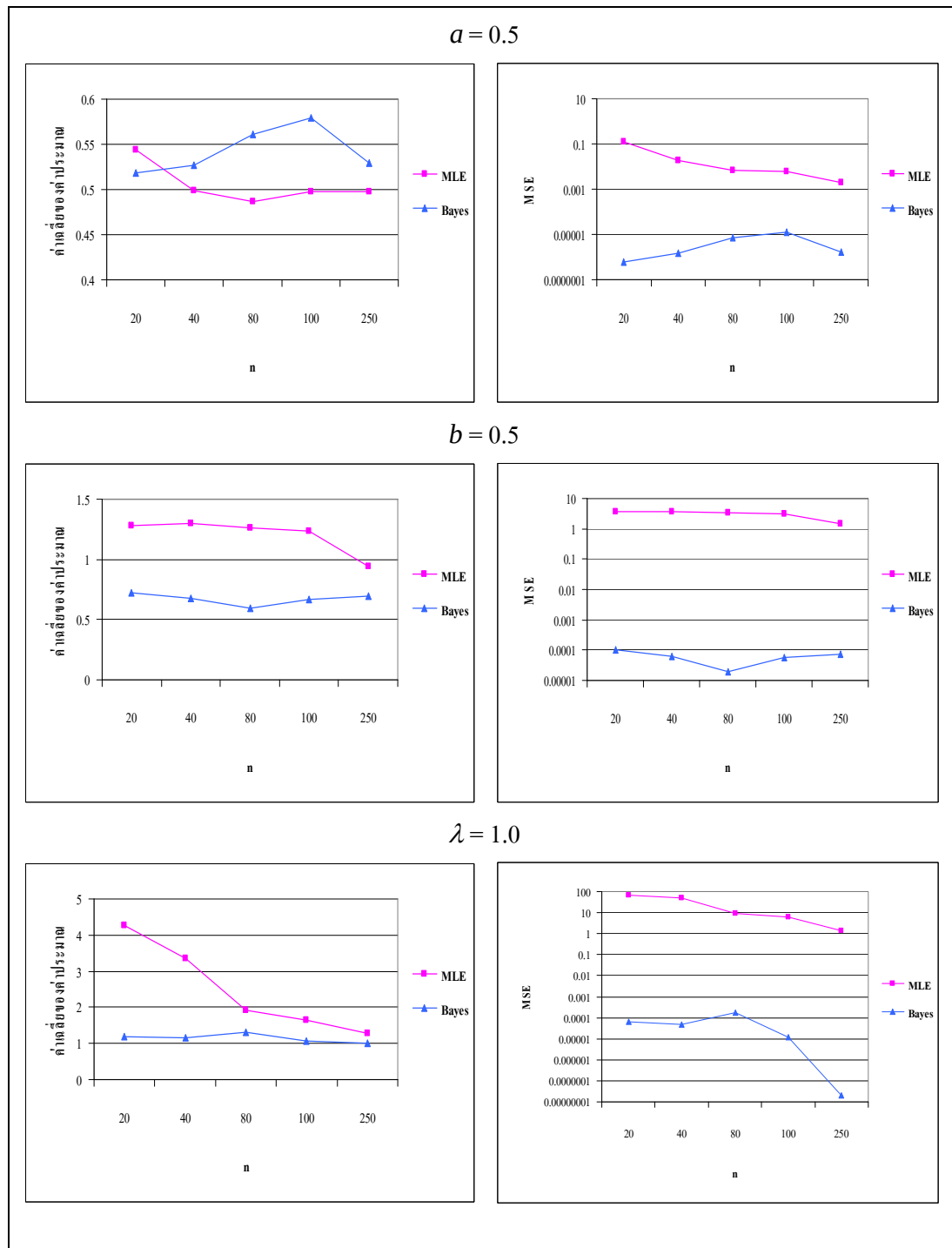
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง เช่นเดียวกับวิธี MLE ที่ให้ค่า MSE ใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 5 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับ
การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.544	0.518*	0.121	6.286×10^{-07}
	b	1.283	0.722*	3.776	9.873×10^{-05}
	λ	4.266	1.182*	68.457	6.665×10^{-05}
40	a	0.499*	0.527	0.019	1.448×10^{-06}
	b	1.299	0.675*	3.734	6.123×10^{-05}
	λ	3.350	1.152*	48.950	4.620×10^{-05}
80	a	0.487*	0.561	0.007	7.479×10^{-06}
	b	1.264	0.599*	3.325	1.947×10^{-05}
	λ	1.923	1.297*	9.204	1.759×10^{-04}
100	a	0.497*	0.579	0.006	1.239×10^{-05}
	b	1.236	0.672*	3.072	5.910×10^{-05}
	λ	1.643	1.077*	6.032	1.190×10^{-05}
250	a	0.497*	0.529	0.002	1.735×10^{-06}
	b	0.944	0.693*	1.438	7.440×10^{-05}
	λ	1.290	0.997*	1.347	2.029×10^{-08}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 18 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 5 และภาพที่ 18 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes ยกเว้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 20 จะเห็นได้ว่าวิธี Bayes ให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ใกล้เคียงมากกว่า MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

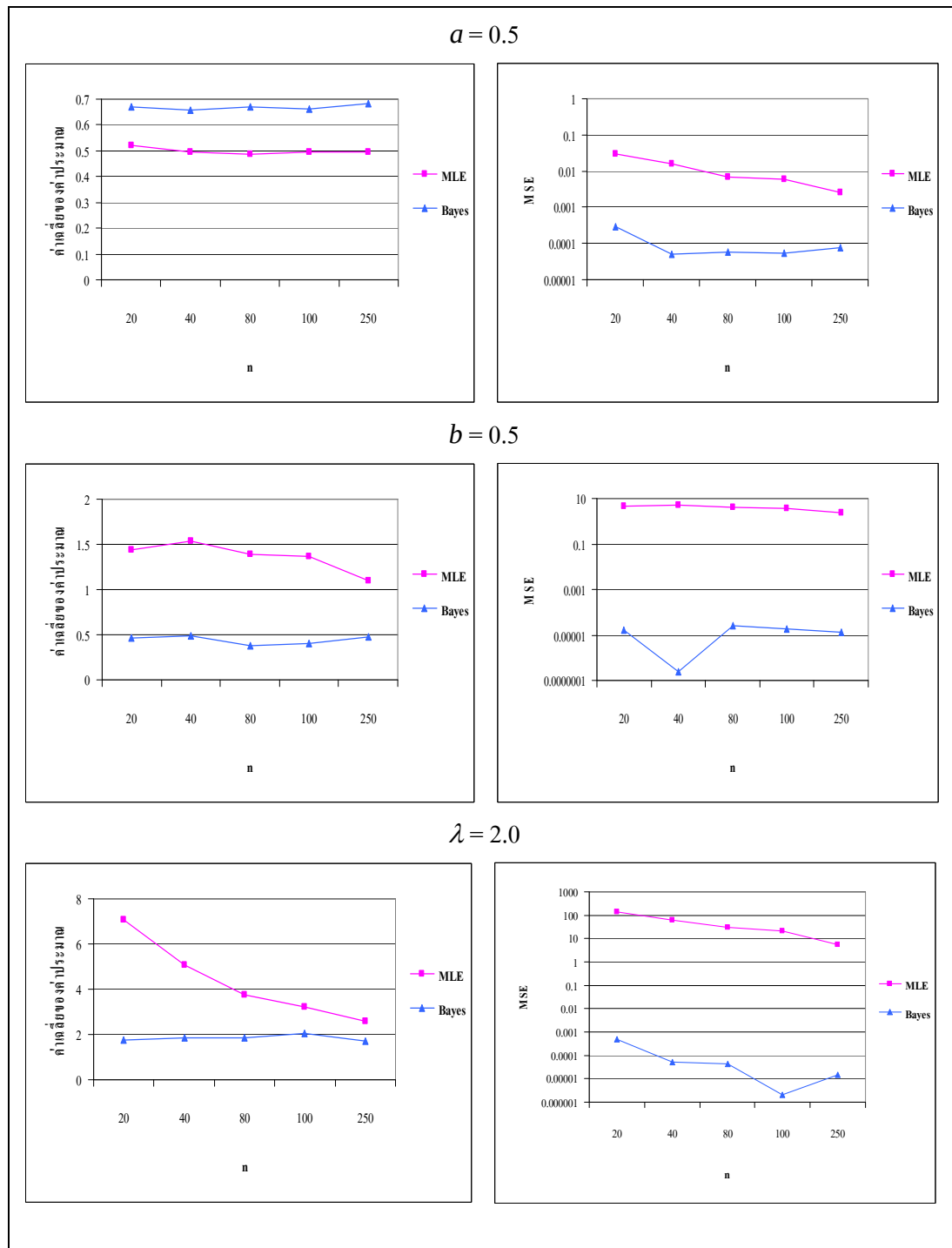
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง เช่นเดียวกับวิธี MLE ที่ให้ค่า MSE ใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 80 100 และ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธีจะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 6 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับ
การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 0.5$ และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.520*	0.670	0.030	2.900×10^{-04}
	b	1.440	0.460*	4.663	1.562×10^{-05}
	λ	7.057	1.780*	139.463	4.817×10^{-04}
40	a	0.497*	0.659	0.016	5.074×10^{-05}
	b	1.535	0.489*	5.224	2.425×10^{-07}
	λ	5.097	1.840*	62.036	5.147×10^{-05}
80	a	0.487*	0.671	0.007	5.844×10^{-05}
	b	1.395	0.384*	4.140	2.707×10^{-05}
	λ	3.750	1.852*	29.615	4.373×10^{-05}
100	a	0.497*	0.661	0.006	5.215×10^{-05}
	b	1.371	0.402*	3.865	1.928×10^{-05}
	λ	3.236	2.032*	21.761	2.055×10^{-06}
250	a	0.497*	0.684	0.0025	7.540×10^{-05}
	b	1.093	0.474*	2.404	1.394×10^{-05}
	λ	2.571	1.728*	5.558	1.479×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 19 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 6 และภาพที่ 19 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 0.5$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

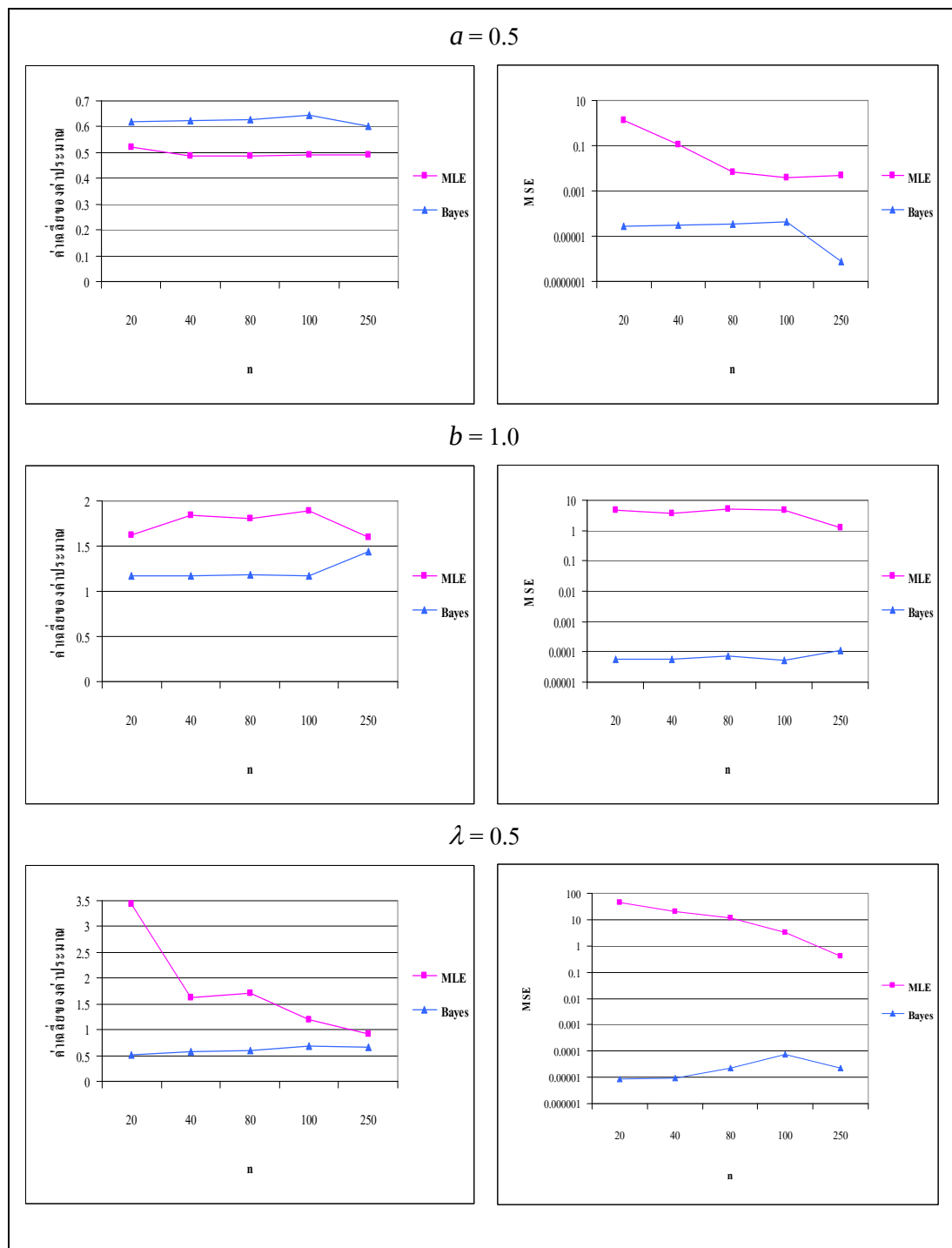
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง เช่นเดียวกับวิธี MLE ที่ให้ค่า MSE ใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 7 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ (parameter)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.562*	0.618	1.252	2.774×10^{-05}
	b	1.626	1.172*	4.697	5.913×10^{-05}
	λ	3.429	0.521	45.028	8.679×10^{-07}
40	a	0.485*	0.622	0.113	2.975×10^{-05}
	b	1.844	1.170*	3.747	5.799×10^{-05}
	λ	1.624	0.569*	19.886	9.540×10^{-06}
80	a	0.486*	0.628	0.007	3.261×10^{-05}
	b	1.804	1.189*	5.105	7.114×10^{-05}
	λ	1.702	0.604*	11.387	2.163×10^{-05}
100	a	0.490*	0.645	0.004	4.227×10^{-05}
	b	1.895	1.165*	4.862	5.478×10^{-05}
	λ	1.190	0.691*	3.274	7.318×10^{-05}
250	a	0.492*	0.602	0.005	7.221×10^{-07}
	b	1.596	1.434*	1.238	1.136×10^{-04}
	λ	0.910	0.666*	0.396	2.178×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 20 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 7 และภาพที่ 20 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

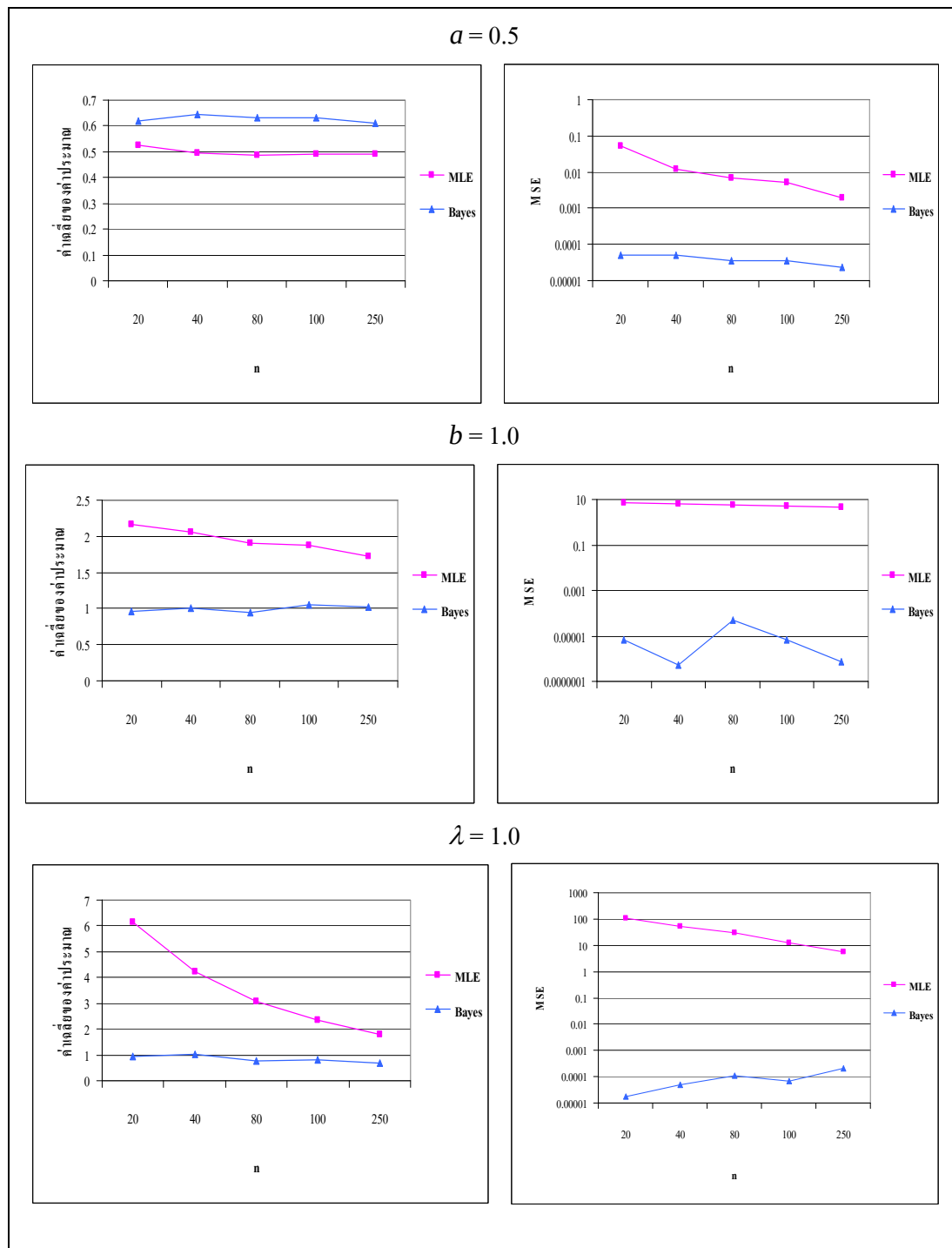
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 8 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับ
การแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.523*	0.621	0.054	4.859×10^{-05}
	b	2.168	0.954*	6.810	7.129×10^{-06}
	λ	6.130	0.927*	110.641	1.775×10^{-05}
40	a	0.493*	0.646	0.012	4.878×10^{-05}
	b	2.062	1.012*	6.734	5.130×10^{-07}
	λ	4.210	0.878*	50.853	4.947×10^{-05}
80	a	0.488*	0.631	0.007	3.427×10^{-05}
	b	1.900	0.951*	5.936	4.795×10^{-06}
	λ	3.0778	0.770*	29.714	1.056×10^{-04}
100	a	0.492*	0.633	0.005	3.538×10^{-05}
	b	1.881	1.059*	5.278	7.092×10^{-06}
	λ	2.358	0.815*	12.901	6.808×10^{-05}
250	a	0.492*	0.609	0.002	2.367×10^{-05}
	b	1.718	1.019*	4.426	7.623×10^{-07}
	λ	1.798	0.682*	5.827	2.022×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 21 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 1.0$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 8 และภาพที่ 21 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 1.0$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

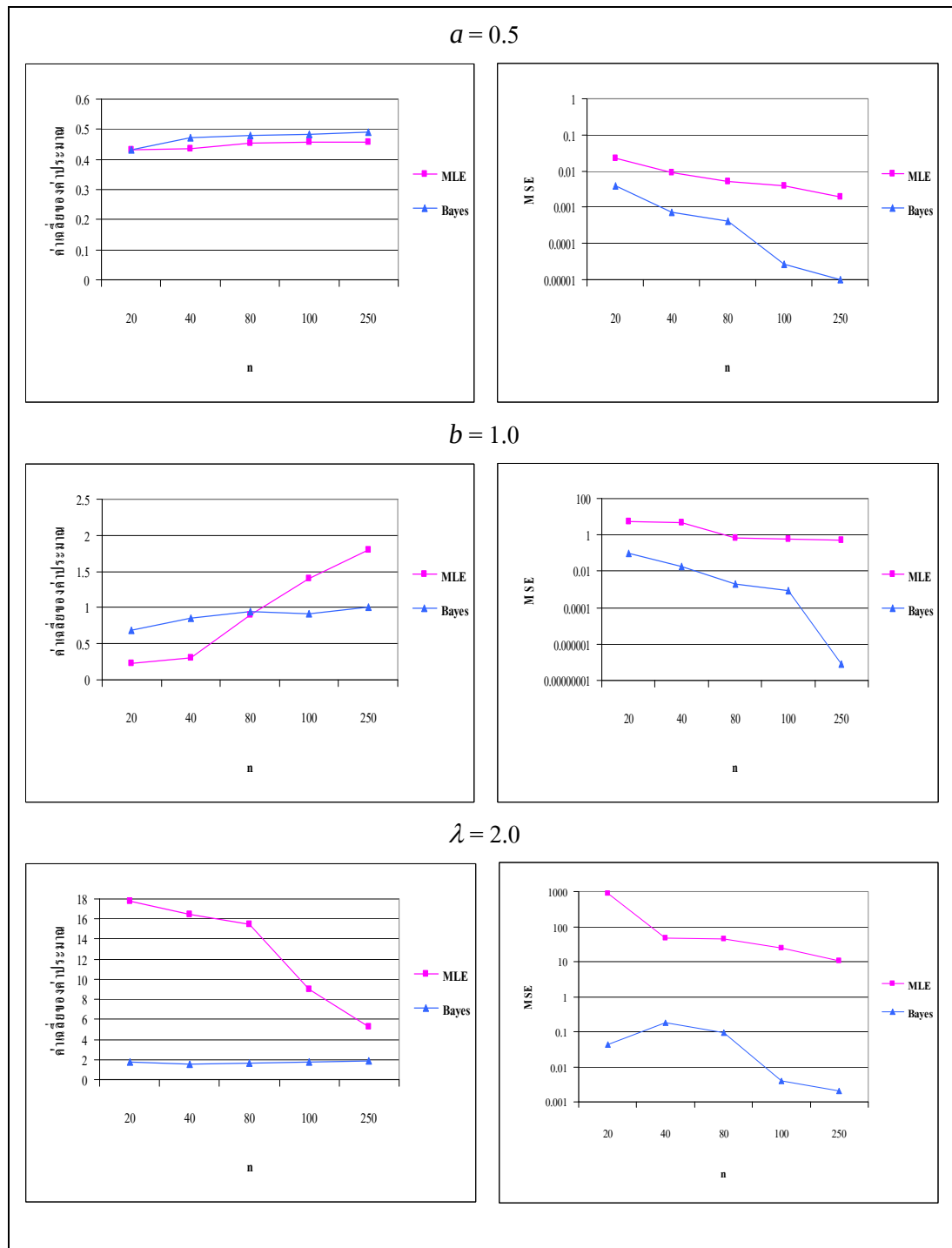
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 100 และ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง เช่นเดียวกับวิธี MLE ที่ให้ค่า MSE ใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 9 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 1.0$ และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.430	0.433*	0.022	0.004
	b	0.234	0.684*	5.394	0.099
	λ	17.760	1.793*	892.158	0.043
40	a	0.435	0.473*	0.009	7.098×10^{-04}
	b	0.301	0.860*	4.873	0.019
	λ	16.421	1.576*	48.739	0.180
80	a	0.453	0.480*	0.005	4.088×10^{-04}
	b	0.898	0.949*	0.705	0.002
	λ	15.461	1.692*	44.352	0.094
100	a	0.459	0.483*	0.004	2.731×10^{-05}
	b	1.398	0.908*	0.585	8.382×10^{-04}
	λ	8.981	1.788*	24.839	0.004
250	a	0.459	0.490*	0.002	1.005×10^{-05}
	b	1.793	1.001*	0.487	8.238×10^{-08}
	λ	5.304	1.836*	10.914	0.002

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 22 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 9 และภาพที่ 22 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

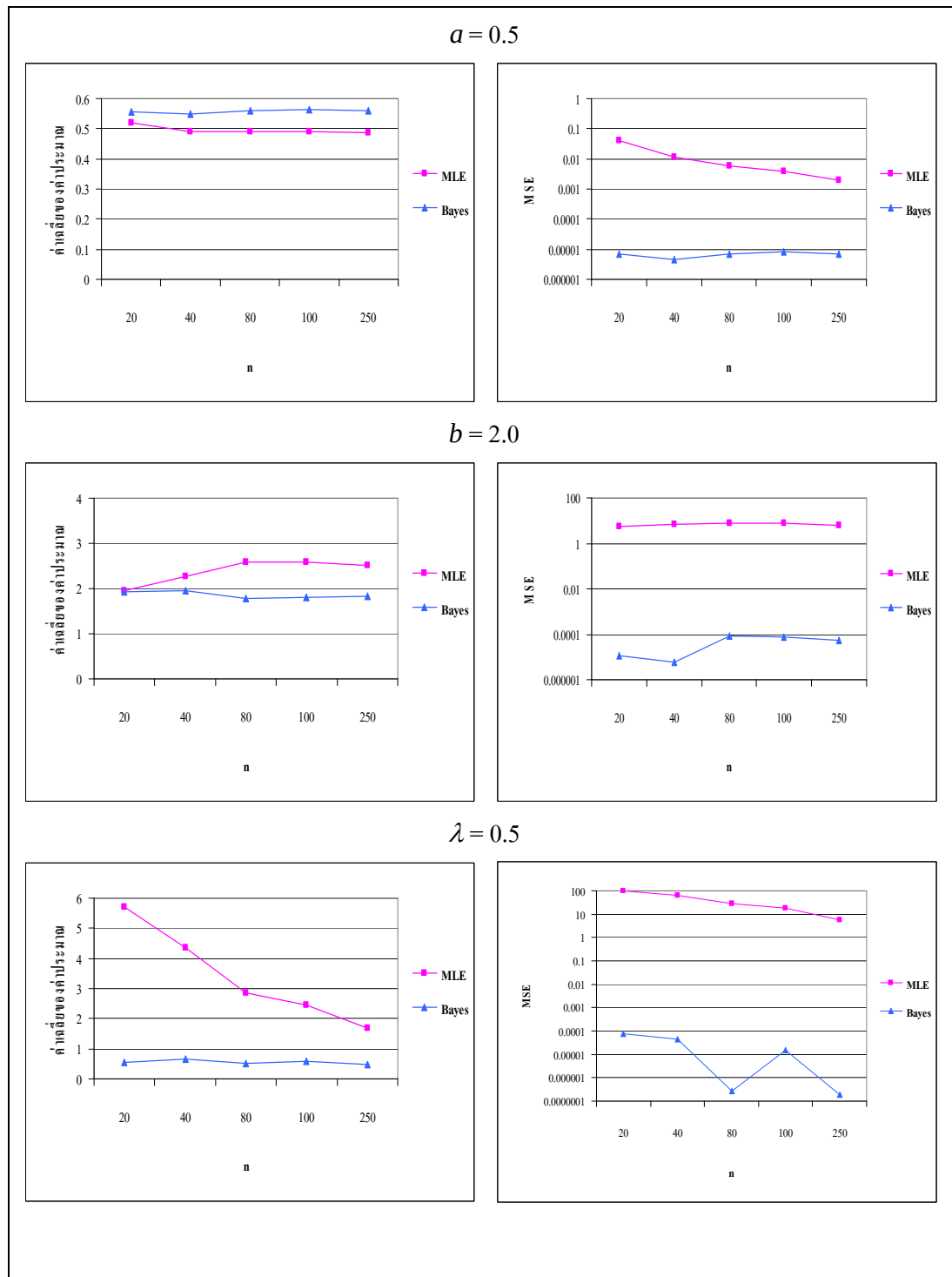
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 80 100 และ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 10 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.520*	0.557	0.041	6.657×10^{-06}
	b	1.963*	1.923	5.604	1.182×10^{-05}
	λ	5.704	0.693*	95.857	7.473×10^{-05}
40	a	0.490*	0.547	0.012	4.484×10^{-06}
	b	2.261	1.945*	6.892	6.143×10^{-06}
	λ	4.366	0.652*	64.148	4.631×10^{-05}
80	a	0.490*	0.559	0.006	7.077×10^{-06}
	b	2.578	1.789*	8.112	8.848×10^{-05}
	λ	2.870	0.512*	27.670	2.704×10^{-07}
100	a	0.490*	0.563	0.004	7.994×10^{-06}
	b	2.581	1.809*	7.968	7.342×10^{-05}
	λ	2.467	0.585*	17.419	1.473×10^{-05}
250	a	0.487*	0.559	0.002	6.946×10^{-06}
	b	2.508	1.835*	6.170	5.471×10^{-05}
	λ	1.673	0.490*	5.892	1.868×10^{-07}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 23 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 2.0$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 10 และภาพที่ 23 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 2.0$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

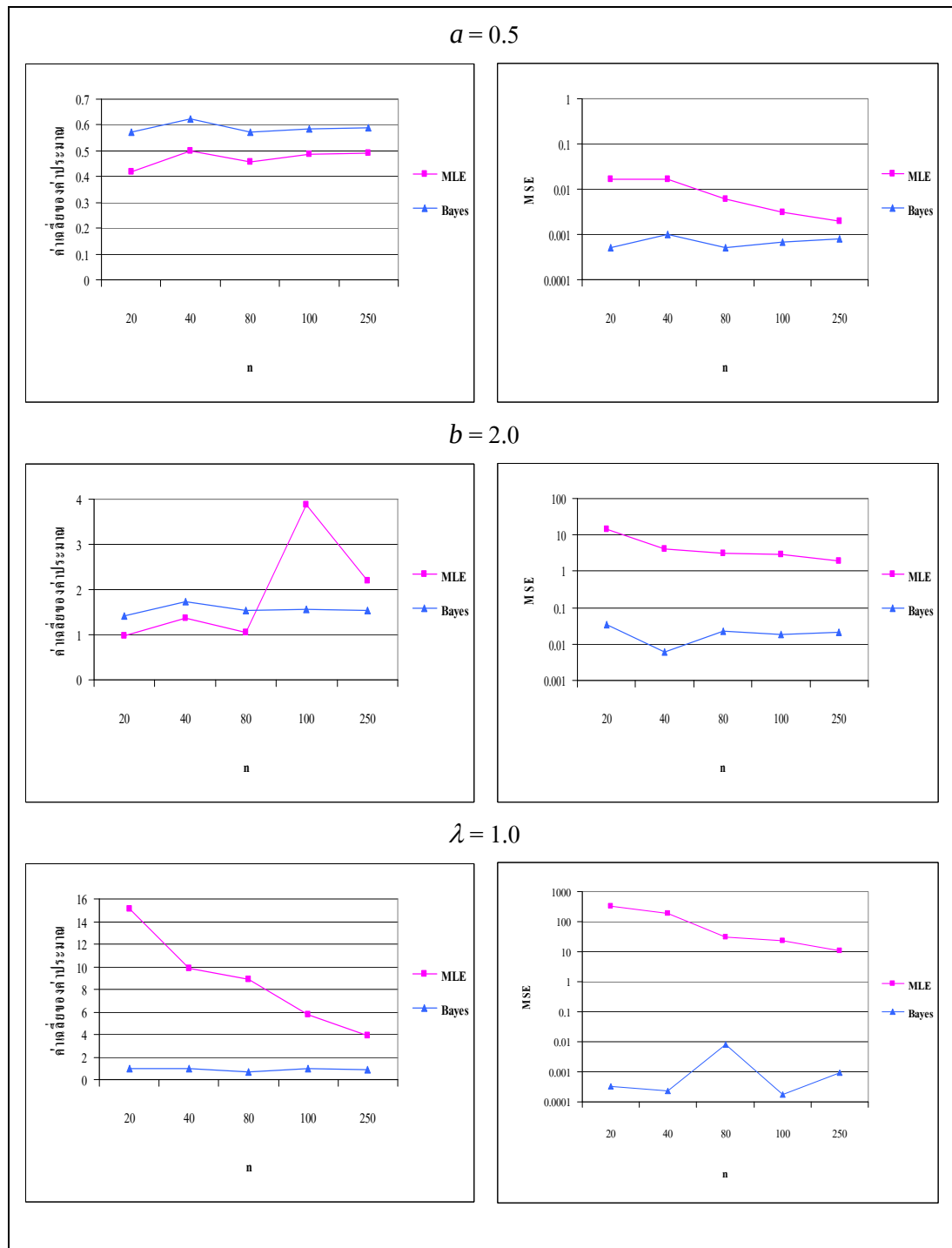
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 20 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 80 100 และ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง เช่นเดียวกับวิธี MLE ที่ให้ค่า MSE ใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 11 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.419*	0.571	0.017	5.086×10^{-04}
	b	0.972	1.408*	14.068	0.035
	λ	15.085	0.943*	338.561	3.194×10^{-04}
40	a	0.501*	0.622	0.017	0.001
	b	1.377	1.741*	4.127	0.006
	λ	9.808	0.952*	193.591	2.331×10^{-04}
80	a	0.457*	0.572	0.006	5.157×10^{-04}
	b	1.055	1.535*	3.085	0.022
	λ	8.915	0.715*	30.941	0.008
100	a	0.488*	0.583	0.003	6.889×10^{-04}
	b	3.874	1.561*	2.957	0.019
	λ	5.751	0.958*	22.596	1.747×10^{-04}
250	a	0.489*	0.590	0.002	8.125×10^{-04}
	b	2.192*	1.538	1.859	0.021
	λ	3.860	0.904*	10.374	9.161×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 24 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 2.0$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 11 และภาพที่ 24 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 2.0$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

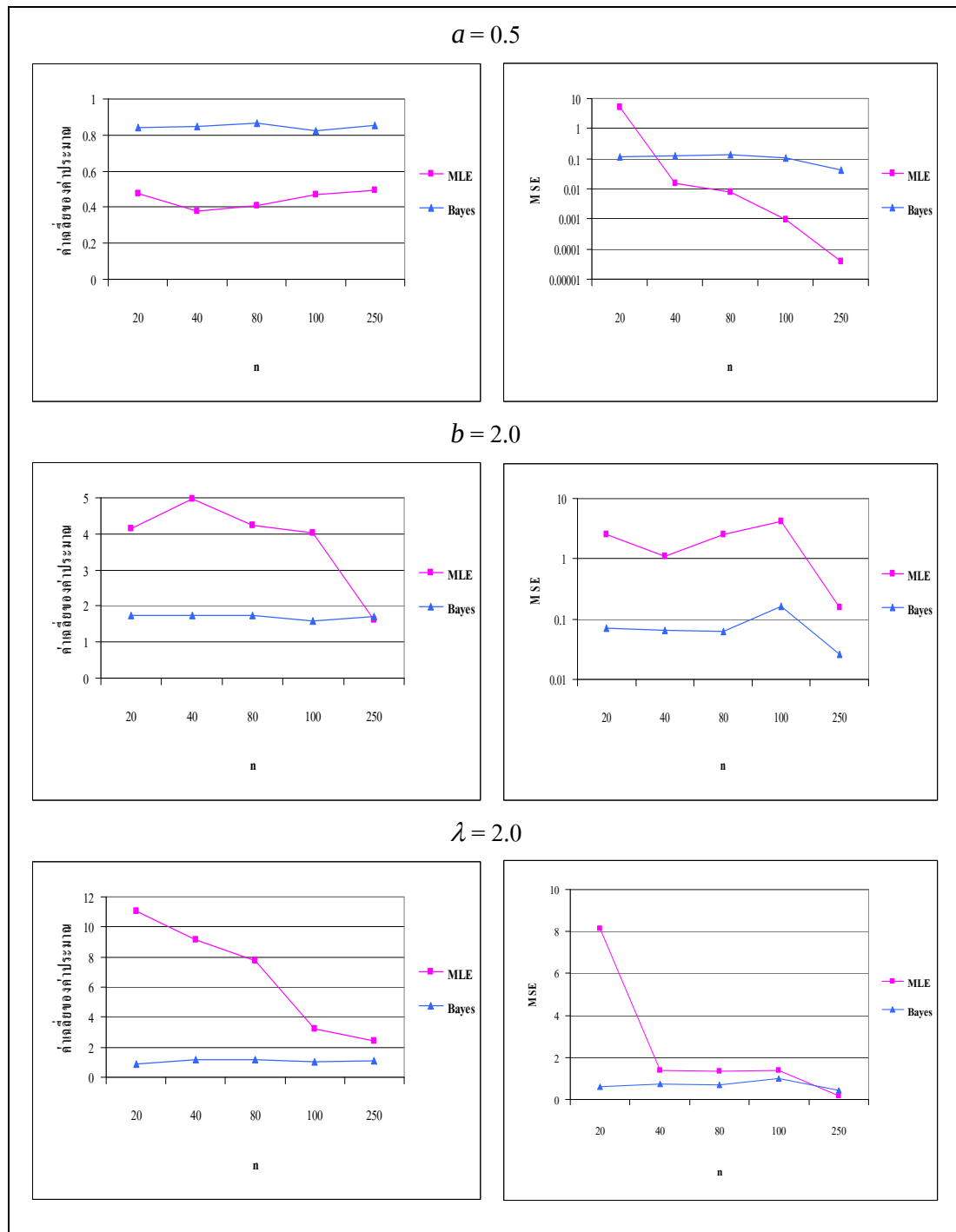
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 12 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 0.5$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.477*	0.840	5.309	0.115
	b	4.156	1.733*	2.510	0.071
	λ	11.022	1.215*	8.140	0.617
40	a	0.377*	0.849	0.0152	0.122
	b	4.956	1.744*	1.091	0.065
	λ	9.145	1.144*	1.370	0.732
80	a	0.406*	0.866	0.008	0.134
	b	4.245	1.751*	2.481	0.062
	λ	7.727	1.173*	1.328	0.694
100	a	0.469*	0.825	9.855×10^{-04}	0.105
	b	4.023	1.599*	4.092	0.161
	λ	3.242	1.011*	1.382	0.978
250	a	0.494*	0.851	3.747×10^{-05}	0.043
	b	1.605	1.722*	0.156	0.026
	λ	2.406*	1.082	0.165	0.417

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 25 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 2.0$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 12 และภาพที่ 25 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 0.5$, $b = 2.0$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี MLE ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี Bayes เมื่อมีขนาดตัวอย่างมากกว่า 20 โดยให้ค่าที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

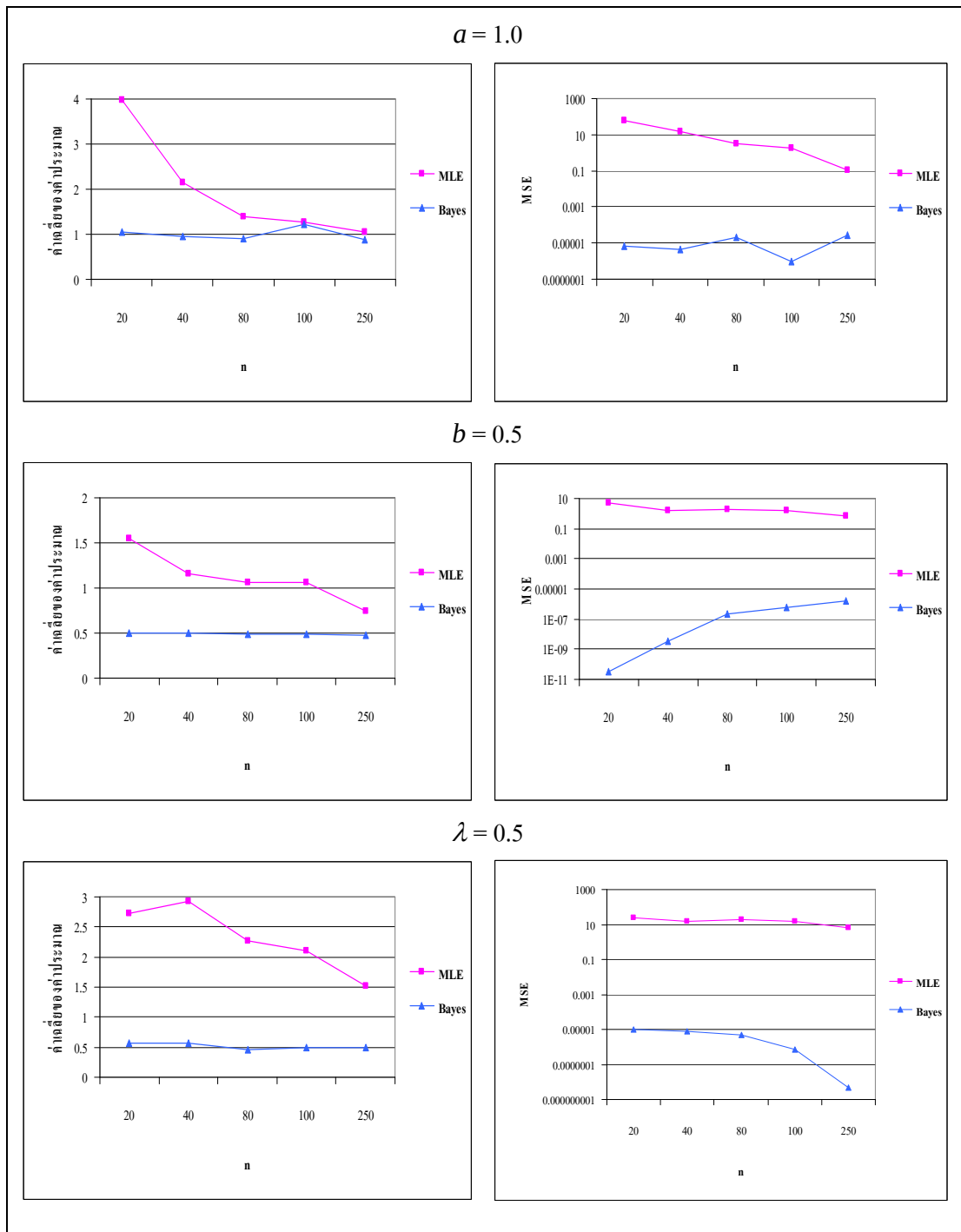
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 13 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 0.5$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	3.968	1.059*	60.415	7.049×10^{-06}
	b	1.548	0.499*	4.935	3.214×10^{-11}
	λ	2.731	0.571*	23.432	9.987×10^{-06}
40	a	2.147	0.952*	14.679	4.540×10^{-06}
	b	1.159	0.499*	1.551	3.373×10^{-09}
	λ	2.926	0.564*	15.412	8.244×10^{-06}
80	a	1.397	0.901*	3.296	1.972×10^{-05}
	b	1.055	0.489*	1.855	2.273×10^{-07}
	λ	2.267	0.451*	19.502	4.840×10^{-06}
100	a	1.267	1.217*	1.928	9.436×10^{-07}
	b	1.067	0.483*	1.653	6.008×10^{-07}
	λ	2.099	0.494*	15.725	7.025×10^{-08}
250	a	1.054*	0.884*	0.105	2.713×10^{-05}
	b	0.746	0.471*	0.644	1.654×10^{-06}
	λ	1.512	0.502*	6.888	4.942×10^{-09}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 26 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 13 และภาพที่ 26 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

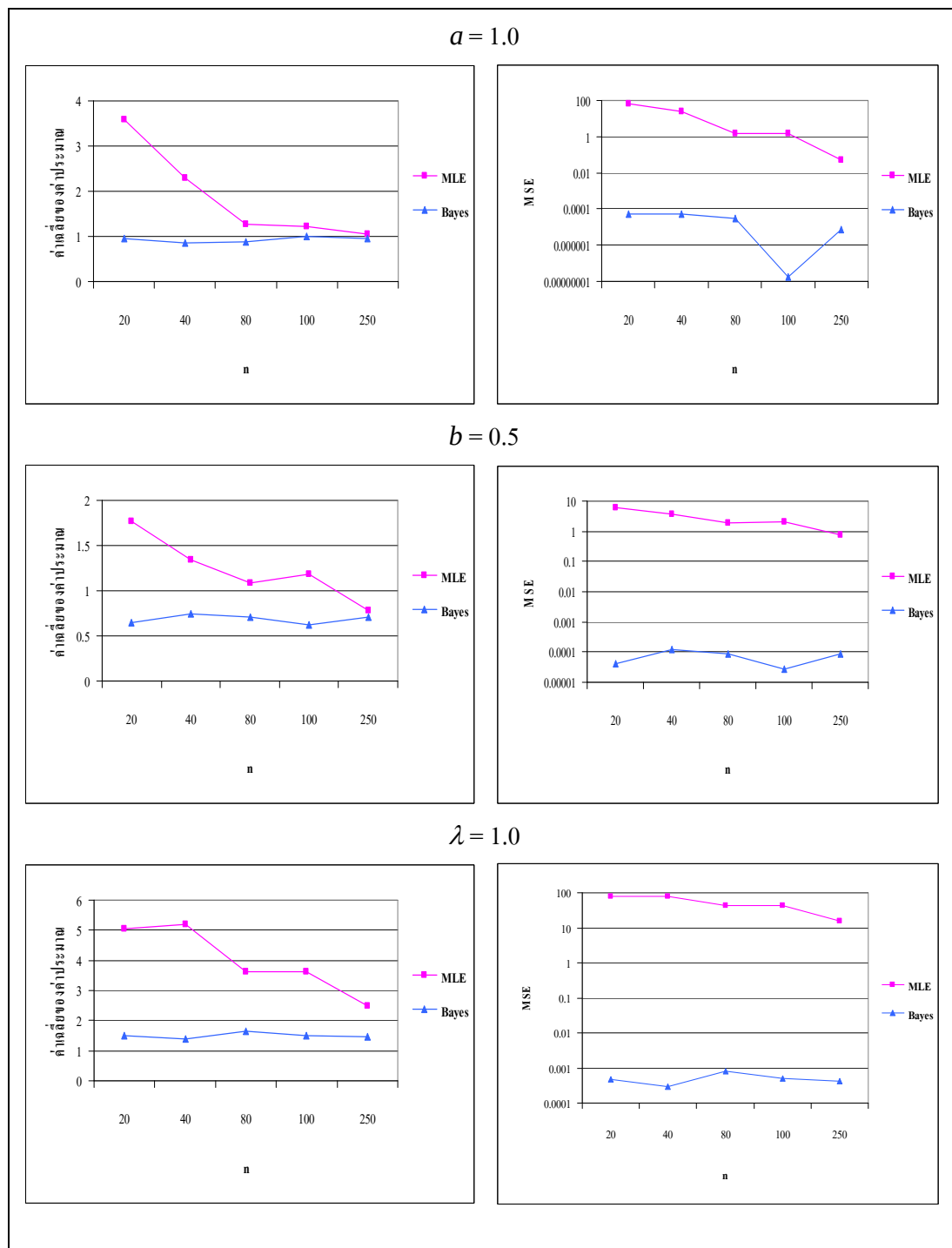
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 14 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 0.5$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	3.596	0.948*	66.729	5.399×10^{-05}
	b	1.765	0.641*	6.071	3.969×10^{-05}
	λ	5.064	1.488*	77.154	4.753×10^{-04}
40	a	2.297	0.842*	24.956	5.018×10^{-05}
	b	1.346	0.746*	3.713	1.214×10^{-04}
	λ	5.193	1.389*	76.461	3.020×10^{-04}
80	a	1.275	0.881*	1.518	2.811×10^{-05}
	b	1.087	0.708*	1.932	8.640×10^{-05}
	λ	3.633	1.631*	43.801	7.962×10^{-04}
100	a	1.227	1.003*	1.383	1.772×10^{-08}
	b	1.185	0.618*	2.011	2.775×10^{-05}
	λ	3.624	1.504*	42.907	5.085×10^{-04}
250	a	1.038*	0.941	0.050	6.956×10^{-06}
	b	0.782	0.706*	0.760	8.517×10^{-05}
	λ	2.487	1.456*	15.707	4.155×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 27 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 14 และภาพที่ 27 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

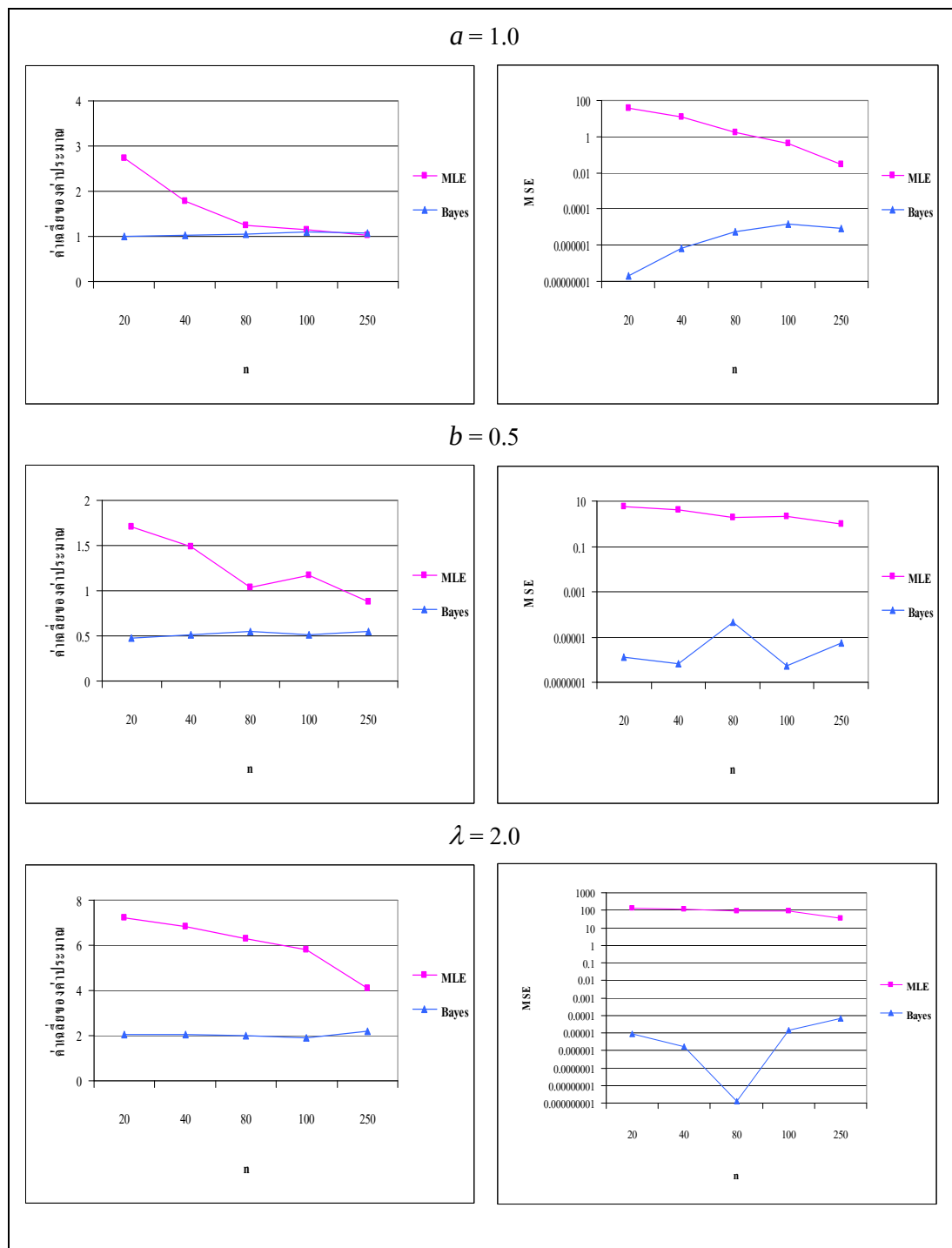
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 15 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 0.5$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	2.736	1.003*	37.240	1.934×10^{-08}
	b	1.704	0.475*	5.907	1.284×10^{-06}
	λ	7.208	2.068*	132.192	9.265×10^{-06}
40	a	1.792	1.019*	12.490	6.958×10^{-08}
	b	1.493	0.518*	4.022	6.385×10^{-08}
	λ	6.849	2.028*	118.039	1.639×10^{-06}
80	a	1.237	1.053*	1.671	5.589×10^{-06}
	b	1.039	0.548*	1.936	4.538×10^{-05}
	λ	6.272	1.999*	96.023	1.199×10^{-09}
100	a	1.148	1.087*	0.433	1.513×10^{-05}
	b	1.167	0.516*	2.128	5.311×10^{-07}
	λ	5.792	1.917*	93.546	1.375×10^{-05}
250	a	1.027*	1.063	0.028	8.017×10^{-06}
	b	0.875	0.551*	1.008	5.287×10^{-06}
	λ	4.115	2.184*	33.535	6.744×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 28 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 15 และภาพที่ 28 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE พอสมควร ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

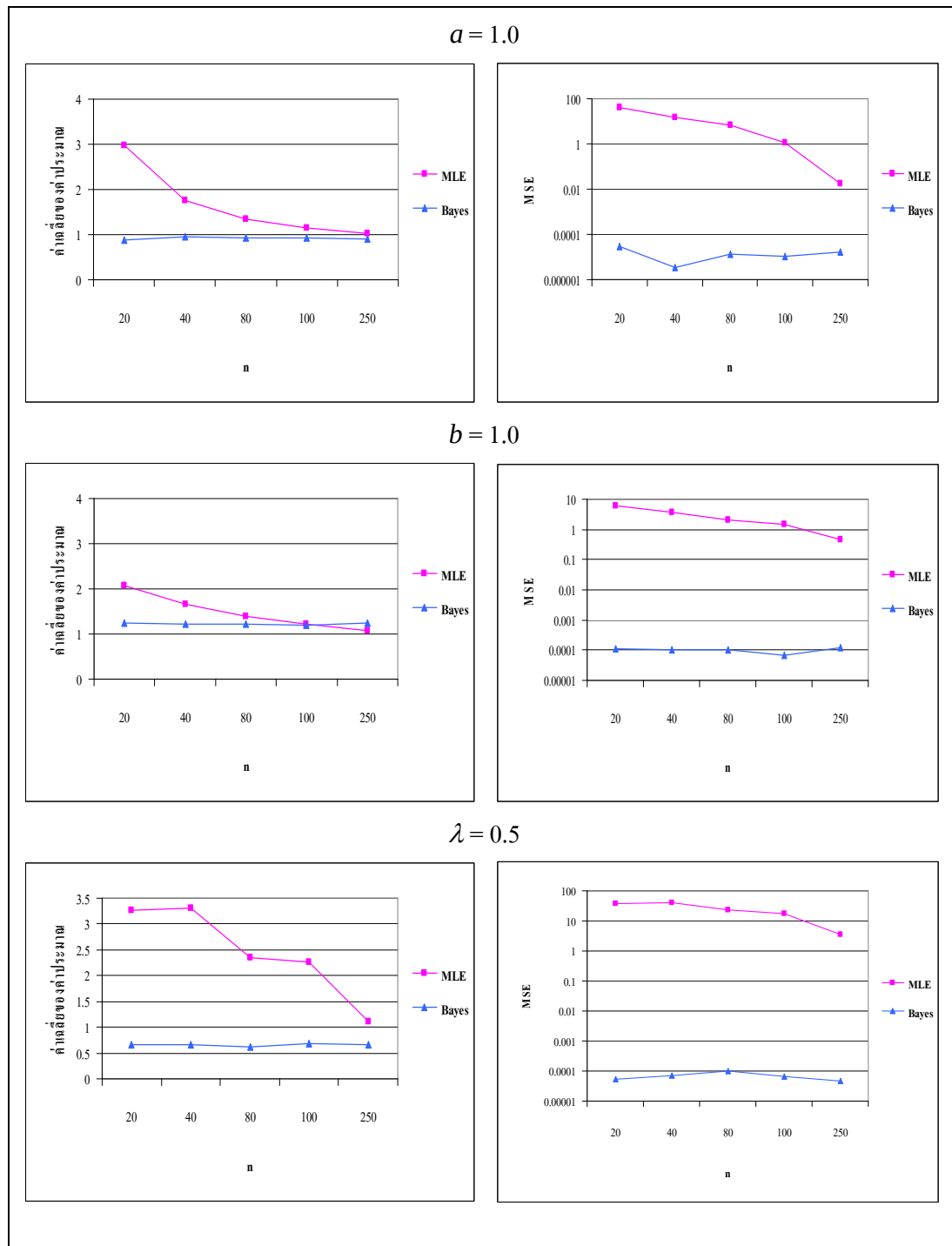
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 16 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 1.0$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	2.978	0.876*	40.976	3.057×10^{-05}
	b	2.065	1.236*	6.067	1.123×10^{-04}
	λ	3.260	0.661*	36.545	5.185×10^{-05}
40	a	1.753	0.959*	15.420	3.306×10^{-06}
	b	1.661	1.229*	3.697	1.050×10^{-04}
	λ	3.310	0.670*	40.540	7.195×10^{-05}
80	a	1.333	0.920*	6.634	1.273×10^{-05}
	b	1.396	1.228*	2.142	1.044×10^{-04}
	λ	2.340	0.626*	22.985	1.030×10^{-04}
100	a	1.135	0.926*	1.146	1.082×10^{-05}
	b	1.214	1.183*	1.465	6.677×10^{-05}
	λ	2.257	0.679*	17.554	6.437×10^{-05}
250	a	1.017*	0.910	0.017	1.619×10^{-05}
	b	1.080*	1.251	0.471	1.262×10^{-04}
	λ	1.111	0.652*	3.561	4.633×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 29 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 16 และภาพที่ 29 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

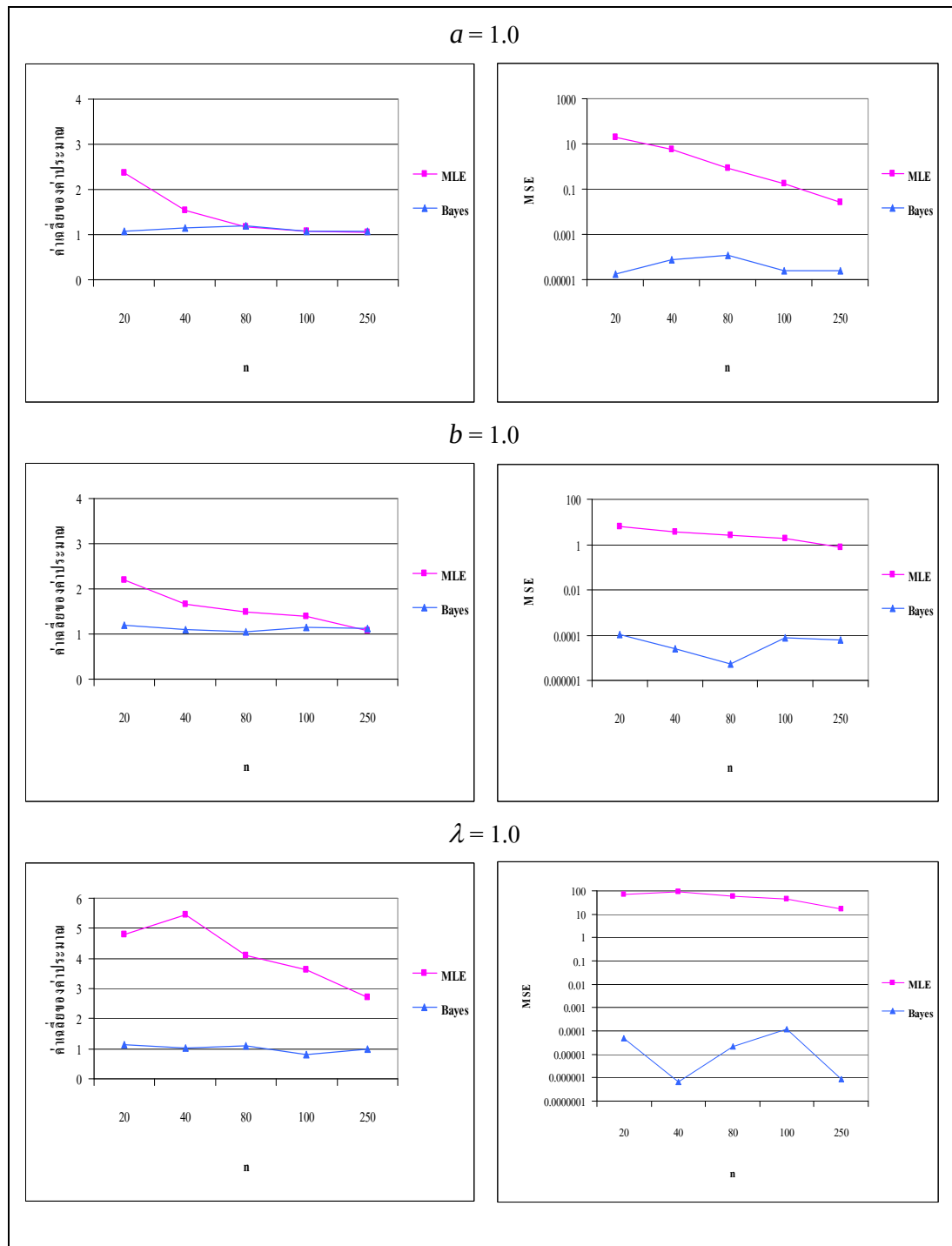
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 17 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 1.0$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	2.374	1.072*	20.359	1.719×10^{-05}
	b	2.199	1.183*	6.476	1.117×10^{-04}
	λ	4.775	1.121*	68.147	4.855×10^{-05}
40	a	1.538	1.153*	5.939	7.793×10^{-05}
	b	1.663	1.088*	3.626	2.555×10^{-05}
	λ	5.441	1.014*	91.594	6.495×10^{-07}
80	a	1.161	1.185*	0.809	1.137×10^{-04}
	b	1.488	1.039*	2.456	5.072×10^{-06}
	λ	4.084	1.080*	60.959	2.130×10^{-05}
100	a	1.078	1.084*	0.169	2.367×10^{-05}
	b	1.393	1.148*	1.937	7.274×10^{-05}
	λ	3.622	0.811*	44.267	1.186×10^{-04}
250	a	1.037*	1.085	0.026	2.396×10^{-05}
	b	1.063*	1.132	0.718	5.807×10^{-05}
	λ	2.693	0.984*	16.903	8.684×10^{-07}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 30 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 17 และภาพที่ 30 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

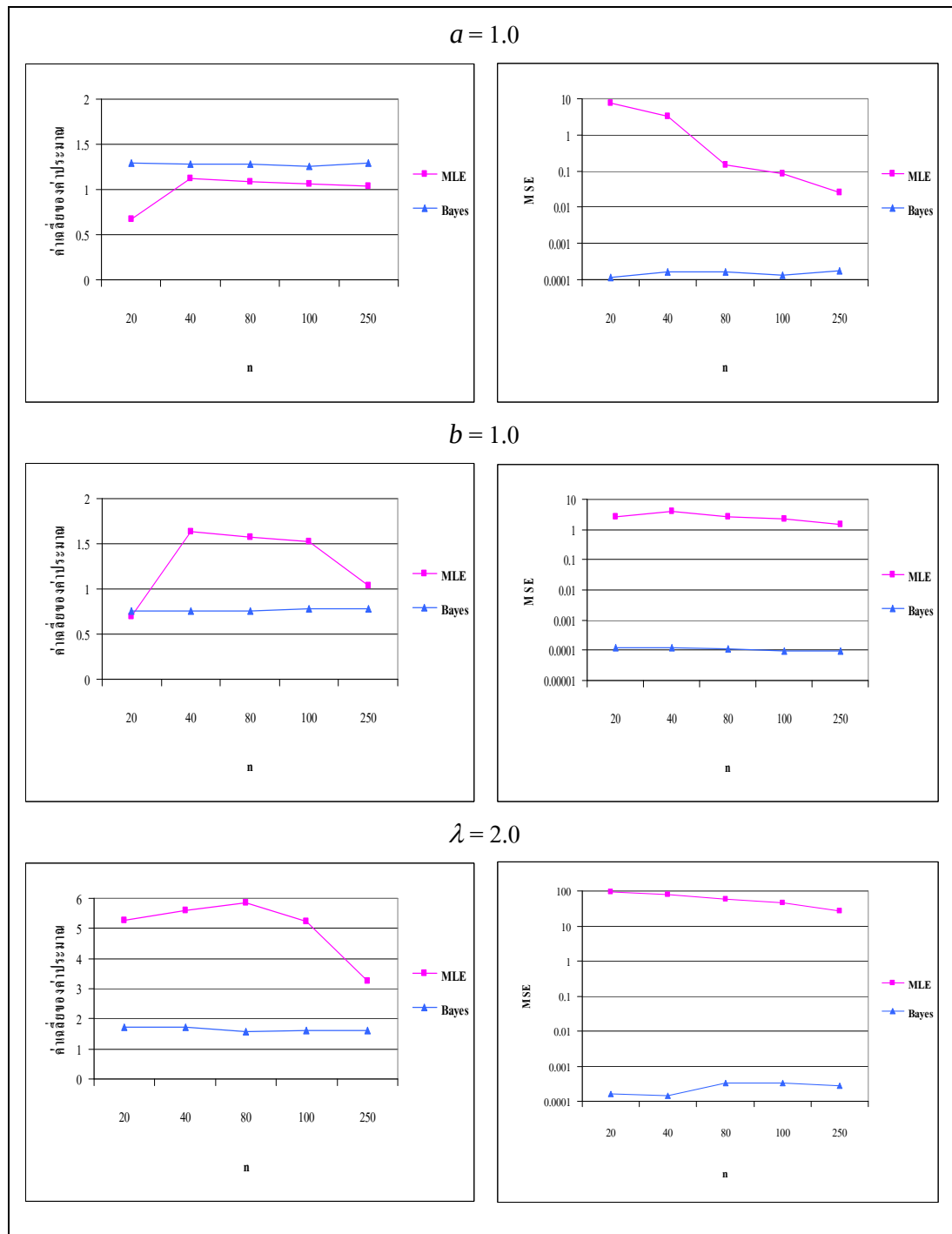
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 18 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 1.0$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	0.668	1.287*	7.779	1.165×10^{-04}
	b	0.701	0.756*	2.545	1.191×10^{-04}
	λ	5.285	1.714*	95.395	1.640×10^{-04}
40	a	1.125*	1.282	3.187	1.589×10^{-04}
	b	1.639	0.757*	3.933	1.184×10^{-04}
	λ	5.602	1.729*	79.681	1.466×10^{-04}
80	a	1.090*	1.282	0.148	1.585×10^{-04}
	b	1.572	0.760*	2.583	1.152×10^{-04}
	λ	5.840	1.591*	59.391	3.346×10^{-04}
100	a	1.067*	1.259	0.084	1.337×10^{-04}
	b	1.527	0.781*	2.289	9.634×10^{-05}
	λ	5.235	1.595*	46.234	3.279×10^{-04}
250	a	1.038*	1.296	0.025	1.758×10^{-04}
	b	1.033*	0.782	1.433	9.474×10^{-05}
	λ	3.269	1.624*	26.739	2.827×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 31 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 18 และภาพที่ 31 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธี Bayes จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

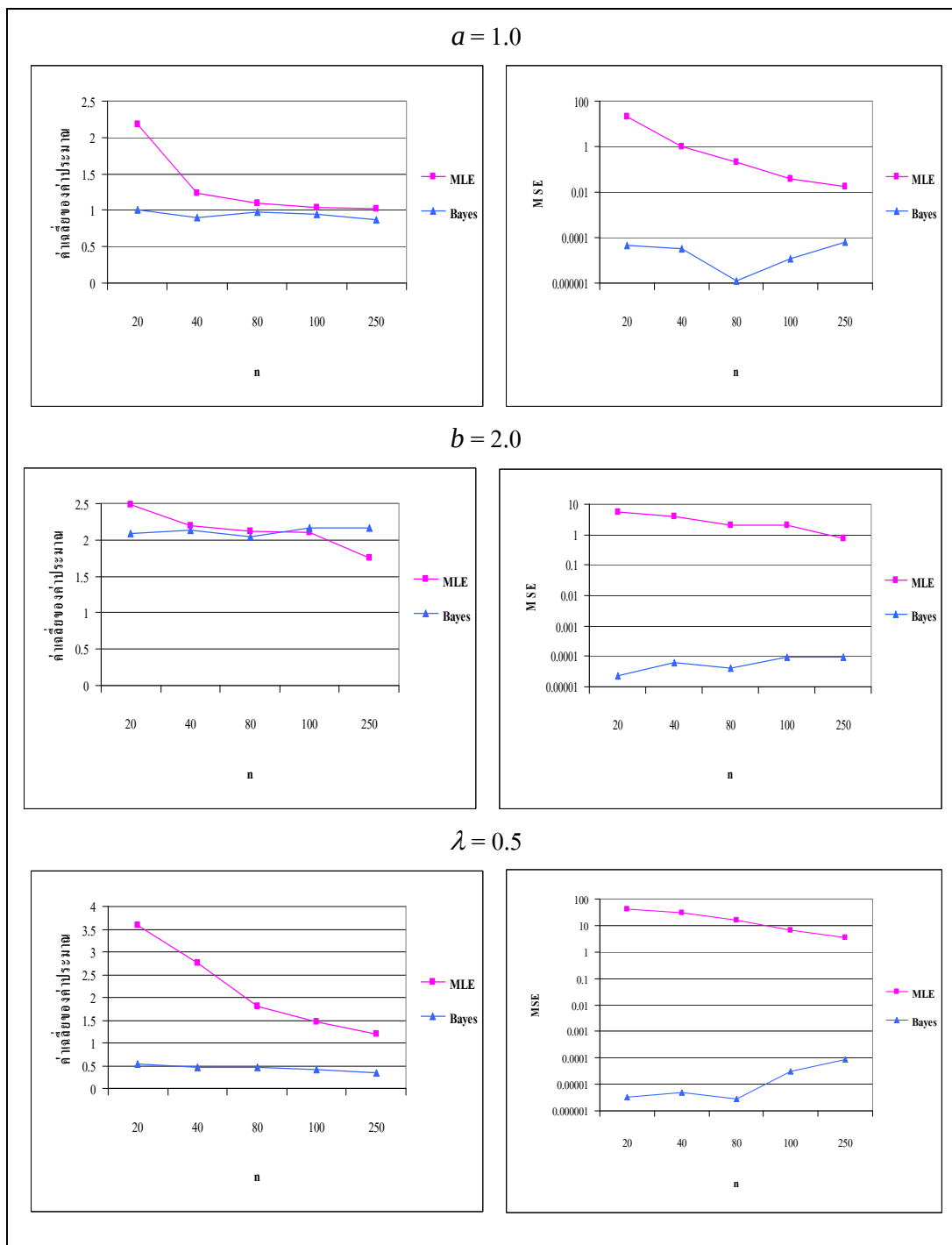
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 19 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	2.185	1.012*	20.632	4.778×10^{-05}
	b	2.484	2.082*	5.693	2.236×10^{-05}
	λ	3.574	0.537*	42.789	3.255×10^{-06}
40	a	1.229	0.904*	0.975	3.092×10^{-05}
	b	2.192	2.135*	3.866	6.041×10^{-05}
	λ	2.754	0.462*	30.745	4.810×10^{-06}
80	a	1.093*	0.981	0.206	1.228×10^{-06}
	b	2.116	2.036*	2.009	4.254×10^{-05}
	λ	1.795	0.471*	16.057	2.865×10^{-06}
100	a	1.040*	0.941	0.037	1.176×10^{-05}
	b	2.108*	2.165	2.048	9.083×10^{-05}
	λ	1.462	0.405*	6.753	2.978×10^{-05}
250	a	1.020*	0.865	0.017	6.035×10^{-05}
	b	1.760	2.167*	0.766	9.348×10^{-05}
	λ	1.187	0.339*	3.590	8.610×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 32 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 19 และภาพที่ 32 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 และ 40 วิธี Bayes จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

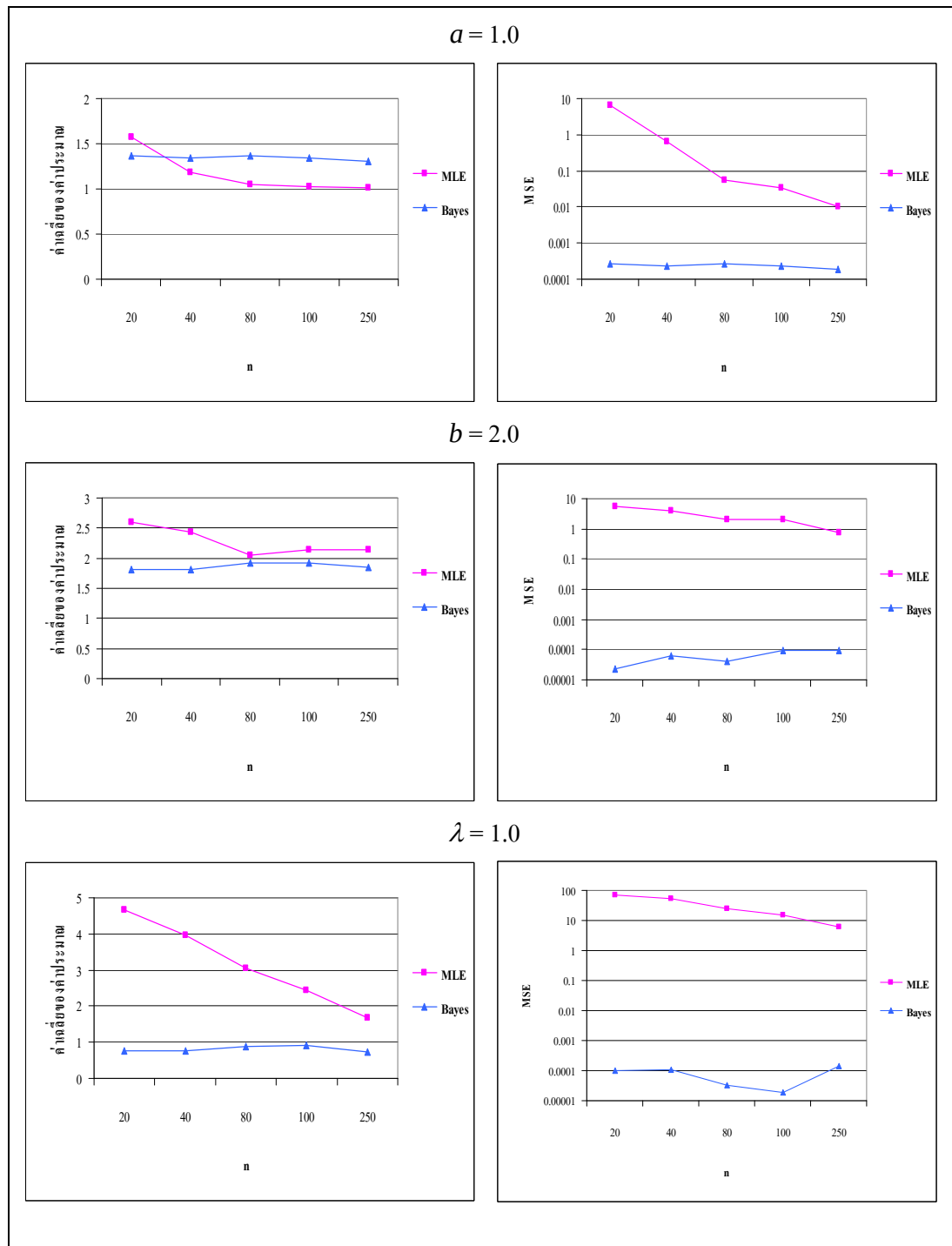
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 20 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 1.0$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	1.573	1.368*	6.598	2.704×10^{-04}
	b	2.603	1.815*	5.756	6.809×10^{-05}
	λ	4.676	0.774*	72.009	1.019×10^{-04}
40	a	1.183*	1.339	0.661	2.297×10^{-04}
	b	2.438	1.804*	4.599	7.671×10^{-05}
	λ	3.968	0.769*	52.280	1.065×10^{-04}
80	a	1.052*	1.362	0.057	2.623×10^{-04}
	b	2.050*	1.929	2.261	1.013×10^{-05}
	λ	3.041	0.871*	24.490	3.314×10^{-05}
100	a	1.027*	1.336	0.033	2.251×10^{-04}
	b	2.149	1.916*	2.521	1.420×10^{-05}
	λ	2.451	0.903*	15.217	1.890×10^{-05}
250	a	1.011*	1.308	0.010	1.903×10^{-04}
	b	2.132*	1.854	1.178	4.290×10^{-05}
	λ	1.683	0.734*	6.103	1.442×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 33 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 20 และภาพที่ 33 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธี Bayes จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

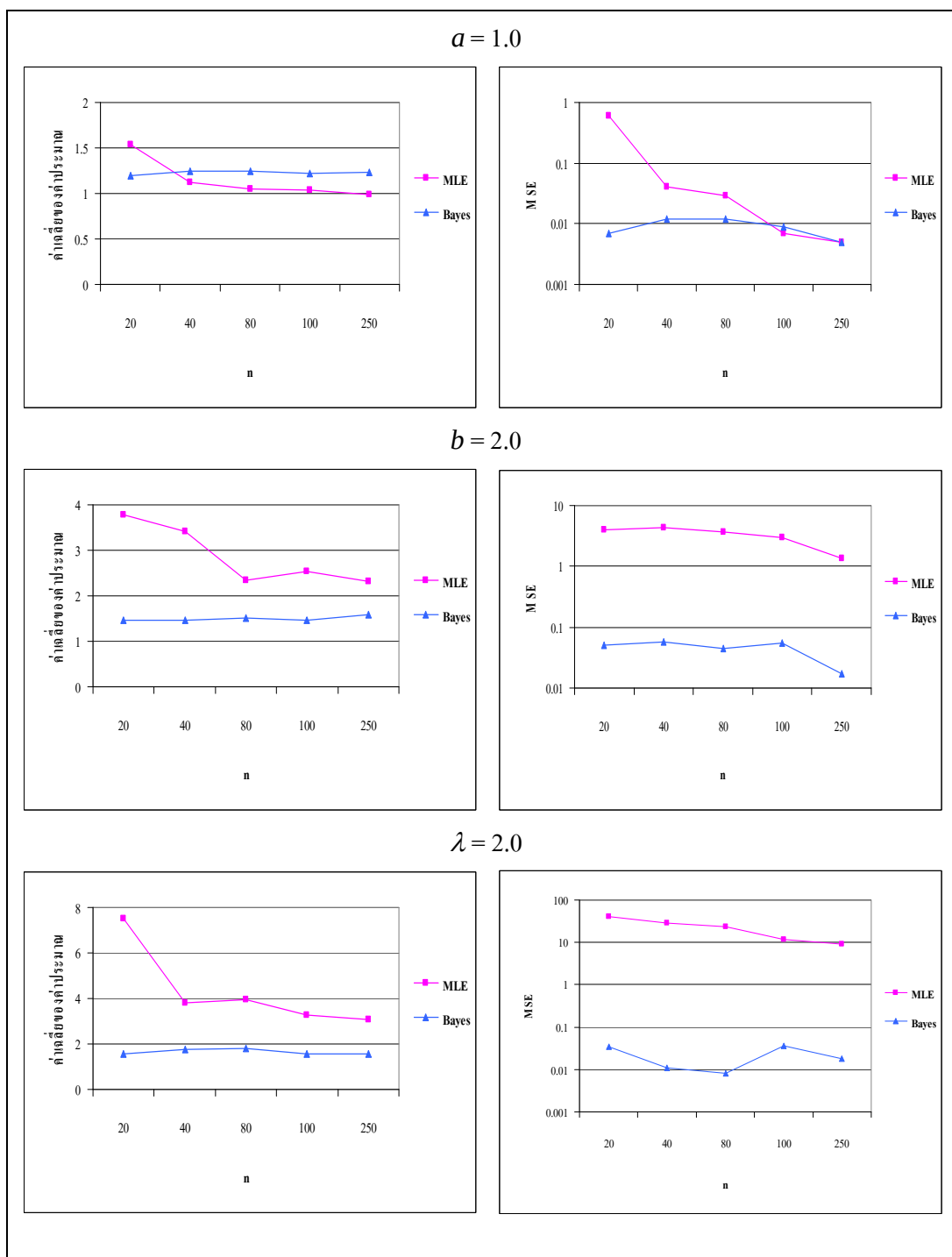
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 80 และ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 21 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ 1.0, $b = 2.0$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	1.532	1.191*	0.608	0.007
	b	3.775	1.466*	4.011	0.051
	λ	7.500	1.580*	39.814	0.035
40	a	1.117*	1.244	0.040	0.012
	b	3.413	1.462*	4.271	0.058
	λ	3.816	1.765*	28.426	0.011
80	a	1.052*	1.244	0.029	0.012
	b	2.346	1.523*	3.752	0.045
	λ	3.958	1.796*	24.092	0.008
100	a	1.034*	1.218	0.007	0.009
	b	2.546	1.472*	2.940	0.056
	λ	3.266	1.570*	11.895	0.037
250	a	0.988*	1.229	0.005	0.005
	b	2.323*	1.582	1.370	0.017
	λ	3.058	1.574*	9.015	0.018

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 34 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 21 และภาพที่ 34 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 1.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี MLE จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี Bayes ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20 วิธี Bayes จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี MLE เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

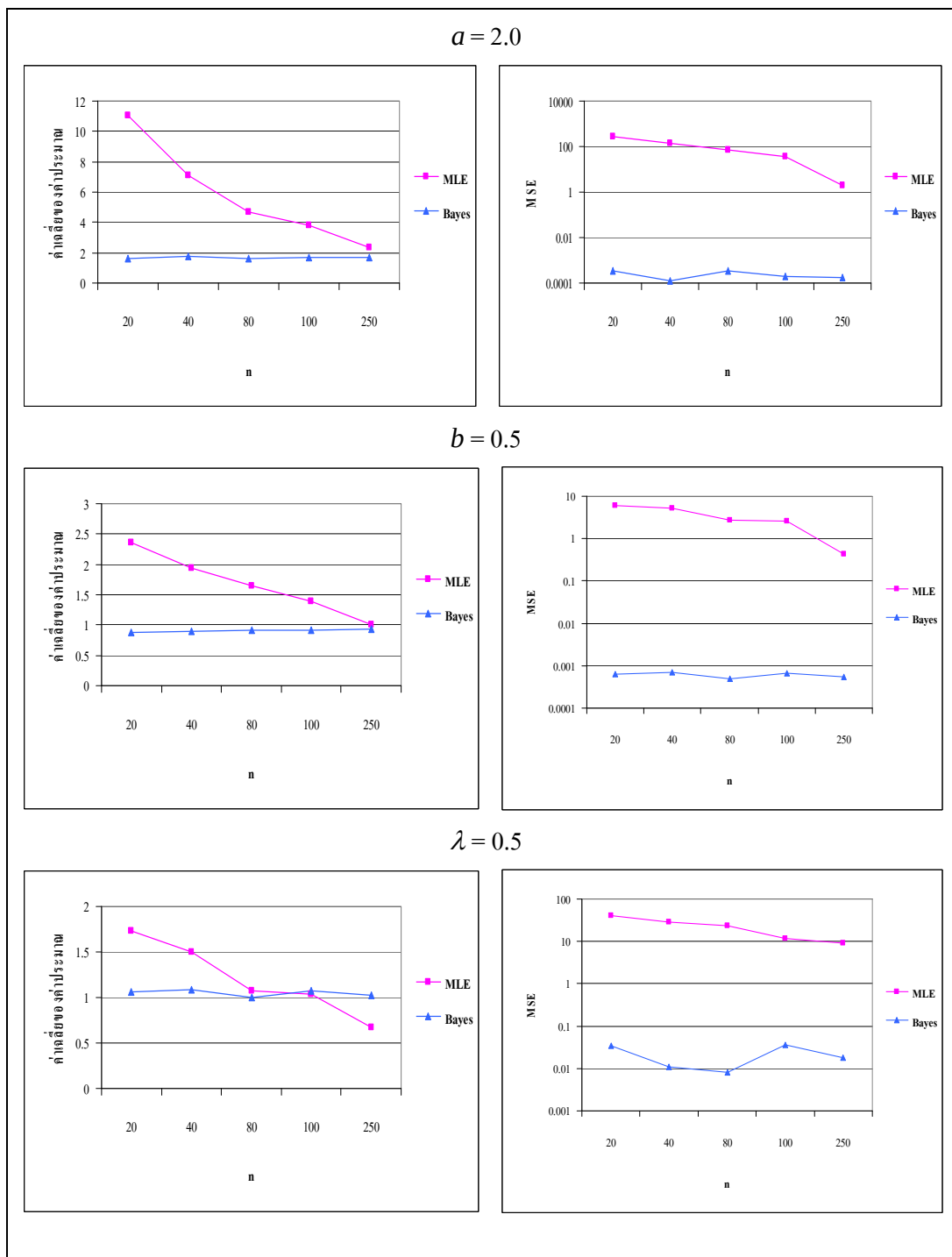
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 22 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 0.5$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	11.074	1.584*	285.440	3.459×10^{-04}
	b	2.359	0.887*	12.510	2.992×10^{-04}
	λ	1.726	1.062*	6.223	6.319×10^{-04}
40	a	7.091	1.750*	145.852	1.248×10^{-04}
	b	1.933	0.900*	8.085	3.198×10^{-04}
	λ	1.506	1.087*	5.226	6.892×10^{-04}
80	a	4.674	1.588*	72.436	3.395×10^{-04}
	b	1.650	0.912*	5.354	3.401×10^{-04}
	λ	1.078	1.001*	2.711	5.014×10^{-04}
100	a	3.792	1.682*	35.992	2.020×10^{-04}
	b	1.392	0.911*	4.262	3.383×10^{-04}
	λ	1.038*	1.078	2.604	6.674×10^{-04}
250	a	2.354	1.701*	1.976	1.785×10^{-04}
	b	1.013	0.929*	1.810	3.685×10^{-04}
	λ	0.669*	1.023	0.438	5.481×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 35 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 22 และภาพที่ 35 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

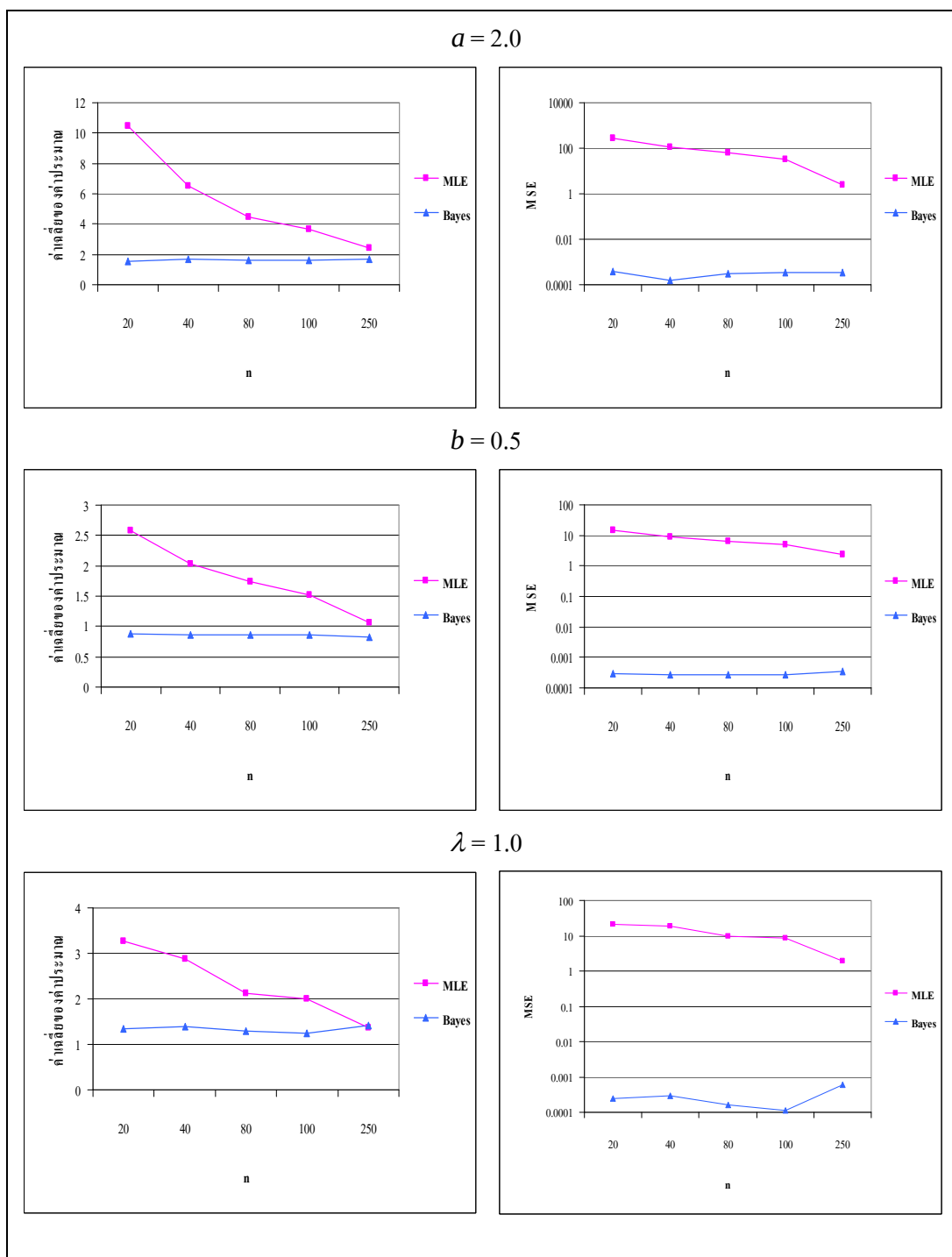
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 100 และ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 23 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 0.5$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	10.460	1.559*	261.704	3.894×10^{-04}
	b	2.574	0.882*	14.649	2.921×10^{-04}
	λ	3.269	1.351*	21.394	2.459×10^{-04}
40	a	6.543	1.713*	112.837	1.650×10^{-04}
	b	2.036	0.863*	9.071	2.634×10^{-04}
	λ	2.871	1.385*	18.434	2.970×10^{-04}
80	a	4.450	1.608*	62.281	3.070×10^{-04}
	b	1.740	0.861*	6.240	2.610×10^{-04}
	λ	2.120	1.285*	9.582	1.630×10^{-04}
100	a	3.635	1.582*	32.511	3.489×10^{-04}
	b	1.512	0.864*	5.205	2.647×10^{-04}
	λ	1.994	1.240*	8.472	1.156×10^{-04}
250	a	2.383	1.675*	2.340	3.515×10^{-04}
	b	1.067	0.828*	2.347	3.587×10^{-04}
	λ	1.366*	1.423	1.893	5.968×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 36 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 23 และภาพที่ 36 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

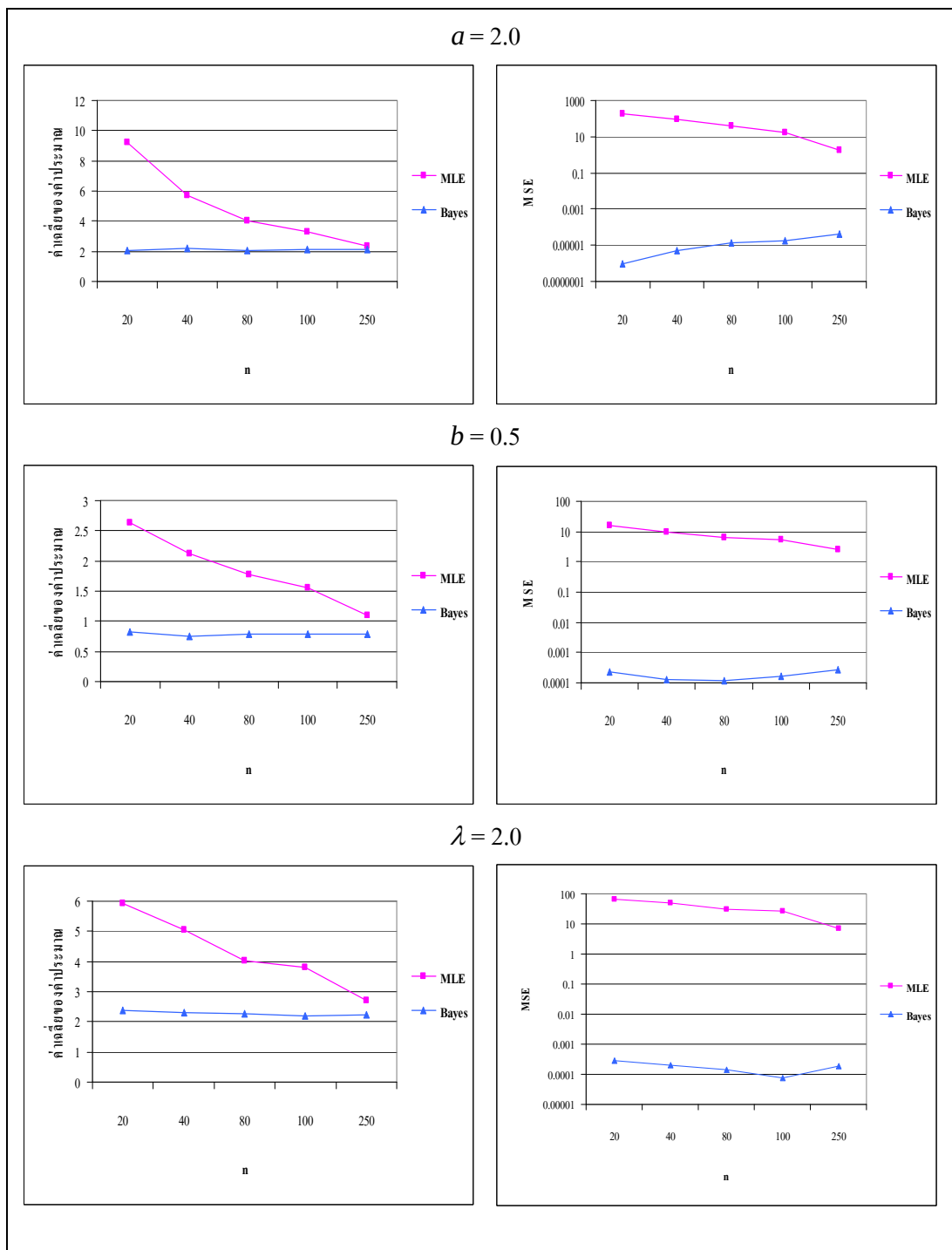
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 24 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 0.5$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	9.211	2.021*	194.320	8.873×10^{-07}
	b	2.638	0.832*	15.519	2.210×10^{-04}
	λ	5.9115	2.384*	64.002	2.942×10^{-04}
40	a	5.721	2.163*	94.161	5.297×10^{-05}
	b	2.117	0.749*	9.807	1.236×10^{-04}
	λ	5.065	2.321*	48.559	2.061×10^{-04}
80	a	3.996	2.080*	41.233	1.283×10^{-05}
	b	1.779	0.784*	6.451	1.136×10^{-04}
	λ	4.035	2.266*	30.995	1.411×10^{-04}
100	a	3.286	2.096*	16.769	1.832×10^{-05}
	b	1.559	0.790*	5.584	1.679×10^{-04}
	λ	3.796	2.194*	27.015	7.540×10^{-05}
250	a	2.361	2.115*	1.847	4.418×10^{-05}
	b	1.104	0.783*	2.537	2.674×10^{-04}
	λ	2.709	2.234*	7.122	1.828×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 37 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 24 และภาพที่ 37 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 0.5$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

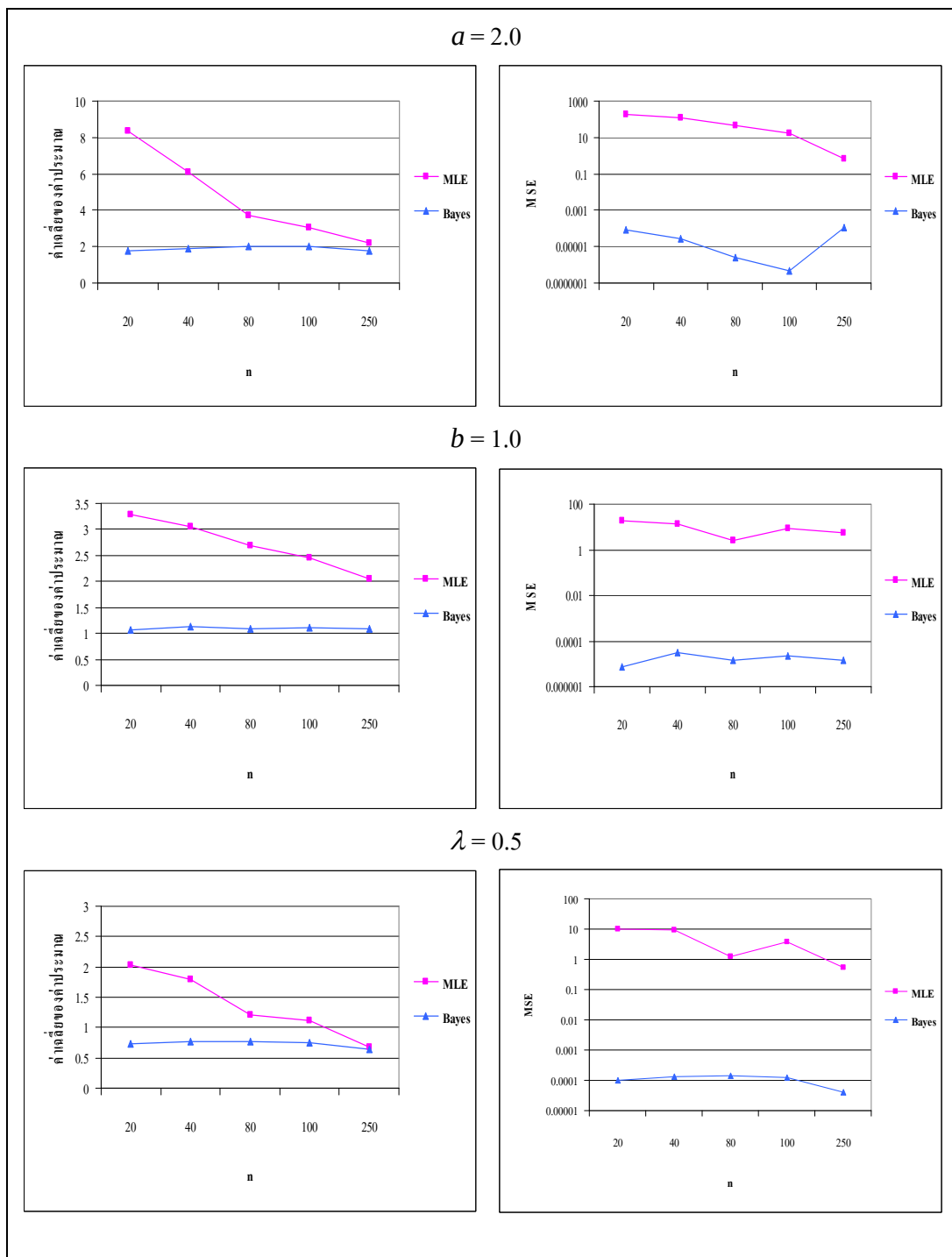
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมากโดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมากโดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 25 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 1.0$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	8.349	1.793*	174.915	8.556×10^{-05}
	b	3.285	1.060*	18.115	7.178×10^{-06}
	λ	2.039	0.727*	10.248	1.029×10^{-04}
40	a	6.094	1.887*	123.665	2.563×10^{-05}
	b	3.057	1.126*	13.910	3.156×10^{-05}
	λ	1.796	0.760*	9.555	1.347×10^{-04}
80	a	3.749	2.035*	45.214	2.507×10^{-06}
	b	2.686	1.083*	2.686	1.373×10^{-05}
	λ	1.207	0.763*	1.206	1.382×10^{-04}
100	a	3.030	2.015*	17.441	4.759×10^{-07}
	b	2.458	1.105*	8.939	2.214×10^{-05}
	λ	1.113	0.751*	3.859	1.262×10^{-04}
250	a	2.223*	1.771	0.664	1.050×10^{-04}
	b	2.055	1.087*	5.618	1.507×10^{-05}
	λ	0.682	0.640*	0.522	3.921×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 38 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 25 และภาพที่ 38 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

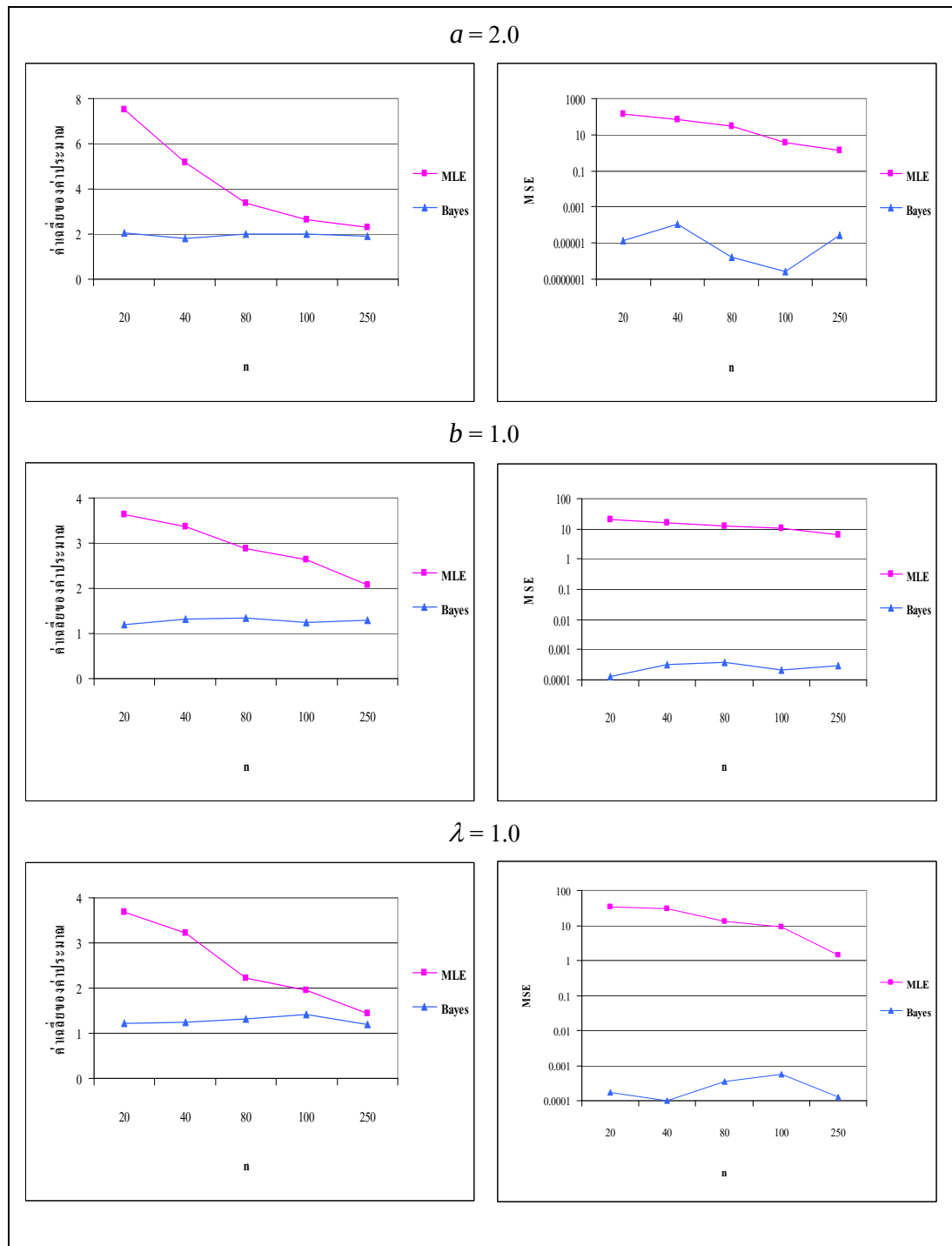
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธี จะให้ค่า MSE ที่มีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมากโดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 26 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 1.0$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	7.503	2.062*	143.252	1.293×10^{-05}
	b	3.628	1.199*	21.337	1.321×10^{-04}
	λ	3.674	1.226*	34.482	1.699×10^{-04}
40	a	5.188	1.811*	71.734	1.191×10^{-04}
	b	3.357	1.312*	16.605	3.235×10^{-04}
	λ	3.220	1.245*	29.474	1.010×10^{-04}
80	a	3.380	1.977*	29.379	1.666×10^{-06}
	b	2.890	1.334*	12.229	3.727×10^{-04}
	λ	2.224	1.321*	13.317	3.431×10^{-04}
100	a	2.634	2.009*	3.834	2.755×10^{-07}
	b	2.630	1.249*	10.665	2.060×10^{-04}
	λ	1.959	1.406*	8.970	5.507×10^{-04}
250	a	2.274	1.909*	1.323	2.762×10^{-05}
	b	2.082	1.300*	6.305	3.000×10^{-04}
	λ	1.432	1.194*	1.432	1.259×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 39 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 26 และภาพที่ 39 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

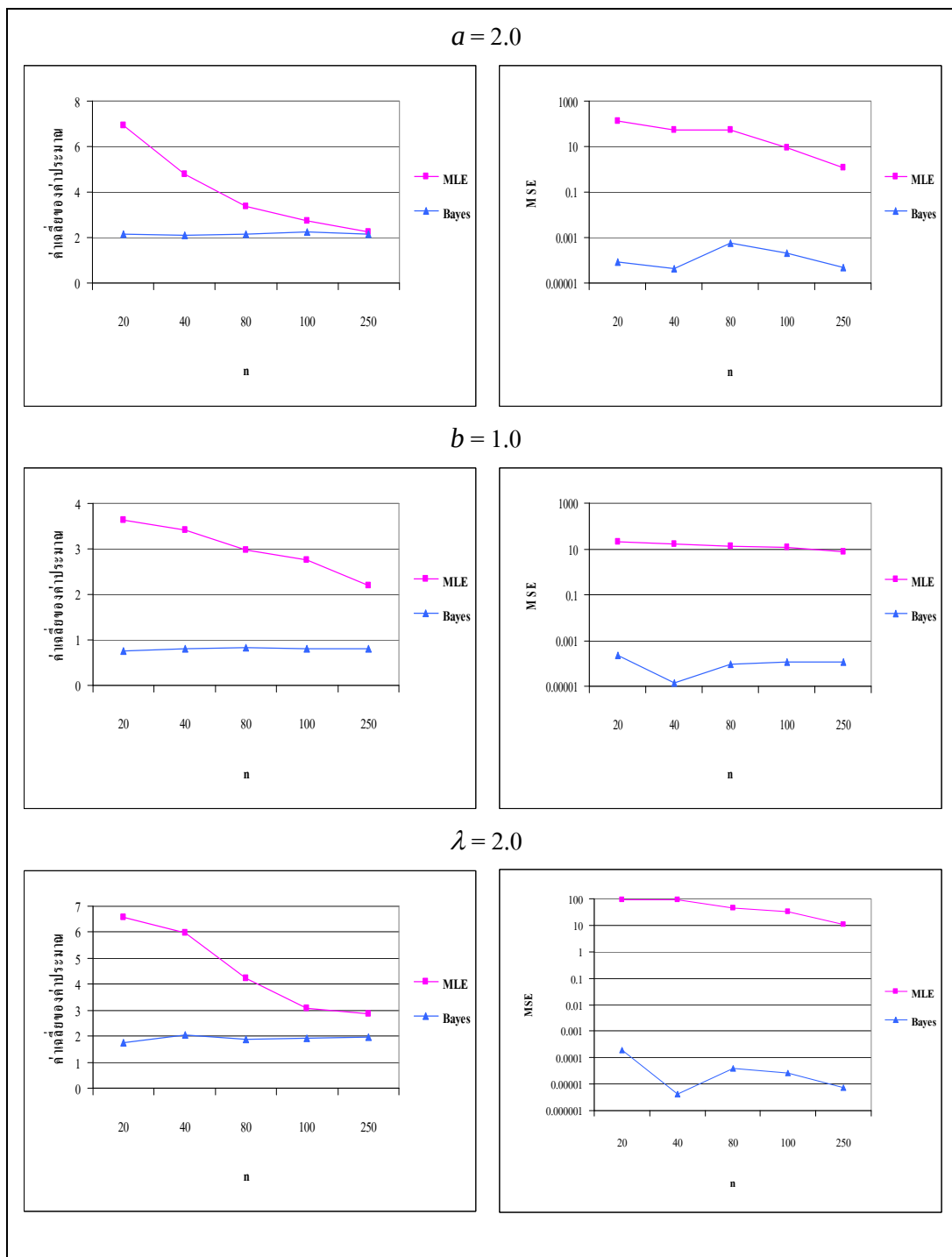
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมากโดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 27 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 1.0$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	6.921	2.159*	130.066	8.381×10^{-05}
	b	3.640	0.744*	21.724	2.182×10^{-04}
	λ	6.558	1.758*	94.297	1.947×10^{-04}
40	a	4.768	2.113*	54.851	4.271×10^{-05}
	b	3.403	0.801*	16.950	1.325×10^{-05}
	λ	5.996	2.036*	92.835	4.350×10^{-06}
80	a	3.366	2.133*	56.733	5.868×10^{-05}
	b	2.974	0.838*	13.106	8.746×10^{-05}
	λ	4.242	1.893*	44.177	3.794×10^{-05}
100	a	2.719	2.251*	9.423	2.113×10^{-04}
	b	2.764	0.815*	11.617	1.144×10^{-05}
	λ	3.083	1.912*	31.811	2.560×10^{-05}
250	a	2.266	2.122*	1.144	4.980×10^{-05}
	b	2.200	0.814*	7.267	1.156×10^{-04}
	λ	2.840	1.953*	10.313	7.450×10^{-06}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 40 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 27 และภาพที่ 40 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 1.0$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 100 และ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

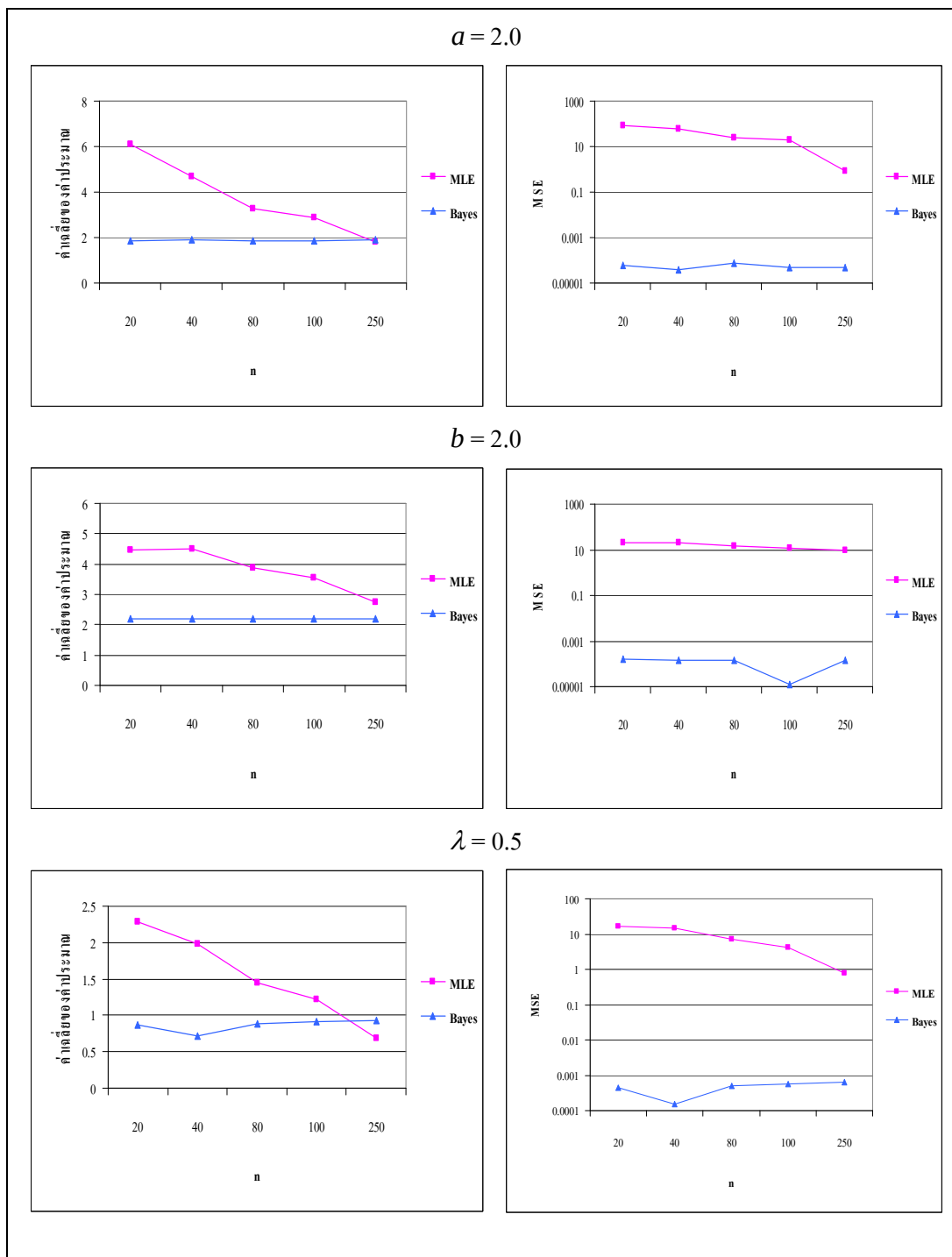
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมากโดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 28 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 0.5$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	6.105	1.865*	86.980	6.070×10^{-05}
	b	4.453	2.213*	20.977	1.519×10^{-04}
	λ	2.280	0.867*	16.214	4.479×10^{-04}
40	a	4.669	1.895*	62.345	3.675×10^{-05}
	b	4.484	2.208*	19.737	1.447×10^{-04}
	λ	1.984	0.714*	15.052	1.526×10^{-04}
80	a	3.256	1.852*	24.330	7.284×10^{-05}
	b	3.892	2.210*	14.663	1.470×10^{-04}
	λ	1.451	0.884*	7.343	4.903×10^{-04}
100	a	2.884	1.877*	18.635	5.077×10^{-05}
	b	3.537	2.194*	12.124	1.255×10^{-05}
	λ	1.221	0.911*	4.232	5.627×10^{-04}
250	a	1.827	1.883*	0.828	4.556×10^{-05}
	b	2.761	2.203*	9.116	1.370×10^{-04}
	λ	0.689*	0.935	0.773	6.297×10^{-04}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 41 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 0.5$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 28 และภาพที่ 41 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 0.5$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 100 และ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

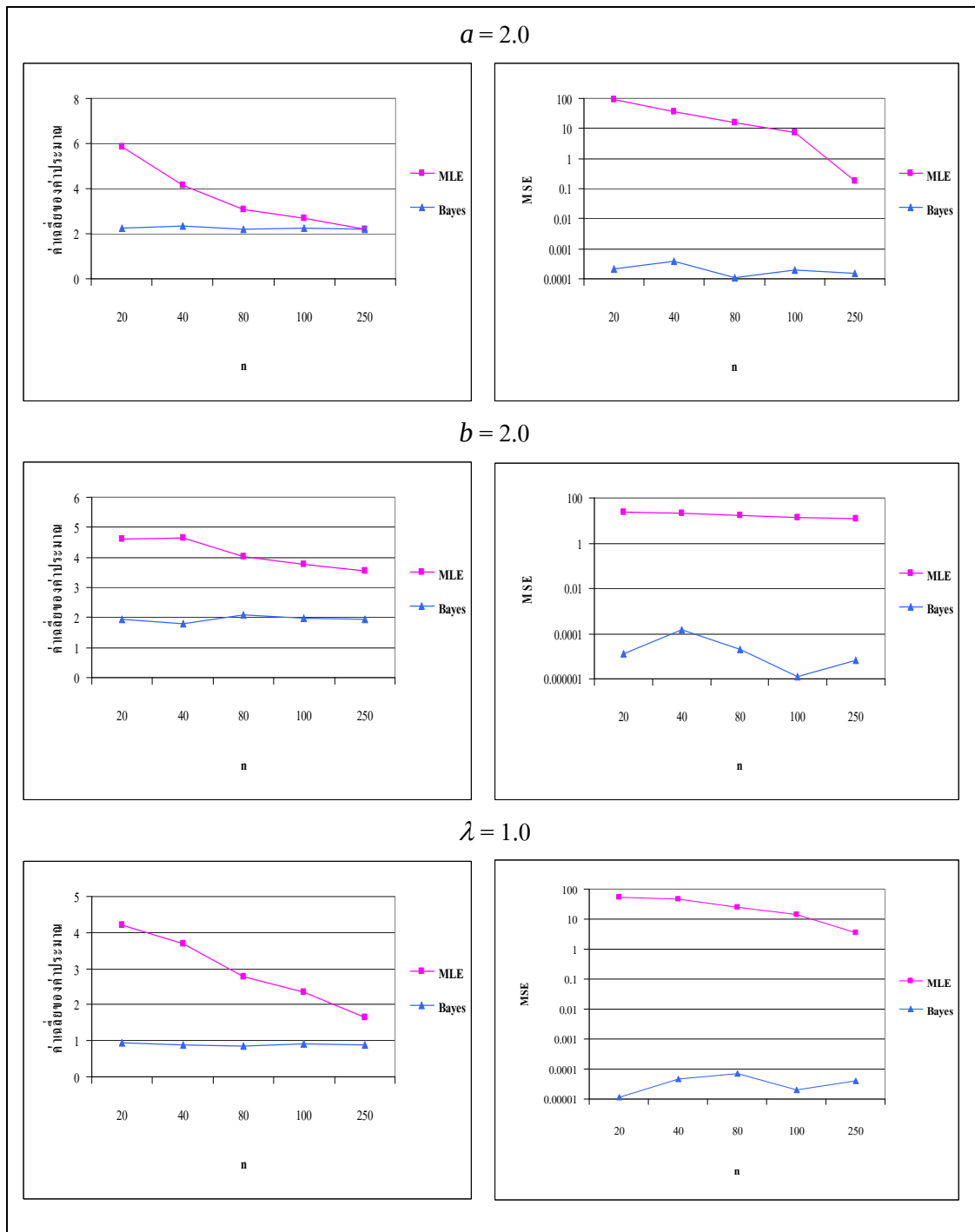
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 29 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 1.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	5.857	2.256*	95.382	2.183×10^{-04}
	b	4.618	1.937*	22.741	1.316×10^{-05}
	λ	4.199	0.941*	53.827	1.162×10^{-05}
40	a	4.158	2.341*	37.232	3.882×10^{-04}
	b	4.635	1.785*	20.922	1.54×10^{-04}
	λ	3.684	0.882*	47.132	4.653×10^{-05}
80	a	3.067	2.179*	15.579	1.071×10^{-04}
	b	4.041	2.077*	16.109	1.977×10^{-05}
	λ	2.778	0.854*	25.153	7.082×10^{-05}
100	a	2.673	2.246*	7.505	2.016×10^{-04}
	b	3.784	1.981*	13.898	1.254×10^{-06}
	λ	2.334	0.923*	13.733	1.975×10^{-05}
250	a	2.187*	2.216	0.180	1.560×10^{-04}
	b	3.564	1.955*	12.364	6.627×10^{-06}
	λ	1.641	0.891*	3.442	3.987×10^{-05}

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 42 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 1.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 29 และภาพที่ 42 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 1.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

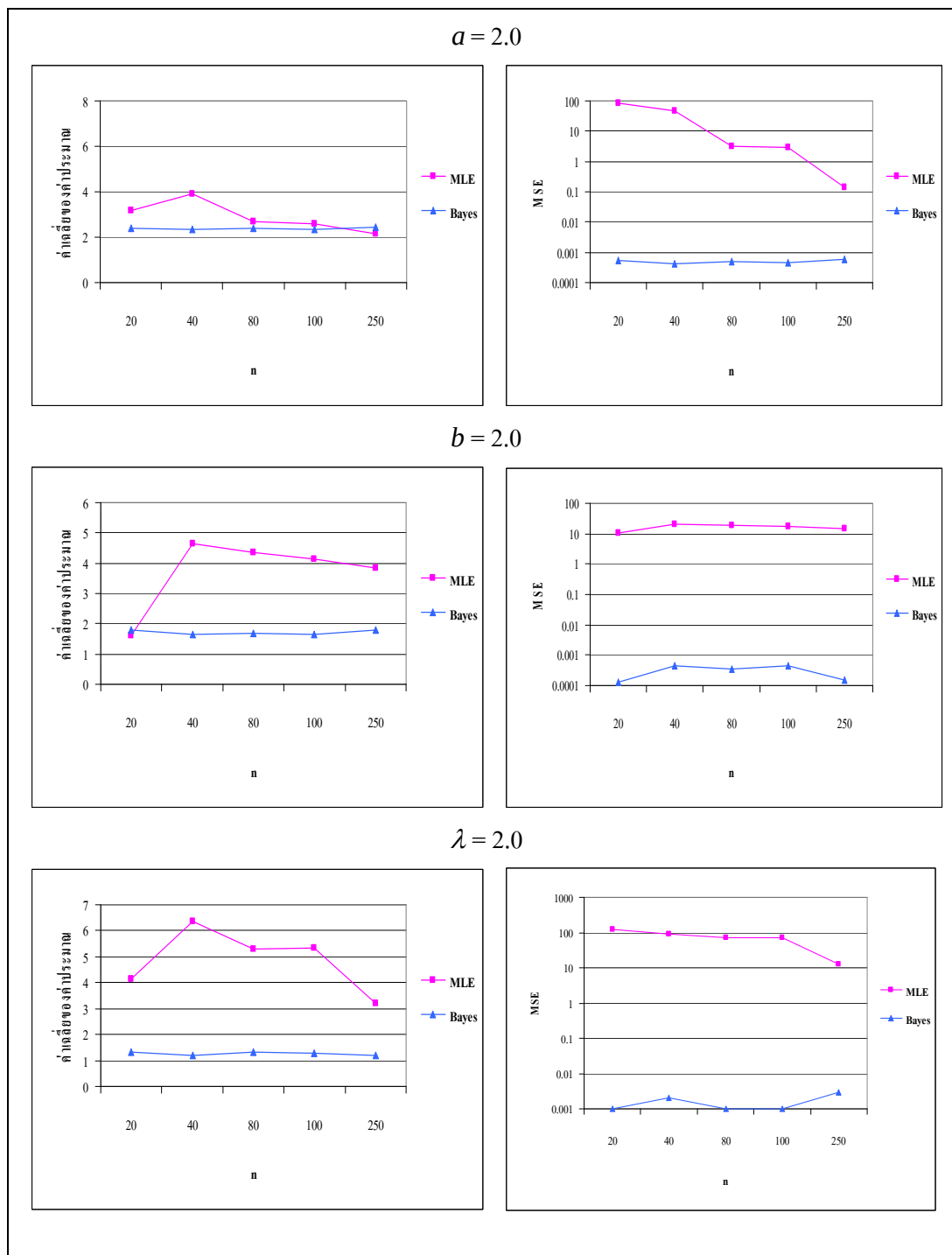
การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธีให้ค่า MSE มีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก โดยที่วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากขึ้นเมื่อมีขนาดตัวอย่างที่ 250 เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

ตารางที่ 30 ค่าเฉลี่ยและค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) ของค่าประมาณ
พารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) และวิธีของเบย์ (Bayes)
สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ $a = 2.0$, $b = 2.0$
และ $\lambda = 2.0$

ขนาดตัวอย่าง (n)	พารามิเตอร์ ($parameter$)	ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ		MSE	
		MLE	Bayes	MLE	Bayes
20	a	3.191	2.395*	86.414	5.207×10^{-04}
	b	1.604	1.801*	10.924	1.332×10^{-04}
	λ	4.130	1.328*	124.484	0.001
40	a	3.896	2.348*	45.898	4.031×10^{-04}
	b	4.633	1.644*	20.557	4.323×10^{-04}
	λ	6.379	1.216*	91.223	0.002
80	a	2.676	2.386*	3.136	4.872×10^{-04}
	b	4.352	1.682*	18.386	3.376×10^{-04}
	λ	5.277	1.319*	73.755	0.001
100	a	2.578	2.365*	2.942	4.450×10^{-04}
	b	4.143	1.630*	17.306	4.572×10^{-04}
	λ	5.352	1.287*	71.885	0.001
250	a	2.152*	2.417	0.140	5.816×10^{-04}
	b	3.849	1.790*	14.195	1.467×10^{-04}
	λ	3.194	1.204*	12.993	0.003

หมายเหตุ * ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ให้ค่าใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากที่สุด



ภาพที่ 43 กราฟเปรียบเทียบค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และ MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ ตามลำดับ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 2.0$ และ n ค่าต่างๆ

จากตารางที่ 30 และภาพที่ 43 เป็นการแสดงค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ และค่า MSE ของวิธี MLE และ Bayes ในการประมาณค่าพารามิเตอร์ a , b , λ เมื่อกำหนด $a = 2.0$, $b = 2.0$, $\lambda = 2.0$ พบว่า

การประมาณค่าพารามิเตอร์ a ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก ยกเว้นเมื่อขนาดตัวอย่างเท่ากับ 250 วิธี MLE จะให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธี Bayes เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

การประมาณค่าพารามิเตอร์ b ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE โดยที่ทั้งสองวิธีให้ค่า MSE มีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ λ ด้วยวิธี Bayes จะให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดในทุกขนาดตัวอย่างมากกว่าวิธี MLE ค่อนข้างมาก เมื่อพิจารณาถึงค่า MSE จะพบว่าวิธี Bayes ให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธี MLE และมีค่าใกล้เคียงกันในทุกขนาดตัวอย่าง ส่วนวิธี MLE จะให้ค่า MSE ที่มีแนวโน้มลดลงเมื่อขนาดตัวอย่างเพิ่มขึ้น

3. การประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

ในการวิจัยครั้งนี้ได้นำการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลมาใช้กับข้อมูลจริงเพื่อแสดงการประยุกต์ใช้ทางด้านความเชื่อถือได้

ข้อมูลจริง

ในปี ค.ศ. 1997 Chhikara and Folks เก็บรวบรวมข้อมูลระยะห่างของเวลาในการแก้ไขแต่ละครั้ง (หน่วย: ชั่วโมง) ของเครื่องรับสัญญาณการสื่อสารทางอากาศที่เกิดข้อผิดพลาดขึ้นจำนวนทั้งหมด 46 ครั้ง (Lawless, 2003) ซึ่งข้อมูลมีดังนี้คือ

0.2	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7	0.7	0.8
0.8	1.0	1.0	1.0	1.0	1.1	1.3	1.5	1.5	1.5	1.5	2.0
2.0	2.2	2.5	2.7	3.0	3.0	3.3	3.3	4.0	4.0	4.5	4.7
5.0	5.4	5.4	7.0	7.5	8.8	9.0	10.3	22.0	24.5		

จากข้อมูลจริงทำการศึกษาตามลักษณะของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลได้ดังนี้

3.1 การทดสอบภาวะสารูปสนธิ

จากข้อมูลทำการทดสอบการแจกแจงของข้อมูลโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคโลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟได้ผลดังนี้

ตารางที่ 31 ค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน และค่าสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟสำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์ทั้ง 2 วิธี

ค่าเฉลี่ย	ค่าความแปรปรวน	สถิติทดสอบ โคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟ	
		MLE	Bayes
3.607	24.445	0.160	0.182

จากตารางพบว่า

ระยะห่างของเวลาในการแก้ไขแต่ละครั้งของเครื่องรับสัญญาณการสื่อสารทางอากาศมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3.607 ชั่วโมง ค่าความแปรปรวน 24.445 ชั่วโมง² และสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟที่ได้จากการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดมีค่าเท่ากับ 0.160 สำหรับวิธีของเบส์มีค่าเท่ากับ 0.182 ซึ่งค่าสถิติทดสอบที่ได้จากการประมาณค่าทั้งสองวิธีมีค่าน้อยกว่าค่าวิกฤตในตารางสถิติโคลโมโกรอฟ-สมิร์นอฟซึ่งมีค่าเท่ากับ 0.201 แสดงว่า ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ระดับนัยสำคัญ 0.05

3.2 ประมาณค่าพารามิเตอร์

จากข้อมูลจริงนำมาประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ได้ผลดังนี้

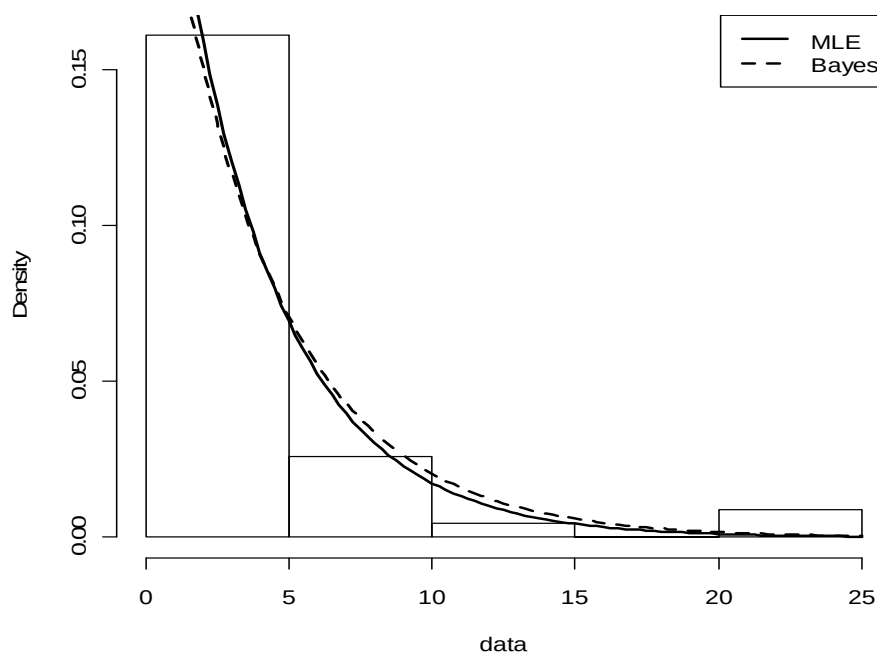
ตารางที่ 32 ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุด (MLE) สำหรับข้อมูลจริง

พารามิเตอร์	ค่าประมาณพารามิเตอร์
a	0.999
b	0.556
λ	0.498

ตารางที่ 33 ค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากวิธีของเบย์ (Bayes) สำหรับข้อมูลจริง

พารามิเตอร์	ค่าประมาณพารามิเตอร์	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน	ช่วงความเชื่อมั่น 95 %
a	0.976	0.703	(0.150 , 2.819)
b	0.493	0.508	(0.014 , 1.862)
λ	0.503	0.569	(0.048 , 2.073)

ดังนั้นจากค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ได้จากทั้ง 2 วิธีนำมาวาดกราฟการแจกแจงตามลักษณะของข้อมูลได้ดังนี้



ภาพที่ 44 ฮิสโตแกรมแสดงลักษณะของข้อมูลจริงเปรียบเทียบกับโค้งการแจกแจงของเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ที่ได้จากการประมาณค่าด้วยวิธี MLE และวิธี Bayes

3.3 การวิเคราะห์ทางความเชื่อถือได้โดยหาฟังก์ชันความเชื่อถือได้ และฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

3.3.1 ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

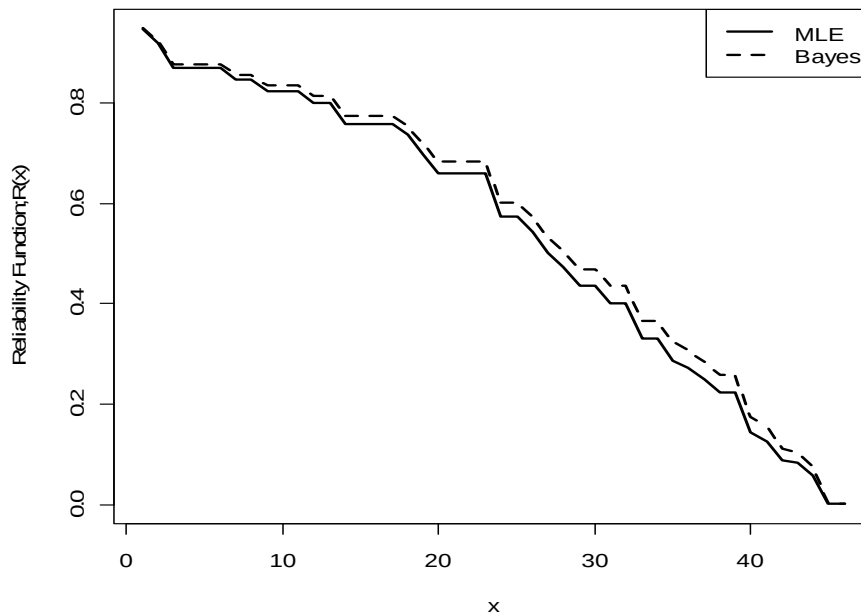
ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเป็นดังนี้

$$R(x) = \frac{B_{\exp(-0.498x)}(0.556, 0.999)}{B(0.999, 0.556)}$$

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์เป็นดังนี้

$$R(x) = \frac{B_{1-\exp(-0.503x)}(0.493, 0.976)}{B(0.976, 0.493)}$$

จากฟังก์ชันความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถวาดโค้งความเชื่อถือได้สำหรับข้อมูลจริงได้ ซึ่งจากกราฟจะพบว่าโค้งฟังก์ชันความเชื่อถือได้ที่ค่าประมาณพารามิเตอร์ได้จากวิธีการประมาณค่าด้วยวิธี MLE และวิธี Bayes ให้ผลใกล้เคียงกัน โดยที่ลักษณะกราฟในช่วงแรกจะให้ค่าความเชื่อถือได้อยู่ในระดับสูง และระดับความเชื่อถือได้จะมีค่าลดลงเมื่อระยะเวลาห่างในการแก้ไขแต่ละครั้งมีค่าสูงขึ้นดังภาพที่ 45



ภาพที่ 45 กราฟแสดงโค้งความเชื่อถือได้ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล สำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธี MLE และวิธี Bayes

3.3.2 ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

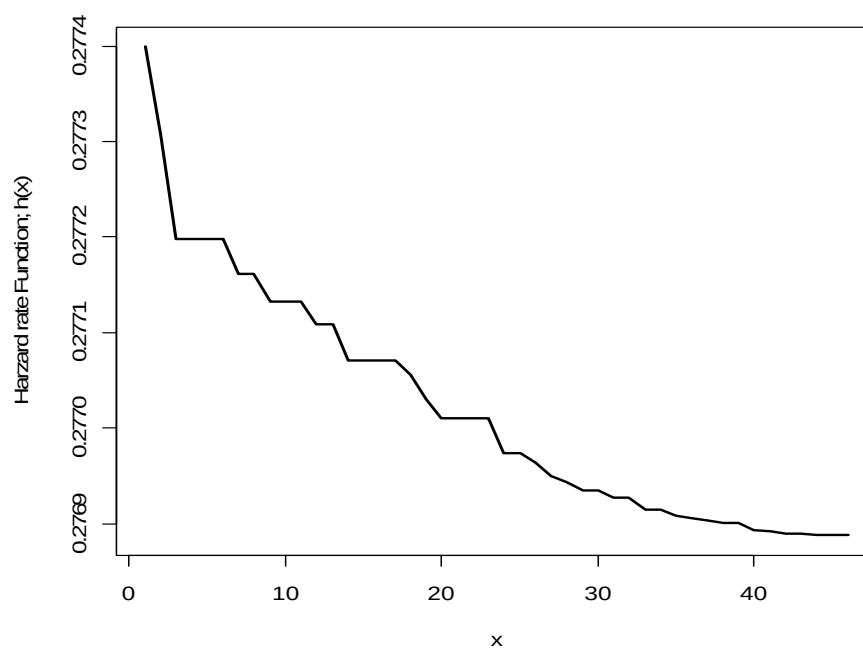
ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเป็นดังนี้

$$h(x) = \frac{0.498 \exp(-0.556 \times 0.498x) (1 - \exp(-0.498x))^{0.999-1}}{B_{\exp(-0.498x)}(0.556, 0.999)}$$

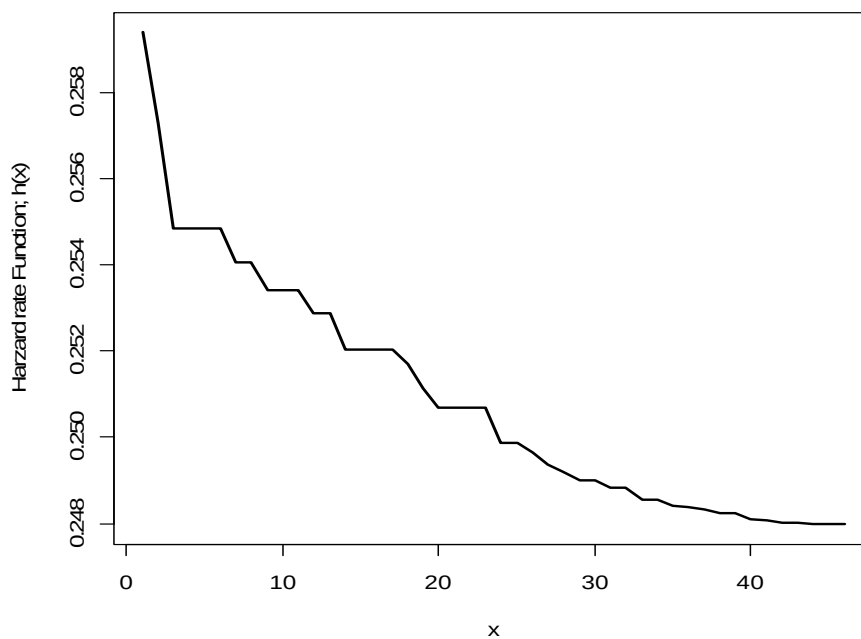
ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงที่ได้จากค่าประมาณพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเป็นดังนี้

$$h(x) = \frac{0.503 \exp(-0.493 \times 0.503x) (1 - \exp(-0.503x))^{0.976-1}}{B_{\exp(-0.503x)}(0.493, 0.976)}$$

จากฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถหาโค้งอัตราความเสี่ยงสำหรับข้อมูลจริงได้ ซึ่งจากกราฟจะพบว่าโค้งอัตราความเสี่ยงที่ค่าประมาณพารามิเตอร์ได้จากวิธีการประมาณค่าด้วยวิธี MLE และวิธี Bayes มีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดหรือระยะอัตราความเสี่ยงลดลงดังภาพที่ 46 และภาพที่ 47



ภาพที่ 46 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูลจริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธี MLE



ภาพที่ 47 กราฟแสดงโค้งอัตราความเสี่ยงของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสำหรับข้อมูล
จริงด้วยค่าประมาณพารามิเตอร์จากวิธี Bayes

วิจารณ์

จากผลการศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ในแต่ละคุณสมบัติที่ได้ทำการศึกษาผลปรากฏว่าลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น และลักษณะรูปร่างฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงจะขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ α เพียงตัวเดียวโดยจะไม่ขึ้นกับพารามิเตอร์อื่นๆ สำหรับฟังก์ชันต่างๆ ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่ประกอบไปด้วย ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็น ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด ฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ ฟังก์ชันความเชื่อถือได้ ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง ผลเฉลยรูปแบบปิดของค่าเฉลี่ย ค่าความแปรปรวน ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโค้ง ซึ่งเป็นคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นที่ได้ทำการศึกษาโดยผลที่ได้จะสอดคล้องกับผลงานวิจัยของ Nadarajah and Kotz (2006) สำหรับการประมาณค่าพารามิเตอร์พบว่าวิธีของเบส์มีประสิทธิภาพดีกว่าวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเมื่อพิจารณาในแง่ของค่า MSE ที่วิธีของเบส์ให้ค่าที่ต่ำกว่าเนื่องจากวิธีการของเบส์มีการนำการแจกแจงก่อนเข้ามาพิจารณาในการหาค่าประมาณพารามิเตอร์ โดยที่วิธีความควรจะเป็นสูงสุดจะทำการพิจารณาจากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเท่านั้นจึงส่งผลให้โดยส่วนใหญ่วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์ให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์ที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่า และให้ค่า MSE ที่ต่ำกว่าวิธีของความควรจะเป็นสูงสุด โดยที่ขนาดตัวอย่างมีผลต่อค่า MSE ของวิธีความควรจะเป็นสูงสุด แต่ไม่มีผลต่อวิธีของเบส์ในการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

สรุปและข้อเสนอแนะ

สรุป

ในการวิจัยครั้งนี้เป็นการศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น ศึกษาและเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ อีกทั้งได้ศึกษาการประยุกต์ใช้ทางด้านการวิเคราะห์ความเชื่อถือได้ สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล จากผลการศึกษาสามารถสรุปได้ดังต่อไปนี้

คุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็น

ถ้าตัวแปรสุ่ม X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a, b และ λ เมื่อ $x \geq 0, a > 0, b > 0, \lambda > 0$ จะพบว่า

$$f(x) = \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}$$

$$F(x) = \frac{B_{1-\exp(-\lambda x)}(a,b)}{B(a,b)}$$

$$\text{ค่าเฉลี่ย} = \frac{\psi(a+b) - \psi(b)}{\lambda}$$

$$\text{ความแปรปรวน} = \frac{\psi'(b) - \psi'(a+b)}{\lambda^2}$$

$$\text{ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้} = \frac{\psi''(a+b) - \psi''(b)}{\{\psi'(b) - \psi'(a+b)\}^{3/2}}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ความโค้ง =

$$\frac{3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 + \psi'''(b) - \psi'''(a+b)}{\{\psi'(b) - \psi'(a+b)\}^2}$$

$$\text{โดยที่ } \psi(x) = \frac{\partial \ln \Gamma(x)}{\partial x} \text{ หรือ } \psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$$

$$M_x(t) = \frac{B(b - \frac{t}{\lambda}, a)}{B(a, b)}$$

$$\Phi_x(t) = \frac{B(b - \frac{it}{\lambda}, a)}{B(a, b)}$$

$$R(x) = \frac{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}{B(b, a)}$$

$$h(x) = \frac{\lambda \exp(-b\lambda x) (1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}}{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}$$

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระกันของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเป็นดังนี้คือ

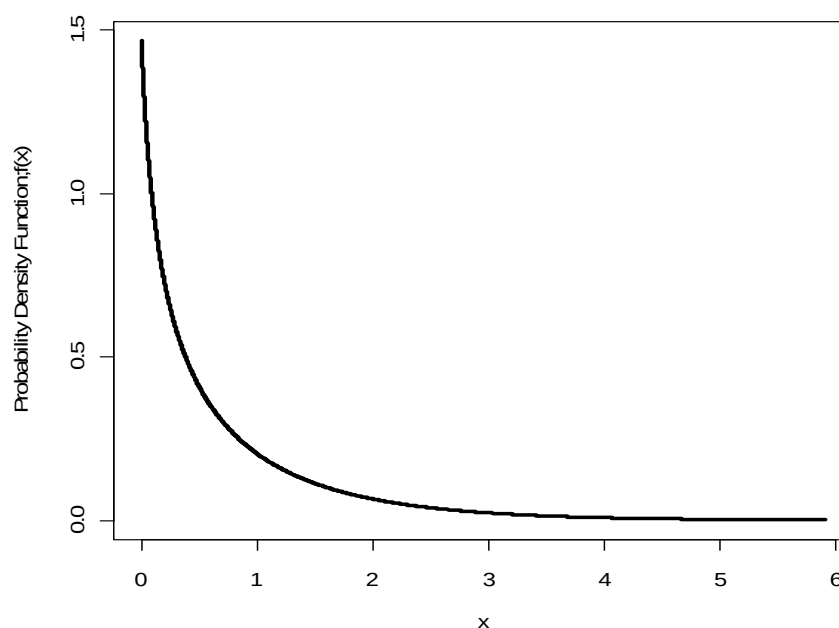
$$f_z(z) = \frac{\kappa}{\lambda_2} \Gamma(a_1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(a_1 - i)} \exp(-i\lambda_1 z) B_{1-\exp(-\lambda_2 z)}\left(a_2, b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i + b_1)\right)$$

$$\text{เมื่อ } \kappa = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \exp(-b_1 \lambda_1 z)}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)}$$

และ $a_1, a_2 > 0; b_1, b_2 > 0; \lambda_1, \lambda_2 > 0; z > 0$

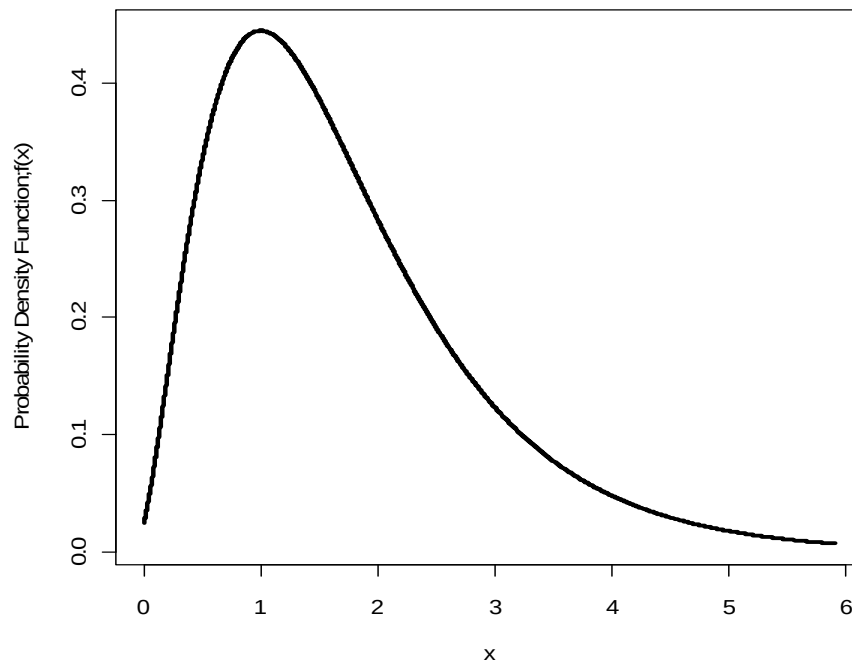
จากการศึกษาลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถสรุปลักษณะรูปร่างของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นได้ 2 ลักษณะดังนี้

กรณีที่ 1 พารามิเตอร์ $0 < a \leq 1$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดอย่างเดียว และมีค่าไม่เป็นลบดังภาพที่ 48



ภาพที่ 48 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $0 < a \leq 1$

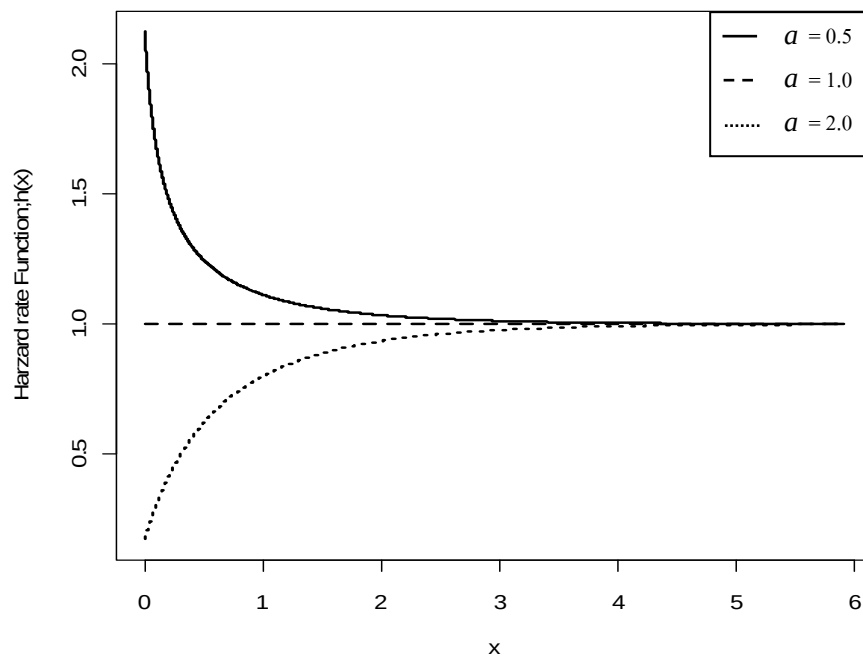
กรณีที่ 2 พารามิเตอร์ $a > 1$, $b > 0$ และ $\lambda > 0$ จะพบว่ากราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มและฟังก์ชันลด มีการแจกแจงในลักษณะที่เบ้ขวา และมีค่าไม่เป็นลบดังภาพที่ 49



ภาพที่ 49 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะของฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อ $a > 1$

จากการคำนวณค่าที่แท้จริงสำหรับพารามิเตอร์ a , b และ λ ตามพารามิเตอร์ที่กำหนดสามารถสรุปได้ว่า ค่าเฉลี่ยและค่าความแปรปรวนของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะมีค่าลดลงเมื่อค่าพารามิเตอร์ λ มีค่าสูงขึ้น ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้ และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง ของการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะไม่ขึ้นอยู่กับพารามิเตอร์ λ และสำหรับกรณีที่ค่าพารามิเตอร์ $a = 1.0$ เมื่อทุกๆ พารามิเตอร์ b และ λ เป็นค่าจำนวนจริงใดๆ แล้วค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้มีค่าเท่ากับ 2.000 และค่าสัมประสิทธิ์ความโด่งมีค่าเท่ากับ 9.000

จากการศึกษาฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงสามารถสรุปลักษณะรูปร่างได้เป็น 3 ลักษณะคือ กราฟจะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันลดเพียงอย่างเดียวเมื่อพารามิเตอร์ $0 < a < 1$ จะมีลักษณะเป็นฟังก์ชันเพิ่มเพียงอย่างเดียว เมื่อพารามิเตอร์ $a > 1$ และจะพบว่ากราฟจะเป็นฟังก์ชันที่มีลักษณะคงที่เมื่อพารามิเตอร์ $a = 1$ โดยที่กำหนดให้ค่า b และ λ เป็นค่าจำนวนจริงใดๆ ที่มากกว่า 0 สามารถสรุปได้ดังภาพที่ 50



ภาพที่ 50 กราฟแสดงรูปร่างลักษณะฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงของการแจกแจง

เบตาเอกซ์โพเนนเชียลเมื่อกำหนดให้ $a = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $b = 1.0, \lambda = 1.0$

จากการศึกษาการสร้างค่าตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถสร้างโดยกำหนดให้ B เป็นตัวแปรสุ่มที่มีจากการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a และ b ดังนั้นตัวกำเนิดตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่หาด้วยวิธีการแปลงผกผัน (inverse transform) คือ

$$X_i = -\left(\frac{1}{\lambda}\right) \ln(1-B) \quad \text{เมื่อ } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

การประมาณค่าพารามิเตอร์

การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์เมื่อกำหนดขนาดตัวอย่างเท่ากับ 20, 40, 80, 100 และ 250 โดยที่ค่าพารามิเตอร์ที่กำหนดในแต่ละขนาดตัวอย่างเป็น $a = 0.5, 1.0, 2.0$, $b = 0.5, 1.0, 2.0$ และ $\lambda = 0.5, 1.0, 2.0$

เกณฑ์ที่ใช้ในการเปรียบเทียบประสิทธิภาพของวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละสถานการณ์ คือ ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองซึ่งการศึกษาวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์เป็นการศึกษาเชิงทดลอง โดยการสร้างข้อมูลตัวแปรสุ่มตามเงื่อนไขที่กำหนด และวิเคราะห์ผลด้วยโปรแกรม R และ WinBUGS ซึ่งในแต่ละกรณีจะทำการทดลองซ้ำๆ กันเป็นจำนวน 500 ครั้ง สามารถสรุปผลการศึกษาดังนี้

จากผลการวิจัยพบว่าวิธีประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์ให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณี และวิธีของเบส์จะให้ค่า MSE ต่ำกว่าวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณีเช่นเดียวกัน ยกเว้นกรณีของการประมาณค่าพารามิเตอร์ a เมื่อกรณีค่าพารามิเตอร์ a ที่กำหนดมีค่าเท่ากับ 0.5 ในทุกๆกรณีจะพบว่าวิธีของความควรจะเป็นสูงสุดให้ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับพารามิเตอร์ที่กำหนดมากกว่าวิธีของเบส์ แต่วิธีของเบส์ยังคงให้ค่า MSE ที่ต่ำกว่าวิธีความควรจะเป็นสูงสุดเกือบทุกกรณี

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุดสำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลในทุกๆ พารามิเตอร์ที่กำหนด เมื่อมีขนาดตัวอย่างใหญ่ขึ้นค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าลดลง

การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์สำหรับตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียลในทุกๆ พารามิเตอร์ และในทุกขนาดตัวอย่างที่กำหนด ค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสองจะมีค่าใกล้เคียงกัน

ดังนั้นจะกล่าวได้ว่าวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ที่เหมาะสมกับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล คือ การประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์

การประยุกต์ทางด้านความเชื่อถือได้

จากการนำเอาข้อมูลจริงระยะห่างของเวลาในการแก้ไขแต่ละครั้งของเครื่องรับสัญญาณการสื่อสารทางอากาศ พบว่า ข้อมูลระยะห่างของเวลาในการแก้ไขเครื่องรับสัญญาณการสื่อสารทางอากาศมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ 3.607 ชั่วโมง ค่าความแปรปรวน 24.445 ชั่วโมง² และเมื่อทดสอบภาวะสารรูปสถิติโดยใช้ตัวสถิติทดสอบโคโลโมโกรอฟ-สมิรโนฟ พบว่า ข้อมูลชุดนี้มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล ที่ระดับนัยสำคัญ 0.05 เมื่อทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ ซึ่งทำให้ได้ฟังก์ชันความเชื่อถือได้เป็นดังนี้

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้จากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดคือ

$$R(x) = \frac{B_{\exp(-0.498x)}(0.556, 0.999)}{B(0.999, 0.556)}$$

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้จากวิธีของเบส์คือ

$$R(x) = \frac{B_{1-\exp(-0.503x)}(0.493, 0.976)}{B(0.976, 0.493)}$$

ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงจากวิธีความควรจะเป็นสูงสุดคือ

$$h(x) = \frac{0.498 \exp(-0.556 \times 0.498x) (1 - \exp(-0.498x))^{0.999-1}}{B_{\exp(-0.498x)}(0.556, 0.999)}$$

ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงจากวิธีของเบส์คือ

$$h(x) = \frac{0.503 \exp(-0.493 \times 0.503x) (1 - \exp(-0.503x))^{0.976-1}}{B_{\exp(-0.503x)}(0.493, 0.976)}$$

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะจากผลการศึกษา

จากการศึกษาพบว่าเมื่อข้อมูลที่น่ามาศึกษามีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียล วิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์ให้ประสิทธิภาพใกล้เคียงกันในตัวอย่างขนาดใหญ่ แต่วิธีการที่ให้ประสิทธิภาพดีที่สุด คือ วิธีของเบส์ ซึ่งในการประมาณค่าพารามิเตอร์ในแต่ละวิธีมีข้อดี และข้อเสียแตกต่างกันออกไป เช่น วิธีความควรจะเป็นสูงสุดเป็นวิธีการที่ไม่ยุ่งยากและสามารถหาได้โดยใช้โปรแกรมในการคำนวณหาออกมาได้ จึงเป็นวิธีที่ใช้ในการประมาณค่ากันอย่างแพร่หลาย ถึงแม้จะให้ค่าเฉลี่ยความคลาดเคลื่อนกำลังสองมากกว่า สำหรับวิธีของเบส์มีข้อเสีย คือ มีวิธีการค่อนข้างยุ่งยาก และใช้เวลาในการคำนวณค่อนข้างมากเมื่อเทียบกับวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และที่สำคัญจำเป็นที่จะต้องเลือกการแจกแจงก่อนให้เหมาะสมกับการแจกแจงที่ต้องการศึกษา แต่ทั้งนี้วิธีของเบส์เป็นวิธีการที่มีประสิทธิภาพดีกว่า และให้ความแม่นยำในการประมาณค่าพารามิเตอร์มากกว่าวิธีความควรจะเป็นสูงสุด

ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

1. ควรศึกษาคุณสมบัติเชิงความน่าจะเป็นอื่นๆ ที่เกี่ยวกับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล
2. เปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยวิธีความควรจะเป็นสูงสุด และวิธีของเบส์โดยใช้เกณฑ์พิจารณาอื่นๆ
3. ศึกษาการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์โดยใช้การแจกแจงก่อนเป็นการแจกแจงรูปแบบอื่น

เอกสารและสิ่งอ้างอิง

รัชฎ์ลักษณ์ คันธะวงศ์. 2547. การเปรียบเทียบวิธีการประมาณค่าพารามิเตอร์ของการแจกแจงแบบไวบูลล์และการแจกแจงแบบเอกซ์โพเนนเชียล 2 ตัวแปร. วิทยานิพนธ์ปริญญาโท, มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.

ประทุม สุวดี. 2545. ทฤษฎีการอนุมานเชิงสถิติ. ครั้งที่ 2. โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

อุไรวรรณ เจริญกิตติกุล, มณีรัตน์ ปัจฉิมะศิริ และ สมคิด พรชัยวัฒน์. 2547. การประมาณค่าพารามิเตอร์สำหรับการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลของข้อมูลสูญเสียที่ถูกตัดปลายทางขวา. วารสารวิทยาศาสตร์ประยุกต์ 3 (2): 28-33.

Barreto-Souza, W., A. Santos and G. Cordeiro. 2008. **The Beta Generalized Exponential Distribution.** arXiv:0809.1889[stat.me]. Available Source: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0809/0809.1889v1.pdf, December 27, 2008

Colosimo, B.M. and E.D. Castillo. 2007. **Bayesian Process Monitoring, Control and Optimization.** Taylor & Francis Group, USA.

Conover, W.J. 1980. **Practical Nonparametric Statistics.** 2nd ed. John Wiley & Sons, New York.

Eugene, N, C. Lee and F. Famoye. 2002. Beta - Normal distribution and its applications. **Communications in Statistics Theory and Methods** 31 (4): 497-512.

Hogg, R.V., J.W. McKean and A.T. Craig. 2005. **Introduction to Mathematical Statistics.** 6th ed. Pearson Prentice Hall, USA.

- Law, A.M. and W.D. Kelton. 2000. **Simulation Modeling and Analysis**. 3rd ed. McGraw-Hill Co., New York.
- Lawless, J. F. 2003. **Statistical models and methods for lifetime data**. Wiley series in probability and mathematical statistics, Hoboken, New Jersey.
- Maynard, J. 2004. **The Class of Beta-exponential Distributions: Properties, Estimation, and Applications**. JSM 2004 Online Program. Available Source:
<http://www.amstat.org/meetings/jsm/2004/onlineprogram/index.cfm>, December 9, 2008
- Meeker, W.Q. and L.A. Escobar. 1998. **Statistical Methods for Reliability for Reliability Data**. Wiley series in probability and mathematical statistics, USA.
- Nadarajah, S. and S. Kotz. 2004. The beta gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering** (4): 323-332.
- _____ and _____. 2006. the beta exponential distribution. **Reliability Engineering and System Safety** (91): 689-697.
- R Development Core Team. 2008. **A Language and Environment for Statistical Computing**. R Foundation for Statistical Computing Vienna, Austria
- Siegel, S. and N.J. Castellan. 1988. **Nonparametric Statistics for the Behavioral Sciences**. McGraw-Hill Book Co., Singapore.
- Spiegelhalter, D.J., A.Thomas, and N.G.Best. 2003. **WinBUGS Version 1.4 User Manual**. MRC Biostatistics Unit, Cambridge.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
พิสูจน์คุณสมบัติการแจกแจง

ฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสม

พิสูจน์

$$\text{จาก } f(x) = \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}$$

เมื่อ $x \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$

และเนื่องจาก $F(x) = P(X \leq x)$

$$= \frac{\lambda}{B(a,b)} \int_0^x \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1} dx$$

กำหนดให้ $x = 1 - \exp(-\lambda x)$ และ $dx = \lambda \exp(-\lambda x) dx$ เพราะฉะนั้น

$$F(x) = \frac{\lambda}{B(a,b)} \int_0^{1-\exp(-\lambda x)} [\exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))]^b [1 - \exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))]^{a-1} \lambda \exp(-\lambda x) dx$$

$$= \frac{\lambda}{B(a,b)} \int_0^{1-\exp(-\lambda x)} [\exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))]^b [1 - \exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))]^{a-1}$$

$$\lambda \exp(-\lambda x) \frac{d(1 - \exp(-\lambda(1 - \exp(-\lambda x))))}{\lambda^2 \exp(-\lambda(1 - \exp(-\lambda x))) \exp(-\lambda x)}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{1-\exp(-\lambda x)} [\exp(-\lambda(1 - \exp(-\lambda x)))]^b [1 - \exp(-\lambda(1 - \exp(-\lambda x)))]^{a-1}$$

$$\frac{d(1 - \exp(-\lambda(1 - \exp(-\lambda x))))}{\exp(-\lambda(1 - \exp(-\lambda x)))}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{1-\exp(-\lambda x)} [\exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))]^{b-1} [1-\exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))]^{a-1}$$

$$d(1-\exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x))))$$

กำหนดให้ $w = (1-\exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x))))$ และ $1-w = \exp(-\lambda(1-\exp(-\lambda x)))$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^{1-\exp(-\lambda x)} (1-w)^{b-1} w^{a-1} dw$$

$$\text{จาก } B_y(a,b) = \int_0^y (1-w)^{b-1} w^{a-1} dw \text{ ดังนั้น } F(x) = \frac{B_{1-\exp(-\lambda x)}(a,b)}{B(a,b)}$$

โมเมนต์

$$\text{จากสมการ } E(X^n) = \frac{(-1)^n}{\lambda^n B(a,b)} \frac{\partial^n}{\partial p^n} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a+b-1}$$

โมเมนต์ที่ 1

พิสูจน์

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{(-1)^1}{\lambda B(a,b)} \times \frac{\partial}{\partial p} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a+b-1} \\ &= \frac{(-1)\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \\ &= \frac{(-1)\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(b)} \times \frac{\Gamma(1+p)\Gamma'(1+p-a) - \Gamma(1+p-a)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \end{aligned} \quad (1)$$

แทนค่า $p = a + b - 1$ ลงในสมการ (1) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{(-1)\Gamma(a+b)}{\lambda\Gamma(b)} \times \left[\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma(b)\Gamma'(a+b)}{\Gamma^2(a+b)} \right] \\ &= -\frac{1}{\lambda} \times \left[\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

เมื่อ $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ จากสมการที่ (2) จะได้เป็น $E(X) = \frac{\psi(a+b) - \psi(b)}{\lambda}$

โมเมนต์ที่ 2

พิสูจน์

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{(-1)^2}{\lambda^2 B(a,b)} \times \frac{\partial^2}{\partial p^2} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a+b-1} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2 \Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2 \Gamma(b)} \times \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\Gamma(1+p)\Gamma'(1+p-a)}{\Gamma^2(1+p)} - \frac{\Gamma(1+p-a)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \Big|_{p=a+b-1} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2 \Gamma(b)} \times \left[\frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma'(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} - \frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right] \Big|_{p=a+b-1} \end{aligned} \quad (3)$$

จากสมการที่ (3) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma'(1+p-a)}{\Gamma(1+p)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma'(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} &= \frac{\Gamma(1+p)\Gamma''(1+p-a) - \Gamma'(1+p-a)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \\ &= \frac{\Gamma''(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \end{aligned}$$

แทนค่า $p = a + b - 1$ ลงในสมการข้างต้น จะได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma'(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} = \frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(b)\psi(a+b)}{\Gamma(a+b)} \quad (4)$$

จากสมการที่ (3) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} &= \frac{\Gamma(1+p)[\Gamma(1+p-a)\psi'(1+p) + \psi(1+p)\Gamma'(1+p-a)]}{\Gamma^2(1+p)} \\ &\quad - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \end{aligned}$$

แทนค่า $p = a + b - 1$ ลงในสมการข้างต้น จะได้เป็น

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\Gamma(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} &= \frac{\Gamma(a+b)[\Gamma(b)\psi'(a+b) + \psi(a+b)\Gamma'(b)]}{\Gamma^2(a+b)} \\ &\quad - \frac{\Gamma(b)\psi(a+b)\Gamma'(a+b)}{\Gamma^2(a+b)} \\ &= \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b)\psi'(a+b)}{\Gamma^2(a+b)} + \frac{\Gamma(a+b)\psi(a+b)\Gamma'(b)}{\Gamma^2(a+b)} \\ &\quad - \frac{\Gamma(b)\psi(a+b)\Gamma'(a+b)}{\Gamma^2(a+b)} \quad (5) \end{aligned}$$

แทนค่าสมการ(4) และ (5) ลงสมการ (3) จะได้เป็น

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^2 \Gamma(b)} \times \left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(b)\psi(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma(a+b)\Gamma(b)\psi'(a+b)}{\Gamma^2(a+b)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma(a+b)\psi(a+b)\Gamma'(b)}{\Gamma^2(a+b)} + \frac{\Gamma(b)\psi(a+b)\Gamma'(a+b)}{\Gamma^2(a+b)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2} \times \left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} - \psi(b)\psi(a+b) - \psi'(a+b) - \psi(a+b)\psi(b) + \psi^2(a+b) \right] \quad (6)$$

เนื่องจาก $\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} = \frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(b)\Gamma'(b)}{\Gamma^2(b)} = \psi'(b)$

นำค่าที่ได้ข้างต้นแทนลงในสมการที่ (6)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(b)\Gamma'(b)}{\Gamma^2(b)} - \psi(b)\psi(a+b) - \psi'(a+b) \right. \\ &\quad \left. - \psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(a+b) - \right] / \lambda^2 \\ &= \left[\psi'(b) + \psi^2(b) - \psi'(a+b) - 2\psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(a+b) \right] / \lambda^2 \end{aligned}$$

โมเมนต์ที่ 3

พิสูจน์

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \frac{(-1)^3}{\lambda^3 B(a,b)} \frac{\partial^3}{\partial p^3} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a+b-1} \\ &= - \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3 \Gamma(a)\Gamma(b)} \times \frac{\partial^3}{\partial p^3} \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} \Big|_{p=a+b-1} \end{aligned}$$

จากการหาอนุพันธ์ครั้งที่ 2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= -\frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3\Gamma(b)} \times \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{\Gamma''(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} - \frac{\Gamma'(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi'(1+p)}{\Gamma(1+p)} - \frac{\psi(1+p)\Gamma'(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\Gamma(1+p-a)\psi^2(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right]_{p=a+b-1} \\
E(X^3) &= -\frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3\Gamma(b)} \times \left\{ \frac{\Gamma(a+b)\Gamma'''(1+p-a) - \Gamma''(1+p-a)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right. \\
&\quad \left[\frac{\Gamma(1+p)[\Gamma'(1+p-a)\psi'(1+p) + \psi(1+p)\Gamma''(1+p-a)] - \Gamma'(1+p-a)\psi(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
&\quad \left[\frac{\Gamma(1+p)[\Gamma(1+p-a)\psi''(1+p) + \psi'(1+p)\Gamma'(1+p-a)] - \Gamma(1+p-a)\psi'(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
&\quad \left[\frac{\Gamma(1+p)[\psi(1+p)\Gamma''(1+p-a) + \Gamma'(1+p-a)\psi'(1+p)] - \psi(1+p)\Gamma'(1+p-a)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
&\quad + \left[\frac{\Gamma(1+p)[\Gamma(1+p-a)2\psi(1+p)\psi'(1+p) + \psi^2(1+p)\Gamma'(1+p-a)]}{\Gamma^2(1+p)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi^2(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right]_{p=a+b-1} \Bigg\}
\end{aligned}$$

แทนค่า $p = a + b - 1$ ลงในสมการข้างต้น จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
E(X^3) &= -\frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^3 \Gamma(b)} \times \left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(b)\psi'(a+b)}{\Gamma(a+b)} \right. \\
&\quad - \frac{\psi(a+b)\Gamma''(b)}{\Gamma(a+b)} + \frac{\Gamma'(b)\psi^2(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma(b)\psi''(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\psi'(a+b)\Gamma'(b)}{\Gamma(a+b)} \\
&\quad + \frac{\Gamma(b)\psi'(a+b)\psi(a+b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\psi(a+b)\Gamma''(b)}{\Gamma(a+b)} - \frac{\Gamma'(b)\psi'(a+b)}{\Gamma(a+b)} \\
&\quad + \frac{\psi^2(a+b)\Gamma'(b)}{\Gamma(a+b)} + \frac{\Gamma(b)2\psi(a+b)\psi'(a+b)}{\Gamma(a+b)} + \frac{\psi^2(a+b)\Gamma'(b)}{\Gamma(a+b)} \\
&\quad \left. - \frac{\Gamma(b)\psi^3(a+b)}{\Gamma(a+b)} \right] \\
E(X^3) &= -\frac{1}{\lambda^3} \times \left[\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} - \psi(b)\psi'(a+b) - \frac{\psi(a+b)\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} \right. \\
&\quad + \psi(b)\psi^2(a+b) - \psi''(a+b) - \psi'(a+b)\psi(b) + \psi'(a+b)\psi(a+b) \\
&\quad - \frac{\psi(a+b)\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} - \psi(b)\psi'(a+b) + \psi^2(a+b)\psi(b) \\
&\quad \left. + 2\psi(a+b)\psi'(a+b) + \psi^2(a+b)\psi(b) - \psi^3(a+b) \right] \\
&= -\frac{1}{\lambda^3} \times \left[\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{3\Gamma''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} + 3\psi(a+b)\psi'(a+b) \right. \\
&\quad \left. + 3\psi^2(a+b)\psi(b) - 3\psi(b)\psi'(a+b) - \psi^3(a+b) - \psi''(a+b) \right] \quad (7)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (7) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{3\Gamma''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{3\Gamma''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} &= 3\psi(a+b)\left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(b)\Gamma'(b)}{\Gamma^2(b)}\right] \\ &= 3\psi(a+b)\psi'(b) + 3\psi(a+b)\psi^2(b)\end{aligned}\quad (8)$$

จากสมการที่ (7) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)}$ จะได้ว่า

$$\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} = \frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} - 3\psi(b)\psi'(b) - \psi^3(b) = \psi''(b)$$

หรือ

$$\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} = \psi''(b) + 3\psi(b)\psi'(b) + \psi^3(b)\quad (9)$$

นำค่าที่ได้จากสมการ (8) และ (9) ลงในสมการ (7) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}E(X^3) &= -[\psi''(b) - \psi''(a+b) + 3\psi(b)\psi'(b) - 3\psi(a+b)\psi'(b) - 3\psi(b)\psi'(a+b) \\ &\quad + 3\psi(a+b)\psi'(a+b) + \psi^3(b) - 3\psi^2(b)\psi(a+b) + 3\psi(b)\psi^2(a+b) \\ &\quad - \psi^3(a+b)] / \lambda^3\end{aligned}$$

โมเมนต์ที่ 4

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 E(X^4) &= \frac{(-1)^4}{\lambda^4 B(a, b)} \frac{\partial^4}{\partial p^4} B(a, 1+p-a) \Big|_{p=a+b-1} \\
 &= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4 \Gamma(a) \Gamma(b)} \times \frac{\partial^4}{\partial p^4} \frac{\Gamma(a) \Gamma(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} \Big|_{p=a+b-1}
 \end{aligned}$$

จากการหาอนุพันธ์ครั้งที่ 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
 E(X^4) &= \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4 \Gamma(b)} \times \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \left[\frac{\Gamma(1+p) \Gamma'''(1+p-a) - \Gamma''(1+p-a) \Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \right. \\
 &\quad - \left[\frac{\Gamma(1+p) [\Gamma'(1+p-a) \psi'(1+p) + \psi(1+p) \Gamma''(1+p-a)] - \Gamma'(1+p-a) \psi(1+p) \Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{\Gamma(1+p) [\Gamma(1+p-a) \psi''(1+p) + \psi'(1+p) \Gamma'(1+p-a)] - \Gamma(1+p-a) \psi'(1+p) \Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
 &\quad - \left[\frac{\Gamma(1+p) [\psi(1+p) \Gamma''(1+p-a) + \Gamma'(1+p-a) \psi'(1+p)] - \psi(1+p) \Gamma'(1+p-a) \Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
 &\quad + \left[\frac{\Gamma(1+p) [\Gamma(1+p-a) 2\psi(1+p) \psi'(1+p) + \psi^2(1+p) \Gamma'(1+p-a)]}{\Gamma^2(1+p)} \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\Gamma(1+p-a) \psi^2(1+p) \Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \right\} \Big|_{p=a+b-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^4) = & \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4 \Gamma(b)} \times \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{\Gamma'''(1+p-a)}{\Gamma(1+p)} - \frac{3\Gamma''(1+p-a)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right. \\
& - \frac{3\Gamma'(1+p-a)\psi'(1+p)}{\Gamma(1+p)} + \frac{3\Gamma'(1+p-a)\psi^2(1+p)}{\Gamma(1+p)} \\
& - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi''(1+p)}{\Gamma(1+p)} + \frac{3\Gamma(1+p-a)\psi'(1+p)\psi(1+p)}{\Gamma(1+p)} \\
& \left. - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi^3(1+p)}{\Gamma(1+p)} \right\}_{p=a+b-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^4) = & \frac{\Gamma(a+b)}{\lambda^4 \Gamma(b)} \times \left\{ \left[\frac{\Gamma(1+p)\Gamma'''(1+p-a) - \Gamma'''(1+p-a)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \right. \\
& - 3 \left[\frac{\Gamma(1+p) \left[\Gamma''(1+p-a)\psi'(1+p) + \psi(1+p)\Gamma'''(1+p-a) \right] - \Gamma''(1+p-a)\psi(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
& - 3 \left[\frac{\Gamma(1+p) \left[\Gamma'(1+p-a)\psi''(1+p) + \psi'(1+p)\Gamma''(1+p-a) \right] - \Gamma'(1+p-a)\psi'(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
& + 3 \left[\frac{\Gamma(1+p) \left[\Gamma'(1+p-a)2\psi(1+p)\psi'(1+p) + \psi^2(1+p)\Gamma''(1+p-a) \right]}{\Gamma^2(1+p)} \right. \\
& \left. - \frac{\Gamma'(1+p-a)\psi^2(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
& - \left[\frac{\Gamma(1+p) \left[\Gamma(1+p-a)\psi'''(1+p) + \psi''(1+p)\Gamma'(1+p-a) \right] - \Gamma(1+p-a)\psi''(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
& \left. + 3 \left[\frac{\Gamma(1+p) \left[\Gamma(1+p-a) \left(\psi'(1+p)\psi'(1+p) + \psi(1+p)\psi''(1+p) \right) \right]}{\Gamma^2(1+p)} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{+ \psi'(1+p)\psi(1+p)\Gamma'(1+p-a)] - \Gamma(1+p-a)\psi'(1+p)\psi(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \\
& - \left[\frac{\Gamma(1+p)[\Gamma(1+p-a)3\psi^2(1+p)\psi'(1+p) + \psi^3(1+p)\Gamma'(1+p-a)]}{\Gamma^2(1+p)} \right. \\
& \left. - \frac{\Gamma(1+p-a)\psi^3(1+p)\Gamma'(1+p)}{\Gamma^2(1+p)} \right] \Bigg\}_{p=a+b-1}
\end{aligned}$$

แทนค่า $p = a+b-1$ ลงในสมการข้างต้น จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
E(X^4) = & \frac{1}{\lambda^4} \left[\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{4\Gamma'''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} - \frac{6\Gamma''(b)\psi'(a+b)}{\Gamma(b)} + \frac{6\Gamma''(b)\psi^2(a+b)}{\Gamma(b)} \right. \\
& - \frac{4\Gamma'(b)\psi''(a+b)}{\Gamma(b)} + \frac{6\Gamma'(b)\psi'(a+b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} \\
& + \frac{6\Gamma'(b)\psi(a+b)\psi'(a+b)}{\Gamma(b)} - \frac{4\Gamma'(b)\psi^3(a+b)}{\Gamma(b)} \\
& - \psi'''(a+b) + 4\psi''(a+b)\psi(a+b) + 3\psi'(a+b)\psi'(a+b) \\
& \left. - 3\psi'(a+b)\psi^2(a+b) - 3\psi^2(a+b)\psi'(a+b) + \psi^4(a+b) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^4) = \frac{1}{\lambda^4} & \left[\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} - \frac{4\Gamma'''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} - \frac{6\Gamma''(b)\psi'(a+b)}{\Gamma(b)} + \frac{6\Gamma''(b)\psi^2(a+b)}{\Gamma(b)} \right. \\
& - 4\psi(b)\psi''(a+b) + 12\psi(b)\psi'(a+b)\psi(a+b) - 4\psi(b)\psi^3(a+b) \\
& - \psi'''(a+b) + 4\psi''(a+b)\psi(a+b) + 3\psi'(a+b)\psi'(a+b) \\
& \left. - 6\psi'(a+b)\psi^2(a+b) + \psi^4(a+b) \right] \quad (10)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (10) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{4\Gamma'''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{4\Gamma'''(b)\psi(a+b)}{\Gamma(b)} &= 4\psi(a+b) \left[\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} \right] \\
&= 4\psi(a+b) [\psi''(b) + 3\psi(b)\psi'(b) + \psi^3(b)] \\
&= 4\psi(a+b)\psi''(b) + 12\psi(a+b)\psi(b)\psi'(b) + 4\psi^3(b)\psi(a+b) \quad (11)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (10) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{6\Gamma''(b)\psi'(a+b)}{\Gamma(b)}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{6\Gamma''(b)\psi'(a+b)}{\Gamma(b)} &= 6\psi'(a+b) \left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)} \right] \\
&= 6\psi'(a+b) [\psi'(b) + \psi^2(b)] \\
&= 6\psi'(a+b)\psi'(b) + 6\psi'(a+b)\psi^2(b) \quad (12)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (10) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{6\Gamma''(b)\psi^2(a+b)}{\Gamma(b)}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{6\Gamma''(b)\psi^2(a+b)}{\Gamma(b)} &= 6\psi^2(a+b)\left[\frac{\Gamma''(b)}{\Gamma(b)}\right] \\
&= 6\psi^2(a+b)\psi'(b) + 6\psi^2(a+b)\psi^2(b)
\end{aligned} \tag{13}$$

จากสมการที่ (10) พิจารณาเฉพาะเทอม $\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)}$ จะได้ว่า

$$\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} = \frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} - 4\psi(b)\psi''(b) - 3(\psi'(b))^2 - 6\psi^2(b)\psi'(b) - \psi^4(b) = \psi'''(b)$$

หรือ

$$\frac{\Gamma'''(b)}{\Gamma(b)} = \psi'''(b) + 4\psi(b)\psi''(b) + 3(\psi'(b))^2 + 6\psi^2(b)\psi'(b) + \psi^4(b) \tag{14}$$

นำค่าที่ได้จากสมการ (11), (12), (13), และ (14) ลงในสมการ (10) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
E(X^4) &= [\psi'''(b) - \psi'''(a+b) + 4\psi(b)\psi''(b) - 4\psi(a+b)\psi''(b) \\
&\quad - 4\psi(b)\psi''(a+b) + 4\psi(a+b)\psi''(a+b) + 3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) \\
&\quad + 3\{\psi'(a+b)\}^2 + 6\psi^2(b)\psi'(b) - 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(b) + 6\psi^2(a+b)\psi'(b) \\
&\quad - 6\psi^2(b)\psi'(a+b) + 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(a+b) - 6\psi^2(a+b)\psi'(a+b) + \psi^4(b) \\
&\quad - 4\psi^3(b)\psi(a+b) + 6\psi^2(b)\psi^2(a+b) - 4\psi(b)\psi^3(a+b) + \psi^4(a+b)] / \lambda^4
\end{aligned}$$

พิสูจน์ $E[X - E(X)]^3$

$$E[X - E(X)]^3 = E(X^3) - 3E(X^2)E(X) + 2E^3(X) \quad (15)$$

จากสมการที่ (15) พิจารณาเฉพาะเทอม $3E(X^2)E(X)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 3E(X^2)E(X) &= 3 \left[\frac{\psi'(b) + \psi^2(b) - \psi'(a+b) - 2\psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(a+b)}{\lambda^2} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\psi(a+b) - \psi(b)}{\lambda} \right] \\ &= [3\psi'(b)\psi(a+b) - 3\psi'(b)\psi(b) - 3\psi'(a+b)\psi(a+b) \\ &\quad + 3\psi'(a+b)\psi(b) + 3\psi^2(b)\psi(a+b) - 3\psi^2(b)\psi(b) \\ &\quad - 6\psi(b)\psi^2(a+b) + 6\psi^2(b)\psi(a+b) + 3\psi^3(a+b) \\ &\quad - 3\psi^2(a+b)\psi(b)] / \lambda^3 \end{aligned} \quad (16)$$

จากสมการที่ (15) พิจารณาเฉพาะเทอม $2E^3(X)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 2E^3(X) &= 2 \left[\frac{\psi(a+b) - \psi(b)}{\lambda} \right]^3 \\ &= \left[\frac{2\psi^3(a+b) - 6\psi^2(a+b)\psi(b) + 6\psi(a+b)\psi^2(b) - 2\psi^3(b)}{\lambda^3} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

แทนค่า $E(X^3)$ และค่าในสมการ (16) และ (17) ลงในสมการ (15) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
E[X - E(X)]^3 &= [-\psi''(b) + \psi''(a+b) - 3\psi(b)\psi'(b) + 3\psi(a+b)\psi'(b) \\
&\quad + 3\psi(b)\psi'(a+b) - 3\psi(a+b)\psi'(a+b) - \psi^3(b) \\
&\quad + 3\psi^2(b)\psi(a+b) - 3\psi(b)\psi^2(a+b) + \psi^3(a+b) \\
&\quad - 3\psi'(b)\psi(a+b) + 3\psi'(b)\psi(b) + 3\psi'(a+b)\psi(a+b) \\
&\quad - 3\psi'(a+b)\psi(b) - 3\psi^2(b)\psi(a+b) + 3\psi^2(b)\psi(b) \\
&\quad + 6\psi(b)\psi^2(a+b) - 6\psi^2(b)\psi(a+b) - 3\psi^3(a+b) \\
&\quad + 3\psi^2(a+b)\psi(b) + 2\psi^3(a+b) - 6\psi^2(a+b)\psi(b) \\
&\quad + 6\psi(a+b)\psi^2(b) - 2\psi^3(b)] / \lambda^3 \\
&= \frac{\psi''(a+b) - \psi''(b)}{\lambda^3}
\end{aligned}$$

พิสูจน์ $E[X - E(X)]^4$

$$E[X - E(X)]^4 = E(X^4) - 4E(X^3)E(X) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X) \quad (18)$$

จากสมการที่ (18) พิจารณาเฉพาะเทอม $4E(X^3)E(X)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
4E(X^3)E(X) &= 4\{[-\psi''(b) + \psi''(a+b) - 3\psi(b)\psi'(b) + 3\psi(a+b)\psi'(b) \\
&\quad + 3\psi(b)\psi'(a+b) - 3\psi(a+b)\psi'(a+b) - \psi^3(b) + 3\psi^2(b)\psi(a+b) \\
&\quad - 3\psi(b)\psi^2(a+b) + \psi^3(a+b)] / \lambda^3 \times [\psi(a+b) - \psi(b)] / \lambda\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-4\psi''(b)\psi(a+b) + 4\psi''(a+b)\psi(a+b) - 24\psi(b)\psi'(b)\psi(a+b) \right. \\
&\quad + 12\psi^2(a+b)\psi'(b) + 24\psi(b)\psi(a+b)\psi'(a+b) \\
&\quad - 12\psi^2(a+b)\psi'(a+b) - 16\psi^3(b)\psi(a+b) + 24\psi^2(b)\psi^2(a+b) \\
&\quad - 16\psi(b)\psi^3(a+b) + 4\psi^4(a+b) + 4\psi''(b)\psi(b) - 4\psi''(a+b)\psi(b) \\
&\quad \left. + 12\psi^2(b)\psi'(b) - 12\psi^2(b)\psi'(a+b) + 4\psi^4(b) \right] / \lambda^4 \quad (19)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (18) พิจารณาเฉพาะเทอม $6E(X^2)E^2(X)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
6E(X^2)E^2(X) &= 6 \left\{ \left[\psi'(b) - \psi'(a+b) + \psi^2(b) - 2\psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(a+b) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\psi(a+b) - \psi(b) \right]^2 / \lambda^2 \right\} \\
&= \left[6\psi'(b)\psi^2(a+b) - 6\psi'(a+b)\psi^2(a+b) + 36\psi^2(b)\psi^2(a+b) \right. \\
&\quad - 24\psi(b)\psi^3(a+b) + 6\psi^4(a+b) - 12\psi(b)\psi'(b)\psi(a+b) \\
&\quad + 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(a+b) - 24\psi^3(b)\psi(a+b) + 6\psi'(b)\psi^2(b) \\
&\quad \left. - 6\psi'(a+b)\psi^2(b) + 6\psi^4(b) \right] / \lambda^4 \quad (20)
\end{aligned}$$

จากสมการที่ (18) พิจารณาเฉพาะเทอม $3E^4(X)$ จะได้ว่า

$$3E^4(X) = 3 \left[\frac{\psi(a+b) - \psi(b)}{\lambda} \right]^4$$

$$\begin{aligned}
&= \left[3\psi^4(a+b) - 12\psi(b)\psi^4(b) + 18\psi^2(b)\psi^2(a+b) \right. \\
&\quad \left. - 12\psi^3(b)\psi(a+b) + 3\psi^4(b) \right] / \lambda^4
\end{aligned} \tag{21}$$

แทนค่า $E(X^4)$ และค่าในสมการ (21), (20) และ (19) ลงในสมการ (18) จะได้เป็น

$$\begin{aligned}
E[X - E(X)]^4 &= [\psi'''(b) - \psi'''(a+b) + 4\psi(b)\psi''(b) - 4\psi(a+b)\psi''(b) \\
&\quad - 4\psi(b)\psi''(a+b) + 4\psi(a+b)\psi''(a+b) + 3\{\psi'(b)\}^2 \\
&\quad - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 + 6\psi^2(b)\psi'(b) \\
&\quad - 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(b) + 6\psi^2(a+b)\psi'(b) - 6\psi^2(b)\psi'(a+b) \\
&\quad + 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(a+b) - 6\psi^2(a+b)\psi'(a+b) + \psi^4(b) \\
&\quad - 4\psi^3(b)\psi(a+b) + 6\psi^2(b)\psi^2(a+b) - 4\psi(b)\psi^3(a+b) + \psi^4(a+b) \\
&\quad + 4\psi''(b)\psi(a+b) - 4\psi''(a+b)\psi(a+b) - 12\psi^2(a+b)\psi'(b) \\
&\quad - 24\psi(b)\psi(a+b)\psi'(a+b) + 12\psi^2(a+b)\psi'(a+b) \\
&\quad + 16\psi^3(b)\psi(a+b) - 24\psi^2(b)\psi^2(a+b) + 16\psi(b)\psi^3(a+b) \\
&\quad - 4\psi^4(a+b) - 4\psi''(b)\psi(b) + 4\psi''(a+b)\psi(b) - 12\psi^2(b)\psi'(b) \\
&\quad + 12\psi^2(b)\psi'(a+b) - 4\psi^4(b) + 6\psi'(b)\psi^2(a+b) \\
&\quad - 6\psi'(a+b)\psi^2(a+b) + 36\psi^2(b)\psi^2(a+b) - 24\psi(b)\psi^3(a+b) \\
&\quad + 6\psi^4(a+b) - 12\psi(b)\psi'(b)\psi(a+b) + 12\psi(b)\psi(a+b)\psi'(a+b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -24\psi^3(b)\psi(a+b) + 6\psi'(b)\psi^2(b) - 6\psi'(a+b)\psi^2(b) + 6\psi^4(b) \\
& -3\psi^4(a+b) + 12\psi(b)\psi^4(b) - 18\psi^2(b)\psi^2(a+b) \\
& + 12\psi^3(b)\psi(a+b) - 3\psi^4(b) \Big] / \lambda^4 \\
& = \left[3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 \right. \\
& \quad \left. \psi'''(b) - \psi'''(a+b) \right] / \lambda^4
\end{aligned}$$

ค่าความแปรปรวน

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - E^2(X) \\
&= [\psi'(b) - \psi'(a+b) + \psi^2(b) - 2\psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(a+b) \\
&\quad - \psi^2(a+b) - 2\psi(b)\psi(a+b) + \psi^2(b)] / \lambda^2 \\
V(X) &= \frac{\psi'(b) - \psi'(a+b)}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ความเบ้

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 S(X) &= \frac{E[X - E(X)]^3}{[V(X)]^{3/2}} \\
 &= \frac{\psi''(a+b) - \psi''(b)}{\lambda^3} / \left(\frac{\psi'(b) - \psi'(a+b)}{\lambda^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{\psi''(a+b) - \psi''(b)}{\psi'(b) - \psi'(a+b)}
 \end{aligned}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ความโด่ง

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
 K(X) &= \frac{E[X - E(X)]^4}{[V(X)]^2} \\
 &= \frac{\left\{ [3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 \right.}{\left. \psi'''(b) - \psi'''(a+b) \right] / \lambda^4 \} / \left(\frac{\psi'(b) - \psi'(a+b)}{\lambda^2} \right)^2}{\lambda^4} \\
 &= \frac{3\{\psi'(b)\}^2 - 6\psi'(b)\psi'(a+b) + 3\{\psi'(a+b)\}^2 + \psi'''(b) - \psi'''(a+b)}{\lambda^4}
 \end{aligned}$$

ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิดและฟังก์ชันลักษณะเฉพาะ

จากฟังก์ชันความหนาแน่นน่าจะเป็นจะได้ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด ของ X ($M_X(t)$) ดังนี้

$$M_X(t) = \frac{B(b - \frac{t}{\lambda}, a)}{B(a, b)}$$

พิสูจน์

เมื่อกำหนดให้ฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด ($M_X(t) = E(\exp(tx))$) ดังนี้

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{B(a, b)} \int_0^{\infty} \exp((t - b\lambda)x) (1 - \exp(-\lambda x))^{a-1} dx$$

กำหนดให้ $y = \exp(-\lambda x)$ จะได้

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{\lambda}{B(a, b)} \int_1^0 y^{b - \frac{t}{\lambda}} (1 - y)^{a-1} \frac{dy}{-\lambda y} \\ &= \frac{\lambda}{B(a, b)} \times \frac{1}{\lambda} \int_0^1 y^{b - \frac{t}{\lambda} - 1} (1 - y)^{a-1} dy \\ &= \frac{B\left(b - \frac{t}{\lambda}, a\right)}{B(a, b)} \end{aligned}$$

เมื่อฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่ม X แทนด้วย $\varphi_X(t) = E(\exp(itx))$ เพราะฉะนั้น จะทำให้สามารถหาฟังก์ชันลักษณะเฉพาะของตัวแปรสุ่ม X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียล จะได้เป็น

จากฟังก์ชันโมเมนต์เวียนบังเกิด

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(\exp(tx)) \\ &= \frac{B(b - \frac{t}{\lambda}, a)}{B(a, b)} \end{aligned}$$

เมื่อ $\varphi_X(t) = E(\exp(itx))$ จะได้ว่า

$$\varphi_X(t) = \frac{B\left(b - \frac{it}{\lambda}, a\right)}{B(a, b)} \quad \text{โดยที่ } i = \sqrt{-1} \quad \text{ซึ่งเป็น complex number}$$

ผลการประสาน (convolution)

พิสูจน์

นำเอาตัวแปรสุ่ม 2 ตัวคือ X_1 และ X_2 ที่มีการแจกแจงแบบเบตาเอกซ์โพเนนเชียลที่เป็นอิสระกันซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นดังนี้

$$f(x_1) = \frac{\lambda_1}{B(a_1, b_1)} \exp(-b_1 \lambda_1 x_1) (1 - \exp(-\lambda_1 x_1))^{a_1 - 1}$$

เมื่อ $a_1 > 0, b_1 > 0, \lambda_1 > 0, x_1 > 0$

$$f(x_2) = \frac{\lambda_2}{B(a_2, b_2)} \exp(-b_2 \lambda_2 x_2) (1 - \exp(-\lambda_2 x_2))^{a_2 - 1}$$

เมื่อ $a_2 > 0, b_2 > 0, \lambda_2 > 0, x_2 > 0$

มาหาผลบวกโดยใช้วิธีของผลการประสานโดยแทนให้ $Z = X_1 + X_2$ ซึ่งฟังก์ชันการแจกแจงของผลบวกของตัวแปรสุ่มทั้งสองจะเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_2}(x_1, x_2) &= f_{x_1}(x_1) \times f_{x_2}(x_2) \\ &= \frac{\lambda_1}{B(a_1, b_1)} \exp(-b_1 \lambda_1 x_1) (1 - \exp(-\lambda_1 x_1))^{a_1-1} \\ &\quad \times \frac{\lambda_2}{B(a_2, b_2)} \exp(-b_2 \lambda_2 x_2) (1 - \exp(-\lambda_2 x_2))^{a_2-1} \end{aligned}$$

เมื่อกำหนดให้ $x_1 = z - w$ และ $x_2 = w$

จะทำให้ได้

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{x_1}(z-w) \times f_{x_2}(w) dw$$

นั่นคือ

$$\begin{aligned} f_z(z) &= \int_0^z \frac{\lambda_1}{B(a_1, b_1)} \exp(-b_1 \lambda_1 (z-w)) (1 - \exp(-\lambda_1 (z-w)))^{a_1-1} \\ &\quad \times \frac{\lambda_2}{B(a_2, b_2)} \exp(-b_2 \lambda_2 w) (1 - \exp(-\lambda_2 w))^{a_2-1} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^z \exp(-b_1 \lambda_1 (z-w)) (1 - \exp(-\lambda_1 (z-w)))^{a_1-1} \\ &\quad \times \exp(-b_2 \lambda_2 w) (1 - \exp(-\lambda_2 w))^{a_2-1} dw \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \exp(-b_1 \lambda_1 z)}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \int_0^z (1 - \exp(-\lambda_1(z-w)))^{a_1-1} (1 - \exp(-\lambda_2 w))^{a_2-1} \\
&\quad \times \exp(-w(b_2 \lambda_2 - b_1 \lambda_1)) dw
\end{aligned} \tag{21}$$

เมื่อใช้ $(1+z)^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-j+1)} \frac{z^j}{j!}$

จากสมการที่ (21) พิจารณาเฉพาะเทอม $(1 - \exp(-\lambda_1(z-w)))^{a_1-1}$ ทำให้ได้ว่า

$$(1 - \exp(-\lambda_1(z-w)))^{a_1-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a_1)}{i! \Gamma(a_1-i)} (-1)^i \exp(-i \lambda_1(z-w))$$

และกำหนดให้ $\kappa = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \exp(-b_1 \lambda_1 z)}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)}$

จะได้ว่า

$$f_z(z) = \kappa \Gamma(a_1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(a_1-i)} \exp(-i \lambda_1 z) I(i, r) \tag{22}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
I(i, r) &= \int_0^z \exp((i \lambda_1 + b_1 \lambda_1 - b_2 \lambda_2)w) (1 - \exp(-\lambda_2 w))^{a_2-1} dw \\
&= \int_0^z \exp\left(\frac{\lambda_2 w}{\lambda_2} (i \lambda_1 + b_1 \lambda_1 - b_2 \lambda_2)w\right) (1 - \exp(-\lambda_2 w))^{a_2-1} dw \\
&= \int_0^z \exp(-\lambda_2 w (b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (i + b_1))) (1 - \exp(-\lambda_2 w))^{a_2-1} dw
\end{aligned}$$

และให้ $y = \exp(-\lambda_2 w)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
I(i, r) &= \int_1^{\exp(-\lambda_2 z)} y^{(b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1))} (1-y)^{a_2-1} \frac{dy}{-\lambda_2 \exp(-\lambda_2 w)} \\
&= \int_1^{\exp(-\lambda_2 z)} y^{(b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1))} (1-y)^{a_2-1} \frac{dy}{-\lambda_2 y} \\
&= \frac{1}{\lambda_2} \int_{\exp(-\lambda_2 z)}^1 y^{(b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1)) - 1} (1-y)^{a_2-1} dy \\
&= \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^{\exp(-\lambda_2 z)} y^{(b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1)) - 1} (1-y)^{a_2-1} dy \right) \\
&= \frac{1}{\lambda_2} \left(1 - \int_0^{1-\exp(-\lambda_2 z)} y^{a_2-1} (1-y)^{(b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1)) - 1} dy \right) \\
&= \frac{1}{\lambda_2} B_{1-\exp(-\lambda_2 z)} \left(a_2, b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1) \right) \tag{23}
\end{aligned}$$

แทนค่าที่ได้จากสมการที่ (23) ลงในสมการที่ (22) ทำให้ได้

$$f_z(z) = \frac{\kappa}{\lambda_2} \Gamma(a_1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(a_1 - i)} \exp(-i\lambda_1 z) B_{1-\exp(-\lambda_2 z)} \left(a_2, b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1) \right)$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของผลบวกของตัวแปรสุ่มทั้ง 2 ตัวที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลและเป็นอิสระต่อกันโดยใช้เทคนิคของผลการประสานเป็นดังนี้คือ

$$f_z(z) = \frac{\kappa}{\lambda_2} \Gamma(a_1) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i! \Gamma(a_1 - i)} \exp(-i\lambda_1 z) B_{1-\exp(-\lambda_2 z)} \left(a_2, b_2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(i+b_1) \right)$$

$$\text{เมื่อ } \kappa = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \exp(-b_1 \lambda_1 z)}{B(a_1, b_1) B(a_2, b_2)} \text{ และ } a_1, a_2 > 0; b_1, b_2 > 0; \lambda_1, \lambda_2 > 0; z > 0$$

ฟังก์ชันความเชื่อถือได้

พิสูจน์

ถ้า X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a, b และ λ จะได้ฟังก์ชันความเชื่อถือได้อยู่ในรูป

$$R(x) = 1 - F(x) \quad (24)$$

$$\text{เนื่องจาก } F(x) = I_{1-\exp(-\lambda x)}(a, b) = \frac{B_{1-\exp(-\lambda x)}(a, b)}{B(a, b)}$$

จากสมการที่ (24) จะได้ว่า

$$R(x) = 1 - \frac{B_{1-\exp(-\lambda x)}(a, b)}{B(a, b)}$$

จากคุณสมบัติ

$$I_y(a, b) = 1 - I_{1-y}(b, a)$$

ดังนั้น

$$R(x) = \frac{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}{B(a, b)}$$

ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยง

พิสูจน์

ถ้า X มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ a , b และ λ จะได้ฟังก์ชันอัตราความเสี่ยงอยู่ในรูป

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

$$\text{จาก } f(x) = \frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}$$

เมื่อ $x \geq 0$, $a > 0$, $b > 0$, $\lambda > 0$

$$\text{และ } R(x) = \frac{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}{B(a, b)} \text{ จะได้ว่า}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{\frac{\lambda}{B(a,b)} \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}}{\frac{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)}{B(a, b)}} \\ &= \frac{\lambda \exp(-b\lambda x)(1 - \exp(-\lambda x))^{a-1}}{B_{\exp(-\lambda x)}(b, a)} \end{aligned}$$

การสร้างค่าตัวแปรสุ่มด้วยวิธีการแปลงผกผัน (Inverse transform)

ขั้นตอนการสร้างค่าตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลสามารถทำได้ดังนี้โดยใช้วิธีการแปลงผกผัน (Law and Kelton, 2000) ดังนี้

ขั้นที่ 1 สร้างตัวแปรสุ่ม B ให้มีการแจกแจงเบตาด้วยพารามิเตอร์ a, b

ขั้นที่ 2 หาคำตอบ $x = F^{-1}(B)$

จะได้ว่า $F^{-1}(B)$ สามารถหาค่าได้เนื่องจาก $0 \leq B \leq 1$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน $F(B)$ จะอยู่ในช่วง $[0,1]$

การสร้างตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X ที่มีการแจกแจงเบตาเอกซ์โพเนนเชียลจะกำหนดให้

$B = F(x)$ ซึ่ง $F(x)$ เป็นความหนาแน่นน่าจะเป็นสะสมของการแจกแจงเอกซ์โพเนนเชียลด้วยพารามิเตอร์ λ เพราะฉะนั้น $x = F^{-1}(B)$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$B = 1 - \exp(-\lambda x)$$

$$\exp(-\lambda x) = 1 - B$$

$$\ln(\exp(-\lambda x)) = \ln(1 - B)$$

$$-\lambda x = \ln(1 - B)$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - B)$$

เพราะฉะนั้นจะทำให้ได้ว่าตัวแปรสุ่ม X ที่ได้จะเป็นตัวแปรสุ่มเบตาเอกซ์โพเนนเชียล

ภาคผนวก ข

การแจกแจงก่อนหน้าและตารางของค่าวิกฤตสถิติทดสอบ

ตารางผนวกที่ ข1 ค่าการแจกแจงก่อนหน้าของวิธีประมาณค่าด้วยวิธีของเบส์เมื่อพิจารณาจากค่าเฉลี่ยของค่าประมาณพารามิเตอร์และค่าเฉลี่ยของความคลาดเคลื่อนกำลังสอง (MSE) เมื่อใช้ขนาดตัวอย่างเท่ากับ 30

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(0.5, 0.5, 0.5)	(0.7,1.0)*	(0.1,1.0)*	(0.2,1.0)*	0.524	0.574	0.522	1.691×10^{-05}	5.454×10^{-05}	4.788×10^{-06}
	(0.5,1.0)	(0.5,1.0)	(0.5,1.0)	0.563	0.885	0.867	5.335×10^{-05}	4.928×10^{-04}	4.490×10^{-04}
	(0.5,1.0)	(0.3,1.0)	(0.2,1.0)	0.318	0.737	0.383	1.100×10^{-04}	1.862×10^{-04}	4.548×10^{-05}
(0.5, 0.5, 1.0)	(0.2,1.0)*	(0.5,1.0)*	(1.0,1.0)*	0.494	0.718	1.183	1.064×10^{-07}	1.587×10^{-04}	1.145×10^{-04}
	(0.5,1.0)	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)	0.685	0.797	1.321	1.136×10^{-04}	2.949×10^{-04}	3.445×10^{-04}
	(0.3,1.0)	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)	0.548	0.774	1.214	7.535×10^{-06}	2.503×10^{-04}	1.525×10^{-04}
(0.5, 0.5, 2.0)	(0.2,1.0)*	(0.7,1.0)*	(2.0,1.0)*	0.6779	0.471	2.024	0.677×10^{-04}	2.811×10^{-06}	1.899×10^{-06}
	(0.3,1.0)	(0.5,1.0)	(2.0,1.0)	0.729	0.410	1.845	0.729×10^{-04}	2.679×10^{-05}	8.039×10^{-05}
	(0.2,1.0)	(0.6,1.0)	(2.0,1.0)	0.694	0.456	2.034	0.694×10^{-04}	6.323×10^{-06}	3.999×10^{-06}
(0.5, 1.0, 0.5)	(0.4,1.0)*	(1.0,1.0)*	(0.4,1.0)*	0.688	0.663	0.437	0.688×10^{-04}	1.139×10^{-05}	0.520×10^{-06}
	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)	(0.5,1.0)	1.139	1.209	1.279	0.663×10^{-04}	1.209×10^{-04}	0.689×10^{-04}
	(0.3,1.0)	(1.0,1.0)	(0.3,1.0)	0.520	0.689	0.346	0.437×10^{-05}	1.279×10^{-04}	0.346×10^{-05}

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a, b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(0.5, 1.0, 1.0)	(0.1,1.0)*	(1.2,1.0)*	(1.0,1.0)*	0.656	0.848	0.842	8.093×10^{-05}	7.717×10^{-05}	8.285×10^{-05}
	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)	(1.0,1.0)	0.928	0.763	0.743	6.120×10^{-04}	1.869×10^{-04}	2.209×10^{-04}
	(0.2,1.0)	(1.0,1.0)	(1.0,1.0)	0.666	0.751	0.780	9.197×10^{-05}	2.066×10^{-04}	1.607×10^{-04}
(0.5, 1.0, 2.0)	(0.1,2.0)*	(0.1,1.0)*	(0.1,1.0)*	0.451	0.949	1.668	2.398×10^{-04}	2.292×10^{-04}	0.011
	(3.0,1.0)	(3.0,1.0)	(2.5,1.0)	0.964	1.244	1.372	0.021	0.006	0.039
	(3.5,1.0)	(3.0,1.0)	(2.5,1.0)	0.838	0.987	1.127	0.011	1.639×10^{-05}	0.076
(0.5, 2.0, 0.5)	(0.1,1.5)*	(2.5,1)*	(1.2,1.0)*	0.558	1.633	0.479	1.126×10^{-05}	6.169×10^{-05}	1.439×10^{-06}
	(0.5,1.0)	(2.0,1.0)	(0.5,1.0)	1.633	1.863	0.381	4.709×10^{-04}	4.489×10^{-04}	4.691×10^{-05}
	(0.1,1.2)	(2.0,1.0)	(1.0,1.0)	0.435	1.295	0.435	1.955×10^{-05}	0.001	1.393×10^{-05}
(0.5, 2.0, 1.0)	(0.1,1.8)*	(3.0,0.5)*	(3.0,1.0)*	0.590	0.719	0.828	2.703×10^{-05}	7.590×10^{-04}	3.998×10^{-07}
	(0.1,1.0)	(1.5,1.0)	(1.5,1.0)	1.523	0.853	0.907	1.597×10^{-04}	0.004	7.247×10^{-07}
	(0.1,1.0)	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	1.011	1.015	1.184	3.582×10^{-04}	0.004	1.129×10^{-04}

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a,b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(0.5, 2.0, 2.0)	(0.3,1.7)*	(6,0.5)*	(6,1)*	0.892	2.106	1.239	0.031	0.002	0.006
	(0.2,1.0)	(3.0,1.0)	(4.0,1.0)	0.983	0.455	1.118	0.047	0.477	0.116
	(0.1,1.0)	(3.0,1.0)	(3.0,1.0)	0.840	0.775	0.978	0.023	0.300	0.209
(1.0, 0.5, 0.5)	(2.6,0.9)*	(0.1,2.0)*	(0.2,1.9)*	0.899	0.475	0.529	3.417×10^{-05}	2.114×10^{-06}	2.759×10^{-06}
	(1.5,1.0)	(0.3,1.0)	(0.3,1.0)	0.777	0.922	0.960	1.653×10^{-04}	5.936×10^{-04}	7.053×10^{-04}
	(1.7,1.0)	(0.2,1.5)	(0.3,1.5)	0.674	0.581	0.558	3.544×10^{-04}	7.053×10^{-05}	9.676×10^{-06}
(1.0, 0.5, 1.0)	(1.0,1.0)*	(0.2,1.0)*	(1.0,1.0)*	0.917	0.722	1.399	2.271×10^{-05}	1.645×10^{-04}	5.309×10^{-04}
	(1.0,1.0)	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)	0.820	0.915	1.407	1.080×10^{-04}	5.738×10^{-04}	5.536×10^{-04}
	(1.0,1.0)	(0.3,1.0)	(1.0,1.0)	0.899	0.804	1.349	1.340×10^{-04}	3.075×10^{-04}	4.073×10^{-04}
(1.0, 0.5, 2.0)	(0.7,1.0)*	(0.5,1.0)*	(2.0,1.0)*	1.0163	0.602	2.166	8.808×10^{-07}	3.358×10^{-06}	9.159×10^{-05}
	(1.0,1.0)	(0.5,1.0)	(2.0,1.0)	1.221	0.663	2.179	1.630×10^{-04}	8.903×10^{-05}	2.179×10^{-04}
	(1.0,1.0)	(0.5,1.0)	(2.0,1.0)	1.244	0.532	2.305	1.244×10^{-04}	3.479×10^{-05}	2.305×10^{-04}

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a, b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(1.0, 1.0, 0.5)	(1.3,1.0)*	(0.7,1.0)*	(0.3,1.2)*	0.997	1.174	0.615	2.169×10^{-08}	1.011×10^{-04}	4.403×10^{-05}
	(1.0,1.0)	(0.5,1.0)	(0.5,1.0)	1.063	1.281	0.766	1.307×10^{-05}	2.623×10^{-04}	2.359×10^{-04}
	(1.2,1.0)	(0.7,1.0)	(0.5,1.0)	0.939	1.181	0.668	1.226×10^{-05}	1.090×10^{-04}	9.429×10^{-05}
(1.0, 1.0, 1.0)	(0.9,1.0)*	(1.0,1.0)*	(0.9,1.0)*	1.024	1.054	1.012	1.924×10^{-04}	9.596×10^{-04}	4.088×10^{-04}
	(1.0,1.0)	(1.0,1.0)	(1.0,1.0)	1.247	1.055	0.889	2.035×10^{-04}	9.998×10^{-04}	4.626×10^{-04}
	(0.7,1.0)	(1.0,1.0)	(0.7,1.0)	1.155	1.054	0.844	7.966×10^{-04}	9.597×10^{-04}	8.146×10^{-04}
(1.0, 1.0, 2.0)	(0.7,1.0)*	(1.5,1.0)*	(2.5,1.0)*	1.291	0.721	1.788	2.824×10^{-04}	2.583×10^{-04}	1.500×10^{-04}
	(1.0,1.0)	(1.0,1.0)	(2.0,1.0)	1.468	0.643	1.683	7.301×10^{-04}	4.251×10^{-04}	3.360×10^{-04}
	(0.7,1.0)	(1.7,1.0)	(2.7,1.0)	1.352	0.709	1.764	4.119×10^{-04}	2.675×10^{-04}	1.854×10^{-04}
(1.0, 2.0, 0.5)	(0.8,1.0)*	(2.0,1.0)*	(0.4,1.0)*	0.931	2.090	0.468	1.590×10^{-05}	2.478×10^{-06}	3.458×10^{-06}
	(1.0,1.0)	(2.0,1.0)	(0.5,1.0)	1.130	2.028	0.586	5.648×10^{-05}	2.719×10^{-05}	2.446×10^{-05}
	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	(0.4,1.0)	1.932	2.253	0.674	0.003	2.137×10^{-04}	1.005×10^{-04}

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a, b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(1.0, 2.0, 1.0)	(0.5,1.0)*	(3.0,1.0)*	(2.0,1.0)*	1.181	1.906	0.768	1.090×10^{-04}	2.921×10^{-05}	1.787×10^{-04}
	(0.5,1.0)	(2.5,1.0)	(1.5,1.0)	1.311	1.748	0.727	3.220×10^{-04}	2.125×10^{-04}	2.477×10^{-04}
	(1.0,1.0)	(2.0,1.0)	(1.0,1.0)	1.526	1.627	0.648	9.240×10^{-04}	4.630×10^{-04}	4.128×10^{-04}
(1.0, 2.0, 2.0)	(0.5,1.3)*	(5.0,0.5)*	(6.0,1.0)*	1.191	1.506	1.835	1.221×10^{-04}	8.148×10^{-04}	9.040×10^{-05}
	(0.5,1.3)	(4.0,0.5)	(4.0,0.5)	1.163	1.525	1.720	2.690×10^{-04}	0.022	0.008
	(0.5,1.3)	(3.0,0.5)	(3.0,0.5)	1.044	1.383	1.433	2.020×10^{-04}	0.038	0.032
(2.0, 0.5, 0.5)	(3.0,0.5)*	(0.3,1.5)*	(0.3,1.5)*	1.607	0.898	0.968	5.152×10^{-04}	5.292×10^{-04}	7.314×10^{-04}
	(2.0,1.5)	(0.3,1.0)	(0.3,1.0)	0.780	0.918	1.094	0.005	7.600×10^{-04}	0.001
	(2.5,0.5)	(0.3,1.0)	(0.3,1.0)	1.831	1.291	1.528	9.471×10^{-04}	0.002	0.003
(2.0, 0.5, 1.0)	(2.5,1.0)*	(0.2,1.2)*	(1.0,1.5)*	1.792	0.675	1.446	1.437×10^{-04}	1.025×10^{-04}	6.635×10^{-04}
	(2.0,1.0)	(0.5,1.0)	(1.0,1.0)	1.622	1.089	1.808	4.761×10^{-04}	0.001	0.002
	(2.5,1.0)	(0.2,1.2)	(1.0,1.2)	1.598	0.872	1.563	5.928×10^{-04}	4.609×10^{-04}	0.001

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a, b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(2.0, 0.5, 2.0)	(2.0,1.0)*	(0.5,1.0)*	(1.0,1.5)*	2.059	0.855	2.382	1.155×10^{-05}	4.193×10^{-04}	4.865×10^{-04}
	(2.0,1.0)	(0.3,1.0)	(1.0,1.0)	2.101	0.709	2.438	8.384×10^{-05}	1.462×10^{-04}	6.418×10^{-04}
	(1.7,1.0)	(0.3,1.0)	(1.0,1.2)	1.527	0.857	1.314	7.441×10^{-04}	4.240×10^{-04}	3.283×10^{-04}
(2.0, 1.0, 0.5)	(4.0,1.0)*	(0.5,1.5)*	(0.8,3.0)*	1.908	1.050	0.736	3.304×10^{-05}	8.183×10^{-06}	1.862×10^{-04}
	(2.5,1.0)	(0.5,1.5)	(1.0,1.5)	1.577	0.893	1.334	5.590×10^{-04}	3.822×10^{-05}	2.321×10^{-04}
	(3.0,1.0)	(0.3,1.5)	(1.0,1.5)	1.900	0.794	1.516	2.848×10^{-05}	1.409×10^{-04}	3.444×10^{-04}
(2.0, 1.0, 1.0)	(2.2,1.0)*	(0.8,1.0)*	(0.8,1.0)*	1.986	1.296	1.295	6.838×10^{-07}	2.928×10^{-04}	2.898×10^{-04}
	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	(1.0,1.0)	1.914	1.317	1.398	2.483×10^{-05}	3.340×10^{-04}	5.292×10^{-04}
	(2.5,1.0)	(0.7,1.2)	(0.7,1.2)	2.170	1.237	1.334	9.689×10^{-05}	1.869×10^{-04}	3.721×10^{-04}
(2.0, 1.0, 2.0)	(1.8,1.0)*	(1.0,1.0)*	(2.2,1.0)*	2.107	0.790	1.970	3.796×10^{-05}	1.468×10^{-04}	3.048×10^{-06}
	(2.0,1.0)	(1.0,1.0)	(2.0,1.0)	2.386	0.846	1.811	4.959×10^{-04}	7.919×10^{-04}	1.191×10^{-04}
	(1.8,1.0)	(0.8,1.0)	(2.0,1.0)	2.198	0.768	1.892	1.302×10^{-05}	1.788×10^{-04}	3.912×10^{-05}

ตารางผนวกที่ ข1 (ต่อ)

พารามิเตอร์ (a, b, λ)	การแจกแจงก่อน $Gamma(a, b)$			ค่าเฉลี่ยของค่าประมาณ			MSE		
	a	b	λ	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{\lambda}$
(2.0, 2.0, 0.5)	(2.0,1.0)*	(2.0,1.0)*	(0.5,1.0)*	1.921	2.227	0.734	2.073×10^{-05}	1.716×10^{-04}	2.792×10^{-04}
	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	(0.3,1.0)	1.761	2.316	0.789	1.907×10^{-04}	3.332×10^{-04}	5.101×10^{-04}
	(2.3,1.0)	(1.7,1.0)	(0.3,1.0)	1.751	2.297	0.891	2.074×10^{-04}	2.934×10^{-04}	6.012×10^{-05}
(2.0, 2.0, 1.0)	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	2.342	1.880	0.765	3.907×10^{-04}	4.788×10^{-05}	6.479×10^{-05}
	(2.0,1.0)*	(2.0,1.0)*	(2.0,1.0)*	2.504	1.555	0.725	8.451×10^{-04}	6.599×10^{-04}	1.988×10^{-04}
	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	(1.5,1.0)	2.405	1.754	0.759	5.475×10^{-04}	2.012×10^{-04}	6.548×10^{-05}
(2.0, 2.0, 2.0)	(1.8,1.2)*	(4.0,1.0)*	(4.0,1.0)*	2.876	1.578	1.240	4.714×10^{-04}	5.937×10^{-04}	0.002
	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	(2.0,1.0)	2.618	1.247	0.858	0.001	0.002	0.004
	(1.8,1.5)	(3.0,1.0)	(3.0,1.0)	1.753	1.241	1.158	2.078×10^{-04}	0.002	0.002

หมายเหตุ * ค่าการแจกแจงก่อนที่ให้ค่า MSE ต่ำสุด

ตารางผนวกที่ ข2 ค่าวิกฤตสถิติทดสอบโคลโมโกรอฟ-สมิรันอฟ

ขนาดของกลุ่ม ตัวอย่าง (n)	ระดับนัยสำคัญ				
	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.210	.220	.240	.270	.320
30	.190	.200	.220	.240	.290
35	.180	.190	.210	.230	.270
มากกว่า 35	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

ที่มา: Siegel *et al.* (1988)

ภาคผนวก ค
โปรแกรมที่ใช้ในงานวิจัย

โปรแกรม R

```
#####

function of Beta Exponential distribution

#####

##### probability density function #####

x<-seq(0.1,6,0.001)
a1<-0.3
a2<-0.5
a3<-0.7
a4<-1
b<-0.5
lamda<-0.5
A<-(lamda/beta(a1,b))*exp(-b*lamda*x)*(1-exp(-lamda*x))^(a1-1)
B<-(lamda/beta(a2,b))*exp(-b*lamda*x)*(1-exp(-lamda*x))^(a2-1)
C<-(lamda/beta(a3,b))*exp(-b*lamda*x)*(1-exp(-lamda*x))^(a3-1)
D<-(lamda/beta(a4,b))*exp(-b*lamda*x)*(1-exp(-lamda*x))^(a4-1)
matplot(cbind(A,B,C,D),type="l",col=1,xaxt = "n",lwd=3,ylab="Probability Density Function;
f(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,1000, 2000,3000, 4000,5000,6000),
      ,labels = expression(0,1,2,3,4,5,6))

##### cumulative distribution #####

x<-seq(0.1,6,0.001)
a1<-0.5
a2<-1.0
a3<-2.0
b<-1
```

```

lambda<-1
F1<-pbeta(1-exp(-lambda*x),a1,b)
F2<-pbeta(1-exp(-lambda*x),a2,b)
F3<-pbeta(1-exp(-lambda*x),a3,b)
matplot(cbind(F1,F2,F3),col=1,type="l",xaxt = "n",lwd=2,ylab="Cumulative Distribution
Function; F(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,1000, 2000,3000, 4000,5000,6000),
,labels = expression(0,1,2,3,4,5,6))

##### reliability function #####

x<-seq(0.1,6,0.001)
a1<-0.5
a2<-1.0
a3<-2.0
b<-1
lambda<-1
R1<-1-pbeta(1-exp(-lambda*x),a1,b)
R2<-1-pbeta(1-exp(-lambda*x),a2,b)
R3<-1-pbeta(1-exp(-lambda*x),a3,b)
matplot(cbind(R1,R2,R3),type="l",col=1,xaxt = "n",lwd=2,ylab="Reliability Function;
R(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,1000, 2000,3000, 4000,5000,6000),
,labels = expression(0,1,2,3,4,5,6))

##### hazard function #####

x<-seq(0.1,6,0.001)
a1<-0.5
a2<-1.0
a3<-2.0

```

```

b<-1
lambda<-1
h1<-(lambda/beta(a1,b))*exp(-b*lambda*x)*(1-exp(-lambda*x))^(a1-1)/
  (1-pbeta(1-exp(-lambda*x),a1,b))
h2<-(lambda/beta(a2,b))*exp(-b*lambda*x)*(1-exp(-lambda*x))^(a2-1)/
  (1-pbeta(1-exp(-lambda*x),a2,b))
h3<-(lambda/beta(a3,b))*exp(-b*lambda*x)*(1-exp(-lambda*x))^(a3-1)/
  (1-pbeta(1-exp(-lambda*x),a3,b))
matplot(cbind(h1,h2,h3), col=1,type="l", xaxt = "n",lwd=2,ylab="Harzard rate
Function;h(x)",xlab="x")
axis(1, at = c(0,1000, 2000,3000, 4000, 5000, 6000),
,labels = expression(0,1,2,3,4,5,6)

#####

      Calculate exact value for mean, variance, skewness coefficient, kurtosis coefficient

#####

a<-1
b<-1
lambda<-1
EX<-(digamma(a+b)-digamma(b))/lambda
VX<-(trigamma(b)-trigamma(a+b))/(lambda)^2
skewness<-(psigamma((a+b), deriv = 2)- psigamma((b), deriv = 2))/(trigamma(b)-
trigamma(a+b))^(3/2)
kurtosis<-(3*(trigamma(b))^2-(6*trigamma(b)*trigamma(a+b))+(3*(trigamma(a+b))^2+
(psigamma((b), deriv = 3))-(psigamma((a+b), deriv = 3)))/(trigamma(b)-trigamma(a+b))^(2)
EX
VX
skewness
kurtosis

```

```
#####
```

```
estimate parameter for Beta Exponential random variables
```

```
#####
```

```
rbetaexp<-function(n,a,b,l)
{
x<-rep(0,n)
r<-rbeta(n,a,b)
for(i in 1:n){
x[i]<-(-1/l)*log(-r[i]+1)}
sample<-x}

m<-500
num<-100
alpha<-1
Bta<-1
lambda<-1
mlea.hat<-rep(0,m)
mleb.hat<-rep(0,m)
mlelambda.hat<-rep(0,m)
bayes_a.hat<-rep(0,m)
bayes_b.hat<-rep(0,m)
bayes_lambda.hat<-rep(0,m)
for(j in 1:m){
sample<-rbetaexp(num,alpha,Bta,lambda)
BE<-sample
```

```
##### method of MLE #####
```

```
est_mle<-function(a,b,l){
n<-num
x<-BE
```

```

L<- -(n*log(l)-(n*log(beta(a,b)))-(b*l*sum(x))+((a-1)*(sum(log(1-(exp((-l)*x)))))))}

library(stats4)

est<- mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=alpha,b=Bta,l=lambda))

mlea.hat[j]<-coef(est)[1]
mleb.hat[j]<-coef(est)[2]
mlelambd.hat[j]<-coef(est)[3]

##### method of Bayes #####

library(R2WinBUGS)
datal<-data.frame(BE)
N<-nrow(datal)
BE<-datal$BE
data<-list("N","BE")
inits<-function(){list(a=1,b=1,l=1)}
output<-bugs(data,inits,model.file="c:/code111.txt",
parameters = c("a","b","l"),
debug =FALSE,n.chains = 1,n.iter=15000,
bugs.directory="c:/Program Files/WinBUGS14/")
bayes_a.hat<-output$mean$a
bayes_b.hat<-output$mean$b
bayes_lambda.hat<-output$mean$l}

#####

mleAV_a<-mean(mlea.hat)
mleAV_b<-mean(mleb.hat)
mleAV_l<-mean(mlelambd.hat)
mleest_par<-c(mleAV_a,mleAV_b,mleAV_l)
mleMSEa<-(sum((mlea.hat-alpha)^2))/m
mleMSEb<-(sum((mleb.hat-Bta)^2))/m

```

```
mleMSEl<-(sum((mlelambda.hat-lambda)^2))/m
```

```
mleMSE<-c(mleMSEa,mleMSEb,mleMSEl)
```

```
##### Output MLE #####
```

```
mleest_par
```

```
mleMSE
```

```
#####
```

```
bayesAV_a<-mean(bayes_a.hat)
```

```
bayesAV_b<-mean(bayes_b.hat)
```

```
bayesAV_l<-mean(bayes_lambda.hat)
```

```
bayesest_par<-c(bayesAV_a,bayesAV_b,bayesAV_l)
```

```
bayesMSEa<-(sum((bayes_a.hat-alpha)^2))/m
```

```
bayesMSEb<-(sum((bayes_b.hat-Bta)^2))/m
```

```
bayesMSEl<-(sum((bayes_lambda.hat-lambda)^2))/m
```

```
bayesMSE<-c(bayesMSEa,bayesMSEb,bayesMSEl)
```

```
##### Output Bayes #####
```

```
bayesest_par
```

```
bayesMSE
```

```
#####
```

```
#####
```

application of reliability with beta exponential distribution (real data)

```
#####
```

```
BE<-c(0.2, 0.3, 0.5, 0.5, 0.5, 0.5, 0.6, 0.6, 0.7, 0.7, 0.7, 0.8, 0.8, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.1, 1.3, 1.5,
1.5, 1.5, 1.5, 2.0, 2.0, 2.2, 2.5, 2.7, 3.0, 3.0, 3.3, 3.3, 4.0, 4.0, 4.5, 4.7, 5.0, 5.4, 5.4, 7.0, 7.5, 8.8,
9.0, 10.3, 22.0,24.5) ## real data ##
```

```
##### method of MLE for real data #####
```

```
est_mle<-function(a,b,l)
{
n<-num
x<-BE
L<- -(n*log(l)-(n*log(beta(a,b)))-(b*l*sum(x))+((a-1)*(sum(log(1-(exp((-l)*x)))))))
}
num<-length(BE)
library(stats4)
est<- mle(minuslogl=est_mle,start=list(a=1,b=0.5,l=0.5))
summary(est)
```

```
##### method of Bayes for real data #####
```

```
library(R2WinBUGS)
datal<-data.frame(BE)
N<-nrow(datal)
BE<-datal$BE
data<-list("N", "BE")
inits<-function() {list(a=1,b=0.5,l=0.5)}
output<-bugs(data,inits,model.file="c:/code1.5.5(J5).txt",
parameters = c("a", "b", "l"),
```

```

debug =TRUE,n.chains = 1,n.iter=15000,
bugs.directory="c:/Program Files/WinBUGS14/")

##### histogram and density function #####

x<-sort(BE)
hist(x,prob=TRUE,main="")
## estimate of mle ##
a1<-0.999
b1<-0.556
lambda1<-0.498
## estimate of bayes ##
a<-0.976
b<-0.493
lambda<-0.503
T<-function(x)((lambda1/beta(a1,b1))*exp(-b1*lambda1*x)*(1-exp(-lambda1*x))^(a1-1))
U<-function(x)((lambda/beta(a,b))*exp(-b*lambda*x)*(1-exp(-lambda*x))^(a-1))
curve(T,col=1,lty=1,lwd=2,add=TRUE)
curve(U,col=1,lty=2,lwd=2,add=TRUE)
legend('topright',c("MLE","Bayes"),lwd=2,lty=1:2,cex=1)

##### reliability function for real data #####

R1<-1-pbeta(1-exp(-lambda1*BE),a1,b1)
R2<-1-pbeta(1-exp(-lambda*BE),a,b)
matplot(cbind(R1,R2),type="l",col=1,lwd=2,ylab="Reliability Function;R(x)",xlab="x")
legend("topright",c("MLE","Bayes"),lty=1:2,lwd=2,cex=1)

```



```
##### hazard function for real data #####
```

```
H1<-(lambda1/beta(a1,b1))*exp(-b1*lambda1*BE)*(1-exp(-lambda1*BE))^(a1-1)/
(1-pbeta(1-exp(-lambda1*BE),a1,b1))
H2<-(lambda/beta(a,b))*exp(-b*lambda*BE)*(1-exp(-lambda*BE))^(a-1)/
(1-pbeta(1-exp(-lambda*BE),a,b))
matplot(cbind(H1,H2),type="l",col=1,lwd=2,ylab="Harzard rate Function; h(x)",xlab="x")
legend("right",c("MLE","Bayes"),lty=1:2,lwd=2,cex=1)
```

```
##### kolmogorov-Smirnov test statistic with MLE #####
```

```
x<-sort(BE)
n<-length(x)
F<-pbeta(1-exp(-lambda1*x),a1,b1)
s<-(1:n)/n
si<-(1:n-1)/n
D<-max(abs(s-F))
d<-max(abs(si-F))
ksmle<-max(D,d)
ksmle
```

```
##### kolmogorov-Smirnov test statistic with Bayes #####
```

```
F<-pbeta(1-exp(-lambda*x),a,b)
s<-(1:n)/n
si<-(1:n-1)/n
D<-max(abs(s-F))
d<-max(abs(si-F))
ksbayes<-max(D,d)
ksbayes
```

```
#####
```

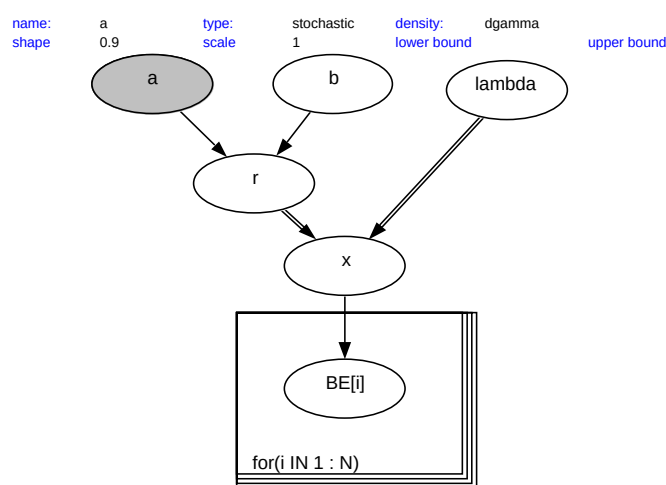
โปรแกรม WinBUGS

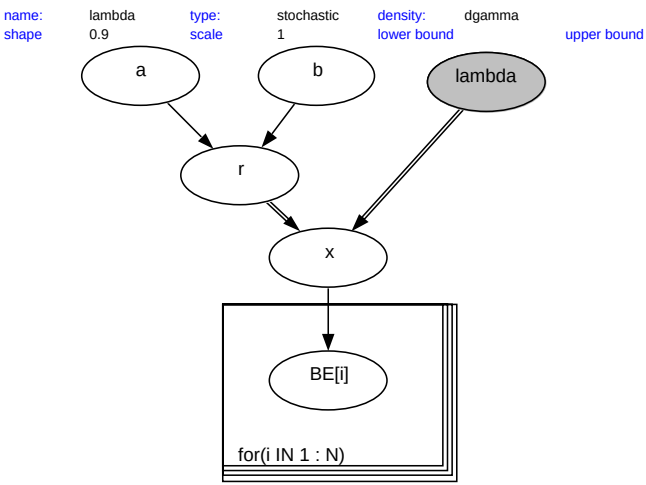
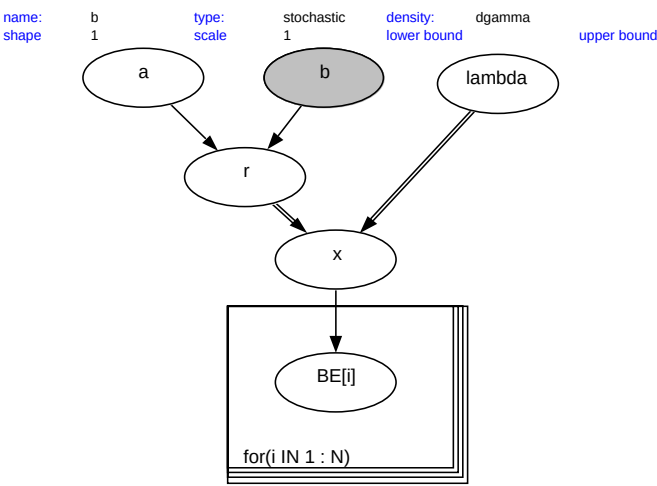
1. เกี่ยวกับโปรแกรม WinBUGS

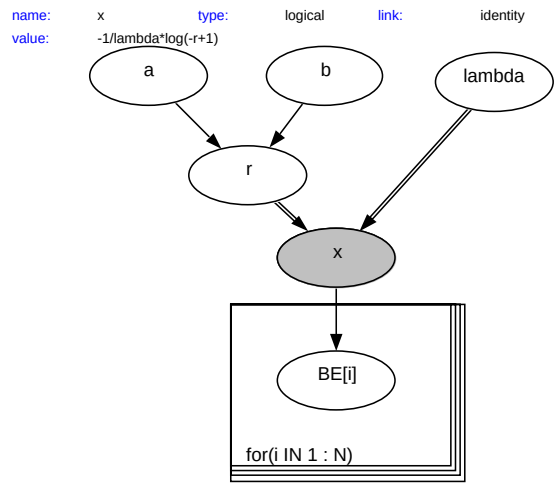
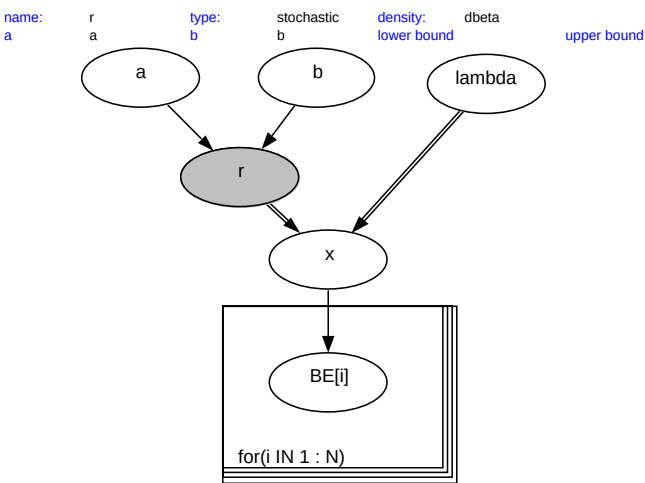
WinBUGS (Windows Bayesian inference Using Gibbs Sampling) เป็นโปรแกรมทางสถิติ ซึ่งถูกพัฒนาขึ้นมาจากโปรแกรมที่มีชื่อว่า BUGS สำหรับวัตถุประสงค์ในการสร้างขึ้นมาเพื่อทำการวิเคราะห์ข้อมูลแบบเบย์ โดยใช้เทคนิค Markov Chain Monte Carlo และต่อมาได้พัฒนาให้ใช้ได้กับระบบปฏิบัติการ Windows นั่นคือโปรแกรม WinBUGS ในปัจจุบันโดยสามารถดาวน์โหลดโปรแกรมได้จากเว็บไซต์ <http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/>

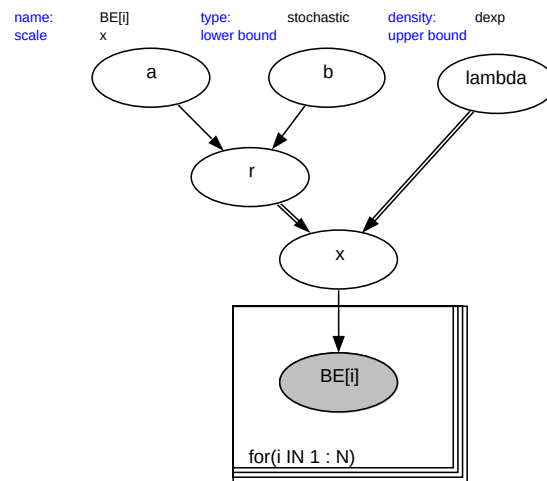
2. การสร้าง BUGS code เพื่อใช้ในการประมวลผล

2.1 ทำการสร้าง Doodle ในโปรแกรม WinBUGS จากเมนู Doodle > New... ได้ดังนี้









2.2 จาก Doodle สามารถสร้าง model ได้โดยการไปที่แถบเครื่องมือ Doodle > Write code จาก Doodle ในข้อที่ 2.1 จะเขียนเป็น model ได้ดังต่อไปนี้

```
model;
{
  a ~ dgamma(0.9,1)
  b ~ dgamma(1,1)
  r ~ dbeta(a,b)
  lambda ~ dgamma(0.9,1)
  x <- ((-1) / lambda) * log(-r + 1)
  for( i in 1 : N ) {
    BE[i] ~ dexp(x)
  }
}
```

เมื่อได้ model ดังกล่าวไว้ในหัวข้อที่ผ่านมาให้ทำการบันทึกไฟล์ให้เป็น .txt โดยตัวอย่างโปรแกรมในครั้งนี้นับที่ไฟล์ในชื่อ code111.txt

3. ประมวลค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีของเบส์ด้วยโปรแกรม WinBUGS ซึ่งประมวลผลภายใต้โปรแกรม R

โดยจะต้องทำการ Download Package R2WinBUGS ของโปรแกรม R เพราะต้องใช้คำสั่ง bugs ในการประมวลผล WinBUGS ในโปรแกรม R โดยมีขั้นตอนดังนี้

3.1 เลือก Packages บนแถบเครื่องมือ และเลือก Install package(s) จะขึ้นหน้าต่าง CRAN mirror

3.2 เลือก Thailand จะขึ้นหน้าต่าง Packages เลือก R2WinBUGS แล้วคลิกปุ่ม OK

3.3 กลับมาที่หน้าต่าง R console ทำการ load Package ขึ้นมาใช้ดังนี้
> library ("R2WinBUGS") โดยที่โปรแกรมที่ใช้ในการวิเคราะห์ได้กล่าวถึงมาแล้วในโปรแกรม R ข้างต้น

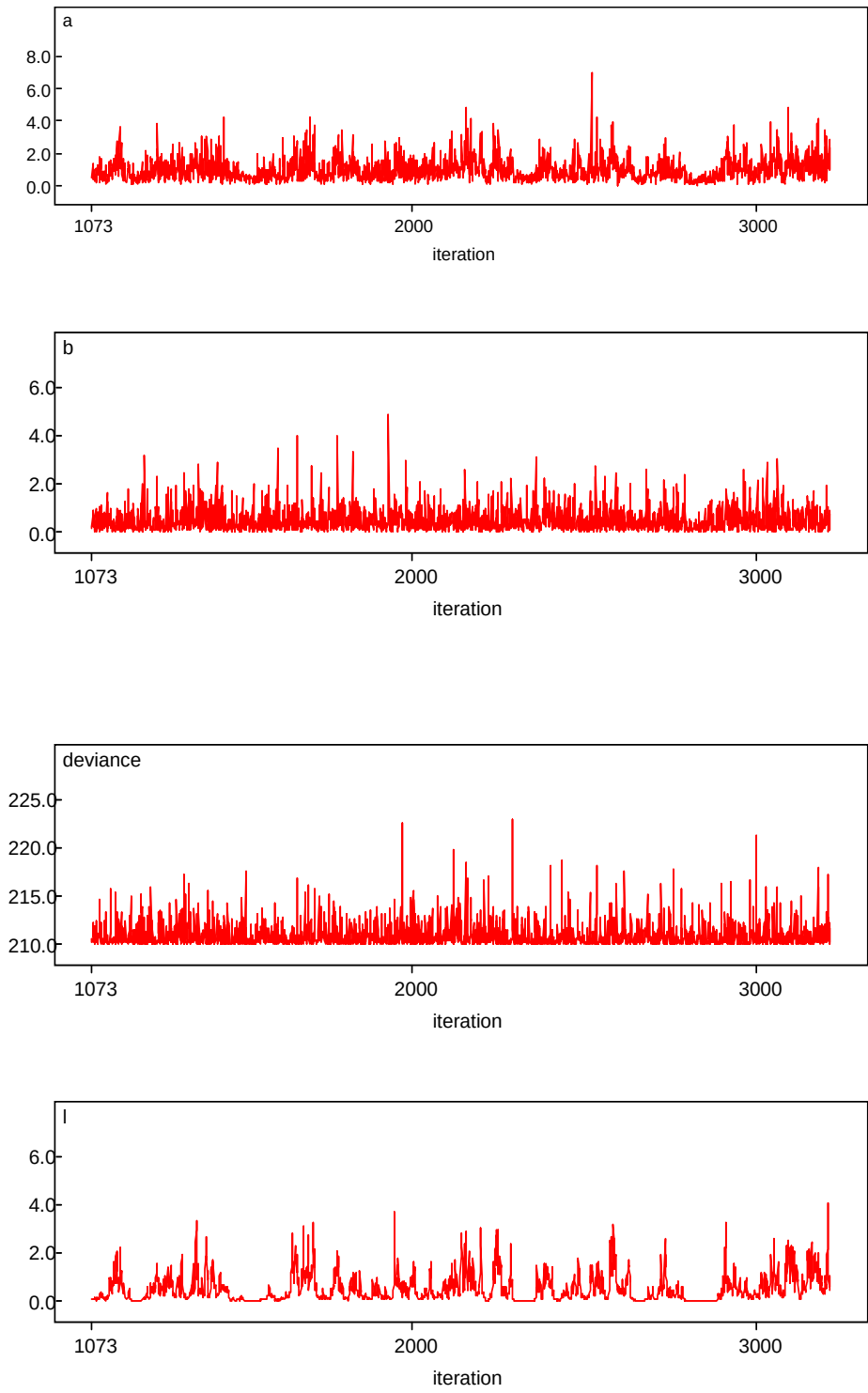
4. การแสดงผล

การแสดงผลสามารถแสดงได้ในทั้ง 2 ส่วน โปรแกรมทั้งในส่วนของโปรแกรม R และแสดงผลใน WinBUGS

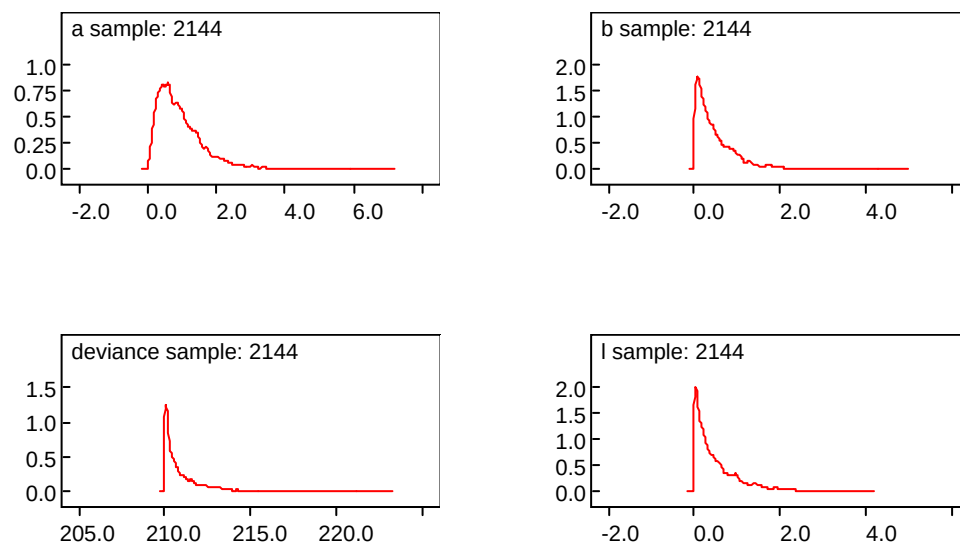
การแสดงผลในโปรแกรม R ในส่วนของฟังก์ชัน bugs() ใช้คำสั่ง "debug=FALSE" และสำหรับการแสดงผลในโปรแกรม WinBUGS ในส่วนของฟังก์ชัน bugs() ใช้คำสั่ง "debug=TRUE" และผลลัพธ์ที่ได้จะขึ้นอยู่บนหน้าต่างของโปรแกรมของ WinBUGS กรณีตัวอย่างในการวิเคราะห์ผลข้อมูลจริงได้แสดงตัวอย่างผลการวิเคราะห์ในโปรแกรม WinBUGS ดังนี้

Node statistics								
	node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start
	a	0.9757	0.7029	0.04354	0.1503	0.8191	2.819	1073
	b	0.4933	0.5088	0.01399	0.01421	0.3293	1.862	1073
	deviance	211.0	1.331	0.02667	210.0	210.5	214.5	1073
	l	0.503	0.5692	0.04829	0.001641	0.3009	2.073	1073
dic.stats()								
DIC								
Dbar = post.mean of -2LogL; Dhat = -2LogL at post.mean of stochastic nodes								
	Dbar	Dhat	pD	DIC				
BE	210.960	210.230	0.730	211.689				
total	210.960	210.230	0.730	211.689				

history



Kernel density



ความหมายของค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ผล

node	คือ ตัวแปรที่เราต้องการประมาณค่าในที่นี้คือค่า a , b และ λ
mean	คือ ค่าเฉลี่ยของตัวแปรที่ต้องการประมาณ
sd	คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าที่ได้จากการจำลอง
MC error	คือ ค่าความผิดพลาดของขบวนการมอนติคาโล ลักษณะค่าที่ดีจะมีค่าเข้าใกล้ 0
median	คือ ค่ามัธยฐานหรือค่าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 50 ที่ได้จากการจำลอง
start	คือ ค่าเริ่มต้นของข้อมูลที่ทำกรจำลอง
sample	คือ จำนวนตัวอย่างที่ได้จากการจำลอง

ลักษณะของ history เป็นกราฟระหว่างค่าตั้งเกิดกับค่าเฉลี่ย ค่าเริ่มต้นถึงค่าสุดท้ายขึ้นอยู่กับ การ update ลักษณะกราฟที่ดีต้องมีการแกว่งขึ้นลงรอบค่าเฉลี่ยอย่างสม่ำเสมอ (stationary)

ลักษณะของ density การแจกแจงก่อนมีลักษณะแบบใดลักษณะกราฟของการแจกแจงหลัง ต้องมีลักษณะเป็นแบบนั้น โดยกราฟจะต้องมีลักษณะ smooth

ประวัติการศึกษา และการทำงาน

ชื่อ –นามสกุล	นางสาวดาริกา เข้มรับบุญ
วัน เดือน ปี ที่เกิด	วันที่ 1 เมษายน 2527
สถานที่เกิด	อำเภอเมือง จังหวัดพิษณุโลก
ประวัติการศึกษา	วท.บ. (สถิติ) เกียรตินิยม อันดับ 1 มหาวิทยาลัยนเรศวร
ตำแหน่งหน้าที่การงานปัจจุบัน	-
สถานที่ทำงานปัจจุบัน	-
ผลงานดีเด่นและรางวัลทางวิชาการ	ประกาศนียบัตรคะแนนยอดเยี่ยม หลักสูตรวิทยาศาสตรบัณฑิต สาขาวิชาสถิติ จากมูลนิธิ ศาสตราจารย์ ดร. แถบ นิละนิตี
ทุนการศึกษาที่ได้รับ	-