ภาคผนวก ก

สำหรับเนื้อหาในส่วนนี้จะเป็นการพิสูจน์ถึงที่มาของเทคนิควิธีการแปลงพิกัดแกนซึ่งใช้กับสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวข้องเพื่อนำไปประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสำหรับกระบวนการแก้ปัญหาต่อไป โดยสามารถแสดงให้เห็นถึงการแปลงพิกัดแกนโดยทั่วไปของค่าอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งและสองได้ดังนี้

พิจารณาค่าอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของตัวแปรใด ๆ ซึ่งสามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\cdot\left(z_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi} - z_\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J}\cdot\left(x_\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta} - x_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \qquad \text{(ก-1)}$$

โดยที่ J คือ เมตริกซ์ จาโคเบียน (Jacobian) ซึ่งมีค่าเท่ากับ

$$J = x_\xi\cdot z_\eta - x_\eta\cdot z_\xi \qquad \text{(ก-2)}$$

$$x_\xi = \frac{\partial x}{\partial\xi} \qquad \text{(ก-3)}$$

พิจารณาค่าอนุพันธ์ลำดับที่สองของตัวแปรใด ๆ ซึ่งเราสามารถกำหนดค่าอนุพันธ์ลำดับที่สองของสมการลาปาสของตัวแปร A ใด ๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\nabla^2 A &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)A \\ &= \frac{1}{J^2}\cdot\left(\alpha\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} - 2\cdot\beta\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}\right) \\ &+ \frac{1}{J^3}\cdot\left[\begin{aligned}&\left(\alpha\cdot x_{\xi\xi} - 2\cdot\beta\cdot x_{\xi\eta} + \gamma\cdot x_{\eta\eta}\right)\cdot\left(z_\xi\cdot\frac{\partial A}{\partial\eta} - z_\eta\cdot\frac{\partial A}{\partial\xi}\right) \\ &+ \left(\alpha\cdot z_{\xi\xi} - 2\cdot\beta\cdot z_{\xi\eta} + \gamma\cdot z_{\eta\eta}\right)\cdot\left(x_\eta\cdot\frac{\partial A}{\partial\xi} - x_\xi\cdot\frac{\partial A}{\partial\eta}\right)\end{aligned}\right]\end{aligned} \qquad \text{(ก-4)}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}\alpha &= {x_\eta}^2 + {z_\eta}^2 \\ \beta &= x_\xi\cdot x_\eta + z_\xi\cdot z_\eta \\ \gamma &= {x_\xi}^2 + {z_\xi}^2\end{aligned} \qquad \text{(ก-5)}$$

x_ξ, x_ξ , z_ξ และ z_η คือ partial derivatives, β,α,γ คือ geometric factors และ η,ξ คือ พิกัดแกนใหม่ที่ถูกแปลงจากพิกัด x,y (transformed coordinates). โดยที่ตัวแปรที่กล่าวมามีความสัมพันธ์กันดังต่อไปนี้ :

$$
\begin{aligned}
& x = x(\xi,\eta), \quad z = z(\xi,\eta) \quad or \quad \xi = \xi(x,z), \quad \eta = \eta(x,z) \\
& \Downarrow \\
& x = x(\xi), \quad z = z(\xi,\eta) \quad or \quad \xi = \xi(x), \quad \eta = \eta(x,z) \\
& \therefore \quad x_\eta = \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0 \quad or \quad \xi_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0
\end{aligned}
\tag{ก-6}
$$

จากสมการ (ก-6), ค่าอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของตัวแปรใด ๆ (สมการ (ก-1)) สามารถเปลี่ยนรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\cdot\left(z_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi} - z_\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J}\cdot\left(x_\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta} - x_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\right) \\
& \Downarrow \\
& \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J}\cdot\left(z_\eta\cdot\frac{\partial}{\partial\xi} - z_\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{J}\cdot\left(x_\xi\cdot\frac{\partial}{\partial\eta}\right)
\end{aligned}
\tag{ก-7}
$$

โดยที่

$$
\begin{aligned}
& J = x_\xi\cdot z_\eta - x_\eta\cdot z_\xi \\
& \Downarrow \\
& J = x_\xi\cdot z_\eta
\end{aligned}
\tag{ก-8}
$$

ค่าอนุพันธ์ลำดับที่หนึ่งของตัวแปรใด ๆ (สมการ ก-4) สามารถเปลี่ยนรูปใหม่ได้ดังต่อไปนี้:

$$
\begin{aligned}
\nabla^2 A = & \frac{1}{J^2}\cdot\left(\alpha\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} - 2\cdot\beta\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}\right) \\
& + \frac{1}{J^3}\cdot\left[\begin{aligned} & \left(\alpha\cdot x_{\xi\xi} - 2\cdot\beta\cdot x_{\xi\eta} + \gamma\cdot x_{\eta\eta}\right)\cdot\left(z_\xi\cdot\frac{\partial A}{\partial\eta} - z_\eta\cdot\frac{\partial A}{\partial\xi}\right) \\ & + \left(\alpha\cdot z_{\xi\xi} - 2\cdot\beta\cdot z_{\xi\eta} + \gamma\cdot z_{\eta\eta}\right)\cdot\left(x_\eta\cdot\frac{\partial A}{\partial\xi} - x_\xi\cdot\frac{\partial A}{\partial\eta}\right)\end{aligned}\right] \\
\Downarrow &
\end{aligned}
\tag{ก-9}
$$

$$\nabla^2 A = \frac{1}{J^2}\cdot\left(\alpha\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi^2} - 2\cdot\beta\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\cdot\frac{\partial^2 A}{\partial\eta^2}\right)$$

$$+\frac{1}{J^3}\cdot\left[\begin{array}{l}\left(\alpha\cdot x_{\xi\xi}\right)\cdot\left(z_\xi\cdot\frac{\partial A}{\partial\eta} - z_\eta\cdot\frac{\partial A}{\partial\xi}\right)\\ +\left(\alpha\cdot z_{\xi\xi} - 2\cdot\beta\cdot z_{\xi\eta} + \gamma\cdot z_{\eta\eta}\right)\cdot\left(-x_\xi\cdot\frac{\partial A}{\partial\eta}\right)\end{array}\right]$$

โดยที่

$$\alpha = x_\eta{}^2 + z_\eta{}^2,\quad \beta = x_\xi\cdot x_\eta + z_\xi\cdot z_\eta,\quad \gamma = x_\xi{}^2 + z_\xi{}^2$$

$$\Downarrow$$

(ก-10)

$$\alpha = z_\eta{}^2,\quad \beta = z_\xi\cdot z_\eta,\quad \gamma = x_\xi{}^2 + z_\xi{}^2$$

การแปลงพิกัดแกนของสมการพลังงาน (The transformation of thermal model)

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \frac{a_l}{J^2}\left(\alpha\frac{\partial^2 T_l}{\partial\xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 T_j}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2 T_l}{\partial\eta^2}\right) +$$

$$\frac{a_l}{J^3}\left[\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right)\left(z_\xi\frac{\partial T_l}{\partial\eta} - z_\eta\frac{\partial T_l}{\partial\xi}\right) + \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\left(-x_\xi\frac{\partial T_l}{\partial\eta}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{J}\left(x_\xi\frac{\partial T_l}{\partial\eta}\right)\frac{dz}{dt}$$

(ก-11)

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{a_s}{J^2}\left(\alpha\frac{\partial^2 T_s}{\partial\xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 T_s}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2 T_s}{\partial\eta^2}\right) +$$

$$\frac{a_s}{J^3}\left[\left(\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial\xi^2}\right)\left(z_\xi\frac{\partial T_s}{\partial\eta} - z_\eta\frac{\partial T_s}{\partial\xi}\right) + \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial\xi^2} - 2\beta\frac{\partial^2 z}{\partial\xi\partial\eta} + \gamma\frac{\partial^2 z}{\partial\eta^2}\left(-x_\xi\frac{\partial T_s}{\partial\eta}\right)\right] +$$

$$\frac{1}{J}\left(x_\xi\frac{\partial T_s}{\partial\eta}\right)\frac{dz}{dt}$$

(ก-12)

การแปลงพิกัดแกนของสมการการเคลื่อนที่ของขอบเขต (The transformation of Stefan Equation)

$$\left\{\lambda_s\frac{1}{J}\left(x_\xi\frac{\partial T_s}{\partial\eta}\right) - \lambda_l\frac{1}{J}\left(x_\xi\frac{\partial T_l}{\partial\eta}\right)\right\}\left\{1 + \left(\frac{1}{J}\left[z_\eta\frac{\partial z_{mov}}{\partial\xi} - z_\xi\frac{\partial z_{mov}}{\partial\eta}\right]\right)^2\right\} = \rho_s L_s\frac{\partial z_{mov}}{\partial t}$$

(ก-13)