

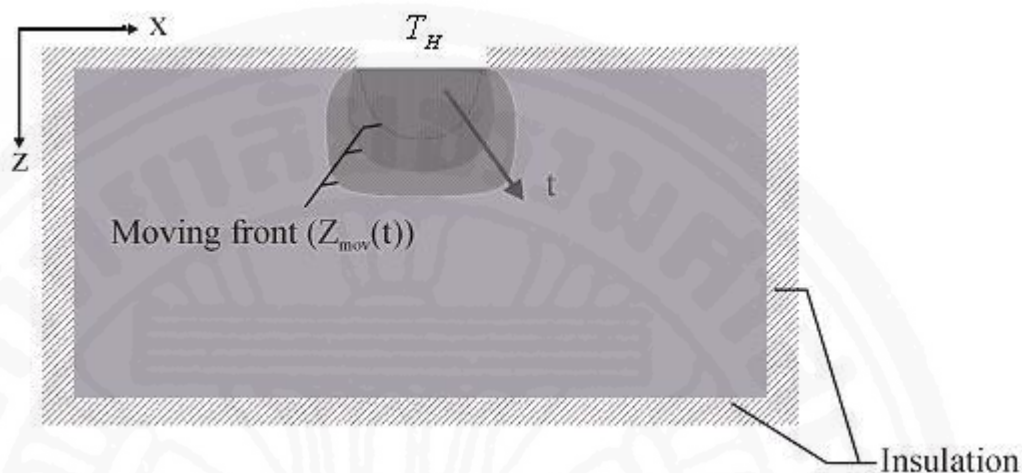
การใช้เทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลิชั่นร่วมกับวิธีการแปลงพิกัดแกน เพื่อแก้ปัญหาขอบเขตเคลื่อนที่ซึ่งเป็นรูปร่างใด ๆ โดยรวมผลของการพาความร้อนที่เกิดขึ้นเนื่องจากการละลาย

เนื้อหาวิทยานิพนธ์ในบทนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและนำเสนอ การใช้วิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลิชั่นร่วมกับวิธีการแปลงพิกัดแกน ในการนำมาใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหาขอบเขตเคลื่อนที่ของผิวละลาย สำหรับปัญหาการทำละลายในระบบสองมิติ โดยจะพิจารณาผลของการนำความร้อนอันเนื่องมาจากการส่งผ่านความร้อนไปยังบริเวณที่ถูกทำละลายและไม่ถูกทำละลายและผลของการพาความร้อนเนื่องจากเกิดการไหลวนของของเหลวที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟสของวัสดุ งานวิจัยเริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบการอนุพันธ์ย่อยซึ่งประกอบไปด้วยสมการอนุพันธ์มวล สมการการถ่ายเทพลังงาน สมการโมเมนตัม และสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลายสำหรับปัญหาการทำละลายภายในก้อนน้ำแข็งที่มีขอบเขตเคลื่อนที่ 2 ตำแหน่งโดยที่การหาคำตอบของกลุ่มสมการดังกล่าวใช้วิธีไฟไนต์วอลุ่มร่วมกับวิธีแปลงพิกัดแกน ความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการทำนายจะถูกตรวจสอบกับผลที่ได้จากการทดลองและงานวิจัยที่ใกล้เคียงกัน ส่วนตัวแปรที่สำคัญที่ศึกษาครั้งนี้คือ อิทธิพลของระดับอุณหภูมิของความร้อนที่ป้อนซึ่งมีผลต่ออัตราการทำละลายของน้ำแข็ง ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ รูปทรงของผิวละลายและลักษณะการไหลวนภายในเฟสของเหลวที่ละลายตัว

7.1 ระเบียบวิธีวิจัย

เนื้อหาในบทนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและนำเสนอการใช้เทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชันร่วมกับวิธีการแปลงพิกัดแกนเพื่อนำมาใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหาขอบเขตเคลื่อนที่ของผิวรอยต่อระหว่างเฟสสำหรับปัญหาการทำละลาย (Melting Process) ในระบบสองมิติตามลำดับ โดยจะพิจารณารวมผลของการส่งผ่านความร้อนโดยการนำ (Conduction Mode) ระหว่างบริเวณโซนของแข็ง (Frozen layer) กับโซนของเหลว (Unfrozen layer) และผลของการถ่ายเทความร้อนโดยการพาเนื่องจากโซนของเหลวที่เกิดการละลายตัว งานวิจัยเริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบการอนุพันธ์ย่อยซึ่งประกอบไปด้วย สมการส่งถ่ายความร้อน (Heat Equation) สมการโมเมนตัม (Momentum Equation) และสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย (Stefan's Equation) เพื่อใช้สำหรับปัญหาการทำละลายในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสที่มีขอบเขตเคลื่อนที่ 2 มิติ โดยที่การหาคำตอบของกลุ่มสมการดังกล่าวจะใช้วิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชัน (Transfinite Interpolation) ร่วมกับวิธีแปลงพิกัดแกน (PDE Mapping Method) ตัวแปรที่สำคัญที่ศึกษาครั้งนี้คือ อิทธิพลของระดับอุณหภูมิ (Temperature Load) ที่ป้อนซึ่งมีผลต่ออัตราการทำการละลาย ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ รูปทรงของผิวละลาย และลักษณะการไหลวนของของไหลเนื่องจากการละลาย ความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการทำนายจะถูกตรวจสอบและเปรียบเทียบกับผลการทดลองและผลงานวิจัยที่ใกล้เคียง

7.2 แบบจำลองทางกายภาพ



ภาพที่ 7.1 แสดงลักษณะรูปร่างแบบจำลองทางกายภาพของปัญหา

สำหรับภาพแบบจำลองทางกายภาพของกระบวนการทำละลายในระบบ 2 มิติ นั้นได้แสดงให้เห็นในภาพที่ 7.1 โดยที่ในแบบจำลองนี้จะพิจารณากระบวนการทำละลายของก้อนน้ำแข็งที่อยู่ในกล่องสี่เหลี่ยมขนาด กว้าง*สูง เท่ากับ 110*50 มิลลิเมตร โดยที่จะพิจารณาทั้งในผลของการนำความร้อน และการพาความร้อนทั้งในบริเวณไซนของแข็งและไซนของเหลว

เมื่อพิจารณาถึงเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดให้ระบบเป็นฉนวนกันความร้อนโดยรอบ ยกเว้นบางส่วนของขอบเขตด้านบนซึ่งอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางที่จะกำหนดให้เป็นบริเวณที่ได้รับอุณหภูมิทำความร้อนแบบคงที่ (isothermal) โดยที่เริ่มแรกกำหนดให้ระบบมีอุณหภูมิเริ่มต้นเท่ากันทั้งหมดโดยมีค่าเท่ากับ T_i ซึ่งมีค่าอุณหภูมิต่ำกว่าที่จุดหลอมละลาย ($T_i < T_f$) at time = 0 หลังจากนั้นระบบจะเริ่มเข้าสู่กระบวนการทำละลายเมื่อถูกกระตุ้นโดยการป้อนอุณหภูมิทำละลายเข้าไปในระบบ ณ บริเวณด้านบนซึ่งไม่ได้ถูกกำหนดให้เป็นฉนวนของระบบ โดยที่อุณหภูมิทำละลายนั้นมีค่าเท่ากับ T_H ซึ่ง $T_H > T_f$ โดยที่อิทธิพลของระดับอุณหภูมิของความร้อนที่ป้อนซึ่งมีผลต่ออัตราการทำละลายของน้ำแข็ง ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ รูปทรงของผิวละลายและลักษณะการไหลวนของของไหลเนื่องจากการละลาย ซึ่งสามารถหาได้จากการแก้ปัญหาสมาการการส่งถ่ายความร้อน (Heat equation), สมการโมเมนตัม (Momentum equation) และสมการการเคลื่อนที่ผิวละลาย (Stefan equation)

7.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สมมติฐาน

- กำหนดให้การพิจารณาอุณหภูมิเป็นแบบ 2 มิติ (x-z)
- รอยต่อระหว่างผิวของเหลวและของแข็งนั้นแยกจากกันชัดเจนโดยพิจารณาจากอุณหภูมิหลอมละลาย (fusion temperature)
- กำหนดให้บริเวณรอบ ๆ ของระบบเป็นฉนวนกันความร้อน ยกเว้นบางส่วนด้านบนของกล่องที่กำหนดให้ได้รับความร้อนซึ่งมีอุณหภูมิแบบคงที่
- ไม่คิดผลของการเปลี่ยนแปลงขนาดของระบบเนื่องจากผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น
- คำนึงถึงผลของการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่เกิดขึ้นในเฟสของเหลวที่เกิดขึ้น

เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

- เงื่อนไขเริ่มต้น
 1. ที่ด้านบนของกล่องที่กำหนดให้ได้รับความร้อนซึ่งมีอุณหภูมิแบบคงที่นั้นมีอุณหภูมิเท่ากับ $T = T_H$
- เงื่อนไขขอบเขต
 1. ที่บริเวณโดยรอบของระบบที่มีลักษณะเป็นกล่องสี่เหลี่ยมนั้นถูกกำหนดให้เป็นฉนวนกันความร้อน

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

สมการพื้นฐาน (Basic Equations)

- สมการความต่อเนื่อง

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

(7.1)

- สมการการส่งถ่ายความร้อน

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + u \frac{\partial T_j}{\partial x} + w \frac{\partial T_j}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial T_l}{\partial z} \right) \frac{dz}{dt}$$

(7.2)

- สมการโมเมนตัม

(x - โมเมนตัม)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right]$$

(7.3)

(z - โมเมนตัม)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left\{ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right\} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + g\beta(T - T_\infty)$$

(7.4)

- สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

$$\left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z} \right) \left[1 + \left(\frac{\partial z_{mov}}{\partial x} \right)^2 \right] = \rho_s L_s S_s \frac{\partial z_{mov}}{\partial t}$$

(7.5)

สำนักหอสมุด

7.4 การสร้างกริดโดยใช้วิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเตอร์โพลชัน (Transfinite Interpolation) และ วิธีการแปลงพิกัดแกน (PDE Mapping Method)

7.4.1 ทรานซ์ไฟไนต์อินเตอร์โพลชัน (Transfinite Interpolation)

วิธีการที่นำเสนอนี้ถือเป็นวิธีการที่ใช้ในการสร้างโครงสร้างของกริดในระบบ 2 มิติ ของระบบที่มีรูปทรงแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งถือเป็นวิธีการที่เกี่ยวข้องกับพื้นฐานของวิธีการทางพีชคณิตโดยตรง โดยที่วิธีการนี้ถือว่าเป็นวิธีการที่สามารถสร้างโครงสร้างของกริดได้ง่ายกว่าวิธีการทางด้านสมการเชิงอนุพันธ์และสามารถควบคุมลักษณะเฉพาะของโครงสร้างกริดได้ง่ายกว่า เช่น ตำแหน่งหรือระยะห่างของกริด อย่างไรก็ตาม จุดด้อยของวิธีการนี้คือ มักเกิดความไม่ต่อเนื่องของกริดที่อยู่บนขอบเขตของโดเมน (discontinuities on the boundary) ซึ่งมีผลต่อกริดภายในที่ถูกสร้างขึ้นภายหลัง โดยความต่อเนื่องและราบเรียบของโครงสร้างกริดจะน้อยกว่าโครงสร้างกริดที่ถูกสร้างขึ้นโดยวิธีการแปลงพิกัดแกน ดังนั้น จึงเกิดความคิดในการสร้างโครงสร้างของกริดเริ่มต้นด้วยวิธีการทางพีชคณิตและนำวิธีการแปลงพิกัดแกนมาช่วยทำให้โครงสร้างกริดภายในมีลักษณะต่อเนื่องและราบเรียบมากขึ้นกว่าเดิม โดยสามารถศึกษารายละเอียดได้ในเนื้อหาบทที่ 3 และ 5

7.4.2 การแปลงพิกัดแกน

สำหรับสมการพื้นฐานที่เกี่ยวข้องเมื่อผ่านกระบวนการแปลงพิกัดแกนจะสามารถแสดงได้ดังนี้

- สมการการส่งถ่ายพลังงาน

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_j}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left(u \left(z_\eta \frac{\partial T}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + w \left(x_\xi \frac{\partial T}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right) + \frac{a}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 T_j}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 T_j}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 T_j}{\partial \eta^2} \right) + \\ & \frac{a}{J^3} \left[\left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \left(z_\xi \frac{\partial T_j}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial T_j}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(-x_\xi \frac{\partial T_j}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_j}{\partial \eta} \right) \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

(7.6)

- สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

$$\left\{ \lambda_s \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) - \lambda_l \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{J} \left[z_\eta \frac{\partial z_{mov}}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial z_{mov}}{\partial \eta} \right] \right)^2 \right\} = \rho_s L_s \frac{\partial z_{mov}}{\partial t} \quad (7.7)$$

- สมการ x- โมเมนตัม

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left(u \left(z_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + w \left(x_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) - \frac{1}{\rho J} \left(z_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} \right) \\ & + v \left[\frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J^3} \left(\alpha X_{\xi\xi} \cdot \left(z_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\alpha Z_{\xi\xi} - 2\beta Z_{\xi\eta} + \gamma Z_{\eta\eta}) \cdot \left(-X_\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (7.8)$$

- สมการ z- โมเมนตัม

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & -\frac{1}{J} \left(u \left(z_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + w \left(x_\xi \frac{\partial w}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right) - \frac{1}{\rho J} \left(x_\xi \frac{\partial P}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) \\ & + v \left[\frac{1}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{J^3} \left(\alpha X_{\xi\xi} \cdot \left(z_\xi \frac{\partial w}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\alpha Z_{\xi\xi} - 2\beta Z_{\xi\eta} + \gamma Z_{\eta\eta}) \cdot \left(-X_\xi \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) \right) \right] \\ & + g\beta(T - T_\infty) \end{aligned} \quad (7.9)$$

โดยที่ $J = x_\xi \cdot z_\eta - x_\eta \cdot z_\xi$, $\alpha = x_\eta^2 + z_\eta^2$, $\beta = x_\xi \cdot x_\eta + z_\xi \cdot z_\eta$, $\gamma = x_\xi^2 + z_\xi^2$

และ x_ξ, x_η, z_ξ ซึ่ง z_η หมายถึง partial derivatives, J คือ Jacobian, β, α, γ คือ geometric factors และ η, ξ คือ พิกัดที่ถูกเปลี่ยนแปลงไป (transformed coordinates).

7.5 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ได้จากสมการพื้นฐานจะถูกนำไปแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยคำตอบโดยเริ่มต้นจากการนำวิธีการแปลงพิกัดแกนมาใช้กับสมการพื้นฐาน จากนั้นจึงนำสมการพื้นฐานที่ถูกตัดแปลงพิกัดมาผ่านกระบวนการไฟไนต์วอลุ่มเพื่อหาคุณสมบัติที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการนำความร้อน ลักษณะการเปลี่ยนแปลงหรือเคลื่อนที่ของผิวละลายและลักษณะการเกิดการไหลวนของของไหลเนื่องจากการถ่ายเทความร้อนในโซนของเหลว ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ดังนี้

7.5.1 Numerical Scheme ของสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

$$\begin{aligned}
 Z^{n+1}(k,i) = & Z^n(k,i) + \frac{\Delta T}{\rho_s L_s} * \left(\frac{\lambda_s}{J(k-1,i)} * \left(\frac{X(k-1,i+1) - X(k-1,i-1)}{2\Delta\zeta} \right) \right. \\
 & * \left(\frac{3T(k,i) - 4T(k-1,i) + T(k-2,i)}{2\Delta\eta} \right) \\
 & - \frac{\lambda_l}{J(k+1,i)} * \left(\frac{X(k+1,i+1) - X(k+1,i-1)}{2\Delta\zeta} \right) * \left(\frac{-3T(k,i) + 4T(k+1,i) - T(k+2,i)}{2\Delta\eta} \right) \\
 & \left. * \left(1 + \text{pow} \left(\left(\frac{Z(k+1,i) - Z(k-1,i)}{2\Delta\eta} \right) * \left(\frac{Z^n(k+1,i) - Z^n(k-1,i)}{2\Delta\zeta} \right) - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. \left(\frac{Z(k,i+1) - Z(k,i-1)}{2\Delta\zeta} \right) * \left(\frac{Z^n(k,i+1) - Z^n(k,i-1)}{2\Delta\eta} \right) \right), 2 \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{7.10}$$

7.5.2 Numerical Scheme ของสมการ x-โมเมนต์ (เมื่อนำสมการโมเมนต์ที่แปลงพิกัดแกนแล้วมาผ่านกระบวนการไฟไนต์วอลุ่ม)

$$\begin{aligned}
 u_{i,j}^{n+1} = & (a_1 \cdot u_{i+1,j}^{n+1} + a_2 \cdot u_{i-1,j}^{n+1} + a_3 \cdot u_{i,j+1}^{n+1} + a_4 \cdot u_{i,j-1}^{n+1} - a_5 \cdot u_{i+1,j+1}^{n+1} + a_5 \cdot u_{i+1,j-1}^{n+1} \\
 & + a_5 \cdot u_{i-1,j+1}^{n+1} - a_5 \cdot u_{i-1,j-1}^{n+1} + A \left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i-1,j}^*)^n \right) + B \left((p_{i-1/2,j-1/2}^*)^n - (p_{i-1/2,j+1/2}^*)^n \right) \\
 & + \rho \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t}) / a_0
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
a_0 = & \left[\rho \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right) \cdot z_{i,j+1} - \left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right) \cdot z_{i,j-1} - \left| \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i,j+1} \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left| \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i,j-1} - \left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \right) \cdot z_{i+1,j} + \left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \right) \cdot z_{i-1,j} + \left| \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i+1,j} \right. \right. \\
& - \left. \left. \left| \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i-1,j} + \left(\frac{v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i+1,j} - \left(\frac{v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i-1,j} - \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i+1,j} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i-1,j} - \left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i,j+1} + \left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i,j-1} + \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{2} \right| \cdot x_{i,j+1} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{2} \right| \cdot x_{i,j-1} \right) \right] + \frac{2\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} + \frac{2\mu\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} \quad (7.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right) \cdot z_{i,j+1} - \left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right) \cdot z_{i,j-1} - \left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i,j+1} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i,j-1} \right) + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (-x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} + 2x_{i,j} \cdot z_{i,j+1} \right. \\
& \left. \left. - 2x_{i,j} \cdot z_{i,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1} \right) \right] \quad (7.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_2 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(-\left| \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i,j+1} + \left| \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i,j-1} + \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{2} \right| \cdot x_{i,j+1} \right. \right. \\
& - \left. \left. \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i-1,j+1}}{2} \right| \cdot x_{i,j-1} \right) + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} - 2x_{i,j} \cdot z_{i,j+1} \right. \\
& \left. \left. + 2 \cdot x_{i,j} \cdot z_{i,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1} \right) \right] \quad (7.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(-\left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \right) \cdot z_{i+1,j} + \left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \right) \cdot z_{i-1,j} + \left(\frac{v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i+1,j} \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i-1,j} \right) + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} - 2x_{i,j} \cdot z_{i+1,j} \right. \\
& + 2x_{i,j} \cdot z_{i-1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} + 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} \\
& \left. - 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j} \right) - \frac{\mu\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta J^3} (x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j+1} \\
& - x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j-1} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j+1} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j-1}) \\
& \left. + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta J^3} (x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} - 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} + 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1}) \right] \quad (7.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_4 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\left| \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i+1,j} - \left| \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2} \right| \cdot z_{i-1,j} - \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i+1,j} \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i-1,j} \right) + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (-x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + 2x_{i,j} \cdot z_{i+1,j} \right. \\
& - 2x_{i,j} \cdot z_{i-1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} - 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} \\
& \left. + 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j} \right) - \frac{\mu\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta J^3} (-x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j+1} \\
& + x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j+1} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j-1}) \\
& \left. + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta J^3} (-x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} + 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} - 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1}) \right] \quad (7.16)
\end{aligned}$$

$$a_5 = \frac{\mu\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta} \quad (7.17)$$

$$A = \frac{(z_{i,j+1} - z_{i,j-1})}{2\Delta\xi\Delta\eta J} \quad (7.18)$$

$$B = \frac{(z_{i+1,j} - z_{i-1,j})}{2\Delta\xi\Delta\eta J} \quad (7.19)$$

7.5.3 z- Direction Momentum equation (เมื่อนำสมการโมเมนตัมที่แปลงพิกัด
แกนแล้วมาผ่านกระบวนการ Finite Control Volume)

$$\begin{aligned}
 v_{i,j}^{n+1} = & (c_1 \cdot v_{i+1,j}^{n+1} + c_2 \cdot v_{i-1,j}^{n+1} + c_3 \cdot v_{i,j+1}^{n+1} + c_4 \cdot v_{i,j-1}^{n+1} - c_5 \cdot v_{i+1,j+1}^{n+1} + c_5 \cdot v_{i+1,j-1}^{n+1} \\
 & + c_5 \cdot v_{i-1,j+1}^{n+1} - c_5 \cdot v_{i-1,j-1}^{n+1} + C \left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i-1,j}^*)^n \right) + D \left((p_{i-1/2,j-1/2}^*)^n - (p_{i+1/2,j-1/2}^*)^n \right) \\
 & + \rho \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t}) / c_0
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

โดยที่

$$\begin{aligned}
 c_0 = & \left[\rho \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2} \right) \cdot z_{i,j+1} - \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2} \right) \cdot z_{i,j-1} - \left| \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \right| \cdot z_{i,j+1} \right. \right. \right. \\
 & + \left. \left| \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \right| \cdot z_{i,j-1} - \left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right) \cdot z_{i+1,j} + \left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right) \cdot z_{i-1,j} + \left| \frac{u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{2} \right| \cdot z_{i+1,j} \right. \\
 & - \left. \left| \frac{u_{i,j-1} + u_{i+1,j-1}}{2} \right| \cdot z_{i-1,j} + \left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i+1,j} - \left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right) \cdot x_{i-1,j} - \left| \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i+1,j} \right. \\
 & + \left. \left| \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i-1,j} - \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \right) \cdot x_{i,j+1} + \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \right) \cdot x_{i,j-1} + \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i,j+1} \right. \\
 & \left. \left. - \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i,j-1} \right) \right] + \frac{2\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} + \frac{2\mu\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} \tag{7.21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_1 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2} \right) \cdot z_{i,j+1} - \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2} \right) \cdot z_{i,j-1} - \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \right) \cdot x_{i,j+1} \right. \right. \\
 & + \left. \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \right) \cdot x_{i,j-1} \right) + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (-x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} + 2x_{i,j} \cdot z_{i,j+1} \\
 & - 2x_{i,j} \cdot z_{i,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1}) + (-x_{i,j+1} + x_{i,j-1}) \cdot \frac{dz}{dt} \left. \right] \tag{7.22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(-\left| \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \right| \cdot z_{i,j+1} + \left| \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} \right| \cdot z_{i,j-1} + \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i,j+1} \right. \right. \\
 & - \left. \left| \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right| \cdot x_{i,j-1} \right) + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} - 2x_{i,j} \cdot z_{i,j+1} \\
 & + 2 \cdot x_{i,j} \cdot z_{i,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1}) + (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \cdot \frac{dz}{dt} \left. \right] \tag{7.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_3 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(-\left(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2}\right) \cdot z_{i+1,j} + \left(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}}{2}\right) \cdot z_{i-1,j} + \left(\frac{v_{i,j}+v_{i,j+1}}{2}\right) \cdot x_{i+1,j} \right. \right. \\
& - \left. \left. \left(\frac{v_{i,j}+v_{i,j+1}}{2}\right) \cdot x_{i-1,j} \right) + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} - 2x_{i,j} \cdot z_{i+1,j} \right. \\
& + 2x_{i,j} \cdot z_{i-1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} + 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} \\
& - 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j}) - \frac{\mu\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta J^3} (x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j+1} \\
& - x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j-1} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j+1} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j-1}) \\
& + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta J^3} (x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} - 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} + 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1}) \\
& \left. + (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \cdot \frac{dz}{dt} \right] \tag{7.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 = & \left[-\frac{\rho}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\left|\frac{u_{i,j-1}+u_{i+1,j-1}}{2}\right| \cdot z_{i+1,j} - \left|\frac{u_{i,j-1}+u_{i+1,j-1}}{2}\right| \cdot z_{i-1,j} - \left|\frac{v_{i,j-1}+v_{i,j}}{2}\right| \cdot x_{i+1,j} \right. \right. \\
& + \left. \left. \left|\frac{v_{i,j-1}+v_{i,j}}{2}\right| \cdot x_{i-1,j} \right) + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} + \frac{\mu\alpha}{\Delta\xi^2 J^3} \cdot (-x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + 2x_{i,j} \cdot z_{i+1,j} \right. \\
& - 2x_{i,j} \cdot z_{i-1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j} - 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} \\
& + 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j}) - \frac{\mu\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta J^3} (-x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j+1} \\
& + x_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j+1} - x_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i-1,j-1}) \\
& + \frac{\mu\gamma}{\Delta\eta J^3} (-x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} + 2 \cdot x_{i+1,j} \cdot z_{i,j} - 2 \cdot x_{i-1,j} \cdot z_{i,j} - x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1}) \\
& \left. + (-x_{i+1,j} + x_{i-1,j}) \cdot \frac{dz}{dt} \right] \tag{7.25}
\end{aligned}$$

$$c_5 = \frac{\mu\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta} \tag{7.26}$$

$$C = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})}{2\Delta\xi\Delta\eta J} \tag{7.27}$$

$$D = \frac{(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})}{2\Delta\xi\Delta\eta J} \tag{7.28}$$

7.5.4 Numerical Scheme ของสมการความต่อเนื่อง (ได้จากการนำเอาวิธี Simple Algorithms มาประยุกต์กับสมการโมเมนต์ทั้งสองแกนแล้วนำไปแทนในสมการ Continuity equation)

$$p'_{i,j} = (g_1 \cdot p'_{i+1,j} + g_2 \cdot p'_{i-1,j} + g_3 \cdot p'_{i,j+1} + g_4 \cdot p'_{i,j-1} - g_5 \cdot p'_{i+1,j+1} + g_6 \cdot p'_{i+1,j-1} + g_7 \cdot p'_{i-1,j+1} - g_8 \cdot p'_{i-1,j-1} + g_9) / g_0 \quad (7.29)$$

โดยที่

$$g_0 = \left[\rho \frac{A_{(i+1,j)}}{a_{0(i+1,j)}} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{A}{a_0} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{C_{(i,j+1)}}{c_{0(i,j+1)}} \cdot \Delta\xi + \rho \frac{C}{c_0} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.30)$$

$$g_1 = \left[\rho \frac{A_{(i+1,j)}}{a_{0(i+1,j)}} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{D_{(i,j+1)}}{4c_{0(i,j+1)}} \cdot \Delta\xi - \rho \frac{D}{c_0} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.31)$$

$$g_2 = \left[\rho \frac{A}{a_0} \cdot \Delta\eta - \rho \frac{D}{4c_{0(i,j+1)}} \cdot \Delta\xi + \rho \frac{C}{c_0} \cdot \Delta\xi + \rho \frac{D}{c_0} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.32)$$

$$g_3 = \left[-\rho \frac{B}{a_0} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{B}{4a_{0(i+1,j)}} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{C_{(i,j+1)}}{c_{0(i,j+1)}} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.33)$$

$$g_4 = \left[\rho \frac{B_{(i+1,j)}}{4a_{0(i+1,j)}} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{B}{a_0} \cdot \Delta\eta \right] \quad (7.34)$$

$$g_5 = \left[\rho \frac{B_{(i+1,j)}}{4a_{0(i+1,j)}} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{D_{(i,j+1)}}{4c_{0(i,j+1)}} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.35)$$

$$g_6 = \left[\rho \frac{B_{(i+1,j)}}{4a_{0(i+1,j)}} \cdot \Delta\eta - \rho \frac{D}{4c_0} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.36)$$

$$g_7 = \left[-\rho \frac{B}{a_0} \cdot \Delta\eta - \rho \frac{D_{(i,j+1)}}{4c_{0(i,j+1)}} \cdot \Delta\xi \right] \quad (7.37)$$

$$g_8 = \left[\rho \frac{B}{a_0} \cdot \Delta\eta + \rho \frac{D}{c_0} \cdot \Delta\xi \right]$$

(7.38)

$$g_9 = \rho \cdot \left[(u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*) \cdot \Delta\eta - (v_{i,j+1}^* - v_{i,j}^*) \cdot \Delta\xi \right]$$

(7.39)

7.5.5 Numerical Scheme ของสมการส่งถ่ายความร้อน

$$T_{i,j}^{n+1} = \left(t_1 \cdot T_{i+1,j}^{n+1} + t_2 \cdot T_{i-1,j}^{n+1} + t_3 \cdot T_{i,j+1}^{n+1} + t_4 \cdot T_{i,j-1}^{n+1} - t_5 \cdot T_{i+1,j+1}^{n+1} + t_5 \cdot T_{i+1,j-1}^{n+1} \right. \\ \left. + t_5 \cdot T_{i-1,j+1}^{n+1} - t_5 \cdot T_{i-1,j-1}^{n+1} + \frac{T_{i,j}^n}{\Delta t} \right) / c_0$$

(7.40)

โดยที่

$$t_0 = \left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} (u_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - u_{i,j} \cdot z_{i,j+1} - u_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} + u_{i,j} \cdot z_{i,j-1} - \frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} \right. \\ \left. + u_{i,j+1} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} \cdot z_{i+1,j} \right) + \frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i-1,j} + u_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + u_{i,j+1} \cdot z_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} \cdot z_{i-1,j} \right) + \frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i+1,j} \\ \left. + u_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + u_{i,j-1} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} \cdot z_{i+1,j} \right) - \frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i-1,j} + u_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + u_{i,j-1} \cdot z_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} \cdot z_{i-1,j} \right) \\ \left. + v_{i,j+1} \cdot x_{i+1,j} - v_{i,j+1} \cdot x_{i-1,j} - v_{i,j} \cdot x_{i+1,j} + v_{i,j} \cdot x_{i-1,j} - \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i+1,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j+1} \right. \\ \left. + v_{i+1,j+1} \cdot x_{i,j+1} \right) + \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i+1,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j-1} + v_{i+1,j+1} \cdot x_{i,j-1} \right) + \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i-1,j} \cdot x_{i,j+1} \\ \left. + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j+1} + v_{i-1,j+1} \cdot x_{i,j+1} \right) - \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i-1,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j-1} + v_{i-1,j+1} \cdot x_{i,j-1} \right) \right] + \frac{2a\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} \\ \left. + \frac{2a\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} \right]$$

(7.41)

$$t_1 = \left[\frac{a\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} (u_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - u_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} - \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i+1,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j+1} \right. \\ \left. + v_{i+1,j+1} \cdot x_{i,j+1} \right) + \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i+1,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j-1} + v_{i+1,j+1} \cdot x_{i,j-1} \right) \right] + \frac{a\alpha}{4\Delta\xi^3 \Delta\eta J^3} (x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} \\ \left. - x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} - 2 \cdot x_{i,j} \cdot z_{i,j-1} + 2 \cdot x_{i,j} \cdot z_{i,j+1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1} \right) - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \cdot \frac{dz}{dt} \right]$$

(7.42)

$$\begin{aligned}
t_2 = & \left[\frac{a\alpha}{\Delta\xi^2 J^2} - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(-u_{i,j} \cdot z_{i,j+1} + u_{i,j} \cdot z_{i,j-1} + \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i-1,j} \cdot x_{i,j+1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j+1} \right. \right. \\
& + v_{i-1,j+1} \cdot x_{i,j+1}) - \frac{1}{4} (v_{i,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i-1,j} \cdot x_{i,j-1} + v_{i,j+1} \cdot x_{i,j-1} + v_{i-1,j+1} \cdot x_{i,j-1}) \left. \left. \right) + \frac{a\alpha}{4\Delta\xi^3 \Delta\eta J^3} (-x_{i+1,j} \cdot z_{i,j-1} \right. \\
& + x_{i+1,j} \cdot z_{i,j+1} + 2 \cdot x_{i,j} \cdot z_{i,j-1} - 2 \cdot x_{i,j} \cdot z_{i,j+1} - x_{i-1,j} \cdot z_{i,j-1} + x_{i-1,j} \cdot z_{i,j+1}) - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) \cdot \frac{dz}{dt} \left. \right] \\
\end{aligned} \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}
t_3 = & \left[\frac{a\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(-\frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + u_{i,j+1} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j+1} \cdot z_{i+1,j}) + \frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i-1,j} \right. \right. \\
& + u_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + u_{i,j+1} \cdot z_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} \cdot z_{i-1,j}) + v_{i,j+1} x_{i+1,j} - v_{i,j+1} x_{i-1,j} \left. \left. \right) + \frac{a\alpha}{4\Delta\xi^3 \Delta\eta J^3} (x_{i+1,j} z_{i+1,j} \right. \\
& - x_{i+1,j} z_{i-1,j} - 2 \cdot x_{i,j} z_{i+1,j} + 2 \cdot x_{i,j} z_{i-1,j} + x_{i-1,j} z_{i+1,j} - x_{i-1,j} z_{i-1,j} + x_{i-1,j} z_{i+1,j} - 2 \cdot x_{i-1,j} z_{i,j} + x_{i-1,j} z_{i-1,j} \\
& - x_{i+1,j} z_{i+1,j} + 2 \cdot x_{i+1,j} z_{i,j} - x_{i+1,j} z_{i-1,j}) - \frac{a\beta}{4\Delta\xi^2 \Delta\eta^2 J^3} \cdot (x_{i-1,j} z_{i+1,j+1} - x_{i-1,j} z_{i+1,j-1} - x_{i-1,j} z_{i-1,j+1} \\
& + x_{i-1,j} z_{i-1,j-1} - x_{i+1,j} z_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} z_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} z_{i-1,j+1} - x_{i+1,j} z_{i-1,j-1}) + \frac{a\gamma}{4\Delta\xi\Delta\eta^3 J^3} \cdot (x_{i-1,j} z_{i,j+1} \\
& - 2 \cdot x_{i-1,j} z_{i,j} + x_{i-1,j} z_{i,j-1} - x_{i+1,j} z_{i,j+1} + 2 \cdot x_{i+1,j} z_{i,j} - x_{i+1,j} z_{i,j-1}) + \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \cdot \frac{dz}{dt} \left. \right] \\
\end{aligned} \tag{7.44}$$

$$\begin{aligned}
t_4 = & \left[\frac{a\gamma}{\Delta\eta^2 J^2} - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} \left(\frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j} \cdot z_{i+1,j} + u_{i,j-1} \cdot z_{i+1,j} + u_{i+1,j-1} \cdot z_{i+1,j}) + \frac{1}{4} (u_{i,j} \cdot z_{i-1,j} \right. \right. \\
& + u_{i+1,j} \cdot z_{i-1,j} + u_{i,j-1} \cdot z_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} \cdot z_{i-1,j}) + v_{i,j} x_{i+1,j} - v_{i,j} x_{i-1,j} \left. \left. \right) + \frac{a\alpha}{4\Delta\xi^3 \Delta\eta J^3} (-x_{i+1,j} z_{i+1,j} \right. \\
& + x_{i+1,j} z_{i-1,j} + 2 \cdot x_{i,j} z_{i+1,j} - 2 \cdot x_{i,j} z_{i-1,j} - x_{i-1,j} z_{i+1,j} + x_{i-1,j} z_{i-1,j} - x_{i-1,j} z_{i+1,j} + 2 \cdot x_{i-1,j} z_{i,j} - x_{i-1,j} z_{i-1,j} \\
& + x_{i+1,j} z_{i+1,j} - 2 \cdot x_{i+1,j} z_{i,j} + x_{i+1,j} z_{i-1,j}) - \frac{a\beta}{4\Delta\xi^2 \Delta\eta^2 J^3} \cdot (-x_{i-1,j} z_{i+1,j+1} + x_{i-1,j} z_{i+1,j-1} + x_{i-1,j} z_{i-1,j+1} \\
& - x_{i-1,j} z_{i-1,j-1} + x_{i+1,j} z_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} z_{i+1,j-1} - x_{i+1,j} z_{i-1,j+1} + x_{i+1,j} z_{i-1,j-1}) + \frac{a\gamma}{4\Delta\xi\Delta\eta^3 J^3} \cdot (-x_{i-1,j} z_{i,j+1} \\
& + 2 \cdot x_{i-1,j} z_{i,j} - x_{i-1,j} z_{i,j-1} + x_{i+1,j} z_{i,j+1} - 2 \cdot x_{i+1,j} z_{i,j} + x_{i+1,j} z_{i,j-1}) - \frac{1}{4\Delta\xi\Delta\eta J} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) \cdot \frac{dz}{dt} \left. \right] \\
\end{aligned} \tag{7.45}$$

$$t_5 = \frac{a\beta}{2\Delta\xi\Delta\eta J^2} \tag{7.46}$$

7.5.6 เงื่อนไขในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

- (1) กำหนดช่วงเวลา Δt ของลำดับขั้นเวลา (time step) มีค่าเท่ากับ 1 วินาที สำหรับการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและตำแหน่งของรอยต่อระหว่างเฟส
- (2) จำนวนกริดที่สร้าง (N) มีค่าเท่ากับ 110 (width) \times 100 (depth).
- (3) กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ 10^{-8} เพื่อหยุดการคำนวณซ้ำของโปรแกรมเนื่องจากเป็นค่าพิกัดที่ทำให้ค่าคำตอบที่ได้มีความแม่นยำมากที่สุด

