บทที่ 3
การวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงความเสี่ยงที่ใช้ในแบบจำลอง

ข้อกำหนดที่สำคัญในการวางแผนเปิดหน้างานก่อสร้าง ได้แก่ ค่าใช้จ่ายในการปฏิบัติการ ซึ่งต้องพิจารณาควบคู่กับความปลอดภัยในระบบงาน ทั้งนี้จัดเป็นหน้าที่กับความรับผิดชอบของวิศวกรและผู้ควบคุมหน้างานขุดเจาะ ที่จะต้องทำให้การปฏิบัติงานมีความเสี่ยงของโอกาสเกิดการพังทลายจากมวลสารน้อยสุด และค่าใช้จ่ายที่ใช้ในการป้องกันไม่สูงมากเกินไป อุปสรรคที่สำคัญในการวางแผนออกแบบหน้างานขุดเจาะ มักจะเป็นเรื่องข้อมูลที่นำมาใช้ในการวิเคราะห์ไม่มีความครบถ้วนสมบูรณ์ ทำให้ความมั่นใจในเรื่องความเสี่ยงลดน้อยลงไป

3.1 หลักการทั่วไปในการวิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงสถิติ

การวิเคราะห์ข้อมูลผลลัพธ์เชิงสถิติ สำหรับงานธรณีเทคนิคที่เกี่ยวข้องกับการเปิดหน้างานขุดเจาะ มีสมการหลักที่สำคัญเพื่อใช้วิเคราะห์ผลลัพธ์เชิงสถิติที่เป็นข้อมูลเข้าของตัวแปรสุ่ม กับการแจกแจงฟังก์ชันข้อมูลตัวแปรสุ่ม การวิเคราะห์ใช้ความรู้พื้นฐานในการหาค่าตัวแปรเชิงความน่าจะเป็น ก่อนนำมาใช้เป็นแนวทางในการสร้างต้นแบบของแบบจำลองเชิงความเสี่ยงต่อไป

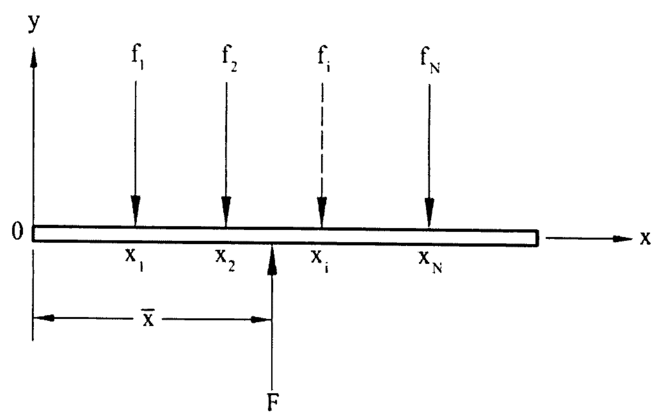
3.1.1 สมการพื้นฐานในการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงสถิติ

สมการพื้นฐานที่ใช้วิเคราะห์ข้อมูลเชิงสถิติ มีตัวแปรที่ต้องการหาค่าทั้งหมด 7 พจน์ แยกออกเป็น 2 กลุ่ม <u>กลุ่มแรก</u> จะเป็นพจน์ตัวแปรเชิงสถิติที่ต้องหาค่าเกือบทุกครั้งที่ทำการวิเคราะห์ ได้แก่ ค่าเฉลี่ย (mean) ค่าการคาดหมาย (expected value or expectation) ค่าความแปรปรวน (variance) ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation) ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (coefficient of variation) <u>กลุ่มที่สอง</u> เป็นพจน์ตัวแปรเชิงสถิติที่ไม่ได้ใช้บ่อย แต่มักใช้ในกรณีที่ต้องการตรวจสอบผลของการแจกแจงฟังก์ชัน ได้แก่ ค่าความเบ้หรือสภาพไขว้ข้าม (skewness) กับค่าเคอร์โทซิสหรือเรียกว่าภาวะยอดมน (kurtosis)

3.1.2 ค่าเฉลี่ยกับค่าการคาดหมาย

การวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็น อิงตามหลักธรรมชาติว่า ค่าสมบัติของมวลสาร (mass properties) มีความแปรผันตลอดเวลา ค่าสมบัติมวลสาร เช่น ค่าหน่วยน้ำหนัก ค่าการยึดเกาะกัน

หรือโคฮีชัน และค่ามุมความเสียดทาน เป็นต้น ค่าพจน์ตัวแปรสุ่มเหล่านี้ใช้ในการวิเคราะห์เพื่อหาค่าเฉลี่ย (mean) หรือค่าการคาดหมาย (expected value) จากกลุ่มตัวอย่าง การเปรียบเทียบความแตกต่างของพจน์ 2 ค่านี้ เพื่อให้มีความหมายใกล้เคียงกันกับวิธีสมมุติเชิงกลศาสตร์ ดังรูปที่ 3.1 กำหนดให้มีแรงแนวขนานที่แยกอิสระไม่ต่อเนื่องกัน (discrete) มีค่าขนาดแรงตั้งแต่ f_1, f_2, ...f_N กระทำบนคานแข็งเกร็ง (rigid beam) ตรงตำแหน่งในแนวราบที่ x_1, x_2, ...x_N



รูปที่ 3.1 ระบบของแรงแนวดิ่งที่ไม่ต่อเนื่องกัน แรงกระทำบนคานแข็งเกร็ง

จากความรู้เชิงสถิตยศาสตร์ หาค่าขนาดของแรงที่ทำให้สมดุล (ค่า F) ได้แก่

$$F = \sum_{i=1}^{N} f_i \tag{3.1}$$

ตำแหน่งที่แรง F กระทำบนคานในแนวราบ คือ จุด $\bar{x}$ จากความสัมพันธ์เชิงโมเมนต์

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i f_i}{F} \tag{3.2}$$

สมมุติให้แรงมีลักษณะแยกอิสระไม่ต่อเนื่องกัน (discrete force) ในรูปที่ 3.1 แสดงผลลัพธ์ของค่าโอกาสความน่าจะเป็นเท่ากับ N (N outcome occurrences) จากทฤษฎีเชิงความน่าจะเป็นทำให้ระบุผลลัพธ์ของ probability of outcome (ค่า P)

$$P[\text{success}] + P[\text{failure}] = 1 \tag{3.3}$$

เมื่ออิงตามสมการ 3.3 ขนาดของค่า F = 1 เป็นผลจากการเกิดความสมดุล (หรือเป็น unity) จึงกำหนดพจน์ตัวแปรที่ต้องการหาค่าเป็นพจน์ของการคาดหมาย (E[x]) เรียกชื่อภาษาอังกฤษเป็น expected value หรือ expectation ของตัวแปรสุ่ม x (ของรูปที่ 3.1) จัดเป็นค่าตรวจวัดการแจกแจงที่เป็นค่าแนวโน้มสู่ส่วนกลางกลาง (central tendency) แสดงเป็นสมการข้างล่าง

$$E[x] = \bar{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i f_i \tag{3.4}$$

ค่า E[x] มีความสัมพันธ์กับค่าเฉลี่ยเชิงคณิตศาสตร์ (arithmetic mean) ที่หาจากผลรวมของจำนวนทั้งหมด แต่ความแตกต่างของพจน์ทั้งสอง "mean and expected value" ได้แก่ ค่าเฉลี่ยเชิงคณิตศาสตร์ (arithmetic mean) เป็นการตรวจวัดค่ากลางของตัวอย่างที่สมมุติให้แต่ละตัวอย่างที่ตรวจสอบมีโอกาสความน่าจะเป็นของการเกิดเท่ากัน (equal probability of occurring) แต่ค่าการคาดหมาย (expected value) เป็นการตรวจวัดค่ากลางของตัวอย่างที่สมมุติให้แต่ละตัวอย่างที่ตรวจสอบโอกาสความน่าจะเป็นของแจกแจงฟังก์ชันตัวแปรสุ่ม (probability of distribution of a random variable) แตกต่างกัน ดังนั้น ในรูปที่ 3.1 จึงควรใช้ค่า E[x] มากกว่าใช้ค่า $\bar{x}$ ในการหาค่าความน่าจะเป็นที่เกี่ยวข้องกับความเสี่ยงและโอกาสการพังทลาย ทั้งนี้เพราะว่าในความเป็นจริง ค่าสมบัติมวลสาร เช่น ความเสียดทาน ค่าการยึดเกาะกัน มีโอกาสของการเกิดแตกต่างกัน (different probabilities of occurring)

3.1.3 ค่าความแปรปรวน

เมื่อต้องการตรวจวัดการกระจายค่า (dispersion or scatter) ของการแจกแจงฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องของมวลสาร (discrete distribution of mass) ถ้าหากใช้รูป 3.1 เป็นต้นแบบ จากความรู้ในเรื่องกลศาสตร์ของวัสดุ ในระนาบ x-y หาค่าโมเมนต์ของความเฉื่อย (moment of inertia, I_y) ซึ่งเป็นค่าของโมเมนต์กลางที่สอง (second central moment) ได้เป็น

$$I_y = \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 f_i \tag{3.5}$$

ในเรื่องของทฤษฎีเชิงความน่าจะเป็น (probability theory) มีวิธีตรวจวัดการกระจายค่าของฟังก์ชันตัวแปรสุ่ม (ที่อาจเป็นค่าสมบัติมวลสาร พจน์ใดพจน์หนึ่ง) เพื่อวัดความแปรปรวนที่เกิดใน

ระบบที่กำลังทำการตรวจสอบ มีชื่อเรียกเป็นค่าความแปรปรวน (variance, V[x]) กรณีของรูปที่ 3.1 ค่าความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม x_i มีค่าเป็น

$$V[x] = V[x_i] = \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 f_i \tag{3.6}$$

หรือเขียนในอีกรูปแบบหนึ่ง เป็น

$$V[x] = [S.D.]_x^2 = (\sigma[x])^2 = \frac{1}{(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \tag{3.7}$$

ให้สังเกตว่า ตามทฤษฎีตัวเศษของสมการ 3.7 ควรเป็น N ไม่ใช่ (N − 1) แต่สำหรับกรณีของจำนวนอันตะ (finite number) มีโอกาสที่จะเกิดความเอนเอียง (bias) ได้ จึงควรใช้ค่า (N − 1) แทนค่า N ถ้าหากจำนวนตัวแปรสุ่มในระบบที่ตรวจสอบมีจำกัด

3.1.4 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

ในเชิงสถิติ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation, S.D.) เป็นดัชนีวัดการกระจายค่า (scattering) ของตัวแปรสุ่ม ถ้าหากตัวแปรมีความแตกต่างสูงในเรื่องของค่าขนาด ค่า S.D. (หรือใช้สัญลักษณ์เป็น σ_x) จะมีค่าสูงด้วย ในกรณีของรูปที่ 3.1 การกระจายค่าของตัวแปรสุ่ม x_i มีค่าความแปรปรวนเป็นมิติยกกำลังสองของตัวแปรสุ่ม ในส่วนของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน มีค่าเท่ากับรากกำลังสองที่มีค่าบวก (positive square root) เขียนเป็นสมการ

$$[S.D.]_x = \sigma[x_i] = \sqrt{V[x_i]} \tag{3.8}$$

หรือเขียนในอีกรูปแบบหนึ่ง เป็น

$$[S.D.]_x = \sigma[x_i] = \sqrt{\frac{1}{(N-1)} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2} \tag{3.9}$$

3.1.5 ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน

ค่าดัชนีที่ตรวจวัดการกระจายค่า (scattering) ของตัวแปรสุ่ม x_i ที่มีประโยชน์มากที่สุด เป็นค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (coefficient of variation, C.O.V.) ระบุหน่วยเป็นเปอร์เซ็นต์ ค่า C.O.V. ใช้วัดความเชื่อถือได้ของแนวโน้มสู่ส่วนกลาง (central tendency) แสดงเป็นสมการ

$$\text{C.O.V.} = \frac{\sigma[x_i]}{E[x_i]} \times 100 \ (\%) \tag{3.10}$$

หรือเขียนในอีกรูปแบบหนึ่ง เป็น

$$\text{C.O.V.} = \frac{\text{S.D.}}{\text{average value of x}} = \frac{(\text{S.D.})_{x_i}}{\bar{x}_{x_i}} \tag{3.11}$$

พจน์ S.D. เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม (random variables) พจน์ N เป็นจำนวนของตัวแปรสุ่ม x_i (ซึ่งเป็นค่าที่ได้จากการทดสอบตัวอย่างดินหรือหิน) และพจน์ $\bar{x}$ หรือ x_{ave} เป็นค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม ทั้งนี้หน่วยของ S.D. เป็นหน่วยเดียวกันกับค่าตัวแปรสุ่ม x_i ในส่วนของค่า C.O.V. ใช้หน่วยเป็น เปอร์เซ็นต์

ถ้าหากเปรียบเทียบพจน์ระหว่าง mean, coefficient of variation, standard deviation สมมุติว่าตัวแปรสุ่มในระบบมีค่า $\bar{x}$ = 10 และมีค่า C.O.V. = 10% แสดงว่ามีค่า S.D. = 1 ในขณะที่ถ้ามีค่า mean คงที่ แต่ค่ามี C.O.V. = 20% จะได้ S.D. = 2 นั่นคือ ถ้าตัวแปรสุ่มในระบบมีค่า S.D. สูง (ค่า C.O.V. สูงด้วย) แสดงว่ากลุ่มตัวอย่างของตัวแปรสุ่ม มีการกระจายค่าขนาดสูงด้วย

3.1.6 ค่าความเบ้หรือสภาพไขว้ข้าม

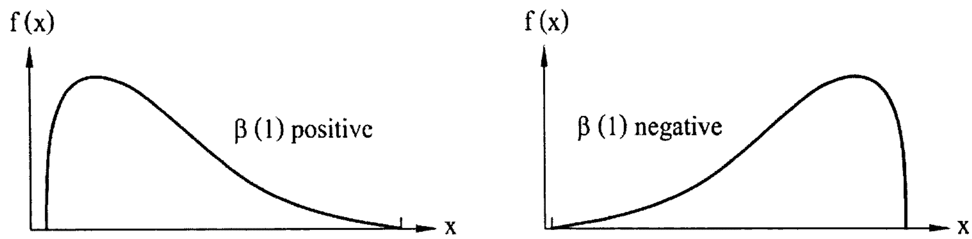
ค่าสัมประสิทธิ์ที่เรียกว่า ค่าความเบ้ (skewness) ใช้ตรวจวัดแนวโน้มของข้อมูลที่ใช้วิเคราะห์เป็นข้อมูลที่มีลักษณะไม่สมมาตร (asymmetry of data) ที่เกิดรอบค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์ ค่านี้เกิดจากโมเมนต์กลางที่สาม (third central moment) ค่าความเบ้นี้เป็นค่าไร้มิติ มีความสัมพันธ์เป็น

$$\beta(1) = \beta_1 = \frac{E[(x_i - \bar{x})^3]}{(\sigma[x_i])^3} \tag{3.12}$$

หรือเขียนในอีกรูปแบบหนึ่ง เป็น

$$\beta(1) = \beta_1 = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^3}{[\text{S.D.}]^3} \tag{3.13}$$

พจน์ $\beta(1)$ หรือ β_1 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของความเบ้ เกิดจากการหาจากค่ายกกำลังสามของค่าการคาดหมายต่อค่าความเบี่ยงเบนมาตรฐาน ถ้าหากผลลัพธ์ของความเบ้เป็นค่าบวก แสดงว่าแนวของเส้นกราฟมีปลายยาว (long tail) ออกไปทางด้านขวาของค่าเฉลี่ย (รูปที่ 3.2 ก.) แต่ถ้าหากผลลัพธ์ของความเบ้เป็นค่าลบ แสดงว่า แนวของเส้นกราฟมีปลายยาวออกไปทางด้านซ้ายของค่าเฉลี่ย (รูปที่ 3.2 ข.) อนึ่งในกรณีที่ $\beta(1) = 0$ (ศูนย์) แสดงว่าการแจกแจงฟังก์ชันมีลักษณะเป็นสมมาตรสมบูรณ์ (perfect symmetry)



ก. ข.

รูปที่ 3.2 ค่าความเบ้หรือสภาพไขว้ข้าม (skewness) ของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นตัวแปรสุ่ม
ก. ความเบ้บวก (positive skewness) ข. ความเบ้ลบ (negative skewness)

3.1.7 ค่าเคอร์โทซิสหรือภาวะยอดมน

ค่าสัมประสิทธิ์ที่เรียกว่า ค่าเคอร์โทซิสหรือภาวะยอดมน (kurtosis) ใช้ตรวจวัดความแบน (flatness) หรือความโด่ง (sharpness) ของจุดยอดของการแจกแจงค่า (distribution peak) ค่าไร้มิติของเคอร์โทซิส หาจากค่ายกกำลังสี่ของค่าการคาดหมายต่อค่ายกกำลังสี่ของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$\beta(2) = \beta_2 = \frac{E[(x_i - \bar{x})^4]}{(\sigma[x_i])^4} \tag{3.14}$$

หรือเขียนในอีกรูปแบบหนึ่ง เป็น

$$\beta(2) = \beta_2 = \frac{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^4}{[S.D.]^4} \tag{3.15}$$

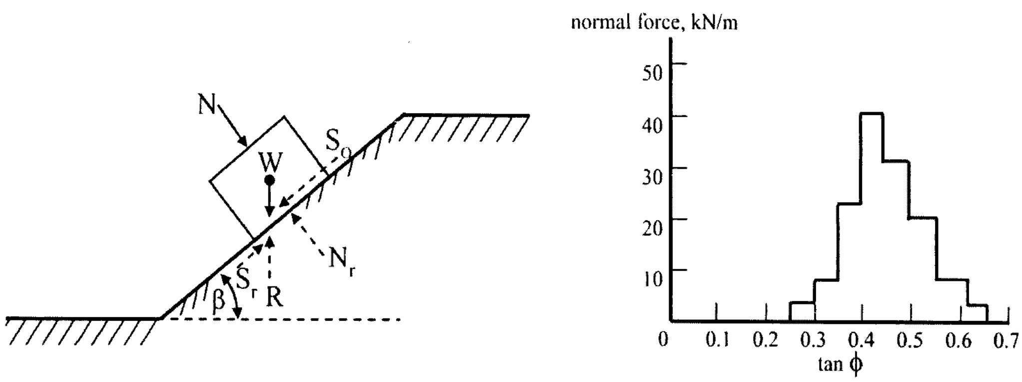
พจน์ β (2) หรือ β_2 เป็นค่าสัมประสิทธิ์ของค่าเคอร์โทซิส ถ้าหากผลลัพธ์ของค่าเคอร์โทซีส น้อยกว่า 3 แสดงว่าเส้นโค้งของการแจกแจงค่ามีความแบน (flattened curve) แต่ถ้าค่าเคอร์โทซิส มากกว่า 3 แสดงว่าเส้นโค้งของการแจกแจงค่ามีความโด่ง (sharply peaked curve) นั่นคือ ถ้าหากค่า β (2) = 3 แสดงว่าการแจกแจงค่าของฟังก์ชันเป็นแบบปกติ (normal distribution)

3.2 แนวทางการใช้วิธีการจำลองแบบข้อมูล

การจำลองแบบข้อมูล (data simulation) เป็นวิธีการที่สะดวกในการนำข้อมูลมาคำนวณเพื่อหาค่าดัชนีเชิงเสถียรภาพซ้ำ หรือหาค่าความน่าจะเป็นในเชิงสถิติซ้ำ ในงานเชิงวิศวกรรมการจำลองแบบข้อมูลทำให้เกิดความมั่นใจต่อพฤติกรรมการตอบสนองของมวลสาร

3.2.1 รูปแบบที่ใช้ในการแจกแจงฟังก์ชันของสมบัติมวลสาร

แนวทางการวิเคราะห์เชิงสถิติโดยตรง (direct statistical approach) ใช้การแจกแจงค่าตัวแปร เช่นกำหนดให้ตัวแปรมีการแจกแจง (distribution) ตัวแปรสุ่มในรูปแบบใดรูปแบบหนึ่ง เช่น ฟังก์ชันของตัวแปรเป็นแบบเอกรูป (uniform) เป็นแบบปกติ (normal) เป็นแบบลอการิทึมปกติ (lognormal or logarithmic normal) เป็นต้น



ก. ข.

รูปที่ 3.3 ตัวแปรสุ่มที่สำคัญที่มีผลต่อการไถลเลื่อน

ก. ภาพสเกตซ์การไถลเลื่อนบนระนาบหน้าความลาด

ข. ฮิสโทแกรมของตัวแปรสุ่ม 2 ค่า

ตัวอย่างการวิเคราะห์ผลลัพธ์โดยตรง เช่น เมื่อต้องการหาโอกาสของการไถลเลื่อนบนระนาบมีตัวแปรสุ่ม 2 ค่าที่สำคัญ และมีความสัมพันธ์กัน ได้แก่ แรงแนวฉากที่กระทำต่อมวลบน

ระนาบ กับค่ามุมเสียดทานภายในที่บริเวณฐานบล็อกมวลสารที่วางบนระนาบที่ก่อให้เกิดการไถลเลื่อน ถ้าทำการทดสอบหาค่าตัวแปรสุ่มทั้งสองในห้องปฏิบัติการสำหรับมวลดิน (หรือมวลหิน) เป็นจำนวนหลายค่า (ควรมากกว่า 10 ค่า) ใช้เครื่องมือที่เรียกว่า shear box test หาค่ากำลังเฉือนโดยตรงด้วย แล้วนำมาพล็อตเปรียบเทียบด้วยฮิสโทแกรมหรือกราฟรูปแท่ง (histogram) ซึ่งทำให้สามารถสรุปผลได้ว่า การแจกแจงฟังก์ชันระหว่างค่าแรงฉาก (normal force) กับค่าความเสียดทาน ($\tan \phi$) มีสมมุติฐานของการแจกแจงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มในรูปแบบของการแจกแจงปกติ (ดูรูปที่ 3.3)

นักวิจัยหลายท่าน มีแนวคิดว่า การแจกแจงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มแบบปกติ (normal) ที่ใช้สำหรับการวิเคราะห์หาเสถียรภาพมีความแปรผันสูง ทำให้ได้กราฟการแจกแจงเป็นแบบไม่สมมาตร (asymmetry) จึงเสนอแนะว่า การแก้ไขในเรื่องนี้ควรมีการแปลง (transformation) ตัวแปรสุ่มโดยการแทนตัวแปรสุ่ม x ด้วย $\ell n\ x$ จึงทำให้ได้ ค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงฟังก์ชันความหนาแน่น (probability density function: PDF) เป็นรูปแบบของลอการิทึมปกติ (lognormal) เอกสารที่ผู้วิจัยโครงการนี้ได้รวบรวมมาถึงปัจจุบัน เป็นกรณีที่ผู้วิจัยสมมุติให้ตัวแปรสุ่มมีฟังก์ชันการแจกแจงค่าเป็นแบบลอการิทึมปกติ ได้แก่ Lee et al. (1983, หน้า 65), Ang and Tang (1984, หน้า 285), Harr (1987, หน้า 138-141), Harrison and Hudson (2000, หน้า 330-332), Duncan and Wright (2005, หน้า 205-206)

3.2.2 รูปแบบอื่นของการแจกแจงฟังก์ชันของสมบัติมวลสาร

รูปแบบอย่างอื่นของการแจกแจงฟังก์ชัน เช่น แบบเอกรูป (uniform) แบบเลขชี้กำลัง (exponential) แบบเบตา (Beta) ยังไม่เหมาะสมกับค่าสหสัมพันธ์ (correlation) ระหว่างตัวแปรสุ่มที่เป็นค่าสมบัติมวลสารหรือเหมาะกับค่าขนาดมิติ (ความสูง ความกว้าง ความหนา) ของโครงสร้างมวลดิน (มวลหิน) จึงไม่มีการนำแนวคิดรูปแบบเหล่านี้มาใช้แพร่หลาย อาจมีการสมมุติเป็นแบบเอกรูปบ้าง แต่เป็นเฉพาะกรณี ไม่เหมือนกับการสมมุติการแจกแจงฟังก์ชันเป็นแบบปกติหรือเป็นลอการิทึมปกติ ที่นิยมใช้มากเกือบทุกกรณี ไม่ว่าเป็นเรื่องของการตัดความลาด การรับโหลดจากฐานราก การทำคันดินถม การเสริมเสถียรภาพ ที่ใช้การสมมุติเป็นการแจกแจงฟังก์ชันทั้งสองแบบ

3.3 แนวทางการใช้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานและค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน

ผู้วิจัยโครงการนี้ได้รวบรวมบทความวิจัยหลายโครงการ กับตำราหลายเล่มที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็นในการวิเคราะห์เพื่อหาผลลัพธ์ตัวแปรเชิงงานวิศวกรรม ส่วนใหญ่นักวิจัยเลือกใช้ค่า

เบี่ยงเบนมาตรฐานร่วมกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ใช้เป็นต้นแบบของการสร้างแบบจำลอง โดยแยกออกเป็น 4 แนวทางหลัก

3.3.1 แนวทางแรก

จากเอกสารของ Duncan and Wright (2005) ใช้หลักเกณฑ์ 3 S.D. ที่กำหนดว่า ตัวแปรสุ่มที่กำหนดมีการแจกแจงค่าแบบปกติ (normal distribution of random variables) นับเป็นจำนวน 99.73 % ของตัวแปรสุ่มที่มีการกระจายค่า (dispersion) อยู่ในขีดจำกัดของ 3 S.D. ส่วนตัวแปรสุ่มที่เหลือเพียง 0.27% มีการกระจายค่านอกขีดจำกัดของ 3 S.D. แสดงว่า ค่าตัวแปรสุ่มอยู่ในขีดจำกัดที่สูงจากค่าเฉลี่ย หรือเรียกชื่อเฉพาะเป็น the highest conceivable value of the variable (ใช้พจน์ตัวย่อเป็น HCV) อยู่เหนือกว่าค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ หรือ x_{ave} เท่ากับ 3 S.D. ส่วนตัวแปรสุ่มอยู่ในขีดจำกัดที่ต่ำจากค่าเฉลี่ย หรือเรียกชื่อเฉพาะเป็น the lowest conceivable value of the variable (ใช้พจน์ตัวย่อเป็น LCV) อยู่ต่ำกว่าค่าเฉลี่ย $\bar{x}$ หรือ x_{ave} เท่ากับ 3 S.D. เช่นเดียวกัน ทำให้สร้างสมการในรูปแบบที่เป็น 3 S.D. rule

$$\text{S.D.} \quad = \quad \frac{\text{HCV} - \text{LCV}}{6} \tag{3.16}$$

วิธีการใช้สมการ 3.16 สมมุติว่า ในการทดสอบดินภาคสนามด้วยวิธีทะลวงมาตรฐาน (standard penetration test, SPT) จากตัวอย่างดินทราย (sandy soil) ในการทดสอบ SPT ที่ blow count เท่ากับ 20 หรือ $N_{60} = 20$ ได้ค่าสูงสุดของมุมเสียดทาน เท่ากับ 45 องศา และได้ค่าต่ำสุดของมุมเสียดทาน เท่ากับ 25 องศา ส่วนค่าที่เหมาะที่สุด (most likely values, MLV) หรืออาจเรียกเป็นค่าเฉลี่ยที่น่าจะเป็นไปได้ เท่ากับ 35 องศา นำค่าที่กำหนดดังกล่าวไปแทนในสมการ 3.16 จะได้ S.D. = 3.3 องศา จากนั้นนำค่าที่คำนวณได้มาแทนในสมการ 3.2 จะได้ C.O.V. = 9 เปอร์เซ็นต์

3.3.2 แนวทางที่สอง

จากเอกสารของ Harr (1987) สนับสนุนหลักเกณฑ์ 3 S.D. ว่าสามารถใช้ได้กับการที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงค่าในรูปแบบอื่น เช่น แบบเอกรูป (uniform) แบบลอการิทึมปกติ (log-normal) เป็นต้น ต่อมา Christian and Baecher (2001) ทำการดัดแปลงหลักเกณฑ์ 3 S.D. โดยเริ่มจากการพิจารณาผลลัพธ์ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงค่าแบบปกติ (normal distribution of random variables) ถ้ามีจำนวนตัวแปรสุ่ม 20 ตัวแปรจะมีพิสัย (range) เท่ากับ 3.7 x (S.D.) และเมื่อตัวแปรสุ่มมีจำนวนเป็น 30 ตัวแปร จะมีพิสัยเท่ากับ 4.1 x (S.D.) ดังนั้น ถ้าทำการทดสอบตัวอย่างที่มีจำนวนตัวอย่าง ระหว่าง 20-30 ตัวอย่าง จะได้ค่าพิสัยระหว่าง HCV กับ LCV ที่สูงกว่า 3.7 และต่ำ

กว่า 4.1 Christian and Baecher จึงได้ปรับแก้ใหม่ให้ค่าใช้ตัวหารค่าพิสัยเท่ากับ 4 แทนที่จะเป็น 6 สมการที่ปรับค่าใหม่เป็น

$$\text{S.D.} = \frac{\text{HCV} - \text{LCV}}{4} \tag{3.17}$$

จากสมการ 3.17 ใช้ค่าเดียวกันกับแนวทางที่หนึ่ง หาค่าได้ S.D. = 5 องศา ส่วนค่าของ C.O.V. = 14 เปอร์เซ็นต์

3.3.3 แนวทางที่สาม

วิธีการนี้ดัดแปลงการวิเคราะห์ฟังก์ชันของนิพจน์ (expression) ที่ต้นฉบับรวบรวมมาจากเอกสารของ Rosenblueth (1975), Lee et al. (1983), Harr (1987) นักวิจัยดังกล่าวเสนอแนวทางที่มีชื่อเรียกเฉพาะว่า วิธีประมาณค่าเป็นจุด (point estimate method, PEM) โดยการทำให้ฟังก์ชันของอนุกรมเทยเลอร์ (Taylor's series) ถูกตัดปลายให้สั้นลง และค่าข้อมูลเข้าของตัวแปรสุ่ม แสดงในรูปแบบของค่าการคาดหมายและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ข้อเด่นของวิธี PEM นี้ใช้ความรู้เชิงสถิติพื้นฐานก็สามารถทำการคำนวณด้วยมือ (hand calculation) และไม่ต้องใช้การแจกแจงค่าที่สมบูรณ์ (หมายถึง ต้องมีข้อมูลที่ใช้วิเคราะห์มากพอจึงได้ค่าการแจกแจงที่ดี) ข้อเสียของวิธี PEM เป็นการประมาณค่าหลายขั้นตอน ทำให้ผลลัพธ์สุดท้ายมีความแตกต่างจากวิธีแม่นตรง (exact method) จึงควรใช้ร่วมกับวิธีการอื่นเพื่อเปรียบเทียบ วิธีการของ PEM จะมีการอธิบายขั้นตอนอย่างละเอียด ในหัวข้อ 3.4 ของบทนี้ โดยแยกเป็นการวิเคราะห์อาศัยตัวแปรสุ่มเพียงค่าเดียว ตัวแปรสุ่มสองค่า และตัวแปรสุ่มสามค่า จำนวนตัวแปรสุ่มมากกว่าสามค่า ไม่เหมาะสมที่จะใช้วิธีการนี้

3.3.4 แนวทางที่สี่

แนวทางที่สี่ผู้วิจัยโครงการนี้อิงจากเอกสาร 2 แหล่ง ได้แก่ Harr (1987) กับ Duncan and Wright (2005) ที่เป็นการรวบรวมค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันจากเอกสารการวิจัยจำนวนมาก และมีการคัดแยก กับทำการดัดแปลงมาใช้กับงานทางธรณีเทคนิคเพื่อต้องการใช้สำหรับการทดสอบตัวอย่างในห้องปฏิบัติการ

ในกรณีที่มีจำนวนตัวอย่างน้อย (น้อยกว่า 5 ตัวอย่าง) วิธีการเริ่มต้นเมื่อหาค่าเฉลี่ย (หรือกำหนดค่าเฉลี่ย) ของตัวแปรสุ่มแล้ว ให้กำหนดค่า C.O.V. ที่เหมาะสมเพื่อนำมาใช้หาค่า S.D. ทั้งนี้ ผู้วิจัยโครงการนี้ เสนอแนะให้ใช้ **ค่า C.O.V. ต่ำสุดที่ 15% กับใช้ค่า C.O.V. สูงสุดที่ 40%** ตามเหตุผลประกอบดังนี้

ตารางที่ 3.1 ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันสมบัติดิน (หิน) ในงานก่อสร้างเชิงวิศวกรรมธรณี ค่าตัวเลขเหล่านี้ เป็นค่าจากการทดสอบในห้องปฏิบัติการกับการทดสอบในที่ (in situ test) เพื่อหาพิสัยที่เป็นช่วงระหว่างค่าขีดจำกัดต่ำสุดกับสูงสุด

ตัวแปรค่าคุณสมบัติ	ค่าพิสัยของ C.O.V. (%)
หน่วยน้ำหนัก (unit weight)	3-10
โพรงอากาศในดิน (air void of soil)	16-30
มุมเสียดทานภายใน (internal friction angle)	2-13
กำลังวัสดุเฉือน (shear strength)	5-40
การยึดเกาะกันหรือโคฮีชัน (cohesion)	15-40
ความพรุน (porosity)	8-10
ความถ่วงจำเพาะ (specific gravity)	2-4
ปริมาณความชื้น (moisture content)	13-20
ระดับขั้นการอิ่มตัว (degree of saturation)	10-15
สัมประสิทธิ์การซึมผ่าน (coefficient of permeability)	ไม่สามารถระบุได้
การทะลวงมาตรฐานของดิน (standard penetration test)	15-45
การทะลวงดินโดยใช้กรวย (cone penetration test on soil)	15-37
กำลังวัสดุเฉือนดินอ่อนโดยใช้การบิด (vane shear test on soft soil)	10-20
ดัชนีการอัดของดิน (compression soil index)	15-30

<u>หมายเหตุ</u> เอกสารอ้างอิงสำหรับข้อมูลในตารางที่ 3.1

1. Duncan (2000), Factors of Safety and Reliability in Geotechnical Engineering.
2. Duncan and Wright (2005), Soil Strength and Slope Stability.
3. Harr (1987), Reliability – Based in Civil Engineering.
4. Kulhawy (1992), On the Evaluation of Soil Properties.
5. Lacasse and Nadim (1997), Uncertainties in Characterizing Soil Properties.
6. Lee et al. (1983), Geotechnical Engineering.

– ค่า C.O.V. ที่กำหนดให้มี ค่าต่ำสุด (หรือ LCV) เท่ากับ 15 % นั้น ค่าที่ 15 % นี้ ผู้วิจัยโครงการนี้อิงจากเอกสารของ Duncan and Wright (2005) หน้า 203 ที่ระบุว่า สมบัติดินหลายค่านั้นค่ากำลังวัสดุเฉือนมีความแปรผันสูงกว่าค่าสมบัติอื่นถ้าการทดสอบมีการควบคุมให้ได้มาตรฐาน ค่า C.O.V. ควรอยู่ที่ระดับ 15% ในกรณีที่นำค่า 15 % นี้มาใช้ จัดว่าเป็นความคิดเชิงอนุรักษ์ (conservative idea) ในทำนองเดียวกัน ถ้าตัวอย่างที่ทดสอบเป็นหิน ปกติหินมีความแปรผันเชิงสมบัติมวลสารต่ำกว่าดิน เมื่อนำค่า C.O.V. ที่ 15 % นี้มาเป็นค่าต่ำสุด แสดงว่าเหมาะสมแล้ว

– ค่า C.O.V. ที่กำหนดให้มี ค่าสูงสุด (หรือ HCV) เท่ากับ 40 % นั้น ค่าที่ 40 % ผู้วิจัยโครงการนี้อิงจากเอกสารในตาราง 1.8.1 หน้า 30-31 ของ Harr (1987) ที่ระบุว่า สมบัติดินจำนวนหลายค่านั้น ค่ากำลังวัสดุเฉือนมีความแปรผันสูงได้ถึงที่ค่า C.O.V. เท่ากับ 40 % นอกจากนี้ในตารางที่ 3.1 หน้า 30 ผู้วิจัยโครงการนี้ ได้รวบรวมมาจากบทความวิจัยกับตำราหลายเล่ม โดยเลือกเฉพาะตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับงานธรณีเทคนิค พบว่า ค่า C.O.V. ของสมบัติมวลสาร (ดินและหิน) มีสมบัติบางชนิดที่น้อยมากที่พบค่า C.O.V. ที่สูงกว่า 40% ดังนั้น ค่าสมบัติของดินทั่วไปไม่ควรมีความแปรผันสูงกว่านี้ ถ้าหากเป็นสมบัติหินความแปรผันยิ่งไม่ควรมีค่า C.O.V. สูงกว่านี้เลย

3.4 วิธีประมาณค่าเป็นจุด

วิธีการประมาณค่าเป็นจุด (point estimate method, PEM) ดังอธิบายไว้ในหัวข้อนี้ ใช้สำหรับการหาผลลัพธ์ของการแจกแจงฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous distribution function) ทั้งนี้ได้แยกวิธีการวิเคราะห์เป็น 3 แบบ ขึ้นอยู่กับการสมมุติจำนวนตัวแปรสุ่มในระบบ

3.4.1 วิธี PEM สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง

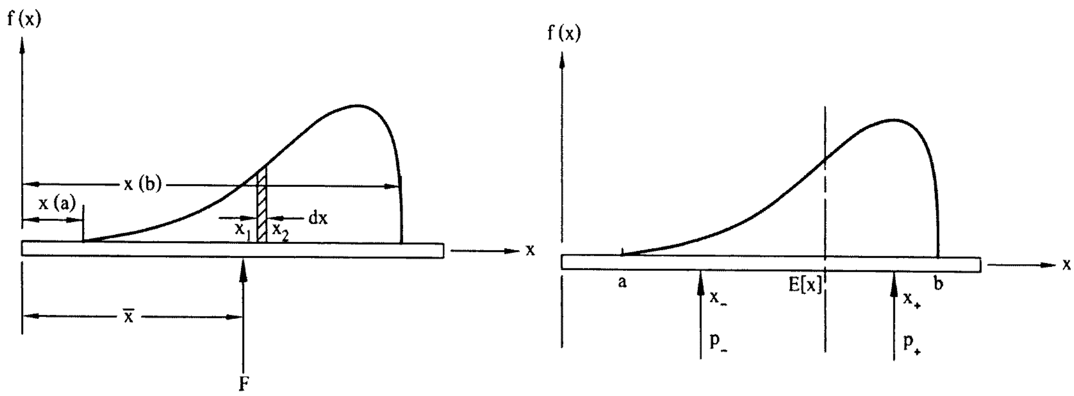
รูปที่ 3.4 แสดงแรงในแนวดิ่งที่แผ่กระจายต่อเนื่องบนคานแข็งเกร็ง ทั้งนี้รูปที่ 3.4 ก. กำหนดให้คานมีที่รองรับเพียงตำแหน่งเดียว (single support) ในขณะที่คานในรูปที่ 3.4 ข. มีที่รองรับสองตำแหน่ง (two supports) ดังนั้นจากแรงปฏิกิริยาที่กระทำบนคาน จึงแยกออกเป็นการประมาณค่าเพียงจุดเดียวสำหรับรูปที่ 3.4 ก. และเป็นการประมาณค่าสองจุด สำหรับรูปที่ 3.4 ข.

ดังนั้นจากรูปที่ 3.4 ก. เมื่อแรงแนวดิ่งกระทำแผ่กระจายจากตำแหน่ง x (a) ไปจนถึง x (b) หาค่าขนาดของแรงปฏิกิริยา F ที่รองรับได้

$$F = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx \tag{3.18}$$

พื้นที่ภายใต้ f (x) ระหว่าง x (a) ถึง x (b) มีความเป็นไปได้อย่างเดียว (uniqueness)

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x)\,dx = 1 \tag{3.19}$$



ก.

ข.

รูปที่ 3.4 แรงแนวดิ่งที่แผ่กระจายอย่างต่อเนื่องบนคานที่แข็งเกร็ง

ก. แรงปฏิกิริยาที่รองรับหนึ่งจุด แรงปฏิกิริยา คือ F

ข. แรงปฏิกิริยาที่รองรับสองจุด แรงปฏิกิริยา คือ p_- และ p_+

จากรูปที่ 3.4 ก. ที่ตำแหน่งแรงปฏิกิริยากระทำ ระยะ $\bar{x}$ จากจุดกำเนิด จะได้ค่าการคาดหมายของตัวแปรสุ่ม x มีค่าเป็น

$$E[x] = \bar{x} = \int_{x(a)}^{x(b)} x\, f(x)\,dx \tag{3.20}$$

ทำให้ได้ค่าความแปรผปรวน (V [x]) กับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ([S.D.]^2 หรือ $(\sigma[x])^2$)

$$V[x] = (\sigma[x])^2 = \int_{x(a)}^{x(b)} (x-\bar{x})^2 f(x)\,dx \tag{3.21}$$

เขียนในอีกรูปแบบหนึ่ง

$$V[x] = E[x^2] - (E[x])^2 \tag{3.22}$$

ความสัมพันธ์ระหว่างค่าความแปรปรวนกับค่าการคาดหมายในสมการที่ 3.22 เป็นสมการหลักที่ใช้ในการประมาณค่าแบบเป็นจุด (วิธี PEM)

3.4.2 วิธี PEM สำหรับประมาณค่าฟังก์ชันต่อเนื่องตัวแปรเดียว

ถ้าหากกำหนดให้ y เป็นผลรวมของจำนวนตัวแปรสุ่ม และพจน์ α_i เป็นสัมประสิทธิ์ของตัว แปรสุ่ม x_i จะได้ความสัมพันธ์ คือ

$$y = \Sigma(\alpha_i)(x_i) \tag{3.23}$$

จากสมการ 3.23 จะได้ความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ย (mean) กับค่าความแปรปรวน (variance)

$$\bar{y} = E[y] = \Sigma(\alpha_i)(\mu_{x_i}) \tag{3.24}$$

$$V[y] = (\sigma[y])^2 = \Sigma(\alpha_i)^2 (\sigma[x_i])^2 \tag{3.25}$$

พจน์ μ กับ σ เป็นสัญลักษณ์แสดงค่าเฉลี่ยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ (normal distribution) ในกรณีของ y ที่เป็นผลคูณหรือเป็นฟังก์ชันที่ซับซ้อน (complicated function) ของตัวแปรสุ่ม x_i ทำให้ยากต่อการหาผลลัพธ์ Rosenblueth (1975) ใช้วิธีการประมาณค่าเชิงโมเมนต์ความน่าจะเป็น (probability moment) แทนวิธีการหาปริพันธ์เชิงตัวเลข (numerical integration)

ขั้นตอนของการคำนวณค่าประมาณ เริ่มต้นกำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเดียว (ที่มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ) นั่นคือ y = y (x) หรือยกตัวอย่างในลักษณะของค่าสมบัติมวลสาร เช่น องค์ประกอบของค่าความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุก (bearing capacity) เป็นฟังก์ชันกับตัวแปรที่เป็นค่ามุมเสียดทานภายใน (internal friction angle) ของมวลสาร เพียงค่าเดียว ฟังก์ชันดังกล่าวเขียนเป็นสมการได้รูปแบบ ดังนี้

$$x_{+} \;=\; \bar{x} + \sigma[x] \;=\; \text{mean}_{x} + [\text{S.D.}] \tag{3.26}$$

$$x_{-} \;=\; \bar{x} - \sigma[x] \;=\; \text{mean}_{x} - [\text{S.D.}] \tag{3.27}$$

$$y_{+} \;=\; y(x_{+}) \tag{3.28}$$

$$y_{-} \;=\; y(x_{-}) \tag{3.29}$$

จากสมการ 3.26-3.29 สามารถประมาณค่าที่เป็นค่าการคาดหมาย (ที่เท่ากับค่าเฉลี่ย) กับค่าความแปรปรวน ได้เป็น

$$E[y] \;=\; \mu_{y} = \bar{y} \;\approx\; P_{+}(y_{+}) + P_{-}(y_{-}) \tag{3.30}$$

$$V[y] \;=\; [\text{S.D.}]_{y}^{2} \;=\; (\sigma[y])^{2} \;\approx\; P_{+}(y_{+}^{2}) + P_{-}(y_{-}^{2}) - (\bar{y})^{2} \tag{3.31}$$

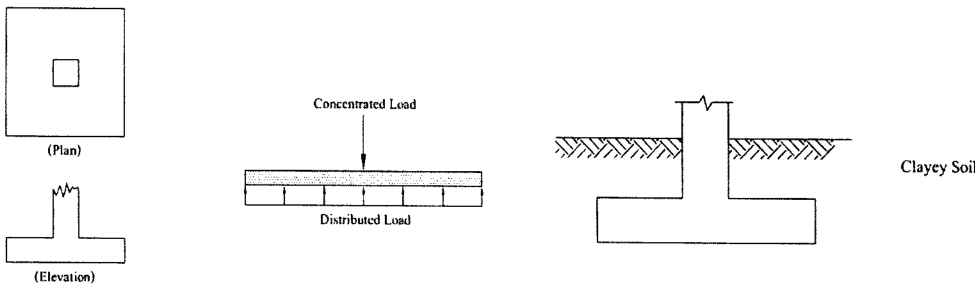
เมื่อกำหนดพจน์ P เป็นพจน์ความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ในระบบ ทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ของ P เป็น

$$P_{+} \;=\; P_{-} \;=\; 0.5 \tag{3.32}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของ P ในสมการ 3.32 ใช้สำหรับตัวแปรสุ่มเพียงค่าเดียวในกระบวนการวิเคราะห์ด้วยวิธี PEM

3.4.3 ตัวอย่างการวิเคราะห์วิธี PEM สำหรับตัวแปรเดียว

ตัวอย่างที่ใช้ในหัวข้อย่อยนี้ ใช้กับฐานรากตื้น มีชื่อเฉพาะว่า ฐานรากผนังหรือฐานรากแถบ (strip footing) ที่ใช้กับบ้านที่อยู่อาศัยขนาด 2-3 ชั้น (ดูรูปที่ 3.5 หน้าถัดไป) กำหนดให้ค่าตัวประกอบ 3 ค่าของความสามารถรับโหลดจากฐานรากแถบ ได้แก่ N_c ที่ขึ้นอยู่กับค่าสมบัติของการยึดเกาะกัน (cohesion), N_q ที่ขึ้นอยู่กับค่าสมบัติความเสียดทาน กับค่า N_γ ที่ขึ้นอยู่กับค่าสมบัติของหน่วยน้ำหนักมวลสาร ที่อิงกับค่ามุมเสียดทานภายใน (internal friction angle, ϕ) ดังแสดงค่าตัวประกอบของความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุก (bearing capacity) ไว้ในตารางที่ 3.2



ก.   ข.

รูปที่ 3.5 ฐานรากผนังหรือฐานรากแถบ (strip footing) รับโหลดปานกลาง
ก. เป็นผัง (plan)   ข. เป็นรูปตั้ง (elevation) ของฐานรากเดี่ยว

ตารางที่ 3.2 ค่าตัวประกอบของความสามารถในการรับน้ำหนักบรรทุก strip footing ที่มีฐานขรุขระ (rough base)   ใช้กับฐานรากที่วางตัวติดกับระดับน้ำใต้ดิน และมีความดันน้ำในโพรง (pore pressure) เกี่ยวข้องด้วย
[คัดลอกจากหน้า 341 (Lee et al., 1983)]

ϕ (degrees)	Bearing Capacity Factors			tan ϕ	cot ϕ	$\frac{N_q}{N_c}$
	N_c	N_q	N_γ			
0	5.14	1.00	0.00	0	∞	0.19
5	6.5	1.6	0.07	0.08	11.4	0.23
10	8.5	2.5	0.37	0.18	5.67	0.28
15	11	4	1.13	0.27	3.73	0.37
20	15	6	2.87	0.37	2.75	0.40
25	21	10	6.77	0.47	2.14	0.47
30	30	17	15.6	0.58	1.73	0.56
35	46	33	37	0.70	1.43	0.65
40	75	64	93	0.84	1.19	0.80
45	134	134	262	1.00	1.00	0.90
50	267	320	873	1.19	0.84	1.20

โจทย์ตัวอย่างที่ 3.1

จากตารางที่ 3.2 หน้า 35 ค่าตัวประกอบ N_q เป็นฟังก์ชันของมุมความเสียดทาน ϕ ถ้ากำหนดให้ค่าการคาดหมายของ ϕ สำหรับฐานรากแถบ (strip footing) มีค่าเท่ากับ 30 องศา และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน เท่ากับ 10 เปอร์เซ็นต์ จงคำนวณหาค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ N_q

ผลเฉลย

จากหัวข้อ 3.1.4 ใช้สมการที่ 3.10 คำนวณหาค่า $\sigma[\phi]$ ได้เท่ากับ 3 องศา

จากหัวข้อ 3.4.2 ใช้สมการที่ 3.26 – 3.27 กับตาราง 3.2 ประกอบ เพื่อหาค่าประมาณของ ϕ ที่เป็นตัวแปรเดี่ยว

$$\phi_+ = 30^\circ + 3^\circ = 33^\circ; \quad N_{q_+} = 26.6$$
$$\phi_- = 30^\circ - 3^\circ = 27^\circ; \quad N_{q_-} = 12.8$$

จากหัวข้อ 3.4.2 ใช้สมการที่ 3.30 หาค่าการคาดหมาย (ที่เท่ากับค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์)

$$\begin{aligned} E[N_q] &= \mu_{N_q} \approx P_+(N_{q_+}) + P_-(N_{q_-}) \\ &= 0.5(26.6) + 0.5(12.8) \\ &= 19.7 \end{aligned}$$

จากหัวข้อ 3.4.2 ใช้สมการที่ 3.31 หาค่าความแปรปรวน

$$\begin{aligned} [(S.D.)_{N_q}]^2 &= (\sigma_{N_q})^2 \approx P_+(N_{q_+})^2 + P_-(N_{q_-})^2 - (\mu_{N_q})^2 \\ &= 0.5(26.6)^2 + 0.5(12.8)^2 - (19.7)^2 \\ &= 47.6 \end{aligned}$$

นั่นคือ จะได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) เท่ากับ $\sigma[N_q] = 6.899 = 6.9$

3.4.4 วิธี PEM สำหรับประมาณค่าฟังก์ชันต่อเนื่องสองตัวแปร

ถ้าหากกำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มของ x_1 และ x_2 ดังที่แสดงเป็นตัวอย่างในรูปที่ 3.4 ข. หัวข้อ 3.4.1 ที่เป็นคานมีแรงปฏิกิริยารองรับสองตำแหน่ง นั่นคือ $y = y(x_1, x_2)$ ทำให้เขียนเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มสองค่า เป็น

$$y_{++} = y(x_{1+}, x_{2+}) \tag{3.33}$$

$$y_{+-} = y(x_{1+}, x_{2-}) \tag{3.34}$$

$$y_{-+} = y(x_{1-}, x_{2+}) \tag{3.35}$$

$$y_{--} = y(x_{1-}, x_{2-}) \tag{3.36}$$

ค่าการคาดการณ์ทั่วไป เมื่อหาที่ M^{th} moment มีค่าเป็น

$$E[y^M] = (P_{++}y_{++}^M) + (P_{+-}y_{+-}^M) + (P_{-+}y_{-+}^M) + (P_{--}y_{--}^M) \tag{3.37}$$

ในกรณีของสองตัวแปรสุ่มที่ไม่มีความสัมพันธ์กัน ค่า E [y] กับ V[y] เป็น

$$E[y] = \mu_y \approx (P_{++}y_{++}) + (P_{+-}y_{+-}) + (P_{-+}y_{-+}) + (P_{--}y_{--}) \tag{3.38}$$

$$V[y] = [S.D.]_y^2 = (\sigma[y])^2 \approx (P_{++}y_{++}^2) + (P_{+-}y_{+-}^2) + (P_{-+}y_{-+}^2) + (P_{--}y_{--}^2) \tag{3.39}$$

ค่าสัมประสิทธิ์ของความน่าจะเป็น P มีค่าเป็น

$$P_{++} = P_{--} = 0.25(1+\rho) \tag{3.40}$$

$$P_{+-} = P_{-+} = 0.25(1-\rho) \tag{3.41}$$

พจน์ตัวแปร ρ ที่อยู่ทางด้านขวาของสมการ 3.40-3.41 เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ระหว่างตัวแปรสุ่ม x_1 และ x_2 และค่าเฉลี่ยของแต่ละตัวแปรสุ่ม เป็น

$$\bar{x}_1 = E[x_1]; \quad \bar{x}_2 = E[x_2] \tag{3.42}$$

ปกติค่าสัมประสิทธิ์ของ ρ จัดเป็นค่าตัวประกอบถ่วงน้ำหนัก (weighting factor) มีค่าเป็นตัวเลขไร้มิติ มีเครื่องหมายเป็นบวก เครื่องหมายเป็นลบ หรือเป็นศูนย์ (แสดงว่า x_1 และ x_2 เป็นอิสระต่อกัน – independent ค่า ρ จึงเป็นศูนย์)

3.4.5 ตัวอย่างการวิเคราะห์วิธี PEM สำหรับตัวแปรสองค่า

ตัวอย่างที่ใช้ในหัวข้อย่อยนี้ ใช้กับการหาค่าโหลดสูงสุด ที่เป็นค่าความสามารถในการรับแรงแบกทานประลัย (ultimate bearing capacity, Q) ต่อหน่วยความยาวของฟุตติงยาว (long footing) ที่มีค่าตัวประกอบของความสามารถในการรับแรงแบกทานเป็น 3 ค่าระบุไว้ในตารางที่ 3.3

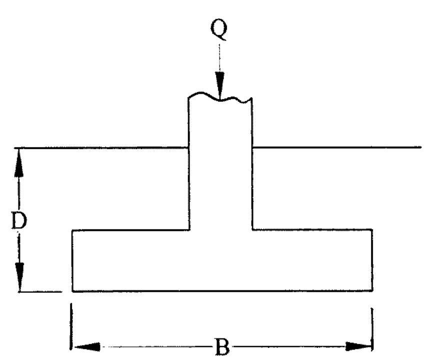
โจทย์ตัวอย่างที่ 3.2

ภาพตัดขวางของฟุตติงยาว ที่มีความกว้าง B = 8 ฟุต และฝังลึกใต้ระดับผิวดิน เท่ากับ D = 4 ฟุต (ดูรูปที่ 3.6) สมการแสดงความสัมพันธ์ของค่าโหลดสูงสุด Q ได้แก่

$$Q = \frac{\gamma B^2}{2} N_\gamma + \gamma D B N_q + c B N_c \tag{ก}$$

พจน์ γ เป็นค่าหน่วยน้ำหนักของดิน พจน์ c เป็นค่าการยึดเกาะกัน และพจน์ ϕ เป็นมุมเสียดทาน ค่าการคาดหมายกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของแต่ละตัวแปร แสดงไว้ในตารางที่ 3.4 กำหนดให้สัมประสิทธิ์การแปรผัน $\rho(\phi, c) = -0.50$

จงหาค่าการคาดหมาย กับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของความสามารถรับแรงแบกทาน Q



รูปที่ 3.6 ภาพตัดขวางของฟุตติงยาว

ตารางที่ 3.3 ค่าตัวประกอบของ bearing capacity สำหรับ long footing ที่อิง กับค่ามุมเสียดทาน [คัดลอกจากหน้า 214, (Harr, 1987)]

ϕ degrees	N_γ	N_q	N_c
0	0.00	1.00	5.14
5	0.45	1.57	6.49
10	1.22	2.47	8.34
15	2.65	3.94	10.98
20	5.39	6.40	14.83
25	10.88	10.66	20.72
30	22.40	18.40	30.14
35	48.83	33.30	46.12
40	109.41	64.20	75.31
42.5	170.25	91.90	99.20
45	271.75	134.87	133.87
50	762.86	319.06	266.88

ตารางที่ 3.4 ค่าที่กำหนดสำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 3.2 สำหรับ ตัวแปรสุ่มในระบบ 3 พจน์ตัวแปร

variable x	E[x]	σ[x]	x_+	x_-
γ, lb/ft^3	110	0	110	110
ϕ, degrees	35	5	40	30
c, lb/ft^2	200	80	280	120

ผลเฉลย

จากหัวข้อ 3.4.2 ใช้สมการที่ 3.26-3.27 กับตารางที่ 3.4 เพื่อประมาณค่าของ ϕ ที่เป็นตัวแปรเดี่ยว

$$\phi_{+} = 35 + 5 = 40^{\circ}$$
$$\phi_{-} = 35 - 5 = 30^{\circ}$$

ในทำนองเดียวกัน ใช้สมการ 3.26-3.27 และตารางที่ 3.3-3.4 จะหาตัวประกอบทั้ง 3 ค่าได้

$$N_{\gamma_+} = 109.41;\ N_{q_+} = 64.20;\ N_{c_+} = 75.31$$
$$N_{\gamma_-} = 22.40;\ N_{q_-} = 18.40;\ N_{c_-} = 30.14$$

เมื่อต้องการหาค่าโหลด Q ที่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปร 2 ค่า ได้แก่ ϕ และ c (กำหนดให้หน่วยน้ำหนัก, γ เป็นค่าคงที่) หรือหาค่า $Q(\phi,c) = Q_{ij}$ หน่วยมีค่าเป็น ตัน (สั้น) = 2000 ปอนด์ต่อฟุต ก่อนใช้สมการ 3.38-3.39 เพื่อหาค่าการคาดหมาย หรือค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐาน ให้หาค่าประมาณของค่าฟังก์ชันต่อเนื่อง 2 ตัวแปร $y = y(x_1, x_2)$ โดยใช้สมการ 3.33-3.36 แยกเป็น 2 คอลัมน์ ดังนี้

	Q_{ij}	$(Q_{ij})^2$
Q_{++}	389.90	152,022.63
Q_{+-}	341.70	116,760.53
Q_{-+}	105.56	11,143.93
Q_{--}	86.28	7,443.41

ในส่วนของค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ที่จัดเป็น weighting function หาจากสมการ 3.40 – 3.41 แยกเป็น

$\rho_{c,\phi}$	–0.5
P_{++}	0.125
P_{+-}	0.375
P_{-+}	0.375
P_{--}	0.125

ใช้สมการ 3.38 หาค่าการคาดหมาย

$$
\begin{aligned}
E[y] &= (P_{++}y_{++}) + (P_{+-}y_{+-}) + (P_{-+}y_{-+}) + (P_{--}y_{--}) \\
&= (0.125)(389.90) + (0.375)(341.70) + (0.375)(105.56) + (0.125)(86.28) \\
&= 227.25 \quad \text{tons/ft}
\end{aligned}
$$

ใช้สมการ 3.39 หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

$$
\begin{aligned}
\sigma[y] &= \sqrt{(0.125)(152{,}022) + (0.375)(116{,}760) + (0.375)(11{,}144) + (0.125)(86.3)} \\
&= 127.5 \quad \text{tons/ft}
\end{aligned}
$$

จากสมการ 3.10 หัวข้อ 3.1.5 ได้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ของ Q

$$
(C.O.V.)_Q = \frac{127.5}{227.25} \times 100 = 56.11\%
$$

3.4.6 วิธี PEM สำหรับประมาณค่าฟังก์ชันต่อเนื่องสามตัวแปร

ถ้าหากกำหนดให้ y เป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มของ x_1, x_2 และ x_3 นั่นคือ $y = y(x_1, x_2, x_3)$ ทำให้เขียนเป็นฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มสามค่า เป็น

$$
y_{+++} = y(x_{1+}, x_{2+}, x_{3+}) \tag{3.43}
$$

$$
y_{++-} = y(x_{1+}, x_{2+}, x_{3-}) \tag{3.44}
$$

$$
y_{+-+} = y(x_{1+}, x_{2-}, x_{3+}) \tag{3.45}
$$

$$
y_{+--} = y(x_{1+}, x_{2-}, x_{3-}) \tag{3.46}
$$

$$
y_{-++} = y(x_{1-}, x_{2+}, x_{3+}) \tag{3.47}
$$

$$
y_{-+-} = y(x_{1-}, x_{2+}, x_{3-}) \tag{3.48}
$$

$$y_{--+} = y(x_{1-}, x_{2-}, x_{3+}) \tag{3.49}$$

$$y_{---} = y(x_{1-}, x_{2-}, x_{3-}) \tag{3.50}$$

ค่าการคาดหมายกรณีที่เป็น M^{th} expectation เขียนเป็นรูปแบบตัวแปรสามค่า ดังนี้

$$E[y^M] = (P_{+++}y^M_{+++}) + (P_{++-}y^M_{++-}) + \ldots + (P_{---}y^M_{---}) \tag{3.51}$$

สมการ 3.49 มีทั้งหมด เท่ากับ $2^3 = 8$ พจน์ สำหรับวิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation) ของเครื่องหมายบวกและลบ ค่าโอกาสความน่าจะเป็น P ของทั้ง 8 พจน์ แยกได้เป็น 4 สมการ

$$P_{+++} = P_{---} = \frac{1}{8}(1+\rho_{12}+\rho_{23}+\rho_{31}) \tag{3.52}$$

$$P_{++-} = P_{--+} = \frac{1}{8}(1+\rho_{12}-\rho_{23}-\rho_{31}) \tag{3.53}$$

$$P_{+-+} = P_{-+-} = \frac{1}{8}(1-\rho_{12}-\rho_{23}+\rho_{31}) \tag{3.54}$$

$$P_{+--} = P_{-++} = \frac{1}{8}(1-\rho_{12}+\rho_{23}-\rho_{31}) \tag{3.55}$$

พจน์ตัวแปรที่เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient, ρ) ในสมการ 3.52-3.55 เขียนเป็นพจน์ทั่วไป ได้เป็น ρ_{ij} หมายถึง สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่ม x_i และ x_j การระบุเครื่องหมาย ใช้การคูณระหว่าง i กับ j

3.4.7 ตัวอย่างการวิเคราะห์วิธี PEM สำหรับตัวแปรสามค่า

โจทย์ตัวอย่างในกรณีใช้วิธี PEM สำหรับการวิเคราะห์ผลลัพธ์ 3 ตัวแปรนี้ ใช้วิธีการสมมุติจากคานเหล็กที่มีสภาพพลาสติกสูง (high plasticity)

โจทย์ตัวอย่างที่ 3.3

ค่าความสามารถของการต้านแรงดัด (flexural capacity) ของคานเหล็กที่มีสภาพพลาติกสูง คือ (y)(z) พจน์ y เป็นกำลังวัสดุที่จุดคราก (yield strength) และพจน์ z เป็นมอดุลัสหน้าตัด (section modulus) และโมเมนต์ของแรงดัด (bending moment) ของหน้าตัดที่กำหนด คือ m กำหนดให้มีค่าสถิติต่าง ๆ เชิงความน่าจะเป็น ดังตารางที่ 3.5

ตารางที่ 3.5 ค่าที่กำหนด สำหรับโจทย์ตัวอย่างที่ 3.3 ของ
ตัวแปรสุ่มในระบบที่มี 3 พจน์ตัวแปร

variable	expected value	coefficient of variation
y	40 ksi	12.5%
z	50 in^3	5%
m	1000 in. (kips)	20%

กำหนดให้ ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ $\rho_{y,z} = 0.4$, $\rho_{y,m} = 0$, $\rho_{z,m} = 0$ จงหาค่าการคาดหมายกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของคานเหล็กนี้ หน่วยกำลังวัสดุ ksi = 1000 lbs/in^2; หน่วยโมเมนต์ in. (kips) = inches x 1000 lbs

ผลเฉลย

จากหัวข้อ 3.4.2 ใช้สมการที่ 3.26-3.27 กับตารางที่ 3.5 เพื่อประมาณค่าของ y, z, m ที่เป็นตัวแปรเดี่ยว

$$y_+ = 40+5 = 45; \quad z_+ = 50+2.5 = 52.5; \quad m_+ = 1000+200 = 1200$$
$$y_- = 40-5 = 35; \quad z_- = 50-2.5 = 47.5; \quad m_- = 1000-200 = 800$$

เมื่อพิจารณาเรื่องแรงดัดในคานเหล็ก เมื่อสมมุติให้พจน์ SM เป็นค่าขอบความปลอดภัย (safety margin) ได้แก่

$$SM = yz - m$$

ใช้สมการของ 3.52-3.55 หาค่าโอกาสความน่าจะเป็นของ P

$$P_{i,j,k} = \frac{1}{8}[1 + (i,j)(0.4)] = 0.175; \quad i = j$$

$$= 0.075; \quad i \neq j$$

ส่วนค่า P ค่าอื่นนั้น เนื่องจากโจทย์ระบุ $\rho_{y,m} = \rho_{z,m} = 0$

ข้างล่างนี้เป็นการแสดงคอลัมน์การคำนวณหาค่า E [SM] กับค่า E [SM^2] ดังนี้

SM(y, z, m)	SM_{ijk}	P_{ijk}	$SM_{ijk}P_{ijk}$	$SM^2_{ijk}(1\times10^6)$	$SM^2_{ijk}P_{ijk}(1\times10^6)$
S_{+++}	1162.5	0.175	203.44	1.351	0.237
S_{++-}	1562.5	0.175	273.44	2.441	0.427
S_{+-+}	937.5	0.075	70.31	0.879	0.066
S_{+--}	1337.5	0.075	100.31	1.789	0.134
S_{-++}	637.5	0.075	47.81	0.406	0.030
S_{-+-}	1037.5	0.075	77.81	1.076	0.081
S_{--+}	462.5	0.175	80.94	0.214	0.038
S_{---}	862.5	0.175	150.94	0.744	0.130
		E[SM] =	1005.00	E[SM^2] =	1.143×10^6

จากการที่สมมุติให้การแจกแจงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่มทั้งสาม (y, z, m) เป็นแบบปกติ ใช้สมการที่ 3.22 หัวข้อ 3.4.1 หาค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐานของพจน์ SM ที่เป็น safety margin

$$\sigma[SM] = \sqrt{E[SM^2] - (E[SM])^2}$$

$$= \sqrt{1.143\times10^6 - (1005)^2} = 363.97$$

ใช้สมการ 3.10 หัวข้อย่อย 3.1.4 หาค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของ SM

$$(C.O.V.)_{SM} = \frac{\sigma[SM]}{E[SM]} \times 100 = \frac{363.97}{1005} \times 100 = 36.22\%$$

3.5 วิธีประยุกต์อนุกรมเทยเลอร์

ปัญหาหลักในการประเมินเชิงความน่าจะเป็น ได้แก่ ในระบบที่ต้องตรวจสอบมีตัวแปรสุ่มหลายค่า ถ้าหากใช้วิธีประมาณค่าเป็นจุด จะมีความยุ่งยากมาก ทำนองเดียวกันถ้าหากใช้วิธีกำหนดให้ฟังก์ชันเป็นแบบหาปริพันธ์ซ้อน (iterated integration) ก็จะมีความยุ่งยากมากในการแก้ปัญหา

3.5.1 อนุกรมเทยเลอร์พื้นฐาน

อนุกรมเทยเลอร์ หรือชื่อเต็มว่า "Taylor's series expansion" ปกติใช้กับฟังก์ชันที่ไม่มีลักษณะเชิงเส้น (linear) กำหนดให้การกระจายอนุกรม (series expansion) สำหรับทุกจำนวนอันตะ (all finite values) ของตัวแปรสุ่ม x เป็นแบบการลู่เข้า (convergence)

กำหนดให้ $y = f(x_N)$ ได้ค่าการประมาณเป็น

$$y = F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) \tag{3.56}$$

ถ้าหากทุกค่าของตัวแปรสุ่มตัวใดตัวหนึ่ง เช่น x_i จะเป็นอิสระ (independent) กับค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์ ($\bar{x}_i$) และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $[(S.D.)_{x_i}$ หรือ $\sigma(x_i)]$ Harr (1977) เสนอแนะว่าสามารถใช้การประมาณค่าจากอนุกรมเทยเลอร์

$$\bar{y} = E[y] = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_N) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} (\sigma[x_i])^2 \tag{3.57}$$

จากสมการ 3.54 เนื่องจากนิพจน์ที่สองของสมการทางด้านขวา สามารถละได้ (negligible) ทำให้ได้

$$\bar{y} = E[y] = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots, \bar{x}_N) \tag{3.58}$$

ในการวิเคราะห์เชิงธรณีเทคนิค ค่าตัวแปรสุ่มหลายค่า เช่น ความเสียดทาน ค่าการยึดเกาะกัน ค่าหน่วยน้ำหนัก สามารถหาค่าเฉลี่ย ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ค่าความแปรปรวน ในรูปแบบเดียวกันกับการหาค่าจากตัวแปรสุ่มเดียว

3.5.2 การวิเคราะห์ตัวแปรหลายตัวแปรโดยใช้อนุกรมเทยเลอร์

การวิเคราะห์ตัวแปรสุ่มโดยใช้อนุกรมเทยเลอร์นี้ ผู้วิจัยโครงการนี้กำหนดให้ใช้กับการแจกแจงฟังก์ชัน 2 รูปแบบ ได้แก่ รูปแบบปกติ และรูปแบบลอการิทึมปกติ นอกจากนี้ยังมีสมการพื้นฐานหลายสมการที่เกี่ยวข้องกับการแจกแจงฟังก์ชัน ดังแสดงไว้ในหัวข้อย่อยก่อนนำมาหาค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด

ก. ค่าเฉลี่ยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

กรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ (normal) สมการหาค่าเฉลี่ยหรือค่าการคาดหมายกับค่าเชิงสถิติอื่น ๆ จะใช้สมการที่ 3.4 กับสมการ 3.9 - 3.10 ในบทนี้

Ang and Tang (1984, 2007) เสนอแนะสมการเชิงประสบการณ์ (empirical equation) ในกรณีของตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ (lognormal) ถ้ากำหนดสัญลักษณ์พจน์ตัวแปรใหม่ ดังนี้

μ = ค่าเฉลี่ยหรือค่าการคาดหมายของตัวแปรสุ่มในการแจกแจงแบบปกติ

σ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มในการแจกแจงแบบปกติ

λ = ค่าเฉลี่ยหรือค่าการคาดหมายของตัวแปรสุ่มในการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติ

ζ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มในการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติ

ค่าเฉลี่ยหรือค่าการคาดหมายของตัวแปรสุ่มแบบลอการิทึมปกติ คือ

$$\lambda_Z = E[\ell n\, Z] = \sum_{i=1}^{N} \lambda\, x_i \tag{3.59}$$

$$\lambda_Z = \ell n[\mu_Z] - \frac{1}{2}(\zeta_Z)^2 \tag{3.60}$$

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มแบบลอการิทึมปกติ คือ

$$\left(\zeta_Z\right)^2 = \text{Variance of } \ell n\, Z = \sum_{i=1}^{N} \left(\zeta\, x_i\right)^2 \tag{3.61}$$

$$\left(\zeta_Z\right)^2 = \ell n\left[1 + \left(\frac{\sigma_Z}{\mu_Z}\right)^2\right] \tag{3.62}$$

ข. ค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด

ถ้าหากมีการแจกแจงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม ที่อาจเป็นแบบปกติหรือเป็นแบบลอการิทึมปกติ แล้วค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีโอกาสเป็นค่านี้มากที่สุด หรือมีชื่อเรียกว่า "Most Likely Value of Factor of Safety, $(F.S.)_{MLV}$" ได้แก่ (Wolff, 1994; Duncan and Wright, 2005)

$$(F.S.)_{MLV} = \frac{(F_1^+ + F_1^-) + (F_2^+ + F_2^-) + (F_3^+ + F_3^-) + \ldots + (F_N^+ + F_N^-)}{2(N)} \tag{3.63}$$

นิยามของพจน์ F_1^+ ในสมการ 3.63 เป็นค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่คำนวณจากวิธีเชิงกำหนด (deterministic method) ที่ใช้ตัวแปรที่หนึ่ง และตัวแปรที่หนึ่งนี้ มีการเพิ่มขึ้นจากเดิม เท่ากับ 1 S.D. ในขณะที่นิยามของพจน์ F_1^- ในสมการ 3.63 เป็นค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่คำนวณจากวิธีเชิงกำหนด (deterministic method) ที่ใช้ตัวแปรที่หนึ่ง และตัวแปรที่หนึ่งนี้ มีการลดลงจากเดิม เท่ากับ 1 S.D. เขียนค่าฟังก์ชันของตัวแปรที่หนึ่ง เป็น

$$x_1^+ = (\text{mean})_1 + 1(\text{S.D.})_1 \tag{3.64}$$

$$x_1^- = (\text{mean})_1 - 1(\text{S.D.})_1 \tag{3.65}$$

ค่านิพจน์ด้านขวาที่เป็น $(\text{mean})_1 + 1\ (\text{S.D.})_1$ ในสมการ 3.64 นำไปแทนค่าในสมการหาอัตราส่วนปลอดภัยที่ใช้วิธีเชิงกำหนด ในขณะที่ค่าตัวแปรอื่นใช้ค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์ปกติ ค่าผลลัพธ์ที่ได้ คือ F_1^+ ในทำนองเดียวกัน ค่านิพจน์ด้านขวาที่เป็น $(\text{mean})_1 - 1\ (\text{S.D.})_1$ ในสมการ 3.65 ในขณะที่ค่าตัวแปรอื่นใช้ค่าเฉลี่ยคณิตศาสตร์ปกติ ค่าผลลัพธ์ที่ได้ คือ F_1^-

อนึ่งในความหมายของคำว่า mean ถ้าเป็นตัวแปรสุ่มปกติ จะใช้ค่าพจน์ μ แทนในสมการ 3.64-3.65 แต่ถ้าเป็นตัวแปรสุ่มลอการิทึมปกติ จะใช้ค่าพจน์ λ แทนในสมการ 3.64-3.65 ส่วนความหมายของคำว่า S.D. ถ้าเป็นตัวแปรสุ่มปกติ จะใช้ค่าพจน์ σ แทน แต่ถ้าเป็นตัวแปรสุ่มลอการิทึมปกติ จะใช้ค่าพจน์ ζ แทน

ใช้วิธีการเดียวกัน จะเขียนพจน์ของตัวแปรที่สอง จนถึงตัวแปรที่ N ได้

$$x_2^+ = (\text{mean})_2 + 1(\text{S.D.})_2 \tag{3.66}$$

$$x_2^- = (\text{mean})_2 - 1(\text{S.D.})_2 \tag{3.67}$$

$$x_3^+ = (\text{mean})_3 + 1(\text{S.D.})_3 \tag{3.68}$$

$$x_3^- = (\text{mean})_3 - 1(\text{S.D.})_3 \tag{3.69}$$

$$x_N^+ = (\text{mean})_N + 1(\text{S.D.})_N \tag{3.70}$$

$$x_N^- = (\text{mean})_N - 1(\text{S.D.})_N \tag{3.71}$$

สมการที่ 3.66 ถึงสมการ 3.71 ค่าตัวแปรสุ่ม x_i (i = 1,2, 3,.....N) เป็นการสมมุติให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติหรือแบบลอการิทึมปกติ

ค. ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด

วิธีการในหัวข้อย่อยนี้คัดลอกจากหน้า 205 (Duncan and Wright, 2005) ซึ่งเสนอแนะวิธีการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (S.D.) กับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.O.V.) ที่มีความเป็นไปได้มากที่สุด

<u>ขั้นตอนที่ 1</u>

คำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มแต่ละตัวแปร จากข้อมูลที่ได้จากการตรวจวัดหรือจากการตรวจสอบภาคสนาม ยกตัวอย่าง $(\text{S.D.})_1$ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มที่หนึ่ง (กำลังวัสดุเฉือน); $(\text{S.D.})_2$ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มที่สอง (มุมเสียดทาน) ; $(\text{S.D.})_N$ = ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มที่ N (หน่วยน้ำหนัก) เป็นต้น

<u>ขั้นตอนที่ 2</u>

คำนวณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานนี้มีความแปรผันกับค่าอัตราส่วนปลอดภัย (ไม่ใช่กับตัวแปรสุ่มแรงต้าน หรือแรงไถลเลื่อน ชุดใดชุดหนึ่ง) จากสมการ

$$\sigma_{FS} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta F_N}{2}\right)^2} \tag{3.72}$$

พจน์ ΔF_1, ΔF_2, ΔF_3, ΔF_N มีความหมายถึงความแตกต่างระหว่างค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่คำนวณมาจากการเพิ่มหรือลด 1 S.D. ที่ระบุวิธีไว้ในหัวข้อ ก. เขียนเป็นสมการดังนี้

$$\Delta F_1 = (F_1^+) - (F_1^-) \tag{3.73}$$

$$\Delta F_2 = (F_2^+) - (F_2^-) \tag{3.74}$$

$$\Delta F_3 = (F_3^+) - (F_3^-) \tag{3.75}$$

$$\Delta F_N = (F_N^+) - (F_N^-) \tag{3.76}$$

<u>ขั้นตอนที่ 3</u>

คำนวณค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ที่น่าจะเป็นไปได้มากที่สุด และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันนี้มีความแปรผันกับค่าอัตราส่วนปลอดภัย จากสมการ

$$(C.O.V.)_{FS} = \frac{\sigma_{FS}}{(F.S.)_{MLV}} \tag{3.77}$$

เมื่อทราบค่าของ $(F.S.)_{MLV}$ กับค่า σ_{FS} ทำให้สามารถนำไปใช้คำนวณหาค่าความเชื่อถือได้ หรือนำไปใช้ในการหาค่าโอกาสการพังทลาย ซึ่งค่าทั้งสองค่านี้จะเป็นค่าที่มีความน่าจะเป็นไปได้มากที่สุด

3.5.3 ตัวอย่างการวิเคราะห์โดยใช้อนุกรมเทยเลอร์สำหรับหลายตัวแปร

โจทย์ตัวอย่างนี้ ดัดแปลงมาจากโจทย์ตัวอย่างหน้า 468 (Liu and Evett, 1998) ที่เป็นการหาเสถียรภาพของความลาดที่มีระนาบเปราะบางตัดผ่าน ค่าอัตราส่วนปลอดภัยเป็นฟังก์ชันกับตัวแปรสุ่มเพียง 3 ค่า ได้แก่ ค่าการยึดเกาะกัน (cohesion, c) กับค่ามุมเสียดทานภายใน (angle of internal friction, ϕ) กับค่ามุมเอียงของระนาบการพังทลาย (failure plane angle, ψ_p) ส่วนตัวแปรอื่นกำหนดให้เป็นค่าคงที่

โจทย์ตัวอย่างที่ 3.4

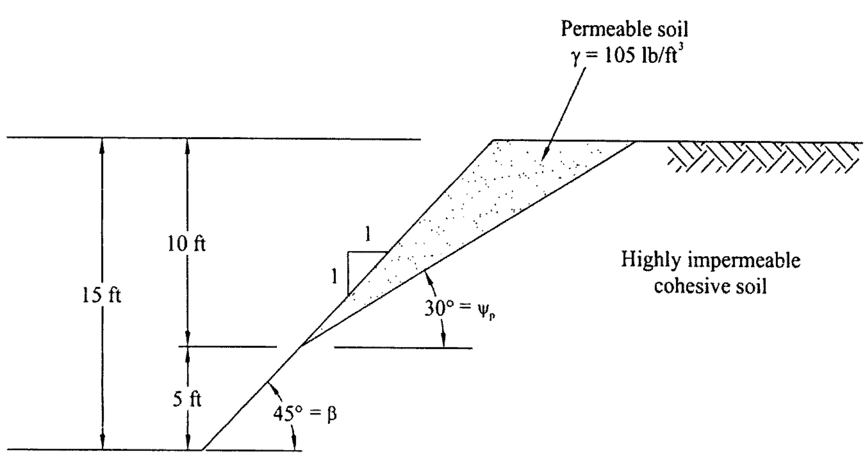
ในภาพตัดขวางของรูปที่ 3.7 แสดงความลาดของมวลดิน กำหนดสมการหาค่าอัตราส่วนปลอดภัย ดังนี้

$$F.S. = \frac{cL + W\cos\psi_p \tan\phi}{W\sin\psi_p} \quad (ก)$$

พจน์ β เป็นมุมความลาด = 45 องศา พจน์ ψ_p เป็นมุมระนาบการพังทลายในแนวระนาบเชิงเส้น (ระนาบ L ของสมการ ก) = 30 องศา พจน์ W เป็นน้ำหนักมวลดินที่เกิดการพังทลายแนวระนาบ ความสูงในแนวดิ่งของมวลดินความลาดที่จะพัง = 10 ฟุต ความสูงชั้นตะพักทั้งหมด = 15 ฟุต ส่วนตัวแปรสุ่ม c เป็นค่าการยึดเกาะกัน และ ϕ เป็นมุมเสียดทาน กำหนดค่าเชิงสถิติของตัวแปรสุ่ม (c, ϕ, ψ_p) ที่ระบุในตาราง ที่ 3.6 ถ้าหน่วยน้ำหนักดิน, γ = 105 ปอนด์ต่อลบ.ฟุต ต้องการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน กับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของอัตราส่วนปลอดภัย ที่มีการแจกแจงฟังก์ชัน 2 รูปแบบ ได้แก่ แบบปกติ และแบบลอการิทึมปกติ

ตารางที่ 3.6 ค่าเชิงสถิติของตัวแปรสุ่มในระบบ 3 พจน์ตัวแปร

ตัวแปรสุ่ม	ค่าเฉลี่ย (μ_x)	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ_x)
c, ปอนด์ ต่อ ตร.ฟุต	150	10
ϕ, องศา	25	3
ψ_p, องศา	30	2



รูปที่ 3.7 ภาพตัดขวางของความลาดมวลดินที่มีการพังทลายแนวระนาบ

ผลเฉลย

ใช้ความรู้เชิงเรขาคณิต จะได้ค่าน้ำหนักมวล W = 3843 ปอนด์ต่อฟุต นำค่าที่ระบุไปแทนในสมการ (ก) ได้ค่ากลางของอัตราส่วนปลอดภัยเชิงกำหนด = 2.37

ก. การแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ

จากสมการ ก. มีตัวแปรสุ่ม 2 พจน์ กำหนดให้ c เป็นตัวแปรสุ่มที่หนึ่ง และ ϕ เป็นตัวแปรสุ่มที่สอง และมุม ψ_p เป็นตัวแปรที่สาม สมมุติกรณีแรกเป็นการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ

$$c^{+} = x_1^{+} = (\text{mean})_1 + 1(\text{S.D.})_1 = [150 + 10] = 160 \text{ lb/ft}^2$$

$$c^{-} = x_1^{-} = (\text{mean})_1 - 1(\text{S.D.})_1 = [150 - 10] = 140 \text{ lb/ft}^2$$

$$\phi^{+} = x_2^{+} = (\text{mean})_2 + 1(\text{S.D.})_2 = [25 + 3] = 28 \text{ degrees}$$

$$\phi^{-} = x_2^{-} = (\text{mean})_2 - 1(\text{S.D.})_2 = [25 - 3] = 22 \text{ degrees}$$

$$\psi_p^{+} = x_3^{+} = (\text{mean})_3 + 1(\text{S.D.})_3 = [30 + 2] = 32 \text{ degrees}$$

$$\psi_p^{-} = x_3^{-} = (\text{mean})_3 - 1(\text{S.D.})_3 = [30 - 2] = 28 \text{ degrees}$$

นำไปแทนค่าในสมการ ก. จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

$$F_1^{+} = 2.473 \qquad F_1^{-} = 2.265 \qquad \Delta F_1 = 0.208$$
$$F_2^{+} = 2.482 \qquad F_2^{-} = 2.261 \qquad \Delta F_2 = 0.221$$
$$F_3^{+} = 2.543 \qquad F_3^{-} = 2.258 \qquad \Delta F_3 = 0.285$$

ใช้สมการ 3.63 หาค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด

$$(\text{F.S.})_{MLV} = \frac{(F_1^{+} + F_1^{-}) + (F_2^{+} + F_2^{-}) + (F_3^{+} + F_3^{-})}{2(3)}$$

$$= \frac{(2.473+2.265)+(2.482+2.261)+(2.543+2.258)}{6}$$

$$= 2.380$$

ใช้สมการที่ 3.72 หัวข้อ 3.5.2 ได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงฟังก์ชันปกติสำหรับอัตราส่วนปลอดภัยของระบบ

$$\sigma_{FS} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.208}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.221}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.285}{2}\right)^2} = 0.208$$

ใช้สมการที่ 3.77 หัวข้อ 3.5.2 ได้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงฟังก์ชันปกติสำหรับอัตราส่วนปลอดภัยของระบบ

$$(C.O.V.)_{FS} = \frac{\sigma_{FS}}{(F.S.)_{MLV}}$$

$$= \frac{0.208}{2.380} = 8.74\%$$

ข. การแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ

ใช้การแก้ปัญหาแบ่งออกเป็น 3 วิธี

วิธีแรก

เนื่องจากโจทย์กำหนดค่าเฉลี่ยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในรูปแบบของการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ จึงต้องใช้สมการ 3.59 และสมการ 3.62 มาหาค่าเชิงสถิติในรูปแบบการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ ได้ค่า

พจน์ตัวแปรที่หนึ่ง $(\zeta_1)^2 = \ell n\left[1 + \frac{\sigma_1^2}{\mu_1^2}\right]$

$$= \ell n\left[1 + \frac{10^2}{150^2}\right] = 0.00443\ [lb/ft^2]^2$$

$$\zeta_1 = 0.067\ lb/ft^2$$

พจน์ตัวแปรที่หนึ่ง $\lambda_1 = \ell n\left[(\mu_1) + \frac{1}{2}(\zeta_1)^2\right]$

$$= \ell n\left[150 + \frac{1}{2}(0.00443)^2\right] = 5.011\ lb/ft^2$$

พจน์ตัวแปรที่สอง $(\zeta_2)^2 = \ell n\left[1 + \frac{\sigma_2^2}{\mu_2^2}\right]$

$$= \ell n\left[1 + \frac{3^2}{25^2}\right] = 0.0143\ [degrees]^2$$

$$\zeta_2 = 0.120\ degrees$$

พจน์ตัวแปรที่สอง $\lambda_2 = \ell n\left[(\mu_2) + \frac{1}{2}(\zeta_2)^2\right]$

$$= \ell n\left[25 + \frac{1}{2}(0.0143)^2\right] = 3.219\ degrees$$

พจน์ตัวแปรที่สาม $(\zeta_3)^2 = \ell n\left[1 + \frac{\sigma_3^2}{\mu_3^2}\right]$

$$= \ell n\left[1 + \frac{2^2}{30^2}\right] = 0.00443\ [degrees]^2$$

$$\zeta_3 = 0.067 \text{ degrees}$$

พจน์ตัวแปรที่สาม $\lambda_3 = \ell n\left[(\mu_3) + \frac{1}{2}(\zeta_3)^2\right]$

$$= \ell n\left[30 + \frac{1}{2}(0.00443)^2\right] = 3.401 \text{ degrees}$$

นำค่า λ กับ ζ ไปแทนเพื่อหาค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีการเพิ่มกับลด 1 S.D.

$$c^+ = x_1^+ = (\text{mean})_1 + 1(\text{S.D.})_1 = [5.011 + 0.067] = 5.078 \text{ lb/ft}^2$$

$$c^- = x_1^- = (\text{mean})_1 - 1(\text{S.D.})_1 = [5.011 - 0.067] = 4.944 \text{ lb/ft}^2$$

$$\phi^+ = x_2^+ = (\text{mean})_2 + 1(\text{S.D.})_2 = [3.219 + 0.120] = 3.339 \text{ degrees}$$

$$\phi^- = x_2^- = (\text{mean})_2 - 1(\text{S.D.})_2 = [3.219 - 0.120] = 3.099 \text{ degrees}$$

$$\psi_p^+ = x_3^+ = (\text{mean})_3 + 1(\text{S.D.})_3 = [3.401 + 0.067] = 3.468 \text{ degrees}$$

$$\psi_p^- = x_3^- = (\text{mean})_3 - 1(\text{S.D.})_3 = [3.401 - 0.067] = 3.334 \text{ degrees}$$

นำไปแทนค่าในสมการ ก. จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

F_1^+	= 1.120	F_1^-	= 1.115	ΔF_1	= 0.005
F_2^+	= 1.153	F_2^-	= 1.082	ΔF_2	= 0.071
F_3^+	= 1.096	F_3^-	= 1.140	ΔF_3	= 0.044

ใช้สมการ 3.63 หาค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด

$$(F.S.)_{MLV} = \frac{(F_1^+ + F_1^-) + (F_2^+ + F_2^-) + (F_3^+ + F_3^-)}{2(3)}$$

$$= \frac{(1.120 + 1.115) + (1.153 + 1.082) + (1.096 + 1.140)}{6}$$

$$= 1.118$$

ใช้สมการที่ 3.72 หัวข้อ 3.5.2 ได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงฟังก์ชันลอการิทึมปกติ สำหรับอัตราส่วนปลอดภัยของระบบ

$$\sigma_{FS} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.005}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.071}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.044}{2}\right)^2} = 0.042$$

ใช้สมการที่ 3.77 หัวข้อ 3.5.2 ได้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงฟังก์ชันลอการิทึมปกติ สำหรับอัตราส่วนปลอดภัยของระบบ

$$(C.O.V.)_{FS} = \frac{\sigma_{FS}}{(F.S.)_{MLV}}$$

$$= \frac{0.042}{1.118} = 3.76\%$$

หมายเหตุ

เมื่อมีค่าพจน์ตัวแปรสุ่มของมุม ψ_p มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึม ย่อมทำให้ค่ามิติ L กับค่าน้ำหนัก W ที่ใช้ในการคำนวณเปลี่ยนแปลงไป ดังนี้

ค่า L กลาง = 168.556 ft; ค่า L^+ = 165.314 ft; ค่า L^- = 171.950 ft

ค่า W กลาง = 83,089.974 lb/ft; ค่า W^+ = 81,382.824 lb/ft;

ค่า W^- = 84,875.340 lb/ft

วิธีที่สอง

เนื่องจากโจทย์กำหนดค่าเฉลี่ยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในรูปแบบของการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ อาจใช้วิธีการประมาณ (approximate) ที่ผู้วิจัยโครงการนี้ นำเสนอมาเพื่อเปรียบเทียบกับวิธีแรก ด้วยการทำให้ทุกพจน์ของตัวแปรสุ่ม อยู่ในรูปแบบของลอการิทึม ดังนี้

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่หนึ่ง $= c = x_1$

$= \ell n\,[150]$

$= 5.0106\ \text{lb/ft}^2$

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่หนึ่ง ที่เพิ่ม 1 S.D. $= c^+ = x_1^+$

$= \ell n\,[150+10]$

$= 5.075\ \text{lb/ft}^2$

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่หนึ่ง ที่ลดลง 1 S.D. $= c^- = x_1^-$

$= \ell n\,[150-10]$

$= 4.942\ \text{lb/ft}^2$

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่สอง $= \phi = x_2$

$= \ell n\,[25]$

$= 3.219$ degrees

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่สอง ที่เพิ่ม 1 S.D. $= \phi^+ = x_2^+$

$= \ell n\,[25+3]$

$= 3.332$ degrees

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่สอง ที่ลดลง 1 S.D. $= \phi^- = x_2^-$

$= \ell n\,[25-3]$

$= 3.091$ degrees

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่สาม $= \psi_p = x_3$

$= \ell n\,[30]$

$= 3.401$ degrees

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่สาม ที่เพิ่ม 1 S.D. $= \psi_p^{+} = x_3^{+}$

$= \ell n\,[30+2]$

$= 3.466$ degrees

ค่าตัวแปรที่เป็นค่ากลางของตัวแปรกลุ่มที่สาม ที่ลดลง 1 S.D. $= \psi_p^{-} = x_3^{-}$

$= \ell n\,[30-2]$

$= 3.332$ degrees

นำไปแทนค่าในสมการ (ก) จะได้ผลลัพธ์ ดังนี้

F_1^{+}	=	1.120	F_1^{-}	=	1.115	ΔF_1	=	0.005
F_2^{+}	=	1.154	F_2^{-}	=	1.080	ΔF_2	=	0.074
F_3^{+}	=	1.100	F_3^{-}	=	1.145	ΔF_3	=	0.045

ใช้สมการ 3.63 หาค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด

$$(F.S.)_{MLV} = \frac{(F_1^{+}+F_1^{-})+(F_2^{+}+F_2^{-})+(F_3^{+}+F_3^{-})}{2(3)}$$

$$= \frac{(1.120+1.115)+(1.154+1.080)+(1.100+1.145)}{6}$$

$$= 1.119$$

ใช้สมการที่ 3.72 หัวข้อ 3.5.2 ได้ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงฟังก์ชันลอการิทึมปกติ สำหรับอัตราส่วนปลอดภัยของระบบ

$$\sigma_{FS} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2+\left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2+\left(\frac{\Delta F_3}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.005}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.074}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.045}{2}\right)^2} = 0.043$$

ใช้สมการที่ 3.77 หัวข้อ 3.5.2 ได้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการแจกแจงฟังก์ชันลอการิทึมปกติ สำหรับอัตราส่วนปลอดภัยของระบบ

$$(\text{C.O.V.})_{FS} = \frac{\sigma_{FS}}{(\text{F.S.})_{MLV}}$$

$$= \frac{0.043}{1.119} = 3.84\%$$

หมายเหตุ

เมื่อมีค่าพจน์ตัวแปรสุ่มของมุม ψ_p มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึม ย่อมทำให้ค่ามิติ L กับค่าน้ำหนัก W ที่ใช้ในการคำนวณเปลี่ยนแปลงไป ดังนี้

ค่า L กลาง = 168.566 ft; ค่า L^+ = 165.409 ft; ค่า L^- = 172.053 ft

ค่า W กลาง = 83,089.974 lb/ft; ค่า W^+ = 81,429.610 lb/ft;

ค่า W^- = 84,592.008 lb/ft

วิธีที่สาม

เนื่องจาก โจทย์กำหนดค่าเฉลี่ยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในรูปแบบของการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ อาจใช้วิธีการประมาณ (approximate) ที่ Duncan and Wright (2005, หน้า 206) เสนอแนะว่า ถึงแม้ว่า ตัวแปรสุ่มจะมีการแจกแจงแบบปกติ แต่เมื่อนำค่ามาใช้หาค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความจะเป็นมากที่สุด $(\text{F.S.})_{MLV}$ แสดงว่าค่า F.S. นั้นมีความน่าจะเป็นที่ใช้กับการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ เพราะเกิดจากการทำปฏิบัติการเชิงคณิตศาสตร์หลายครั้ง (บวก ลบ คูณ หาร)

ดังนั้น เมื่อคำนวณค่า $(\text{F.S.})_{MLV}$ จากสมการ 3.63 ในหัวข้อ ก. (ที่สมมุติให้มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ) ก็นำมาใช้หา ค่า $(\text{F.S.})_{MLV}$ ที่มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติด้วย (ใช้

เป็นค่าเดียวกัน) ซึ่งมีผลต่อมาคือ ค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐานกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ที่หาจากสมการ 3.72 กับสมการ 3.77 ใช้กับการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติด้วย (ค่าเดียวกัน)

ข้อสรุปจากผลลัพธ์การวิเคราะห์

เมื่อพิจารณาเพื่อเปรียบเทียบระหว่างการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ กับการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ ค่า $(F.S.)_{MLV}$ = 2.380 ของการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติมีความใกล้เคียงกับการวิเคราะห์เชิงกำหนด (F.S. = 2.370) แต่วิธีที่หนึ่งของการสมมุติให้มีการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติค่า $(F.S.)_{MLV}$ = 1.118 วิธีที่สองให้มีการแจกแจงแบบลอการิทึมค่า $(F.S.)_{MLV}$ = 1.119 ของการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติ แตกต่างกับค่า F.S. ที่ได้จากวิธีเชิงกำหนดมาก (F.S. = 2.370)

สรุปได้ว่า ในกรณีของโจทย์ตัวอย่างข้อนี้ควรใช้ฟังก์ชันการแจกแจงแบบปกติ เป็นค่าผลลัพธ์ กับใช้การแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติในการออกแบบจำลอง และตัดค่าผลลัพธ์ของการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติออก เพราะความน่าเชื่อถือค่อนข้างต่ำ

ในส่วนของวิธีที่สามนั้นกำหนดให้ใช้ $(F.S.)_{MLV}$ = 2.380 ได้ค่าเดียวกันกับวิธีที่หนึ่งของการแจกแจงแบบปกติ จึงควรใช้วิธีที่สาม (สำหรับการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกตินี้) ในการหาค่าเชื่อถือได้ในระบบกับใช้การแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติในการออกแบบจำลอง เช่นเดียวกัน

3.6 แนวทางการหาค่าดัชนีความเชื่อถือได้และค่าโอกาสการพังทลาย

การศึกษาความเชื่อได้หรือการตรวจวัดความไว้ใจได้ (measure of reliability) เป็นการหาค่าดัชนี (ปกติเป็นตัวเลข) ที่แสดงถึงความปลอดภัยของระบบ คือ ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (reliability index) และค่าโอกาส (ความน่าจะเป็น) ของการพังทลาย (probability of failure) ผู้วิจัยโครงการนี้ได้ค้นคว้าและอ้างอิงกับเอกสารหลายรายการ ที่สำคัญ ได้แก่ Lee et al. (1983), Whitman (1984) Ang and Tang (1975, 2007), Ang and Tang (1984), Harr (1987), Li and Lumb (1987), Christian (1996), Wolff (1996), Duncan (2000), Christian and Baecher (2001), Duncan and Wright (2005) โดยที่ผู้วิจัยโครงการขอสรุปวิธีการหาค่าดัชนีเชิงความน่าจะเป็นทั้งสองค่านี้ออกเป็น 2 แนวทาง

3.6.1 แนวทางแรก

แนวทางแรกนี้ เป็นวิธีปกติที่ใช้กันแพร่หลาย ซึ่งการหาค่าดัชนีเชิงความน่าจะเป็น จะอิงกับค่าของขอบความปลอดภัย (safety margin) หลักการสำคัญของแนวทางแรกนี้ มีดังต่อไปนี้

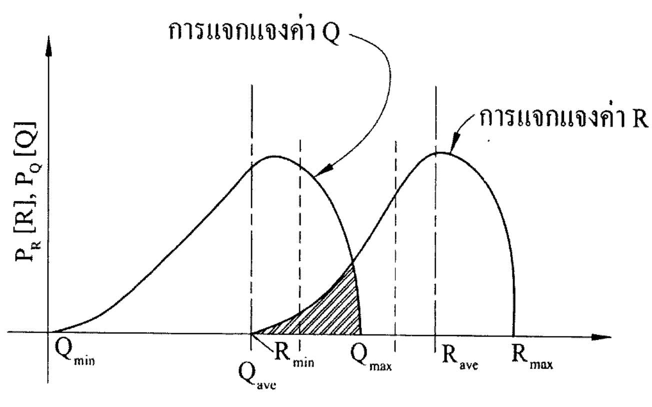
<u>ขั้นตอนที่หนึ่ง</u>

เป็นการหาค่าอัตราส่วนปลอดภัยเชิงกำหนด ซึ่งปกติกำหนดให้

$$FS = \frac{R}{Q} \tag{3.78}$$

พจน์ R เป็นค่าระบุ (nominal value) ของฟังก์ชันที่ต้านการพังทลาย เช่น เป็นค่ากำลังวัสดุของมวลสาร ค่าความเค้นเฉือนสูงสุดในมวลสารเป็นต้น หรือเรียกว่าเป็นค่าฟังก์ชันกำลังความสามารถของมวลสาร (capacity function)

ในขณะที่พจน์ Q เป็นค่าระบุของฟังก์ชันที่ก่อให้เกิดการพังทลาย หรือเรียกว่าเป็น ฟังก์ชันน้ำหนักบรรทุกกระทำในมวลสาร (demand function) เช่น เป็นค่าความเค้นที่เกิดจากโหลด (น้ำหนักบรรทุก) มากระทำต่อมวลสาร หรืออาจเป็นความเค้นที่เกิดจากแรงของแผ่นดินไหว ความเค้นจากแรงดันน้ำในมวลสาร และความเค้นเชิงพลศาสตร์อื่น



รูปที่ 3.8 แบบจำลองของการหาอัตราส่วน ค่าความต้านต่อการพังทลาย ที่เป็นค่าฟังก์ชัน R ต่อค่าโหลด (น้ำหนักบรรทุก) ที่เป็นฟังก์ชัน Q

<u>ขั้นตอนที่สอง</u>

เป็นการหาค่ากลาง (ค่าเฉลี่ย) ของอัตราส่วนความปลอดภัย โดยใช้เหตุผลที่ว่า ในระบบของการตรวจสอบมีการแปรปรวนของค่าสมบัติมวลสาร หรือมีความคลาดเคลื่อนในระหว่างการทดสอบ เมื่อต้องการหาค่าดัชนีที่เป็นค่าอัตราส่วนปลอดภัย ควรหาจากค่าเฉลี่ยของตัวแปร หรือเรียกชื่อใหม่ว่า เป็นค่ากลางอัตราส่วนปลอดภัย เรียกชื่อค่าดัชนีเชิงความน่าจะเป็นแบบนี้ว่า central factor of safety (CFS) แสดงเป็นสมการในรูปแบบใหม่คือ

$$CFS = \frac{R_{ave}}{Q_{ave}} \tag{3.79}$$

พจน์ Q_{ave} เป็นค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันแจกแจงค่าตัวแปรสุ่ม (random variable) ที่ก่อให้เกิดการพังทลาย พจน์ R_{ave} เป็นค่าเฉลี่ยของฟังก์ชันแจกแจงค่าตัวแปรสุ่มที่ต้านการพังทลาย ส่วนรูปที่ 3.7 เป็นการแสดงฟังก์ชันการแจกแจงค่าของตัวแปรสุ่ม R และ Q

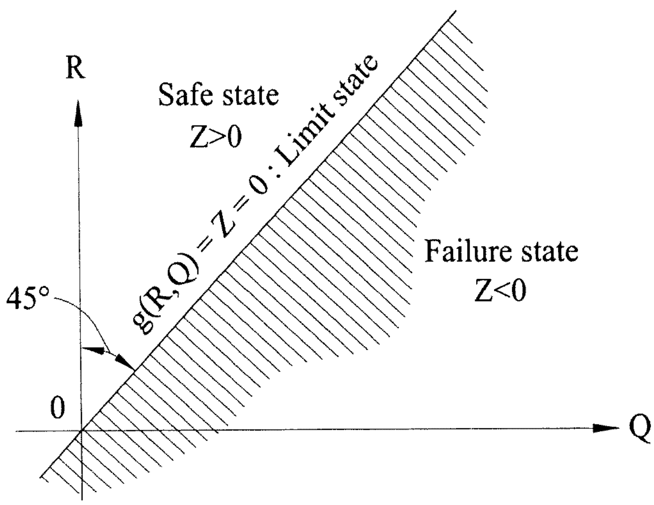
<u>ขั้นตอนที่สาม</u>

เป็นการหาค่าขอบของความปลอดภัย จากรูปที่ 3.8 จะได้ค่าสูงสุดของน้ำหนักบรรทุก หรือใช้สัญลักษณ์เป็น Q_{max} มีค่ามากกว่าค่าที่เป็นค่าต่ำสุดของกำลังความสามารถ หรือใช้สัญลักษณ์เป็น R_{min} ดังนั้นจึงมีพื้นที่เหลื่อมซ้อนเกิดขึ้น หรือได้บริเวณที่มีความน่าจะเป็นที่พื้นที่การพังทลายมีค่าไม่ใช่ศูนย์ (non-zero)

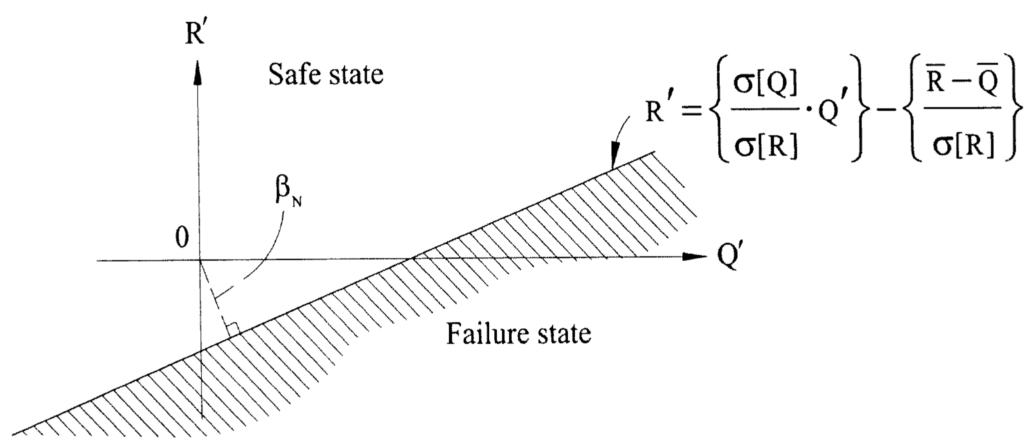
วิธีการที่สะดวกในการประเมินเชิงความน่าจะเป็น ได้แก่ การหาค่าความแตกต่างระหว่างฟังก์ชันความต้านทาน หรือ resistance กับฟังก์ชันน้ำหนักบรรทุก หรือ load เขียนเป็นสมการ

$$Z = R_{ave} - Q_{ave} \tag{3.80}$$

พจน์ Z เป็นค่าขอบของความปลอดภัย (safety margin) และค่า R และ Q เป็นค่าตัวแปรสุ่มของความต้านทานกับน้ำหนักบรรทุก ตามลำดับ ในสถานะจำกัด (limit state) ในรูปที่ 3.9 ถ้ากำหนดให้ g (R, Q) เป็นฟังก์ชันแบบจำลองที่สถานะจำกัดพอดี การพังทลายเกิดขึ้นได้ เมื่อค่าของ Z น้อยกว่า 0 (ศูนย์)



รูปที่ 3.9 แบบจำลองของขอบความปลอดภัย (safety margin, Z) มีพื้นที่เกิดขึ้นสามบริเวณ ได้พื้นที่เสถียร (Z > 0); พื้นที่สมดุลที่ขีดจำกัด (Z = 0); และพื้นที่ที่เกิดการพังทลาย (Z < 0)



รูปที่ 3.10 แบบจำลองของขอบความปลอดภัย (safety margin, Z) ในสถานะขีดจำกัดสมดุลที่ลดค่าขนาดของตัวแปรสุ่มลง หรือ reduced limit state

<u>ขั้นตอนที่สี่</u>

เป็นการหาค่าดัชนีความปลอดภัยของตัวแปรสุ่ม ที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ (normal distribution) ในขั้นตอนนี้ นักวิจัยได้นำเสนอเป็นรูปแบบหลากหลายแต่สิ่งที่ระบุไว้ในรายงานฉบับนี้ได้คัดเลือก และสรุปเป็นแนวทางไว้โดยไม่ได้ทำการพิสูจน์อย่างละเอียดเหมือนเอกสารต้นฉบับ แต่จะมีระบุไว้ว่ามีการคัดลอกหรือใช้สมการต้นฉบับจากเอกสารฉบับใดบ้าง

จากรูปที่ 3.10 เป็นแบบจำลองในสภาวะที่ลดระดับขั้นของขีดจำกัดลง หรือเรียกว่า reduced limit state โดยกำหนดให้ค่าฟังก์ชันของขีดจำกัด เป็น

$$g(R, Q) = Z = 0 \tag{3.81}$$

ในการปฏิบัติงานจริง ค่าขนาดกำลังความสามารถของมวลสารในการรับโหลด จะกำหนดให้มีค่าลดลงมาที่ระดับหนึ่ง (ค่าตัวแปรสุ่มกำลังความสามารถที่ลดลง เขียนเป็น R') และในทำนองเดียวกัน ค่าขนาดโหลดน้ำหนักบรรทุกจะมีค่าที่ลดลงระดับหนึ่ง (ค่าตัวแปรสุ่มขนาดโหลดน้ำหนักที่ลดลง เขียนเป็น Q') ถ้าหากหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่ม R และ Q ได้ จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$R' = R - \overline{R} \tag{3.82}$$

$$Q' = Q - \overline{Q} \tag{3.83}$$

ดังนั้น เมื่อแทนค่าของ g (R, Q) ลงในสมการที่ 3.82 และ 3.83 จะได้สมการเชิงเส้น คือ

$$Z = (R - Q) = \{\sigma[R]\,R'\} - \{\sigma[Q]\,Q'\} + \{(\overline{R} - \overline{Q})\} = 0 \tag{3.84}$$

ทำการพิจารณาสมการ 3.84 พจน์ที่เป็นค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็นค่าคงที่ พจน์ที่เป็นผลลัพธ์ขนาดของค่ากลางลบกัน ก็เป็นค่าคงที่ ส่วนตัวแปรสุ่มลดขนาด เป็นค่าตัวแปรในสมการเขียนเป็นสมการเชิงเส้นใหม่ (เปรียบเทียบกับสมการ 3.84)

$$ax + by + k = 0 \tag{3.85}$$

สมการ 3.85 นี้ สามารถใช้ความรู้เชิงเรขาคณิตวิเคราะห์ (analytic geometry) หาค่าระยะสั้นสุดจากจุดกำเนิดของพิกัด ไปยังตำแหน่งตรงขอบความปลอดภัย (ที่เป็นค่า β_N) เป็น

$$\text{Perpendicular distance from origin} = \text{line } \beta_N = \frac{k}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \tag{3.86}$$

เขียนเป็นรูปแบบใหม่ที่อิงกับสมการ 3.85-3.86 และรูปที่ 3.10 เป็น

$$\beta_N = \frac{\bar{R} - \bar{Q}}{\sqrt{\sigma^2[R] + \sigma^2[Q]}} \tag{3.87}$$

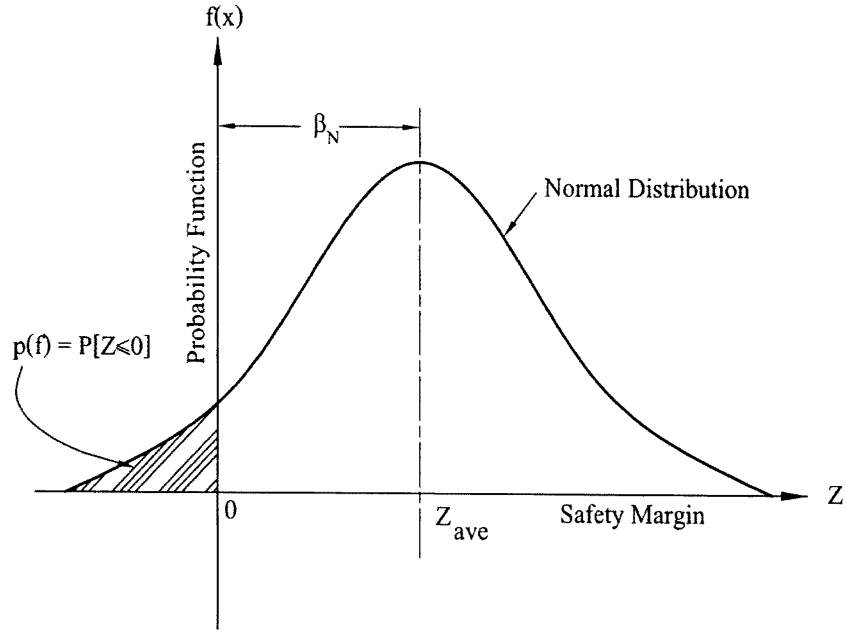
พจน์ β_N นี้เป็นค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (reliability index) ของตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ (normal distribution) และค่าตัวแปรสุ่ม R กับ Q เป็นตัวแปรสุ่มอิสระที่ค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าเป็นศูนย์ (ค่า $\rho = 0$) และสมการ 3.87 นี้ใช้กับการอิงค่าของค่าขอบความปลอดภัย (ดูรูปที่ 3.11 ประกอบ)

อนึ่งในบางสถานะ ตัวแปรสุ่มในระบบมีค่าสหสัมพันธ์กัน จึงต้องแปลงสมการ 3.87 เป็นอีกรูปแบบหนึ่งที่ค่าของ ρ ไม่เป็นศูนย์ เขียนเป็นสมการใหม่ [คัดลอกจาก Harr (1987) หน้า 133]

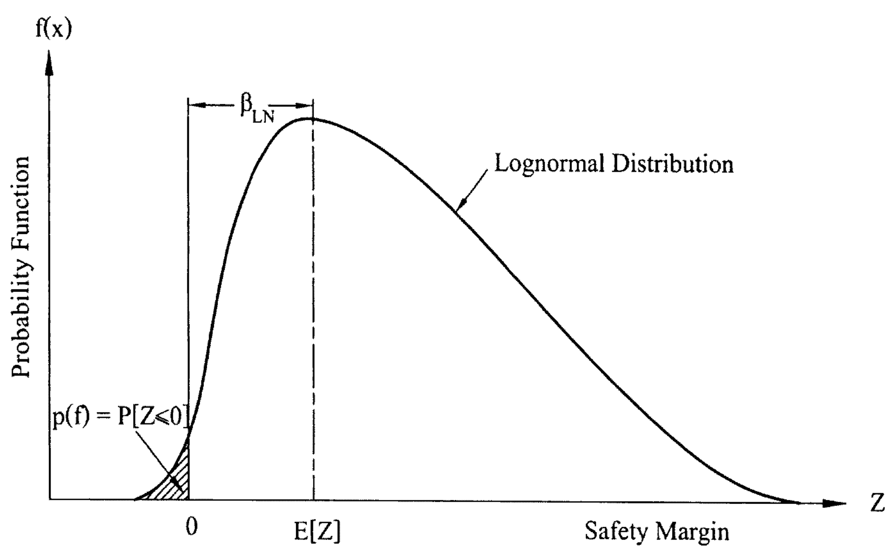
$$\beta_N = \frac{\bar{R} - \bar{Q}}{\sqrt{\sigma^2[R] + \sigma^2[Q] - (2\rho)(\sigma[R]\sigma[Q])}} \tag{3.88}$$

<u>ขั้นตอนที่ห้า</u>

เป็นการหาค่าดัชนีความปลอดภัยของตัวแปรสุ่ม ที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ (lognormal distribution) จากการที่ตั้งสมมุติฐานไว้ว่า ถ้าพจน์ x เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ หรือเรียกชื่อสั้น ๆ ว่า normal variate ต่อมา กำหนดให้ $x = \ell n(y)$ หรือเขียนเป็น $y = e^x$ แสดงว่าพจน์ y มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ (หรือเรียกชื่อสั้น ๆ ว่า lognormal variate) ยกตัวอย่าง ถ้าให้ตัวแปรสุ่มที่เป็นน้ำหนักบรรทุกที่กำลังกระทำ (live load, L) เป็นตัวแปร



รูปที่ 3.11 ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (β_N) สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ ที่เป็นค่าตัวเลขของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ระหว่างตำแหน่งเส้นขอบความปลอดภัย ($Z = 0$) ถึงตำแหน่งค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม, Z_{ave}



รูปที่ 3.12 ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (β_{LN}) สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ ที่เป็นตัวเลขของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานระหว่างตำแหน่งเส้นขอบความปลอดภัย ($Z = 0$) ถึงตำแหน่งค่าตัวแปรสุ่มที่เป็นค่าการคาดหมาย (expected value) ของค่าขอบปลอดภัย, E [Z]

สุ่มแบบ lognormally distributed มีค่าเท่ากับ 40 กิโลพาสคัล ดังนั้น ถ้าจะหาค่าขนาดตัวแปรสุ่ม x แบบ normally distributed จะได้ค่าขนาด $x = \ell n\, L = \ell n\, 40 = 3.69$ กิโลพาสคัล

ความสัมพันธ์ของค่าเชิงสถิติของพจน์ x ตัวแปรสุ่มปกติ กับพจน์ y ตัวแปรสุ่มลอการิทึมปกตินี้ วิธีการแรก แยกแสดงเป็น 2 สมการ ตามที่ได้ระบุไว้ในหัวข้อย่อย 3.5.2

$$\lambda_y = \ell n\left[(\mu_x) + \frac{1}{2}(\zeta_y)^2\right] \tag{3.89}$$

$$(\zeta_y)^2 = \ell n\left[1 + \frac{\sigma_x^2}{\mu_x^2}\right] \tag{3.90}$$

สมการที่ 3.89 – 3.90 เป็นการหาค่าการคาดหมาย กับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานในรูปแบบของการแจกแจงฟังก์ชันลอการิทึม สำหรับ วิธีการที่สอง สมมุติให้ทุกค่าอยู่ในรูปแบบของลอการิทึม (ใช้ในการเพิ่มหรือลด 1 S.D.)

$$E(y) = \ell n[x] \tag{3.91}$$

$$E(y) \pm 1\,S.D. = \ell n[x \pm \mu_x] \tag{3.92}$$

ดังนั้น ถ้าหากกำหนดให้ค่าฟังก์ชันของกำลังความสามารถมวลสาร R กับค่าฟังก์ชันของน้ำหนักบรรทุก Q เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ (lognormal variates) แสดงว่าเมื่อกำหนดให้ x_1, x_2 เป็นตัวแปรสุ่มปกติ (normal variates) จะได้ค่า $x_1 = \ell n\, R$; $x_2 = \ell n\, Q$ หรือระบุอีกแบบได้ว่าพจน์ $\ell n\, R$ กับ $\ell n\, Q$ มีการแจกแจงค่าแบบปกติ ใช้ความสัมพันธ์ของสมการที่ 3.90-3.91 และความรู้ในเรื่องการแจกแจงค่าของฟังก์ชัน สำหรับ discrete and continuous bivariate distributions

จากสมมุติฐานดังกล่าว ค่าของดัชนีความเชื่อถือได้ของฟังก์ชันการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติ (ดัดแปลงจาก Harr, 1987 หน้า 139) มีค่าเป็น

$$\beta_{LN} = \frac{\ell n\left\{\left(\frac{\overline{R}}{\overline{Q}}\right)\cdot\frac{[1+\{(C.O.V.)_Q^2\}]}{[1+\{(C.O.V.)_R^2\}]}\right\}}{\sqrt{\ell n\{[1+(C.O.V.)_R^2][1+(C.O.V.)_Q^2]\}-(2\rho)\sqrt{\ell n[1+(C.O.V.)_R^2]\,\ell n[1+(C.O.V.)_Q^2]}}} \quad (3.93)$$

พจน์ β_{LN} ใช้แทนค่าดัชนีความเชื่อถือได้ของตัวแปรสุ่มในระบบที่ตรวจสอบ เนื่องจากตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงค่าแบบปกติ และค่าตัวแปรสุ่มดังกล่าว (ทั้งค่า R กับค่า Q) มีสหสัมพันธ์กันจัดเป็นตัวแปรแบบ correlated variables หรือค่าของ ρ ที่เป็นค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีค่าไม่เป็นศูนย์ (เป็นได้ทั้งค่าบวกกับค่าลบ)

การกำหนดให้ตัวแปรสุ่มมีค่าสหสัมพันธ์กันนั้น มักมีข้อจำกัดหลายอย่าง ปกติการวิเคราะห์เชิงความน่าจะเป็น มักกำหนดให้ค่า $\rho = 0$ เพื่อให้ตัวแปรสุ่มเป็นแบบ uncorrelated variables ดังนั้น สมการทั่วไปของค่าดัชนีความเชื่อถือได้ที่หาจากตัวแปรสุ่มลอการิทึมปกติ คือ

$$\beta_{LN} = \frac{\ell n\left\{\left(\frac{\overline{R}}{\overline{Q}}\right)\cdot\frac{[1+\{(C.O.V.)_Q^2\}]}{[1+\{(C.O.V.)_R^2\}]}\right\}}{\sqrt{\ell n\{[1+(C.O.V.)_R^2][1+(C.O.V.)_Q^2]\}}} \quad (3.94)$$

<u>ขั้นตอนที่หก</u>

เป็นการหาค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย [probability of failure, p (f)] สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ จากรูปที่ 3.11 การพังทลายจะเกิดขึ้นได้ เมื่อเทียบกับค่าขอบความปลอดภัย เขียนเป็นนิพจน์ของ conditional probability เป็น

$$p(f) = P(|R-Q|\leq 0) = P(|Z|\leq 0) \quad (3.95)$$

เนื่องจาก $Z = R - Q$ แสดงว่า สถานะของ $Z < 0$ เป็นสถานะของการพังทลาย ค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย เขียนใหม่เป็นความสัมพันธ์เชิงการแจกแจงค่าปกติ

$$p(f) = 1 - F(\beta_N) = 1 - F(u) \quad (3.96)$$

พจน์ β_N ในสมการ 3.96 เป็นค่าดัชนีความเชื่อถือได้ ที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงค่าแบบปกติ พจน์ u เป็นจำนวนตัวเลขค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงปกติ ที่ตัวแปรสุ่ม x มีระยะห่างจากค่าเฉลี่ยของ PDF [probability (density) function] ส่วนพจน์ F (u) เป็นค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสม (cumulative distribution function) สามารถระบุค่าได้จากตารางคณิตศาสตร์ทั่วไป

สมการ 3.96 เขียนในรูปแบบของแบบจำลองในรูปที่ 3.11 จะได้

$$p(f) = 1 - F\left[\frac{\ell n\left(\frac{\overline{R}}{\overline{Q}}\right)}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}}\right] \tag{3.97}$$

ตัวแปรสุ่ม R และ Q เป็นตัวแปรสุ่มอิสระ มีการแจกแจงค่าแบบปกติ ค่า Z จึงมีการแจกแจงค่าแบบปกติด้วย ความสัมพันธ์ของค่าเฉลี่ยของ Z คือ

$$(\text{mean})_Z = (\text{mean})_R - (\text{mean})_Q \tag{3.98}$$

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_Q$$

ความสัมพันธ์ของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ Z คือ

$$(\text{S.D.})_Z^2 = (\text{S.D})_R^2 + (\text{S.D})_Q^2 \tag{3.99}$$

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_Q^2}$$

จากสมการ 3.97 ได้ค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย ในอีกรูปแบบหนึ่ง

$$p(f) = F\left(\frac{0 - Z_{ave}}{\sigma_Z}\right) = 1 - F\left(\frac{Z_{ave}}{\sigma_Z}\right) \tag{3.100}$$

<u>ขั้นตอนที่เจ็ด</u>

เป็นการหาค่าโอกาส ความน่าจะเป็นของการพังทลาย [probability of failure, p (f)] สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ จากรูปที่ 3.12 การพังทลายจะเกิดขึ้นได้ เมื่อเทียบกับค่าขอบความปลอดภัย ที่มีค่า $Z \leq 0$

จากการพิจารณาสมการ 3.93 - 3.94 เมื่อค่าพจน์ตัวแปรสุ่ม R กับ Q มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ (lognormal distribution) จะทำให้ค่า $\ell n\,R$, $\ell n\,Q$ และ β_{LN} มีการแจกแจงค่าแบบปกติ (normal distribution) จึงทำให้เขียนสมการแสดงโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลายในอีกรูปแบบหนึ่ง

$$p\,(f) = 1 - F(\beta_{LN}) = 1 - F(u) \qquad (3.101)$$

พจน์ β_{LN} เป็นค่าดัชนีความเชื่อถือได้ ที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ พจน์ u เป็นจำนวนตัวเลขค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของการแจกแจงปกติ ที่ตัวแปรสุ่ม x มีระยะห่างจากค่าเฉลี่ยของ PDF (probability distribution function) ส่วนพจน์ F (u) เป็นค่าฟังก์ชันการแจกแจงสะสม จากสมการ 3.101 ได้ค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย ในอีกรูปแบบหนึ่ง

$$p\,(f) = F\left(\frac{\ell n\,(1.0) - E[Z]}{\zeta_Z}\right) = 1 - F\left(\frac{\lambda_Z}{\zeta_Z}\right) \qquad (3.102)$$

พจน์ λ_Z และ ζ_Z เป็นค่าเฉลี่ยกับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของขอบความปลอดภัย (ค่า Z หรือค่า safety margin) ที่กำหนดให้ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ

3.6.2 ตัวอย่างการหาดัชนีเชิงความน่าจะเป็นของแนวทางแรก

ตัวอย่างในหัวข้อย่อยนี้ เป็นการหาค่าเชิงสถิติหลายค่าจนถึงได้ค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย โดยแยกตัวอย่างออกเป็น 2 ชนิด ได้แก่ กรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ และกรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ

โจทย์ตัวอย่าง 3.5 สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ

กำหนดให้โครงสร้างมวลหินบนพื้นผิวดิน มีลักษณะเป็นแท่งแบนหนาแบบคอลัมน์ (rock column) และต้องรับน้ำหนักบรรทุกที่เป็นสิ่งก่อสร้างบนคอลัมน์หิน กับรับน้ำหนักแรงลมที่ปะทะกับแท่งคอลัมน์หิน ถ้าให้ T = โหลดที่เป็นน้ำหนักบรรทุกทั้งหมด จะได้ความสัมพันธ์ในรูปแบบสมการเป็น

$$T = D + L + W$$

พจน์ T = total force, D = dead load (weight), L = live load (line force), W = wind force ค่าตัวแปรสุ่มทั้งสามดังกล่าวเป็นตัวแปรสุ่มอิสระ หรือ statistically independent และมีการแจกแจงค่าแบบปกติโดยมีค่าเฉลี่ย (เท่ากับค่าการคาดหมาย) กับค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐานดังนี้

$$(\text{mean})_D = 4.2 \text{ MN}; \quad (\text{S.D.})_D = 0.3 \text{ MN}$$
$$(\text{mean})_L = 6.5 \text{ MN}; \quad (\text{S.D.})_L = 0.8 \text{ MN}$$
$$(\text{mean})_W = 3.4 \text{ MN}; \quad (\text{S.D.})_W = 0.7 \text{ MN}$$

นอกจากนี้ ยังกำหนดให้ค่ากำลังวัสดุที่เป็นค่ากำลังความสามารถมวลสาร เป็นตัวแปรสุ่มปกติ และมีค่าเฉลี่ยเป็น 1.5 เท่าของค่าเฉลี่ยแรงที่กระทำทั้งหมด กำหนดเพิ่มเติมให้ค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน (C.O.V.) กำลังวัสดุ เท่ากับ 15% และเป็นตัวแปรสุ่มอิสระที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ

ผลเฉลย

จากการที่แรงผลลัพธ์ T มีการแจกแจงแบบปกติ จึงหาค่าเฉลี่ยได้เป็น

$$(\text{mean})_T = (\text{mean})_D + (\text{mean})_L + (\text{mean})_W \qquad (ก)$$

$$(\text{mean})_T = \mu_T = 4.2 + 6.5 + 3.4 = 14.1 \text{ MN}$$

ค่าเฉลี่ยการเบี่ยงเบนมาตรฐานของแรงผลลัพธ์ T มีค่าเป็น

$$(\text{S.D.})_T^2 = (\text{S.D.})_D^2 + (\text{S.D.})_L^2 + (\text{S.D.})_W^2 \qquad (ข)$$

$$(\sigma)_T{}^2 = (\sigma)_D{}^2 + (\sigma)_L{}^2 + (\sigma)_W{}^2$$

$$(S.D.)_T = (\sigma)_T = \sqrt{(0.3)^2 + (0.8)^2 + (0.7)^2} = 1.1 \text{ MN}$$

การพังทลายของคอลัมน์หิน จะเกิดขึ้นจากการที่ค่ากำลังวัสดุ, R มีค่าน้อยกว่าค่าโหลดที่กระทำ (applied load), Q หรือระบุเป็นค่าขอบความปลอดภัย, Z

$$Z = (R - Q) \tag{ค}$$

เนื่องจากตัวแปรสุ่ม R และ Q เป็นตัวแปรสุ่มปกติ ดังนั้น Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติด้วย และโจทย์ยังกำหนดให้ค่าความต้านทานเป็น 1.5 เท่าของค่าเฉลี่ยแรงกำลังความสามารถ

$$(\text{mean})_Z = (\text{mean})_R - (\text{mean})_Q \tag{ง}$$

$$(\sigma)_Z = (\sigma)_R - (\sigma)_Q$$

$$= (1.5 \text{ x } 14.1) - (14.1) = 7.05 \text{ MN}$$

$$(S.D.)_Z = \sqrt{(S.D.)_R^2 + (S.D.)_Q^2} \tag{จ}$$

$$(\sigma)_Z = \sqrt{(\sigma)_R^2 + (\sigma)_Q^2}$$

$$= \sqrt{\{(C.O.V.)_R^2 \ (\text{mean})_R\} + (S.D.)_Q^2}$$

$$= \sqrt{(0.15 \times 21.15)^2 + (1.1)^2} = 3.36 \text{ MN}$$

ค่าดัชนีความเชื่อถือได้สำหรับตัวแปรสุ่มปกติ, β_N

$$\beta_N = \frac{\overline{R} - \overline{Q}}{\sqrt{\sigma^2[R] + \sigma^2[Q]}} \tag{ช}$$

$$= \left(\frac{21.15 - 14.1}{3.36}\right) = 2.098 = 2.1$$

ค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย, p (f)

$$p(f) = 1 - F(\beta_N) = 1 - F(2.1) \quad (ฉ)$$

$$= 1 - 0.982 = 0.018 = 1.8\%$$ หรือระบุเป็นค่าโอกาสการพังลาย ประมาณ 2 ครั้งในเหตุการณ์ที่คาดหมายว่าจะเกิด 100 ครั้ง

โจทย์ตัวอย่าง 3.6 สำหรับตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ

กำหนดให้การทรุดตัว (settlement) ของฐานรากระดับตื้น (shallow foundation) ที่มีชื่อเฉพาะว่าฟุตติง (footing) วางบนมวลดินทราย (sandy soil) มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$S = \frac{QBI}{M}$$

พจน์ S หมายถึงการทรุดตัวของฟุตติง หน่วยเป็นฟุต พจน์ Q เป็นค่าเฉลี่ยของความดันบนฐานราก (bearing pressure) ที่กระทำบนมวลทราย หน่วยเป็น ตัน (สั้น) ต่อ ตร.ฟุต พจน์ B เป็นค่ามิติที่น้อยที่สุดของฟุตติง หน่วยเป็นฟุต พจน์ I เป็นค่าตัวประกอบของฟุตติง (ไม่มีหน่วย) ที่มีอิทธพลขึ้นอยู่กับลักษณะเชิงเรขาคณิตของฟุตติง ความลึกของฐานรากที่จมในดิน และความลึกจนถึงชั้นดินแข็ง (hard stratum) พจน์ M เป็นค่ามอดุลัสของการกดอัด (compressibility) หน่วยเป็น ตัน (สั้น) ต่อ ตร.ฟุต กำหนดให้แต่ละตัวแปรสุ่ม ได้แก่ Q, B, I, M เป็นตัวแปรอิสระ และมีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ ในส่วนของค่าเฉลี่ย $(\mu)_{xi}$ กับการเบี่ยงเบนมาตรฐาน $(\zeta)_{xi}$ ของทั้งสี่พจน์ตัวแปรสุ่ม ระบุไว้ในตารางที่ 3.7

ตารางที่ 3.7 ค่าการคาดหมายกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน
ของพจน์ตัวแปรสุ่มลอการิทึมปกติ

ตัวแปรสุ่ม	$(\text{mean})_{xi}$, μ_{xi}	$(\text{S. D.})_{xi}$, σ_{xi}
Q (t/ft^2)	1.0 (t/ft^2)	0.10
B (ft)	6.0 (ft)	0.0
I	0.6	0.10
M (t/ft^2)	32.0 (t/ft^2)	0.15

ก. จงหาค่าเฉลี่ย กับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน และค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันของการทรุดตัวสำหรับฟุตติง

ข. ถ้าหากค่าที่ยินยอมให้เกิดการทรุดตัวสูงสุด (maximum allowable settlement) มีค่าเท่ากับ 2.5 นิ้ว จงหาค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (β_{LN}) กับค่าความเชื่อถือได้ (R) ซึ่งในกรณีนี้คือค่าโอกาสความน่าจะเป็นที่จะไม่มีการทรุดตัวมากเกินไป

ผลเฉลย

จากการที่แรงผลลัพธ์ S มีการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติ จากสมการ 3.61 หาค่าความแปรผัน (variance) ได้เป็น

$$(S.D.)_S^{\,2} = (S.D.)_P^{\,2} + (S.D.)_B^{\,2} + (S.D.)_I^{\,2} + (S.D.)_M^{\,2} \qquad (ก)$$

$$(\zeta)_S^{\,2} = (\zeta)_P^{\,2} + (\zeta)_B^{\,2} + (\zeta)_I^{\,2} + (\zeta)_M^{\,2}$$

เนื่องจากค่า $(S.D.)_B = 0$ (ศูนย์) ดังนั้นค่าความแปรปรวน – variance = $(S.D.)_B^{\,2} = V[B] = 0$ ด้วย จากนั้นจึงนำค่าอื่นที่ระบุในตารางที่ 3.7 มาหาค่าการความแปรผันของการทรุดตัว, $(S.D.)_S^{\,2}$ หรือ $V[S]$

$$(S.D.)_S^{\,2} = (0.1)^2 + (0)^2 + (0.1)^2 + (0.15)^2$$

$$V[S] = (\zeta)_S^{\,2} = 0.0425; \quad (S.D.)_S = (\zeta)_S = 0.206$$

เนื่องจากตัวแปร P, B, I, M เป็นตัวแปรสุ่มแบบลอการิทึมปกติ จึงหาค่าเฉลี่ยหรือค่าการคาดหมายจากการใช้สมการ 3.89

$$\lambda_P = \ell n\,(1.0) - \tfrac{1}{2}(0.1)^2 = -0.005$$

$$\lambda_B = \ell n\,(6.0) - \tfrac{1}{2}(0)^2 = 1.792$$

$$\lambda_I = \ell n\,(0.6) - \tfrac{1}{2}(0.1)^2 = -0.516$$

$$\lambda_M = \ell n\,(32) - \tfrac{1}{2}(0.0225)^2 = 3.455$$

ใช้สมการ 3.59 หัวข้อ 3.5.2 หาค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม S ที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ กำหนดให้ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม M มีเครื่องหมายตรงกันข้ามกับค่าเฉลี่ยตัวแปรสุ่มอื่น (P, B, I)

$$\lambda_S \;=\; (-\,0.005 \;+\; 1.792 \;-\,0.516) \;-\; (3.455) \;=\; -\;(2.184)$$

แต่เมื่อต้องการหาค่าเฉลี่ย S มีการแจกแจงปกติ (ค่าเฉลี่ย footing settlement) ใช้สมการ 3.62 จะได้

$$(\lambda)_S \;=\; \ell n\;[\mu]_S \;-\; \tfrac{1}{2}\;(\zeta)_S^{\,2}$$

$$[\mu]_S \;=\; \exp\,[(\lambda)_S \;+\; \tfrac{1}{2}\;(\zeta)_S^{\,2}]$$

$$=\; \exp\,[-\;(2.184) \;+\; 0.0212] \;=\; 0.115 \text{ ฟุต}$$

การหาค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน Ang and Tang (1975, หน้า 185, 187) ของค่าผลลัพธ์ S ระบุให้มีค่าประมาณใกล้เคียง กับค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่า S สมมุติให้สัญลักษณ์ของค่าสัมประสิทธิ์การแปรผันที่มีตัวแปรสุ่มเป็นแบบลอการิทึมปกติ เป็น $(C.O.V.)_S^2$ จะได้ความสัมพันธ์เป็น

$$(C.O.V.)_S \;\approx\; (S.D.)_S \;=\; 0.206$$

หรือ

$$(\delta)_S \;\approx\; (\zeta)_S \;=\; 0.206$$

ในกรณีที่จะหาค่าดัชนีความเชื่อถือได้ β_{LN} นั้นอิงตามสมการ 3.53 โดยที่ λ_{FS} หาจาก

$$(\lambda)_{FS} \;=\; E\,[R] \;-\; (\lambda)_S$$

พจน์ E [R] คือ ค่าการคาดหมายที่เป็นค่าต้านการทรุดตัวของฟุตติง จากการที่โจทย์ระบุให้เท่ากับ 2.5 นิ้ว หรือ (2.5 / 12) ฟุต เนื่องจาก R เป็นค่าตัวแปรสุ่มที่มีค่าเดียว ทำให้ค่าการเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 0 (ศูนย์) จะได้

$$E\,[R] \;=\; \lambda_R \;=\; \ell n\,[2.5/12]$$

นำค่าทั้งหมดมาแทนในสมการ 3.100

$$\beta_{LN} = \frac{\lambda_{FS}}{\zeta_S} = \frac{\lambda_R - \lambda_S}{0.206}$$

$$= \left(\frac{\ell n[2.5/12] - (-2.184)}{0.206} \right) = 2.99$$

ตามนิยามของ reliability จะได้

$$\text{Reliability} = F(u) = F(\beta_{LN}) = F(2.99)$$

$$= 0.9986$$

= 99.86 % แสดงว่ามีเพียงประมาณ 14 ใน 10,000 ครั้ง ที่มีโอกาสเกิดการพังทลาย

3.6.3 แนวทางที่สอง

แนวทางที่สองนี้ เป็นวิธีอีกรูปแบบหนึ่ง ที่ทาง Wolff (1996) กับ U.S. Army Corps of Engineers (1998) เสนอแนะให้การหาค่าดัชนีเชิงความน่าจะเป็น ควรจะอิงกับค่าของอัตราส่วนปลอดภัย (factor of safety, F.S.) เพราะว่าค่า F.S. ได้มาจากการแปรผันของหลายตัวแปรในระบบการที่จะประเมินความเสี่ยง ไม่ควรอิงกับค่าตัวแปรที่เป็นสมบัติมวลสารอย่างเดียว ค่ามุมเอียงของระนาบการพังทลาย ค่ามุมการตัดความลาด หรือแรงดันน้ำในมวลสาร ต่างมีส่วนทำให้เกิดการแปรผันในระบบด้วย

หลักการสำคัญของแนวทางที่สองที่อิงกับค่าอัตราส่วนปลอดภัย (ดูรายละเอียดในหัวข้อ 3.5.2) มีดังต่อไปนี้

<u>ขั้นตอนที่หนึ่ง</u>

ถ้าหากมีการแจกแจงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม ที่อาจเป็นแบบปกติหรือเป็นแบบลอการิทึมปกติ แล้วค่าอัตราส่วนปลอดภัยควรระบุใหม่ (Wolff, 1996; Duncan and Wright, 2005) ให้เป็นค่า F.S. ที่มีโอกาสเป็นค่านี้มากที่สุด ซึ่งมีชื่อเรียกว่า "Most Likely Value of Factor of Safety, $(F.S.)_{MLV}$" ได้แก่

$$(F.S.)_{MLV} = \frac{(F_1^+ + F_1^-) + (F_2^+ + F_2^-) + (F_3^+ + F_3^-) + \ldots + (F_N^+ + F_N^-)}{2(N)} \qquad (3.103)$$

นิยามของพจน์ F_N ในสมการ 3.101 เป็นค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่คำนวณจากวิธีเชิงกำหนด (deterministic method) ที่ใช้ตัวแปรทั้งหมด เท่ากับ N ตัวแปร ส่วนตัวห้อยท้าย 1, 2,..., N แสดงถึง พจน์ตัวแปรสุ่มที่หนึ่ง พจน์ตัวแปรสุ่มที่สอง และพจน์ตัวแปรที่ N ตามลำดับ พจน์ F_1^+ เป็นค่าอัตราส่วนปลอดภัยของตัวแปรที่หนึ่งที่มีเงื่อนไขมีการเพิ่มขึ้นจากเดิม เท่ากับ 1 S.D. และ พจน์ F_1^- มีการลดลงจากเดิม เท่ากับ 1 S.D. เขียนค่าฟังก์ชันอัตราส่วนปลอดภัย เป็น

$$\Delta F_1 = F_1^+ - F_1^- \qquad (3.104)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\Delta F_2 = F_2^+ - F_2^- \qquad (3.105)$$

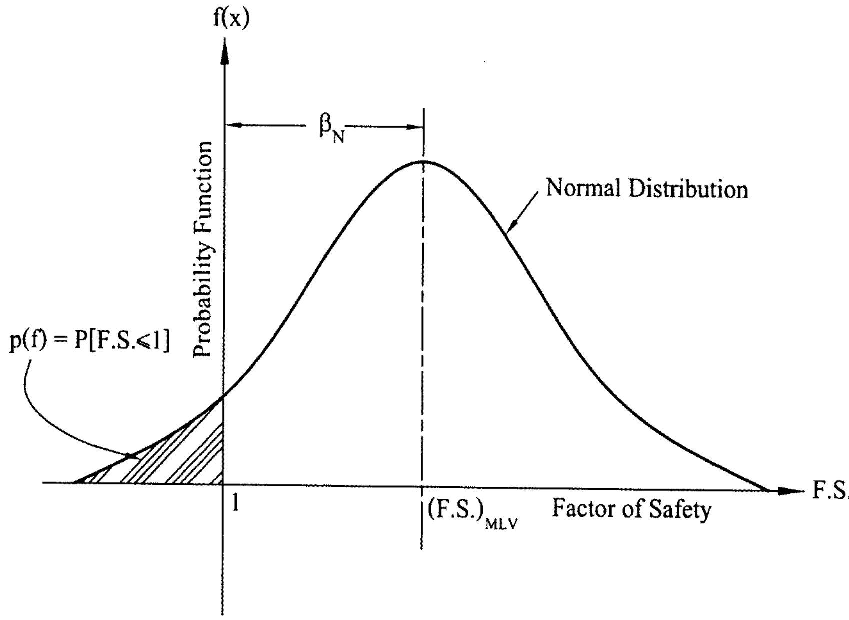
$$\Delta F_N = F_N^+ - F_N^- \qquad (3.106)$$

ตัวอย่างของการคำนวณค่า $(F.S.)_{MLV}$ ถ้ากำหนดให้ค่าตัวแปรแรก $F_1^+ = 1.33$; ค่าตัวแปรแรก $F_1^- = 1.02$; ส่วนค่าตัวแปรที่สอง $F_2^+ = 1.08$; ค่าตัวแปรที่สอง $F_2^- = 1.28$; จะคำนวณค่า $(F.S.)_{MLV}$ เท่ากับ 1.17 เป็นต้น

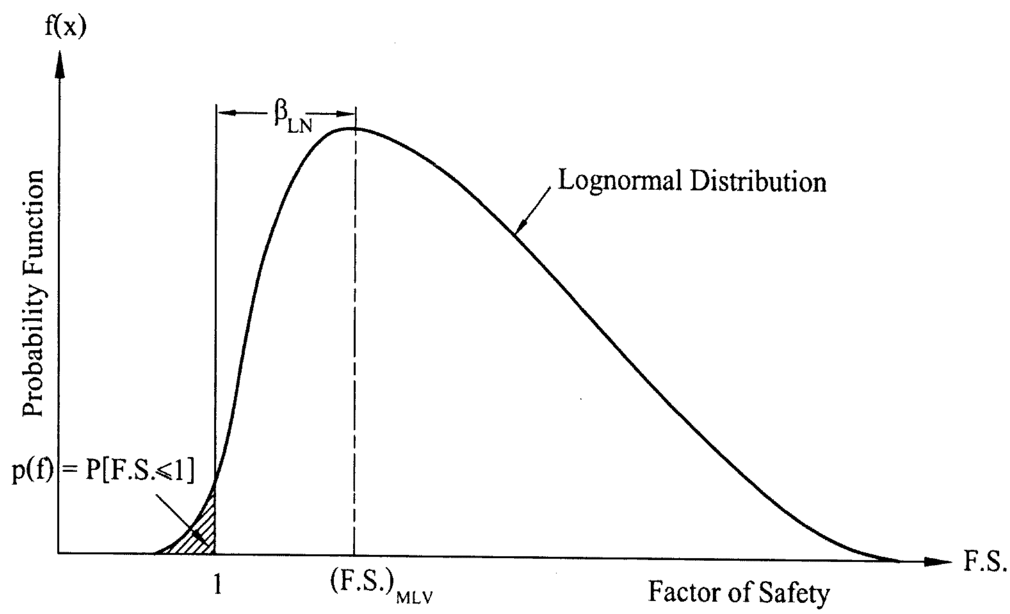
<u>ขั้นตอนที่สอง</u>

กำหนดให้ สมการที่ 3.107 - 3.108 เป็นพจน์ตัวแปรที่ใช้ในการหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานกับค่าสัมประสิทธิ์การแปรผัน ที่มีความเป็นไปได้มากที่สุด (Wolf, 1996; U.S. Army Corps of Engineers, 1998) ดังต่อไปนี้

$$\sigma_{FS} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_3}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta F_N}{2}\right)^2} \qquad (3.107)$$



รูปที่ 3.13 ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (β_N) ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติที่เป็นค่าตัวเลขของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ระหว่างตำแหน่งเส้นขีดจำกัดอัตราส่วนปลอดภัย (F.S. = 1) ถึงตำแหน่งค่าอัตราส่วนปลอดภัยที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด, $(F.S.)_{MLV}$ หรือประมาณเท่ากับค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม, $(F.S.)_{ave}$



รูปที่ 3.14 ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ (β_{LN}) ตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติที่เป็นตัวเลขของค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ระหว่างตำแหน่งเส้นขีดจำกัด (F.S. = 1) ถึงตำแหน่งที่เป็นค่าอัตราส่วนปลอดภัย ที่มีความน่าจะเป็นมากที่สุด, $(F.S.)_{MLV}$

$$(\text{C.O.V.})_{FS} = \frac{\sigma_{FS}}{(\text{F.S.})_{MLV}} \tag{3.108}$$

ตัวอย่างของการคำนวณค่า $(\sigma)_{FS}$ จากสมการ 3.107 กับค่า $(\text{C.O.V.})_{FS}$ จากสมการ 3.108 โดยใช้ค่าตัวเลข ถ้าค่า $(\text{F.S.})_{MLV}$ เท่ากับ 1.17 กับค่าอื่นที่ทราบค่า (ดูในขั้นตอนที่หนึ่ง)

$$\Delta F_1 = |F_1 - F_1| = |1.33 - 1.02| = 0.31$$
$$\Delta F_2 = |F_2 - F_2| = |1.08 - 1.28| = 0.20$$

นั่นคือ

$$(\sigma)_{FS} = \sqrt{\left(\frac{0.31}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.20}{2}\right)^2} = 0.18$$

$$(\text{C.O.V.})_{FS} = \frac{0.18}{1.17} = 0.16 = 16\%$$

<u>ขั้นตอนที่สาม</u>

ตามนิยามของค่าดัชนีความเชื่อถือได้ ระบุให้เป็นเลขค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานจาก F.S. = 1.0 (impending failure) จนถึง $(\text{F.S.})_{MLV}$ ถ้าหากตัวแปรสุ่มมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ หรือเป็น normal variates ผู้วิจัยโครงการนี้ ได้ดัดแปลงจากสมการ 7.48 (Lee et al., 1983; หน้า 315) กับสมการ 3.2.8 (Harr, 1987; หน้า 133) และสมการ 3.4.1 (Harr, 1987; หน้า 138) โดยกำหนดให้พจน์ตัวแปรในระบบเป็น uncorrelated normal variables หรือค่า $\rho = 0$ (ศูนย์) จะได้ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ เป็น

$$\beta_N = \frac{[(\text{F.S.})_{MLV} - (1)]}{(\sigma)_{FS}} \tag{3.109}$$

ถ้าหากมีค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ($\rho \neq 0$) ระหว่างตัวแปรสุ่มในระบบที่มีการแจกแจงค่าแบบปกติ ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ เป็น

$$\beta_N = \frac{[(F.S.)_{MLV} - (1)]}{\sqrt{(F.S.)^2_{MLV} + [(1) - 2(\rho)(F.S.)_{MLV}]}} \tag{3.110}$$

แต่ถ้าตัวแปรสุ่มในระบบมีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ อิงตามเอกสารของ Lee et al. (1983, หน้า 86, 315), Harr (1987, หน้า 138) และ Duncan and Wright (2005; หน้า 206) จะได้ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ เป็น

$$\beta_{LN} = \frac{\ell n\left[(F.S.)_{MLV} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{[(1) + (C.O.V.)^2_{FS}]}} \right]}{\sqrt{\ell n[(1) + (C.O.V.)^2_{FS}]}} \tag{3.111}$$

$$= \frac{\ell n\left[\dfrac{(F.S.)_{MLV}}{\sqrt{[(1) + (C.O.V.)^2_{FS}]}} \right]}{\sqrt{\ell n[(1) + (C.O.V.)^2_{FS}]}}$$

ถ้าหากมีค่าของสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ ($\rho \neq 0$) ระหว่างตัวแปรสุ่มในระบบที่มีการแจกแจงค่าแบบลอการิทึมปกติ ค่าดัชนีความเชื่อถือได้ เป็น

$$\beta_{LN} = \frac{\ell n[(F.S.)_{MLV}}{\sqrt{2(1-\rho) \cdot \ell n[(1) + (C.O.V.)^2_{FS}]}} \tag{3.112}$$

<u>ขั้นตอนที่สี่</u>

เมื่อจะหาค่าโอกาสความน่าจะเป็นของการพังทลาย นำค่าดัชนีความเชื่อได้ในสมการ 3.109 หรือ สมการ 3.112 มาแทนค่า u ที่เป็นค่า standardized normal distribution

$$p(f) = 1 - F(u) = 1 - F(\beta) \tag{3.113}$$

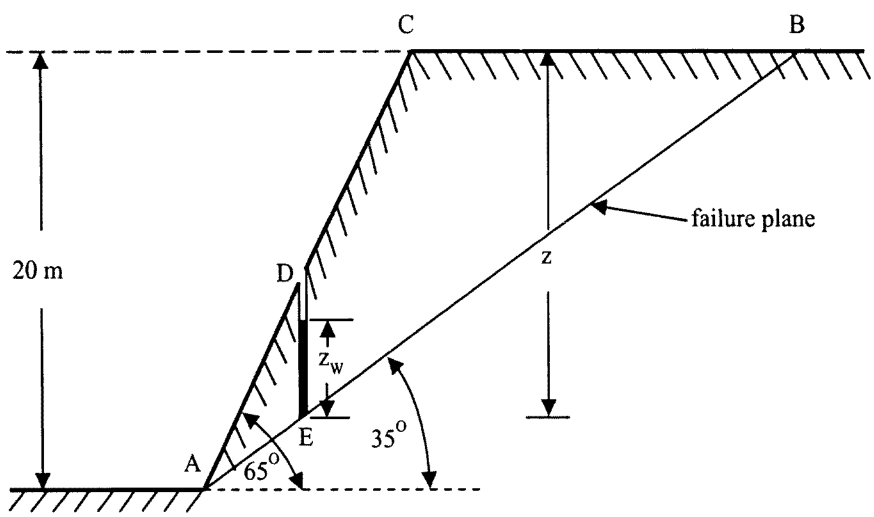
พจน์ β แทนค่าดัชนีความเชื่อถือได้ ที่อาจมาจากสมการที่ 3.109-3.112 สมการใดสมการหนึ่ง ขึ้นอยู่กับเงื่อนไขของการแจกแจงฟังก์ชันของตัวแปรสุ่ม

3.6.4 ตัวอย่างการหาค่าดัชนีเชิงความน่าจะเป็นสำหรับแนวทางที่สอง

ใช้โจทย์การตัดความลาดที่ไม่มีค่าแรงดันน้ำเข้ามาเกี่ยวข้อง กำหนดให้ตัวแปรสุ่มในระบบมี 4 ตัวแปร ได้แก่ ค่าการยึดเกาะกัน ค่ามุมเสียดทาน ค่าหน่วยน้ำหนัก ค่ามุมเอียงของระนาบการพังทลาย ตัวแปรอื่นที่เป็นค่าสมบัติกับค่ามิติ กำหนดให้มีค่าคงที่

โจทย์ตัวอย่างที่ 3.7

ในภาพตัดขวางของรูปที่ 3.15 เป็นการตัดชั้นตะพักโดยการจากการระเบิดหินปูน ปรากฏว่ามีรอยร้าวจากแรงดึงอยู่ในหน้าของความลาด



รูปที่ 3.15 ภาพตัดขวางชั้นตะพักของหินปูนที่มีรอยร้าวจากแรงดึงอยู่ในหน้าความลาด

จากการตรวจสอบภาคสนาม และนำตัวอย่างแท่งหิน (core) ไปทดสอบในห้องปฏิบัติการ มีข้อมูลดังต่อไปนี้

- ความสูงในแนวดิ่งของหน้าเหมืองหินปูน, H = 20 เมตร
- มุมของความลาด, $\beta = 65^o$
- ระยะในแนวดิ่งของรอยร้าวจากแรงดึง (DE) = 6.6 เมตร

– ความสูงของระดับน้ำที่ขังในรอยร้าวจากแรงดึง, z_w = 5.5 เมตร

– ระยะแนวดิ่ง z จากจุดตัด E ถึงชั้นตะพักบน = 16.8 เมตร

ต้องการหาค่าตัวเลขดัชนีเชิงความน่าจะเป็น จากการที่ตัวแปรสุ่ม 4 พจน์ มีการแจกแจงฟังก์ชัน ดังตารางที่ 3.8 ทั้ง 2 กรณี ในรูปแบบปกติและในรูปแบบลอการิทึมปกติ

ตารางที่ 3.8 ค่าสมบัติและค่ามิติความลาดสำหรับตัวแปรสุ่มในระบบ

ตัวแปรสุ่ม	ค่าเฉลี่ย (μ_x)	ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ_x)
ค่าการยึดเกาะกัน, c (kPa)	45	5
มุมเสียดทานภายใน, ϕ (degrees)	25	2
หน่วยน้ำหนักหิน, γ (kN/m^3)	25.5	2.5
มุมเอียงระนาบ, ψ_p (degrees)	35	3

ผลเฉลย

หาความยาวของระนาบ (L) แรงยกตัวจากแรงดันน้ำ (U) แรงผลักจากแรงดันน้ำในรอยร้าวจากแรงดึง (V) และน้ำหนักของมวลหินปูนที่วางบนระนาบการพังทลาย จากวิธีเชิงกำหนด ได้ดังนี้

$$L = (H - z)\operatorname{cosec} \psi_p \qquad (ก)$$

$$= (20 - 16.8)\operatorname{cosec} 35^{\circ} = 5.579 \text{ เมตร}$$

กำหนดให้พจน์ γ_w เป็นค่าหน่วยน้ำหนักน้ำ

$$U = \frac{1}{2}\gamma_W z_W (H - z)\operatorname{cosec} \psi_p \qquad (ข)$$

$$= \frac{1}{2}(9.81)(5.5)(20 - 16.8)\operatorname{cosec} 35^{\circ}$$

$$= 150.507 \text{ กิโลนิวตันต่อเมตร}$$

$$V = \frac{1}{2}\gamma_W (z_W)^2 \qquad (ค)$$

$$= \frac{1}{2}(9.81)(5.5)^2 = 148.376 \text{ กิโลนิวตันต่อเมตร}$$

ส่วนค่าน้ำหนักของมวลหินในส่วนที่จะมีการเกิดการพังทลายในแนวระนาบ หาได้จากสมการเชิงประสบการณ์โดยใช้ความรู้เชิงตรีโกณมิติ

$$W = \frac{1}{2}\gamma H^2\left[\left\{1-\frac{z}{H}\right\}^2(\cot\psi_p)\left\{(\cot\psi_p\cdot\tan\beta)-1\right\}\right] \qquad (ง)$$

$$= \frac{1}{2}(25.5)(20)^2[(1-\frac{16.8}{20})^2\cot 35^{\circ}(\cot 35^{\circ}\tan 65^{\circ}-1)]$$

$$= 384.604 \text{ กิโลนิวตันต่อเมตร}$$

นำค่าตัวแปรที่คำนวณได้ มาแทนหาค่าอัตราส่วนปลอดภัยเชิงกำหนด จากสมการเชิงประสบการณ์

$$F.S. = \frac{(cL)+[(W\cos\psi_p)-U-(V\sin\psi_p)]\tan\phi}{(W\sin\psi_p)+(V\cos\psi_p)} \qquad (จ)$$

$$= \frac{(45)(5.58) + [(384.60\cos 35^{\circ}) - 150.51 - (148.38\sin 35^{\circ})]\tan 25^{\circ}}{(384.60\sin 35^{\circ}) + (148.38\cos 35^{\circ})}$$

$$= 0.842 \text{ (ต่ำกว่าหนึ่ง มวลไม่มีเสถียรภาพ เกิดการไถลเลื่อน)}$$

เมื่อต้องการหาค่าดัชนีเชิงความน่าจะเป็นตามแนวทางที่สอง ต้องกำหนดให้มีการเพิ่มหรือลดค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังนี้

ก. กรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจงแจงฟังก์ชันแบบปกติ

$$c^{+} = x_1^{+} = (\text{mean})_1 + 1(\text{S.D.})_1 = [45+5] = 50 \text{ kPa}$$

$$c^{-} = x_1^{-} = (\text{mean})_1 - 1(\text{S.D.})_1 = [45-5] = 40 \text{ kPa}$$

$$\phi^{+} = x_2^{+} = (\text{mean})_2 + 1(\text{S.D.})_2 = [25+2] = 27 \text{ degrees}$$

$$\phi^{-} = x_2^{-} = (\text{mean})_2 - 1(\text{S.D.})_2 = [25-2] = 23 \text{ degrees}$$

$$\gamma^{+} = x_3^{+} = (\text{mean})_3 + 1(\text{S.D.})_3 = [25.5+2.5] = 28 \text{ kN/m}^2$$

$$\gamma^{-} = x_3^{-} = (\text{mean})_3 - 1(\text{S.D.})_3 = [25.5-2.5] = 23 \text{ kN/m}^2$$

$$\psi_p^{+} = x_4^{+} = (\text{mean})_4 + 1(\text{S.D.})_4 = [35+3] = 38 \text{ degrees}$$

$$\psi_p^{-} = x_4^{-} = (\text{mean})_4 - 1(\text{S.D.})_4 = [35-3] = 32 \text{ degrees}$$

นำค่าตัวแปรสุ่มที่มีการเพิ่มและลดค่า S.D. ไปหาค่า F.S. ของแต่ละตัวแปร ได้ค่าดังนี้

$$
\begin{array}{llllll}
F_1^{+} = & 0.924 & F_1^{-} = & 0.761 & \Delta F_1 = & 0.163 \\
F_2^{+} = & 0.852 & F_2^{-} = & 0.832 & \Delta F_2 = & 0.002 \\
F_3^{+} = & 0.832 & F_3^{-} = & 0.854 & \Delta F_3 = & 0.022 \\
F_4^{+} = & 0.786 & F_4^{-} = & 0.911 & \Delta F_4 = & 0.125
\end{array}
$$

นั่นคือ จะได้ค่า $(\text{F.S.})_{MLV}$ จากสมการ 3.103 ดังนี้

$$(\text{F.S.})_{MLV} = \frac{(F_1^{+}+F_1^{-})+(F_2^{+}+F_2^{-})+\ldots+(F_4^{+}+F_4^{-})}{2(4)}$$

$$= \frac{(0.924+0.761)+(0.852+0.832)+(0.832+0.854)+(0.786+0.911)}{8}$$

$$= 0.844$$

ใช้สมการ 3.107 หาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของค่าอัตราส่วนปลอดภัย

$$\sigma_{FS} = \sqrt{\left(\frac{\Delta F_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta F_2}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\Delta F_4}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{0.163}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.002}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.022}{2}\right)^2 + \left(\frac{0.125}{2}\right)^2} = 0.104$$

จากสมการ 3.108 ทำให้หาค่าของสัมประสิทธิ์การแปรผันเป็น

$$(C.O.V.)_{FS} = \frac{\sigma_{FS}}{(F.S.)_{MLV}}$$

$$= \frac{0.104}{0.844} = 12.30\%$$

นำค่าตัวแปรที่หาค่าได้ดังกล่าว มาหาค่าดัชนีความเชื่อถือได้สำหรับตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ โดยใช้สมการ 3.109

$$\beta_N = \frac{[(F.S.)_{MLV} - (1)]}{(\sigma)_{FS}}$$

$$= \frac{[0.844 - 1]}{0.104} = -1.503$$

ดังนั้น ค่าโอกาสการพังทลาย จะมีค่าเป็น

$$p(f) = 1 - F(\beta_N) = 1 - F(-1.503)$$

$= 0.9336$ หรือ $= 93.36\%$ แสดงว่ามีโอกาสที่ไม่เกิดการพังทลายตามแนวระนาบเพียง 6.64%

หมายเหตุ

เมื่อมีค่าพจน์ตัวแปรสุ่มของมุม ψ_p มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ ย่อมทำให้ค่ามิติ L กับค่าน้ำหนัก W ที่ใช้ในการคำนวณเปลี่ยนแปลงไป ดังนี้

ค่า L กลาง = 5.579 m ค่า L^+ = 5.198 m; ค่า L^- = 6.039 m

ค่า U กลาง = 150.507 kN/m ค่า U^+ = 140.220 kN/m

ค่า U^- = 162.908 kN/m ค่า W กลาง = 384.604 kN/m

ค่า W^+ = 422.310 kN/m (ค่า γ เพิ่ม) ค่า W^- = 346.898 kN/m (ค่า γ ลด)

ค่า W^+ = 291.579 kN/m (มุม ψ_p เพิ่ม) ค่า W^- = 508.126 kN/m (มุม ψ_p ลด)

ข. กรณีที่ตัวแปรสุ่มมีการแจงแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ

เนื่องจากในตารางที่ 3.8 โจทย์กำหนดเฉพาะค่าเฉลี่ยและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานที่มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ ใช้แนวทางการวิเคราะห์หาผลลัพธ์ที่ระบุไว้เป็นวิธีที่สาม (โจทย์ตัวอย่างที่ 3.4 หัวข้อ 3.5.3)

วิธีที่สามดังกล่าวนี้กำหนดให้ $(F.S.)_{MLV}$ มีการแจกแจงแบบลอการิทึมปกติด้วย ดังนั้นสามารถใช้ค่า σ_{FS} กับค่า $(C.O.V.)_{FS}$ ที่คำนวณได้ในข้อ ก. มาหาค่าดัชนีความเชื่อถือได้ของการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ

$$\beta_{LN} = \frac{\ell n\left[\dfrac{(F.S.)_{MLV}}{\sqrt{[(1)+(C.O.V.)^2_{FS}]}}\right]}{\sqrt{\ell n[(1)+(C.O.V.)^2_{FS}]}}$$

$$= \frac{\ell n\left[\dfrac{0.884}{\sqrt{[(1)+(0.123)^2]}}\right]}{\sqrt{\ell n[(1)+(0.123)^2]}}$$

$$= \frac{\ell n\left[\dfrac{0.884}{100754}\right]}{\sqrt{\ell n[1.01513]}} = \frac{-0.13082}{0.03875} = -3.87$$

ดังนั้น ค่าโอกาสการพังทลาย จะมีค่าเป็น

$$p(f) = 1 - F(\beta_{LN}) = 1 - F(-3.87)$$

$$= .9999 \quad \text{หรือ} \quad = 99.99\ \%$$

หมายเหตุ

เมื่อทำการเปรียบเทียบระหว่างผลลัพธ์ของค่า p (f) ในกรณีที่สมมุติให้มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบปกติ ค่า p (f) จะต่ำกว่า ในกรณีที่สมมุติให้มีการแจกแจงฟังก์ชันแบบลอการิทึมปกติ ดังนั้นค่าที่ p (f) = 99.99 % น่าจะเป็นค่าที่ถูกต้องมากกว่าค่าที่ p (f) = 93.36% ถ้าหากมีน้ำขังในรอยร้าวจากแรงดึงที่ระดับสูง 5.5 เมตร