

บทที่ 3 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

ปัจจุบันได้มีการพัฒนาความสามารถทางด้านโปรแกรมที่ใช้ในการแก้ปัญหาทางด้านกลศาสตร์ของไหลให้มีความแม่นยำถูกต้อง และง่ายต่อการใช้งาน ซึ่งสิ่งนี้จะเป็นเครื่องมือที่ใช้ในการวิเคราะห์ และออกแบบระบบที่เกี่ยวข้องกับของไหลให้สะดวก และประหยัดเวลามากขึ้น

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) ที่ใช้อธิบายลักษณะการไหลภายใต้เงื่อนไขที่กำหนด ซึ่งโดยทั่วไปแล้วสมการสำหรับการไหลมักสร้างขึ้นบนหลักการความสอดคล้องของสมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation) สมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และสมการพลังงาน (Energy Equation) หรือเรียกสมการทั้ง 3 นี้รวมกันว่า สมการควบคุม (Governing Equation) ซึ่งสมการทั้ง 3 นี้เป็น สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้น ที่ประกอบด้วยตัวแปรไม่ทราบค่าหลายตัวด้วยกัน ได้แก่ ตัวแปรความเร็วในทิศทางต่าง ๆ ตัวแปรความดัน ตัวแปรความหนาแน่น และตัวแปรอุณหภูมิ เป็นต้น โดยจำนวนตัวแปรที่ไม่ทราบค่าที่ปรากฏอยู่ในสมการจะมีจำนวนขึ้นอยู่กับมิติที่ใช้การวิเคราะห์ และข้อสมมุติฐานที่ตั้งขึ้นเพื่อใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาการไหลนั้น ๆ เช่น หากทำการวิเคราะห์ปัญหาเป็นแบบ 3 มิติ ก็จะมีตัวแปรความเร็ว ตัวแปรความดัน ตัวแปรความหนาแน่น และตัวแปรอุณหภูมิเพิ่มขึ้นมากกว่าการวิเคราะห์แบบ 2 มิติ อีกหนึ่งทิศทางหรือหากตั้งข้อสมมุติฐานให้ของไหลเป็นการไหลในสภาวะคงตัวจะส่งผลให้ค่าความหนาแน่นเป็นค่าคงที่ ที่ทราบค่า และไม่ต้องคำนวณหา แต่ในทางกลับกันหากของไหลเป็นการไหลในสภาวะไม่คงตัว (Compressible Flow) ค่าความหนาแน่นจะเป็นตัวแปรที่ไม่ทราบค่าเพิ่มขึ้นมาในสมการอีกหนึ่งตัว เป็นต้น

ดังนั้น เพื่อให้ง่ายต่อความเข้าใจ และเป็นไปในทิศทางเดียวกัน การสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยต่อไปนี้จะตั้งอยู่บนสมมุติฐานภายใต้เงื่อนไขหลักของการวิเคราะห์ที่กำหนดไว้ ดังนี้ คือ เป็นปัญหาการไหลแบบคงที่ (Steady Flow) ในสภาวะคงตัว (Incompressible Flow) ในทิศทาง 3 มิติ และไม่คิดการแผ่รังสีความร้อน

1. ระเบียบวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณ (Computational Fluid Dynamics, CFD)

ระเบียบวิธีพลศาสตร์ของไหลเชิงคำนวณเป็นการวิเคราะห์ระบบที่เกี่ยวข้องกับการไหล การถ่ายโอนความร้อน และปรากฏการณ์อื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับการไหล และการถ่ายโอนความร้อน เช่น ปฏิกริยาเคมี โดยการทำการจำลองแบบในคอมพิวเตอร์ ซึ่งในปัจจุบันเป็นที่นิยมมาก เนื่องจาก

เครื่องคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพสูง และ โปรแกรมทางพลศาสตร์ของไหลในปัจจุบันก็ออกแบบมาให้เข้าถึงความเข้าใจ และสะดวกในการใช้งาน

1.1 สมการความต่อเนื่อง (Continuity Equation)

พิจารณากฎอนุรักษ์มวลของปริมาตรควบคุม (Control Volume)

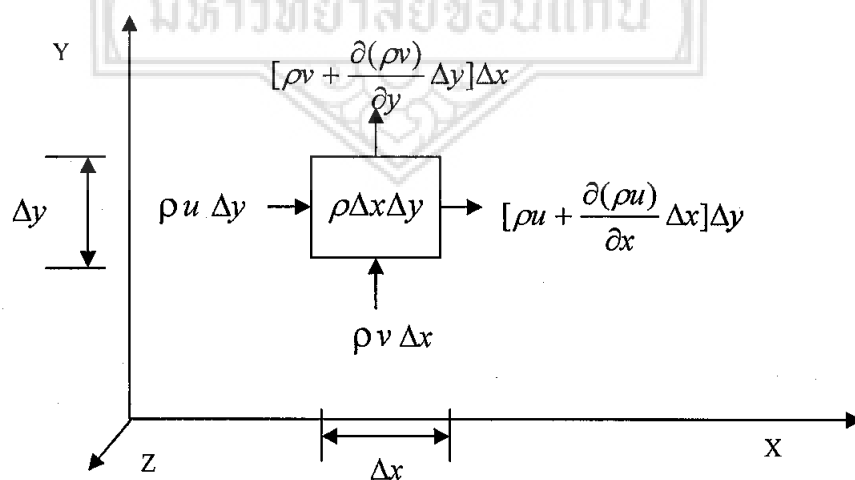
$$\frac{\partial M_{cv}}{\partial t} = \sum_{\text{inlet ports}} m - \sum_{\text{outlet ports}} m \quad (1)$$

โดยที่ M_{cv} คือ มวลภายในปริมาตรควบคุม ณ เวลานั้น และ m คืออัตราการไหลเข้าและออก ปริมาตรควบคุม พิจารณาปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ ดังภาพที่ 8 ให้ u และ v เป็นส่วนประกอบความเร็วเฉพาะที่ ณ จุด (x, y) สมการที่ (1) สามารถเขียนใหม่ได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \Delta x \Delta y) = \rho u \Delta y + \rho v \Delta x - \left[\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y - \left[\rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \quad (2)$$

นำ $\Delta x \Delta y$ มาหารสมการที่ (2) ตลอดสมการ จะได้สมการที่ (3) ซึ่งเป็นสมการความต่อเนื่องใน 2 มิติ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$



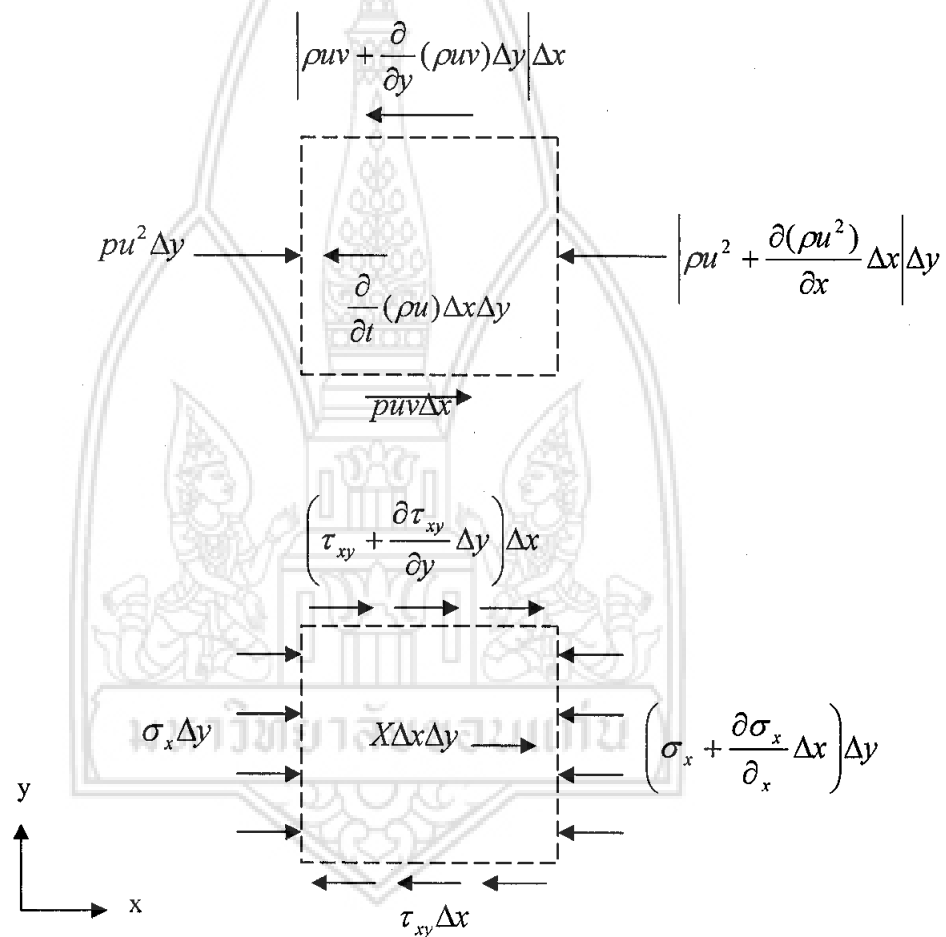
ภาพที่ 8 สมดุลมวลในระบบพิกัดฉาก 2 มิติ

1.2 สมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

พิจารณาสมมูลของแรงที่เกิดขึ้นทันทีที่หน้าใดบนปริมาตรควบคุม

$$\frac{\partial}{\partial t} (Mv_n)_{cv} = \sum F_n + \sum_{\text{inlet ports}} m v_n - \sum_{\text{outlet ports}} m v_n \quad (4)$$

โดย n เป็นทิศทางที่เลือกใช้ในการวิเคราะห์ และ (v_n, F_n) เป็นเวกเตอร์ภาพฉายของความเร็วของของไหล และแรงที่กระทำในแนว n



ภาพที่ 9 สมดุลแรงในแนว x บนปริมาตรควบคุมใน 2 มิติ

พิจารณาปริมาตรควบคุมของการไหลใน 2 มิติ ภาพที่ 9 เราสามารถพิจารณาสมมูลของแรงได้ 2 แนว คือ ในแนว x และในแนว y ในขั้นแรกจะพิจารณาแรงในแนว x ก่อน เมื่อแตกแรงทั้งหมดให้อยู่ในแนว x จะได้ว่า

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(pu\Delta x\Delta y) + pu^2\Delta y - \left[pu^2 + \frac{\partial}{\partial x}(pu^2)\Delta x \right] \Delta y + puv\Delta x - \left[puv + \frac{\partial}{\partial x}(puv)\Delta y \right] \Delta x \\ & + \sigma_x\Delta y - \left(\sigma_x + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\Delta x \right) \Delta y - \tau_{xy}\Delta x + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\Delta y \right) \Delta x + X\Delta x\Delta y = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

นำ $\Delta x\Delta y$ มาหารสมการที่ (5) ตลอดสมการ (โดย $(\Delta x\Delta y) \rightarrow 0$) จะได้

$$p \frac{Du}{Dt} + u \left[\frac{Dp}{Dt} + p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + X \quad (6)$$

และจากความสัมพันธ์ในเชิงเอมไพริกรัลของ σ_x และ τ_{xy}

$$\begin{aligned} \sigma_x &= P - 2\mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

แทนสมการที่ (7) ลงในสมการที่ (6) จะทำให้ได้สมการนาเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes Equation)

$$p \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + X \quad (8)$$

โดยที่ X คือ $\frac{\partial}{\partial t}\rho u$ และส่วนสมมูลของแรงในแนวแกน y ก็สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน ซึ่งเขียนได้ดังนี้

$$p \frac{Dv}{Dt} = +\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2\mu}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + Y \quad (9)$$

โดยที่ Y คือ $\frac{\partial}{\partial t} \rho v$ และตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ นิยามโดยสมการที่ (10)

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (10)$$

1.3 Turbulent Model

การจำลองแบบปั่นป่วนเป็นการคำนวณของระบบปิดของการไหลแบบเฉลี่ย (Mean Flow) ตามสมการดังต่อไปนี้

ตารางที่ 3 แสดง Turbulent Flow Equations for Compressible Flows

Continuity

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(pU) = 0$$

Reynolds equations

$$\frac{\partial(pU)}{\partial t} + \text{div}(pUU) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \text{div}(\mu \text{grad}U) + \left[-\frac{\overline{pu'^2}}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pu'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pu'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mx}$$

$$\frac{\partial(pV)}{\partial t} + \text{div}(pVU) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \text{div}(\mu \text{grad}V) + \left[-\frac{\partial(\overline{pv'^2})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pu'v'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pv'w'})}{\partial z} \right] + S_{My}$$

$$\frac{\partial(pW)}{\partial t} + \text{div}(pWU) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \text{div}(\mu \text{grad}W) + \left[-\frac{\partial(\overline{pw'^2})}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{pu'w'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pv'w'})}{\partial z} \right] + S_{Mz}$$

Scalar transport equation

$$\frac{\partial(p\Phi)}{\partial t} + \text{div}(p\Phi U) = \text{div}(\Gamma_\Phi \text{grad}\Phi) + \left[-\frac{\partial(\overline{pu'\Phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{pv'\Phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{pw'\Phi'})}{\partial z} \right] + S_\Phi$$

ซึ่งการคำนวณจะพิจารณาผลกระทบแบบปั่นป่วนของการไหลเฉลี่ย เราต้องการนิพจน์สำหรับสมการ Reynolds Stress และเทอมของ Turbulent Scalar Transport ในสมการ Scalar Transport ซึ่งการใช้แบบจำลองแบบปั่นป่วนนี้จะนิยมใช้ในการเขียน CFD Code เพราะใช้ง่าย มีความแม่นยำ ประหยัดทรัพยากรของเครื่องคอมพิวเตอร์ในการ Run ดังแสดงในตารางที่ 4

ตารางที่ 4 แสดงวิธีการทาง CFD

Classical model	Base on (time-average) Reynolds equation <ol style="list-style-type: none"> 1. zero equation model-mixing length model 2. two-equation model-k-ϵ model 3. Reynold stresses equation model 4. algebraic stresses model
Large eddy simulation	Base on space-filtered equation

- ใน Classical model the mixing length และ k- ϵ model จะพิจารณาบนพื้นฐานของ viscous stresses and Reynolds stresses บนการไหลเฉลี่ย ซึ่งค่า Stress ทั้งสองจะพบได้บนด้านขวามือของ Momentum Equation ในการพิจารณาปัญหาการไหล Simple Turbulent Flow ซึ่ง Turbulent Level และ Turbulent Stresses จะเปลี่ยนแปลงจากจุดหนึ่งไปสู่จุดหนึ่งในการไหล

- Mixing Length Model จะศึกษาในรายละเอียดของ Stresses โดย Mean of Simple Algebraic ของสูตรสำหรับ μ_t ซึ่งจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันตำแหน่ง

- k- ϵ Model จะสนใจรายละเอียดของการไหลแบบปั่นป่วน โดยจะพิจารณาถึงอิทธิพลของการส่งถ่ายคุณสมบัติของการปั่นป่วนโดยการไหลเฉลี่ย และการแพร่โดยสมการ การส่งถ่ายจะสนใจ 2 สมการ ซึ่งเป็น (Partial Differential Equation PDEs)

- สมการ Turbulent Kinetic Energy (k)

- สมการ Rate of Dissipation ของ Turbulent Kinetic Energy (ϵ)

- ทั้งสอง Model ข้างต้น จะใช้บนข้อสมมุติ คือ มีลักษณะทางกายภาพของ Turbulent Viscosity (μ_t) เหมือนกัน หรือพูดอีกอย่างก็คือ มีอัตราส่วนของค่า Reynolds Stresses กับค่าของอัตราเฉลี่ยของการเปลี่ยนรูปมีค่าเท่ากันทุกทิศทุกทาง

1.4 The k- ϵ Model

วิธีการของ k- ϵ Model จะสนใจ Mechanism ของผลกระทบ The Turbulent Kinetic Energy จากสมการ Navier-Stokes โดยมีสมมติฐานคือ

- เป็น Incompressible Flow
- Constant Viscosity

พิจารณา Vector ความเร็ว U ซึ่งประกอบไปด้วย x - component u ,
 y - component v , z - component w x - component u

$$\text{div}U = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(uU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + v \text{div}(\text{grad } u) \quad (12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(vU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + v \text{div}(\text{grad } v) \quad (13)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(wU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial z} + v \text{div}(\text{grad } w) \quad (14)$$

ในสมการ (11)-(14) สามารถแทนตัวแปรการไหล $U(u, v, w)$ เนื่องจากอิทธิพล
 ของ Fluctuation และความผัน ด้วยผลรวมของค่าเฉลี่ย และส่วนประกอบของ Fluctuating

$$u = U + u', \quad v = V + v', \quad w = W + w'; \quad p = P + p'$$

พิจารณาสมการความต่อเนื่อง (11) โดยกำหนดให้ $\overline{\text{div}u} = \text{div}U$ เป็นจุด Yield
 ของสมการ Continuity สำหรับการไหลเฉลี่ย

$$\text{div}U = 0 \quad (15)$$

จะพิจารณาสมการ (12) ก่อน โดยพิจารณาที่เวลาเฉลี่ย จะทำให้เขียนเทอมต่าง ๆ
 ให้อยู่ในรูปสมการได้ดังนี้

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial U}{\partial t}; \quad \overline{\text{div}(uU)} = \text{div}(UU) + \text{div}(u'u')$$

$$-\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x}; \quad \overline{v \text{div}(\text{grad} u)} = v \text{div}(\text{grad } U)$$

จะสามารถเขียนสมการเวลาเฉลี่ยของ X-momentum equation ได้ดังนี้

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) + \text{div}(\overline{u'u'}) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad } U) \quad (16a)$$

เพราะฉะนั้น ในสมการในแนวแกนอื่น ๆ ก็พิจารณาเหมือนกันจะได้

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) + \text{div}(\overline{v'u'}) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad } V) \quad (16b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) + \text{div}(\overline{w'u'}) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } W) \quad (16c)$$

แต่ในเทอมที่ 3 จะมีการเปลี่ยนแปลงเมื่อมีการเพิ่มการพิจารณา Turbulent Stresses บน Mean Velocity Component u , v , w จนได้รูปใหม่เป็น

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad } U) + \left[-\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad } V) + \left[-\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] \quad (18)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) = -\frac{1}{p} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad } W) + \left[-\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} \right] \quad (19)$$

Governing Equation สำหรับ Mean Flow Kinetic Energy (K) สำหรับสมการ Mean Kinetic Energy (k) เกิดจากการคูณ U เข้ากับสมการ Component Reynolds (17) จะได้

$$\frac{\partial(pK)}{\partial t} + \text{div}(pKU) = \text{div}(-PU + 2\mu UE_{ij} - pU\overline{u'u'_j}) - 2\mu E_{ij} \cdot E_{ij} + p\overline{u'u'_j} \cdot E_{ij} \quad (20)$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

หรือ

Rate of change of K	+ Transport of K by convection	=	Transport of K by pressure	+ Transport of K by viscous stresses	+ Transport of K by Reynold stresses
			- Rate of dissipation of K	+ Turbulent production	

Governing Equation of Turbulent Kinetic Energy (k) คือการคูณสมการ Instantaneous Navier-Stokes ด้วย Appropriate Fluctuating Velocity Component (ยกตัวอย่างเช่น คูณสมการ x-component equation ด้วย u') จะได้

$$\frac{\partial(pk)}{\partial t} + \text{div}(pkU) = \text{div}(-p'u' + 2\mu u'e'_{ij} - p\frac{1}{2}u'_i u'_j) - 2\mu e'_{ij} \cdot e'_{ij} + p u'_i u'_j \cdot E_{ij} \quad (21)$$

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

หรือ

Rate of change of k	+ Transport of k by convection	=	Transport of k by pressure	+ Transport of k by viscous stresses	+ Transport of k by Reynold stresses
			- Rate of dissipation of k	+ Turbulent production	

พิจารณาเทอม Viscous Dissipation (6) ในสมการ (21)

$$-2\mu e_{ij} \cdot e_{ij} = -2\mu(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2 + 2e_{12}^2 + 2e_{13}^2 + 2e_{23}^2) \quad (22)$$

การกระจายเทอมที่มีค่าเป็น Negative ซึ่งอยู่ในรูปผลรวมของการยกกำลังของอัตราการเปลี่ยนรูป e_{ij} ซึ่ง Dissipation ของ Turbulent Kinetic Energy จะเกิดปรากฏการณ์ Eddies ที่มีขนาดเล็กมากกับ Viscous Stresses ซึ่งค่าดังกล่าวจะอยู่ในหน่วยของ m^2/s^3 จะเขียนได้ดังนี้

$$\varepsilon = \overline{2\nu e_{ij} \cdot e_{ij}} \quad (23)$$

1.5 The Standard k- ε Model

โมเดลที่สมบูรณ์ที่ง่ายที่สุดของ turbulence คือโมเดลที่มีสองสมการ ที่ผลลัพธ์ของสมการสองสมการนั้นทำให้ Turbulent velocity และ length scales เป็นผลลัพธ์ที่เป็นอิสระต่อกัน Standard k- ε โมเดลใน Fluent ได้กลายเป็น turbulence model ที่ถูกนำมาใช้งานกันจริงอย่างแพร่หลายในทางวิศวกรรมตั้งแต่ ถูกค้นพบโดย Jones and Launder เนื่องจากความทนทานและประหยัด และเหมาะสมสำหรับนำมาใช้กับ turbulence flow ทำให้โมเดลนี้เป็นที่นิยมในวงการอุตสาหกรรมของการจำลองการไหลและการถ่ายเทความร้อน Standard k- ε โมเดลเป็นโมเดลที่การทดลองที่ได้มาจากการสังเกตปรากฏการณ์จริง ซึ่ง Standard k- ε โมเดลใช้ transport equation ของ k และ ε ดังนี้

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \text{div}(\rho k U) = \text{div} \left[\frac{\mu}{\rho_k} \text{grad} k \right] - 2\mu_l E_{ij} \cdot E_{ij} - \rho \varepsilon \quad (24)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \text{div}(\rho \varepsilon U) = \text{div} \left[\frac{\mu_l}{\rho_e} \text{grad} \varepsilon \right] + C_{1e} \frac{\varepsilon}{k} 2\mu_l E_{ij} \cdot E_{ij} - C_{2e} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (25)$$

หรือ

Rate of change of k or ϵ	+ Transport of k or ϵ by convection	=	Transport of k or ϵ by pressure	+ Transport of k or ϵ by viscous stresses	+ Transport of k or ϵ by Reynold stresses
-----------------------------------	--	---	--	--	--

สมการดังกล่าวจะประกอบด้วยค่าคงที่ 5 ค่า คือ $C_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon, C_{1c}, C_{2c}$ ซึ่งค่าดังกล่าวจะหาได้จากการทดลอง

1.6 The RNG k- ϵ Model

RNG k- ϵ โมเดลได้มาจาก rigorous statistical technique หรือที่เรียกกันว่า renormalization group theory รูปแบบจะเหมือนกับ standard k- ϵ โมเดล แต่จะรวมรายละเอียดต่างข้างล่างนี้ลงไปด้วย

- RNG model มีเงื่อนไขเพิ่มเติมในสมการของ ϵ ที่ปรับปรุงความแม่นยำของ rapidly stained flows
- ผลของ swirl ใน turbulence ถูกรวมไปใน RNG โมเดลทำให้ความแม่นยำของ swirling flows ดีขึ้น
- ทฤษฎีของ RNG มีการวิเคราะห์ Turbulent Prandtl numbers ขณะที่ standard k- ϵ โมเดลให้ผู้ใช้เป็นผู้กำหนด และเป็นค่าคงตัว
- ขณะที่ Standard k- ϵ โมเดลเป็นโมเดล high-Reynolds-number ทฤษฎีของ RNG จะมีสูตรที่วิเคราะห์ความหนืดที่เหมาะสมที่จะอธิบายผลของ low-Reynolds-number อย่างไม่ไร้ก็ตาม ผลการใช้งานที่มีประสิทธิภาพก็ขึ้นอยู่กับการใช้ที่เหมาะสมกับบริเวณที่ใกล้ผนัง (near wall condition)

ลักษณะเด่นดังกล่าวทำให้ RNG k- ϵ โมเดลมีความแม่นยำและเชื่อถือได้กับลักษณะการไหลรูปแบบต่าง ๆ มากกว่า Standard k- ϵ โมเดล

$$p \frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_k \mu_{eff} \frac{\partial k}{\partial x_i} \right) + G_k + G_b - p \epsilon - Y_M \quad (26)$$

และ

$$p \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_\epsilon \mu_{eff} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} p \frac{\epsilon^2}{k} - R \quad (27)$$

ในสองสมการนี้ G_k แสดงการเกิดของ turbulent kinetic energy เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงของ mean velocity, G_b คือ การกำเนิดของ turbulent kinetic energy เนื่องจาก buoyancy, Y_M แสดงถึงการมีส่วนร่วมของ fluctuating dilatation ใน compressible turbulence กับ dissipation rate โดยรวม, ปริมาณของ α_k และ α_ϵ คือ inverse effective Prandtl numbers สำหรับ k และ ϵ ตามลำดับ

1.7 Modeling the effective Viscosity

กระบวนการจัด Scale ในทฤษฎีของ RNG มีผลใน differential equation สำหรับ turbulent viscosity

$$d \left(\frac{\rho^2 k}{\sqrt{\epsilon} \mu} \right) = 1.72 \frac{\hat{v}}{\sqrt{\hat{v}^3 - 1 + C_v}} d\hat{v} \quad (28)$$

โดย

$$\hat{v} = \mu_{eff} / \mu$$

$$C_v \approx 100$$

สมการ (28) ถูกรวมเพื่อที่จะอธิบายว่า effective turbulent transport เปลี่ยนแปลงตาม effective Reynolds number อย่างไร (หรือ eddy scale) และยังยอมให้โมเดลอธิบาย low-Reynolds-number และ near-wall flows ได้ดีอีกด้วย

การกำหนดเงื่อนไขขอบเขตของสมการที่ (28) สามารถกำหนดได้คือ

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (29)$$

ที่ $C_\mu = 0.0845$ ที่ได้มาจากทฤษฎีของ RNG ที่น่าสังเกตคือค่าของ C_μ จะใกล้เคียงกับค่าที่ได้จากการสังเกตจากการทดลอง 0.09 ที่ใช้ใน standard k- ϵ โมเดล

โดยปกติแล้ว Effective viscosity จะถูกคำนวณโดยสมการ high-Reynolds number (29) อย่างไรก็ตามยังมีทางเลือกอื่นที่ยอมให้เลือก differential relation คือสมการที่ (28) เมื่อต้องการที่จะรวมผลของ low-Reynolds-number

1.8 RNG Swirl Modification

Turbulence โดยทั่วไปจะเกิดผลกระทบจากการหมุนหรือ Swirl ใน mean flow RNG โมเดลจัดหาทางเลือกที่จะอธิบายผลจาก swirl หรือการหมุนโดยการแก้ไข turbulent viscosity อย่างเหมาะสม การแก้ไขสมการข้างล่างนี้

$$\mu_t = \mu_{t0} f\left(\alpha_s, \Omega, \frac{k}{\epsilon}\right) \quad (30)$$

ขณะที่ μ_{t0} คือขนาดของ turbulent viscosity ที่ถูกคำนวณมาโดยไม่มีการแก้ไขสำหรับ swirl ที่มาจากสมการ (28) และ (29) Ω คือหน้าตาของ swirl number ที่หามาโดย Fluent และ α_s คือ swirl constant ที่สมมติค่าต่าง ๆ ขึ้นอยู่กับการไหลเป็นแบบ swirl-dominated หรือเป็นเพียงแต่ mildly swirling การแก้ไข swirl จะมีผลสำหรับ axisymmetric swirling flow และ three-dimensional flows เมื่อ RNG โมเดลถูกเลือก สำหรับ mildly swirling flows α_s จะถูกกำหนดให้เท่ากับ 0.05 และไม่สามารถที่จะแก้ไขได้ สำหรับ strongly swirling flows ค่า α_s ที่สูงขึ้นมาสามารถใช้ได้

1.9 การคำนวณ Inverse Effective Prandtl Numbers

Inverse Effective Prandtl Numbers α_k และ α_ϵ จะถูกคำนวณโดยการใช้สูตรดังข้างล่างที่ได้มาจากทฤษฎีของ RNG

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{\alpha_0 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha - 2.3929}{\alpha_0 - 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \quad (31)$$

ขณะที่ $\alpha_0 = 1.0$ ในช่วงของ high-Reynolds-number limit ($\frac{\mu_{mol}}{\mu_{eff}} \ll 1$), $\alpha_\epsilon \approx 1.39$

1.10 The R Term in the ϵ Equation

ความแตกต่างหลักระหว่าง RNG และ standard k- ϵ โมเดลที่อยู่ในพจน์เพิ่มเติมในสมการของ ϵ คือ

$$R = \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0) \epsilon^2}{1 + \beta \eta^3} \quad (32)$$

$$\eta \equiv S_K / \epsilon, \quad \eta_0 = 4.38, \quad \beta = 0.012$$

ผลของพจน์นี้ในสมการ RNG สามารถเห็นได้ชัดขึ้นโดยการเรียบเรียงสมการ (27) การใช้สมการ (32) สองพจน์สุดท้ายในสมการ (27) สามารถนำมารวมกันได้ และสามารถเขียนได้ใหม่เป็นดังข้างล่างนี้

$$\rho \frac{D\epsilon}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_\epsilon \mu_{eff} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_i} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon}^* \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (33)$$

โดยที่ $C_{2\epsilon}^*$ คือ

$$C_{2\epsilon}^* \equiv C_{2\epsilon} + \frac{C_\mu \rho \eta^3 (1 - \eta / \eta_0)}{1 + \beta \eta^3} \quad (34)$$

ในบริเวณที่ $\eta < \eta_0$ พจน์ R จะมีผลทางด้านบวก และ $C_{2\epsilon}^*$ จะมีความมากกว่า $C_{2\epsilon}$ ใน logarithmic layer ยกตัวอย่างเช่น $\eta \approx 3.0$, $C_{2\epsilon}^* \approx 2.0$ ซึ่งจะค่อนข้างใกล้เคียงกับขนาดของ $C_{2\epsilon}^*$ ใน standard k- ϵ โมเดล ดังกล่าว สำหรับ strained flows แบบปานกลาง RNG โมเดลค่อนข้างจะให้ผลที่มากกว่าเมื่อเปรียบเทียบกับ standard k- ϵ โมเดล

ในบริเวณที่มี strain rate ค่อนข้างสูง ($\eta < \eta_0$) พจน์ R จะเป็นลบ ทำให้ค่าของ $C_{2\epsilon}^*$ น้อยกว่าค่าของ $C_{2\epsilon}$ และเมื่อเปรียบเทียบกับ standard k- ϵ โมเดล การตัดทอนของส่วนขยาย ϵ จะลด k และท้ายที่สุดจะมีผลกับ viscosity จากผลดังกล่าวใน rapidly strained flows RNG โมเดลให้ turbulent viscosity ที่ต่ำกว่า standard k- ϵ โมเดล

ดังนั้น RNG โมเดลจะมีการตอบสนองกับ rapid stain และ streamline curvature มากกว่า standard k- ϵ โมเดล นี่คือนิวตันที่ทำให้ RNG มีประสิทธิภาพดีกว่าในการไหลบางประเภท

1.11 Model Constants

ค่า Model constants $C_{1\epsilon}$ และ $C_{2\epsilon}$ ในสมการ (27) มีค่าที่ได้มาจากการวิเคราะห์ในทฤษฎีของ RNG ค่าเหล่านี้ถูกใช้ใน FLUENT คือ $C_{1\epsilon} = 1.42$, $C_{2\epsilon} = 1.68$

1.12 สรุปข้อดี-ข้อเสีย ของวิธี Turbulent Model

ตารางที่ 5 แสดงข้อดี - ข้อเสียของวิธี Turbulent Model

ทฤษฎี	ข้อดี	ข้อเสีย
k- ϵ Model	<ol style="list-style-type: none"> 1. เป็น Turbulent Model ที่ง่ายที่สุด สำหรับการไหลที่รู้ค่า Initial Condition 2. มีสมรรถนะดีมากสำหรับการวิเคราะห์การไหลในงานอุตสาหกรรม 3. มีความน่าเชื่อถือ; สำหรับมาตรฐานการไหล Turbulent Model 	<ol style="list-style-type: none"> 1. อุปกรณ์ที่ใช้ในการคำนวณมากกว่า Mixing Length Model 2. มีสมรรถนะต่ำสำหรับการวิเคราะห์การไหลในบางกรณี <ul style="list-style-type: none"> - บางกรณีของการไหลแบบ Unconfined flow - Flow with Large Extra Strains (เช่น Curved Boundary Layer, Swirling Flows) - Rotating Flows - Fully Developed Flow in Non-Circular Ducts
k- ω Model	<ol style="list-style-type: none"> 1. มีความแม่นยำ และความเชื่อมั่น สำหรับรูปแบบการไหลได้หลายรูปแบบ เช่น Far Wake, Mixing Layer, Plane, Round, Radial Jet ซึ่งสามารถนำไปพิจารณากรณีการไหลได้ดังนี้ 	<ol style="list-style-type: none"> 1. มีการใช้ทรัพยากรของอุปกรณ์ที่ใช้ในการคำนวณมากกว่า Mixing Length Model 2. มีสมรรถนะต่ำสำหรับการวิเคราะห์การไหลในบางกรณี

ตารางที่ 5 แสดงข้อดี-ข้อเสียของวิธี Turbulent Model (ต่อ)

ทฤษฎี	ข้อดี	ข้อเสีย
	<p>Wall-Bounded Flow, Free Shear Flow และสามารถใช้งานได้ดีสำหรับการไหล Airfoil</p> <p>2. ใช้ทรัพยากรของอุปกรณ์ในการคำนวณน้อยกว่าวิธี RSM และ น้อยกว่าหรือเท่ากับวิธี k-ϵ Model</p> <p>3. ใช้เวลาในการคำนวณน้อยกว่าวิธี RSM</p>	<p>- บางกรณีของการไหลแบบ Unconfined Flow</p> <p>- Flow with Large Extra Strains (เช่น Curved Boundary Layer, Swirling Flows)</p> <p>- Fully Developed Flow in Non-Circular Ducts</p>
Reynold Stresses Model (RSM)	<p>1. สามารถที่จะเป็น Turbulent Model พื้นฐานสำหรับวิเคราะห์การไหลทั่วไปได้</p> <p>2. ใช้ได้เฉพาะกรณีการไหลที่รู้ค่า Initial Boundary Condition</p> <p>3. มีความแม่นยำสำหรับการคำนวณคุณสมบัติการไหลเฉลี่ย (Mean Flow) และทุก ๆ Reynold Stresses สำหรับการไหลบางกรณี เช่น Wall Jets, Asymmetric Channel, Non-Circular Duct</p>	<p>1. เป็นการคำนวณที่ใช้ทรัพยากรของอุปกรณ์ที่ใช้ในการคำนวณมาก เนื่องจาก Seven Extra PDEs</p> <p>2. ไม่สามารถใช้งานได้กว้างขวางเหมือนกับ Mixing Length และ k-ϵ Model</p> <p>3. มีสมรรถนะไม่ได้เหมือนกับวิธี k-ϵ Model สำหรับบางกรณีการไหล เช่น Axisymmetric Jets และ Unconfined Recirculating Flows</p>

2. โปรแกรมไฟไนต์วอลุ่ม Ansys Fluent

ขั้นตอนการทำงานของโปรแกรม Ansys Fluent แบ่งเป็น 3 ขั้นตอนหลัก

2.1 ขั้นตอนก่อนการประมวลผล (Pre-processing)

- การสร้างขอบเขต (Domain) เป็นการสร้างแบบจำลองงานที่ใช้ในการวิเคราะห์ โดยได้มาจากแบบงานของอุปกรณ์ จะมีลักษณะรูปร่างและขนาดตามปัญหาที่ต้องการพิจารณา เช่น ศึกษาการไหลของอากาศภายในเตาอบ การสร้างขอบเขต คือ การเขียนแบบจำลองที่มีลักษณะรูปร่าง และ ขนาดเหมือนเตาอบที่ใช้พิจารณา

- การสร้าง (Grid Generation) โดยแบ่งชิ้นงานเป็นขอบเขตย่อย ที่มีหลายรูปแบบเช่น สี่เหลี่ยม, สามเหลี่ยม, เป็นต้น โดยการกระจายตัวของ Grid มีทั้ง Structured grid และ Unstructured grid

- การกำหนดเงื่อนไขค่าขอบเขตและค่าเริ่มต้น (Define Boundary Value and Initial Value) เป็นการกำหนดรูปแบบของปัญหาที่เรากำลังศึกษาอยู่

2.2 ขั้นตอนการประมวลผล (Processing)

จัดรูปสมการให้เหมาะสมกับปัญหาที่พิจารณาในขั้นนี้คือการจัดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equations) ซึ่งเป็นสมการที่ใช้อธิบายลักษณะการไหลและความร้อนให้อยู่ในรูปแบบที่เหมาะสมกับปัญหาที่เราต้องการศึกษา การทำให้สมการไม่ต่อเนื่อง (Discretisation) การทำให้สมการไม่ต่อเนื่องนี้คือ การแปลงสมการที่มีรูปแบบต่อเนื่องให้อยู่ในรูปแบบพีชคณิต ให้อยู่ในรูปแบบไม่ต่อเนื่อง เพื่อให้เหมาะสมกันกับการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่นิยมใช้สำหรับการแก้ปัญหานี้คือไฟไนต์วอลุ่ม เนื่องจากวิธีนี้มีความซับซ้อนน้อยกว่าวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ สำหรับวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ได้ถูกพิสูจน์แล้วว่าเป็นวิธีที่เป็นไปตามกฎการอนุรักษ์ (Conservation Law) จึงจะทำให้เหมาะกับการแก้ปัญหาด้านความร้อนและการไหล

2.3 วิธีการหาผลเฉลย (Solution)

ในส่วนนี้ระบบสมการจะถูกจัดรูปโดยไฟไนต์วอลุ่มนั้น สามารถหาคำตอบของแก้ระบบสมการด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข ซึ่งระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นิยมในการแก้ระบบสมการพีชคณิตใน CFD ก็คือระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแบบซ้ำ (Iteration Method) พื้นฐานของ CFD คือสมการนาเวียร์-สโตกส์ซึ่งกล่าวถึงการไหลของของไหลหนึ่งเฟส สมการเหล่านี้สามารถลดความยุ่งยากลงได้ด้วยการย้ายเทอมที่เกี่ยวกับความหนืดออกเพื่อให้ได้สมการออยเลอร์ จากนั้นจึงย้ายเทอมที่เกี่ยวกับความเร็วเพื่อให้ได้ full potential equations จากนั้นจึงทำให้เป็นสมการเส้นตรงเพื่อให้ได้ linearized potential equations

2.4 ขั้นตอนหลังการประมวลผล (Post-processing)

ขั้นตอนหลังการประมวลผลนี้ จะทำการนำข้อมูลดิบที่ได้จากการคำนวณมาแสดงผลในรูปแบบต่างๆตามงานที่ต้องการนำไปใช้ได้แก่ การแสดงผลในรูปกราฟ แถบสี และ เวกเตอร์ เพราะในการคำนวณทางด้านพลศาสตร์ของไหลใช้วิเคราะห์แบบจำลองบนระบบคอมพิวเตอร์ ก่อนลงมือสร้างจริงต่อไป ในบางกรณีของการจำลองสถานการณ์ด้วย

โปรแกรม CFD นั้น แบบจำลองอาจจะมี จุดต่อเชื่อมของ Grid ที่ใช้ในการคำนวณมีค่ามาก ทำให้คอมพิวเตอร์ที่ใช้ในการประมวลผล ต้องมีสมรรถนะสูง จึงจะสามารถคำนวณได้ และคอมพิวเตอร์ที่มีสมรรถนะสูง อาจจะสามารถรองรับการประมวลผลไม่ได้เสมอไป กล่าวคือ คอมพิวเตอร์สมรรถนะสูง อาจจะต้องประมวลผลเป็นระยะเวลาหลายชั่วโมง และไม่สามารถรองรับการประมวลผลงานอื่นในเวลาเดียวกัน

