

บทคัดย่อ

โครงการวิจัยนี้ประกอบด้วย 4 งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างตัวแบบปรากฏการณ์เชิงกายภาพในงานทางวิทยาศาสตร์ประยุกต์ โดยงานวิจัยดังกล่าวมีส่วนที่เชื่อมโยงกันโดยมีการใช้ระเบียบวิธีที่ประยุกต์ใช้ในฟิสิกส์เชิงคณิตศาสตร์ และคณิตวิเคราะห์ของสมการเชิงอนุพันธ์ในการสร้างตัวแบบ

งานวิจัยที่หนึ่งสามารถแบ่งได้เป็น 3 ส่วนย่อยตามการศึกษาและลำดับการค้นพบดังนี้ สำหรับส่วนย่อยที่หนึ่ง เกี่ยวข้องกับการสร้างตัวแบบทางพลศาสตร์ของไหล โดยในส่วนนี้ได้นำเสนองานประยุกต์อย่างมีระบบของระเบียบวิธีการวิเคราะห์กลุ่มสำหรับการสร้างตัวแบบของของไหลที่มีความเฉื่อยภายใน และพบว่าโดยการจำแนกรูปสามารถแบ่งตัวแบบเหล่านี้ได้เป็น 73 คลาส สำหรับส่วนย่อยที่สอง เกี่ยวข้องกับงานประยุกต์ของระเบียบวิธีการวิเคราะห์กลุ่มของสมการอินทิกรัล-ดิฟเฟอเรนเชียล งานวิจัยในส่วนนี้เกี่ยวข้องกับการใช้สมการอินทิกรัล-ดิฟเฟอเรนเชียลแบบอิวลูชันนารีในการอธิบายสมการคลื่นแบบไม่เชิงเส้น ในงานวิจัยดังกล่าวได้กล่าวถึงการนำเสนอแนวทางใหม่ของการวิเคราะห์กลุ่มสมัยใหม่และการประยุกต์ใช้ในตัวแบบทั่วไป ซึ่งทำให้ได้สมการที่ถูกลดรูปและผลเฉลยชัดเจน และอีกงานประยุกต์หนึ่งของระเบียบวิธีการวิเคราะห์กลุ่มของสมการอินทิกรัล-ดิฟเฟอเรนเชียลนั้นนำไปใช้กับสมการโบลทซ์แมนน์ และได้นำเสนอการจำแนกรูปสำหรับสมการดังกล่าวเทียบกับแหล่งต้นทางโดยใช้ระเบียบวิธีทางพีชคณิต และสำหรับงานในส่วนย่อยที่สามเป็นการศึกษา 2 ปัญหาคือ ปัญหาอินทิกรัลที่หนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง ซึ่งได้นำเสนอถึงอินทิกรัลที่หนึ่งสำหรับตัวแทนเฉพาะที่เกี่ยวข้องกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง ความสัมพันธ์ระหว่างรูปอินทิกรัล สมการที่เกี่ยวข้อง ความสัมพันธ์สมมูล และตัวอย่างประกอบที่แสดงให้เห็นถึงลักษณะและสมบัติสำคัญต่าง ๆ และปัญหาที่สองเป็นการจำแนกกลุ่มอย่างสมบูรณ์ของระบบสมการของสองสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ซึ่งได้ปรับแก้วิธีการใช้แบบบัญญัติจอร์ดองในการศึกษาโครงสร้างสมมาตรของระบบสมการของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสองเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวที่นำเสนอโดย Wafo Soh (2010) ให้ถูกต้อง โดยงานวิจัยนี้ได้นำเสนอเพียงระบบสมการที่มีเพียงสองสมการเท่านั้น

งานวิจัยที่สองเกี่ยวกับบริเวณผสมเต็มรูปแบบสองมิติยุบตัวลงในตัวกลางแบบแบ่งเป็นชั้นตามความหนาแน่นอย่างต่อเนื่อง งานวิจัยนี้เป็นการใช้การวิเคราะห์การคำนวณเชิงตัวเลขของพจน์แอดเวกทีฟในสมการนาเวียร์-สโตก ในการประมาณค่าของโอเบอบค-บิวจินสค์ การเปรียบเทียบระหว่างการใช้แผนอับวิน แผนจำกัดค่าฟลักซ์ที่ชื่อว่ามินมอด ซุปเปอร์บี แวนเลียร์ และโมนโทไนซ์เซนเตอร์ แผนฉายผลรูปปรับตัวทางเดียวที่ชื่อ ENO3 และ SMIF และแผนฉายผลลู่วงน้ำหนัก WENO5 ได้ถูกเสนอในงานวิจัยนี้ ข้อมูลการทดลองจากห้องปฏิบัติการของ Wu ได้ถูกนำมาใช้ในการวัดเปรียบเทียบสมรรถนะ เพื่อเปรียบเทียบประสิทธิภาพของแนวทางทางการคำนวณเชิงตัวเลขต่าง ๆ ซึ่งพบว่าแผนจำกัดค่าฟลักซ์จะให้การแพร่เชิงตัวเลขน้อยที่สุด แผน WENO5 ให้ความแม่นยำในการอธิบายความกว้างของบริเวณยุบตัวในเวลาที่แตกต่างกันได้มากกว่า และแผนทั้งหมดที่พิจารณาในงานวิจัยแสดงถึงแบบรูปที่เหมือนจริงสำหรับคลื่นโน้มถ่วงภายในที่ถูกสร้างโดยบริเวณยุบตัว

งานวิจัยที่สามได้พัฒนาแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบการแปรผันสำหรับการลดสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิลในภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง โดยมีสมมติฐานว่าสัญญาณรบกวนแบบสเปกเคิลมีรูปแบบการแจกแจง

แบบเรย์ลี แบบจำลองทางคณิตศาสตร์ดังกล่าวนำไปสู่การหาค่าน้อยสุดของฟังก์ชันนัลบนปริภูมิของฟังก์ชันของการแปรผันอย่างมีขอบเขต ฟังก์ชันนัลดังกล่าวประกอบด้วยพจน์ของพลังงานและพจน์ของความถูกต้องของข้อมูล ซึ่งได้มาจากการแจกแจงแบบเรย์ลี งานวิจัยชิ้นนี้แสดงให้เห็นว่าค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนัลมีอยู่จริง และมีอยู่เพียงหนึ่งเดียวภายใต้เงื่อนไขเพิ่มเติมบางประการ ผลเฉลยของสมการออยเลอร์ลากรางจ์ของแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้ถูกประมาณโดยวิธีเกรเดียนต์เดสเซนต์ ในส่วนของการทวนสอบความถูกต้องของแบบจำลอง ภาพที่มีลักษณะเป็นแบบรูปและภาพของเลนนาได้ถูกนำมาใช้เป็นตัวอย่งการทดสอบ และผลการทำสอบได้ทำการเปรียบเทียบสัทสัมพันธ์ระหว่างภาพที่มีสัญญาณรบกวนกับภาพต้นแบบ และภาพที่ถูกบรูณะโดยวิธีต่าง ๆ กับภาพต้นแบบ ผลการศึกษาพบว่าแบบจำลองที่ได้สามารถลดสัญญาณรบกวนจากภาพที่ใช้ทำการทดสอบและวัดที่สั้นของภาพถ่ายคลื่นเสียงความถี่สูง นอกจากนี้ได้เปรียบเทียบสมรรถนะของการลดสัญญาณรบกวนโดยแบบจำลองที่ได้กับการลดสัญญาณรบกวนโดยแบบจำลองทางคณิตศาสตร์แบบการแปรผันอื่น ๆ อีกด้วย

งานวิจัยที่ได้สร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์เพื่อใช้ทำนายอัตราการเปลี่ยนรูปผลึกโดยอาศัยสารละลายเป็นสื่อกลางของผลึกที่มีโครงสร้างผลึกมากกว่าหนึ่งแบบ และช่วยให้เข้าใจเรื่อง การเกิดการเปลี่ยนรูปผลึกโดยอาศัยสารละลายเป็นสื่อกลาง มากยิ่งขึ้น ผลการคำนวณที่ได้จากแบบจำลองนี้ได้นำมาเปรียบเทียบกับค่าจากการทดลองการเกิด การเปลี่ยนรูปผลึกโดยอาศัยสารละลายเป็นสื่อกลางของ อัลฟา-ดีแอล-เมทาไธโอนีน (α -DL-methionine) ไปเป็นแกมมา-ดีแอล-เมทาไธโอนีน (γ -DL-methionine) โดยเปรียบเทียบในส่วนของความเข้มข้นของเมทาไธโอนีนที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลาและอัตราส่วนโดยมวลของผลึกทั้งสองแบบ เบื้องต้นนั้นตัวแปรต่าง ๆ ที่ใช้ในการสร้างแบบจำลองจะจงใจเฉพาะที่สามารถวัดได้จากการทดลองเกี่ยวกับปรากฏการณ์ การโตของผลึก การเกิดผลึกใหม่ การละลายของผลึก และช่วงเวลาก่อนการเกิดผลึกของผลึกทั้งสองแบบ โดยไม่มีตัวแปรที่สร้างมาจากข้อมูลของการเปลี่ยนรูปผลึกโดยอาศัยสารละลายเป็นสื่อกลางมาเกี่ยวข้อง ซึ่งแบบจำลองที่สร้างขึ้นให้ผลการคำนวณไปในทิศทางเดียวกันกับข้อมูลที่ได้จากผลการทดลอง แต่ค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงโครงสร้างของผลึกนั้นไม่ถูกต้อง จากการวิเคราะห์ผลที่ได้ทำให้ทราบว่าตัวแปรที่มีผลทำให้แบบจำลองและการทดลองให้ผลไม่เหมือนกันคือ ค่าคงที่ของการละลาย เนื่องจากเมื่อลองกำหนดตัวแปรที่เกี่ยวข้องกับข้อมูลการเกิดการเปลี่ยนรูปผลึกโดยอาศัยสารละลายเป็นสื่อกลาง เพิ่มลงไป แบบจำลองให้ผลออกมาดีมาก สำหรับเหตุผลของความคลาดเคลื่อนของแบบจำลองนั้นก็ได้อธิบายและนำเสนอไว้ในงานวิจัยนี้แล้ว การศึกษาในส่วนที่สองเป็นการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของหอกล้านไอ้แบบเปิด เพื่อนำมาใช้หาปริมาณอัตราส่วนที่เหมาะสมในการบ้อนกลับของของเหลวผลึกก้นกบที่ได้หลังจากการกลั่นเข้าสู่หอกล้าน ในกรณีที่ต้องการออกแบบให้หอกล้านมีขนาดเล็กที่สุด (จำนวนชั้นของหอกล้านน้อยที่สุด) ซึ่งในเบื้องต้นนั้นคาดว่าจะสามารถสร้างสมการที่สามารถแก้ได้โดยง่าย แต่เมื่อสร้างสมการขึ้นมาสำเร็จ สมการที่ได้นั้นมีความซับซ้อนมาก จนไม่สามารถแก้โดยใช้ระบบวิธีการทางวิเคราะห์ได้ อย่างไรก็ตามสมการที่ถูกสร้างขึ้นนี้สามารถแก้ได้โดยใช้ระบบวิธีการทางตัวเลขในทุก ๆ สภาวะการทดลอง ซึ่งในรายงานนี้ก็ได้อธิบายตัวอย่างการแก้สมการไว้ด้วย

Abstracts

The program is assembled from four research projects of modeling physical phenomena in applied sciences. These projects are connected by the methods applied in mathematical physics, mathematical analysis of differential equations used for modeling.

The research performed in the first project can be formally separated in three parts. All these parts are related by the method of the study and the sequence of discoveries. The first part of the project deals with modeling in fluid dynamics. A systematic application of the group analysis method for modeling fluids with internal inertia is presented. The group classification separates these models into 73 different classes. The second part of the project deals with applications of the group analysis method to integro-differential equations. The research deals with an evolutionary integro-differential equation describing nonlinear waves. We discuss new approaches developed in modern group analysis and apply them to the general model considered in the present paper. Reduced equations and exact solutions are also presented. Another application of the group analysis method to integro-differential equations is related with the Boltzmann equation. The group classification with respect to sources is carried out for the equations under consideration using the algebraic method. The third part of the first project is focused on the study of two problems: (a) on first integrals of second-order ordinary differential equations; (b) the complete group classification of systems of two linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients. Here we discuss first integrals of a particular representation associated with second-order ordinary differential equations. The relationship between the integral form, the associated equations, equivalence transformations, and some examples are considered as part of the discussion illustrating some important aspects and properties. For group classification the present project corrects the way of using Jordan canonical forms for studying the symmetry structures of systems of linear second-order ordinary differential equations with constant coefficients applied in (Wafo Soh (2010)). The approach is demonstrated for a system consisting of two equations.

In the second research the problem of a two-dimensional fully mixed region collapsing in continuously density-stratified medium is considered. This research deals with the numerical treatment of the advective terms in the Navier-Stokes equations in the Oberbeck-Boussinesq approximation. Comparisons are made between the upwind scheme, flux-limiter schemes namely Minmod, Superbee, Van Leer and Monotonized Centred (MC), monotone adaptive stencil schemes namely ENO3 and SMIF, and weighted stencil scheme WENO5. Laboratory experimental data of Wu (J. Fluid Mech. , 1969, vol. 35) are used as a benchmark test to compare performance of different numerical approaches. We found that flux limiter schemes have smallest numerical diffusion. The WENO5 scheme describes more accurately the width of collapse region variation with time. All considered schemes give realistic patterns of internal gravity waves generated by collapse region.

In the third research a variational model for the reduction of speckle noise in ultrasound images is developed, which assumes that speckle noise follows a Rayleigh distribution. The model leads to a functional on the space of functions of bounded

variation to be minimized. This functional consists of an energy term and a data-fidelity term derived from the Rayleigh distribution. It is shown that minimizers of the functional exist and, under some additional assumptions, are unique. The solution of the resulting Euler-Lagrange equation is then approximated by the gradient descent method. For the purpose of verification of the model, a pattern image as well as the Lenna image are used as sample images, and the correlations between the noisy, respectively the reconstructed images and the original ones are compared. It is found that the model can be used successfully to remove noise from images and ultrasound videos. Finally, the performance of this new model is compared with that of some of the variational denoising models described in the literature, by means of the sample images.

The fourth research study has successfully produced a mathematical model that can be used to predict the rate of solution mediated transformation of polymorphs and also aid understanding of the phenomenon. The model results have been compared with experimental values of the solution mediated transformation of α -DL-methionine into γ -DL-methionine (time dependent methionine concentration and polymorph mass fraction results). Initially the parameters in the model were fitted based on experimental measurements of crystal growth kinetics, nucleation kinetics, dissolution kinetics and induction times for the two polymorphs; there were no parameters in the model that were fitted using solution mediated transformation data. This model showed the same trends as the experimental data, but the rate of transformation was not correct. Analysis of the results showed that the only parameter that could be responsible for the mismatch was the dissolution rate constant; when this result was fitted based on solution mediated transformation results then the fit was very good. Reasons for the mismatch are also discussed. A second study was made of modeling open steam distillation columns in order to solve for the reflux ratio resulting in a minimum number of stages. It was hoped to be able to find an analytical solution to the problem, however while an equation could be found that gave the solution, the equation was very complex and could not be analytically solved. The equation could be solved numerically for any set of operating conditions, and example solutions are shown in this report.