

บทที่ 5

การใช้เทคนิควิธีทรานไฟไนต์อินเตอร์โพลีเอชันร่วมกับวิธีการแปลงพิกัดแกนเพื่อแก้ปัญหาขอบเขตเคลื่อนที่รูปร่างใด ๆ ในกรณีรับแหล่งความร้อนปกติ

ปัญหาการถ่ายเทความร้อนที่เกี่ยวข้องกับการละลายถือว่าเป็นส่วนหนึ่งของปัญหาการเปลี่ยนสถานะหรือปัญหาของการเคลื่อนตัวของขอบเขต (Moving boundary problem) โดยที่ปัญหาดังกล่าวมีความสำคัญอย่างมากสำหรับประยุกต์ใช้ในงานทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ในแขนงต่าง ๆ เช่นการละลายตัวของดินที่แข็งตัว การละลายตัวของน้ำแข็ง การละลายของวัสดุเปลี่ยนเฟสที่ผิวอากาศยาน การหล่อขึ้นรูปโลหะ กระบวนการทางอาหารและกรณีอื่น ๆ อีกมากมาย ([5 -1] – [5 -10])

โดยปกติการหาผลเฉลยของปัญหาการเคลื่อนตัวของขอบเขตขณะมีการเปลี่ยนแปลงสถานะจะได้รับความสนใจเป็นพิเศษอันเนื่องมาจากความท้าทายในการหาผลเฉลยในสิ่งที่ซับซ้อนและยุ่งยากซึ่งคาบเกี่ยวกับปัญหาความไม่เชิงเส้นที่ตำแหน่งขอบเขตที่เคลื่อนตัวไปกับเวลา

ในอดีตที่ผ่านมาได้มีเทคนิคการคำนวณเชิงตัวเลขแบบธรรมดาหลายวิธีสำหรับแก้ปัญหา Moving boundary สำหรับกรณี 1 มิติ เช่น วิธีเอนทาลปี ([5 -11]) – [5 -12]), วิธี Apparent Heat Capacity [5 -13], วิธี Isotherm Migration [5 -14] ซึ่งวิธีเหล่านี้ก็ได้มีนักวิจัยหลายท่านพยายามนำมาใช้ในการแก้ปัญหาที่ยุ่งยากอย่างปัญหาของการเคลื่อนตัวของขอบเขตซึ่งพัฒนามาจนถึงปัจจุบันคือ วิธีการแปลงพิกัดแกน ([5 -15] – [5 -20]) ซึ่งเป็นหนึ่งในวิธีที่ใช้ในการแก้ปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสที่ได้ทำการนำเสนอในรายงานวิจัยในฉบับนี้

สำหรับเนื้อหาในบทนี้ได้เน้นศึกษาสำหรับปัญหาการเคลื่อนตัวของขอบเขต (Moving boundary problem) หรือกระบวนการทำละลาย (Melting process) สำหรับวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟส (Pure ice) ในโครงสร้างระดับจุลภาค โดยการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสมการเชิงระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Schemes) รูปแบบใหม่กล่าวคือ ใช้เทคนิควิธีทรานไฟไนต์อินเตอร์โพลีเอชัน (Transfinite Interpolation) ร่วมกับวิธีแปลงพิกัดแกน (PDE Mapping method) มาแก้ปัญหาดังกล่าว เทคนิควิธีที่พัฒนาขึ้นจากการวิจัยครั้งนี้จะเป็นประโยชน์อย่างสูงในการทำนายปรากฏการณ์การถ่ายเทความร้อนและและมวลสารในลักษณะต่าง ๆ

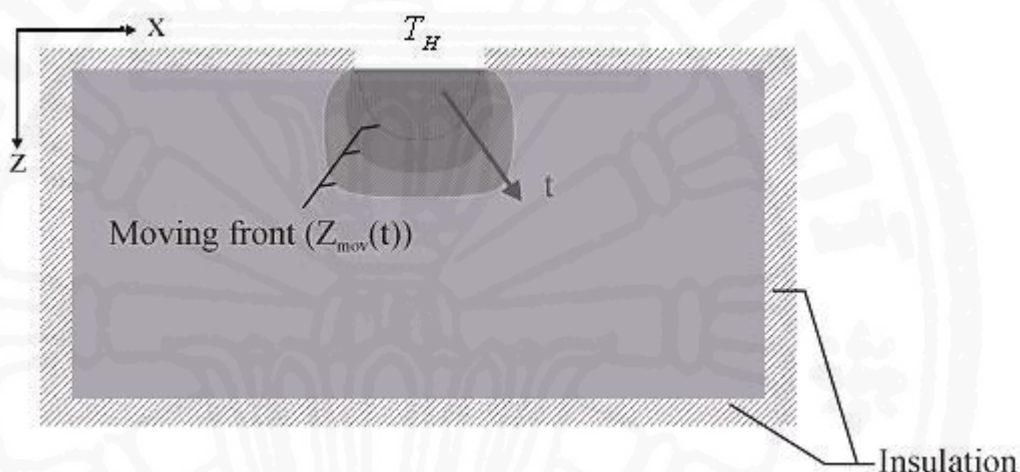
5.1 ระเบียบวิธีวิจัย

เนื้อหาในบทนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาและนำเสนอ การใช้เทคนิควิธีทรานไฟไนต์อินเทอร์พอลชันร่วมกับวิธีการแปลงพิกัดแกนเพื่อนำมาใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขเพื่อแก้ปัญหาขอบเขตเคลื่อนที่ของผิวรอยต่อระหว่างเฟสสำหรับปัญหาการทำละลาย (Melting Process) ในระบบสองมิติตามลำดับ โดยจะพิจารณาเฉพาะผลของการส่งผ่านความร้อนโดยการนำ (Conduction Mode) ระหว่างบริเวณโซนของแข็ง (Frozen layer) กับโซนของเหลว (Unfrozen layer) งานวิจัยเริ่มต้นจากการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบสมการอนุพันธ์ย่อยซึ่งประกอบไปด้วย สมการส่งถ่ายความร้อน (Heat Equation) และสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย (Stefan's Equation) เพื่อใช้สำหรับปัญหาการทำละลายในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสที่มีขอบเขตเคลื่อนที่ 2 มิติ โดยที่การหาคำตอบของกลุ่มสมการดังกล่าวจะใช้วิธีทรานไฟไนต์อินเทอร์พอลชัน (Transfinite Interpolation) ร่วมกับวิธีแปลงพิกัดแกน (PDE Mapping Method) ความถูกต้องของผลลัพธ์ที่ได้จากการทำนายจะถูกตรวจสอบและเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยที่ใกล้เคียงส่วนตัวแปรที่สำคัญที่ศึกษาครั้งนี้คือ อิทธิพลของระดับอุณหภูมิ (Temperature Load) ที่ป้อนซึ่งมีผลต่ออัตราการทำละลาย ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิ รูปทรงของผิวละลาย และค่าที่เหมาะสมที่นำมาสร้างเป็นโครงสร้างกริดที่มีความเหมาะสมและสามารถนำมาทำนายปรากฏการณ์ได้แม่นยำที่สุด

ชำนาญกานท์หอสมุด

5.2 รูปแบบจำลองทางกายภาพ

สำหรับรูปแบบจำลองทางกายภาพของกระบวนการทำละลายในระบบ 2 มิติ นั้นได้แสดงให้เห็นในภาพที่ 5.1 โดยที่ในแบบจำลองนี้จะพิจารณากระบวนการทำละลาย (Melting) ของก้อนวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสหรือก้อนน้ำแข็งที่อยู่ในกล่องสี่เหลี่ยมที่มีขนาดของมิติ (กว้าง*ยาว) เท่ากับ 50×110 ตารางมิลลิเมตร โดยที่จะพิจารณาเฉพาะผลของการนำความร้อนที่ส่งผ่านทั้งในบริเวณไซนของแข็ง (Frozen layer) และไซนของเหลว (Unfrozen layer)



ภาพที่ 5.1 แสดงลักษณะรูปร่างแบบจำลองทางกายภาพของปัญหา

เมื่อพิจารณาถึงเงื่อนไขขอบเขตจะกำหนดให้ระบบเป็นฉนวนกันความร้อนโดยรอบ ยกเว้นบางส่วนของขอบเขตด้านบนซึ่งอยู่ที่ตำแหน่งกึ่งกลางที่จะกำหนดให้เป็นบริเวณที่ได้รับอุณหภูมิทำละลาย T_H แบบ isothermal โดยที่เริ่มแรกกำหนดให้ระบบมีอุณหภูมิเริ่มต้นเท่ากันทั้งหมดโดยมีค่าเท่ากับ T_i ซึ่งมีค่าอุณหภูมิต่ำกว่าอุณหภูมิที่จุดหลอมละลาย ($T_i < T_f$) at time = 0 หลังจากนั้นระบบจะเริ่มเข้าสู่กระบวนการทำละลายเมื่อถูกกระตุ้นโดยการป้อนอุณหภูมิทำละลายเข้าไปในระบบ ณ บริเวณด้านบนซึ่งไม่ได้ถูกกำหนดให้เป็นฉนวน โดยที่อุณหภูมิทำละลายนั้นมีค่าเท่ากับ T_H ซึ่ง $T_H > T_f$ โดยที่ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและรูปทรงของผิวละลายนั้นจะสามารถหาได้จากการแก้ปัญหาคงสมการส่งถ่ายความร้อนและสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

5.3 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

สมมติฐาน

1. กำหนดให้การพิจารณาการกระจายตัวของอุณหภูมิเป็นแบบ 2 มิติ (x-z)
2. บริเวณโซนของเหลวและโซนของแข็งแยกออกจากกันอย่างชัดเจนโดยพิจารณาจากอุณหภูมิหลอมละลาย
3. บริเวณรอบ ๆ ของวัสดุถูกหุ้มด้วยฉนวนยกเว้นบริเวณบางส่วนของด้านบนที่ได้รับความร้อนแบบคงที่.
4. ไม่คิดผลของการเปลี่ยนแปลงขนาดของระบบเนื่องจากผลของการเปลี่ยนแปลงความหนาแน่น
3. ไม่คำนึงถึงผลของการพาความร้อนแบบธรรมชาติที่เกิดขึ้นในเฟสของเหลวที่เกิดขึ้น

เงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขต

- เงื่อนไขเริ่มต้น
 1. กำหนดบริเวณผิวขอบเขตด้านบนของโดเมนที่ได้รับอุณหภูมิ $T = T_H$ ดังนี้

$$x_{cl} \leq x_c \leq x_{cr} : T = T_H$$

- เงื่อนไขขอบเขต
 1. ที่บริเวณโดยรอบของระบบที่มีลักษณะเป็นกล่องสี่เหลี่ยมนั้นถูกกำหนดให้เป็นฉนวนกันความร้อน

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

2. เงื่อนไขขอบเขตของผิวละลาย

สำหรับเงื่อนไขขอบเขตของผิวละลายจะใช้หลักการพิจารณาสมดุลของการถ่ายเทพลังงานที่ผิวรอยต่อระหว่างเฟสของเหลว (Unfrozen layer) และเฟสของแข็ง (frozen layer) ดังสมการที่ (5.2)

สมการพื้นฐาน (Basic Equations)

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์พื้นฐานในระบบ 2 มิติ ที่ใช้อธิบายกระบวนการถ่ายเทความร้อนโดยที่มีค่าคุณสมบัติทางความร้อนคงที่สำหรับทั้ง 2 โซนคือ โซนของเหลวและโซนของแข็ง มีดังนี้

- สมการส่งถ่ายความร้อน

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = a_l \left(\frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_l}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial T_l}{\partial z} \right) \frac{dz}{dt} \quad (5.1a)$$

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = a_s \left(\frac{\partial^2 T_s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_s}{\partial z^2} \right) + \left(\frac{\partial T_s}{\partial z} \right) \frac{dz}{dt} \quad (5.1b)$$

โดยที่เทอมสุดท้ายของสมการ (5.1 a) และ (5.1 b) จะเป็นส่วนของการแปลงพิกัดแกนเพื่อหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งผิวละลายเทียบกับเวลา ซึ่งจะมีความเชื่อมโยงกับสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

- สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

$$\left(\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial z} \right) \left[1 + \left(\frac{\partial z_{mov}}{\partial x} \right)^2 \right] = \rho_s L_s \frac{\partial z_{mov}}{\partial t} \quad (5.2)$$

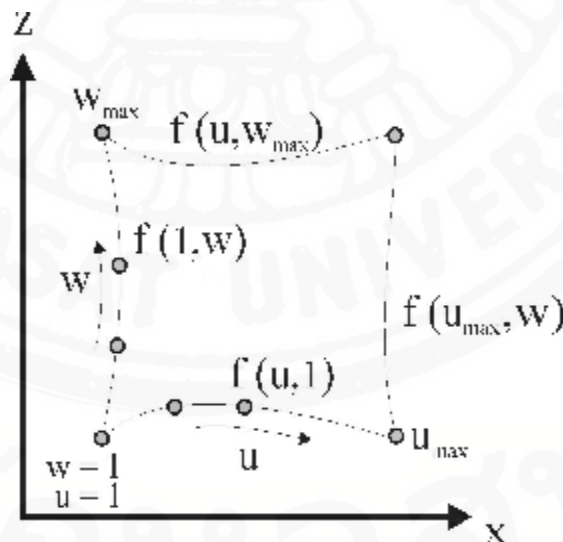
โดยที่ $\partial z_{mov} / \partial t$ คืออัตราการเคลื่อนที่ของผิวละลายและ L_s คือค่าความร้อนแฝงของการเปลี่ยน $\rho_s = \rho_l$ กำหนดให้มีค่าคงที่สำหรับการศึกษา λ_l and λ_s กำหนดให้เป็นค่าคุณสมบัติในการนำความร้อนของน้ำและน้ำแข็ง

5.4 การสร้างกริดด้วยวิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชันร่วมกับวิธีพีดีอี

5.4.1 วิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชัน

วิธีการที่นำเสนอนี้ถือเป็นวิธีการที่ใช้ในการสร้างโครงสร้างของกริดในระบบ 2 มิติ ของระบบที่มีรูปทรงแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งถือเป็นวิธีการที่เกี่ยวข้องกับพื้นฐานของวิธีการทางพีชคณิตโดยตรง โดยที่วิธีการนี้ถือว่าเป็นวิธีการที่สามารถสร้างโครงสร้างของกริดได้ง่ายกว่าวิธีการทางด้านสมการเชิงอนุพันธ์ล้วน ๆ และสามารถควบคุมลักษณะเฉพาะของโครงสร้างกริดได้ง่ายกว่า เช่น ตำแหน่งหรือระยะห่างของกริด อย่างไรก็ตามจุดด้อยของวิธีการนี้คือ มักเกิดความไม่ต่อเนื่องของกริดที่อยู่บนขอบเขตของโดเมน (Discontinuities on the boundary) ซึ่งมีผลต่อกริดภายในที่ถูกสร้างขึ้นภายหลัง โดยความต่อเนื่องและราบเรียบของโครงสร้างกริดจะน้อยกว่าโครงสร้างกริดที่ถูกสร้างขึ้นโดยวิธีการแปลงพิกัดแกน ดังนั้น จึงเกิดความคิดในการสร้างโครงสร้างของกริดเริ่มต้นด้วยวิธีการทางพีชคณิต (วิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชัน) และนำวิธีการแปลงพิกัดแกนมาช่วยทำให้โครงสร้างกริดภายในมีลักษณะต่อเนื่องและราบเรียบมากขึ้นกว่าเดิม

การหาค่าฟังก์ชันขอบเขต (Boundary) ของโดเมนที่พิจารณาซึ่งมีขอบเขตที่ไม่คงที่นั้นมีความจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีการประมาณค่าฟังก์ชันซึ่งจะต้องใช้คู่ลำดับของข้อมูลซึ่งสอดคล้องกับขอบเขตของโดเมนที่พิจารณา



ภาพที่ 5.2 พารามетริกโดเมน $f(u,w)$ ที่กำหนดอยู่บนระนาบของ u, w

จากภาพที่ 2 แสดงถึงวิธีการสร้างโครงสร้างกริดในระนาบ 2 มิติของวัสดุที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟสโดยใช้คู่ลำดับของข้อมูลที่สอดคล้องกับฟังก์ชันขอบเขตที่พิจารณาซึ่งเป็นวิธีทาง

พีชคณิตโดยตรง ในช่วงแรกจะเป็นการสร้างระนาบของโครงสร้างกริดเริ่มต้นจากขอบเขตของโดเมนขณะเริ่มแรกที่พิจารณา

ให้ $f(u, w) = (x(u, w), z(u, w))$ เป็นฟังก์ชันของค่าเวกเตอร์ของตัวแปร u และ w ซึ่งกำหนดให้อยู่ในช่วงบริเวณ $u_1 \leq u \leq u_{\max}$ และ $w_1 \leq w \leq w_{\max}$ โดยที่ฟังก์ชันนี้ไม่สามารถหาค่าได้ ณ ภายนอกของโดเมนที่พิจารณาในภาพที่ 2 ซึ่งเราจะได้ขั้นตอนในการแก้ปัญหาเพื่อหาค่าฟังก์ชัน $f(u, w)$ จากการประมาณค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} f_{(u,w)}^{(1)} &= A_{1(u)} \cdot f_{(1,w)} + A_{2(u)} \cdot f_{(u_{\max},w)} \\ f_{(u,w)} &= f_{(u,w)}^{(1)} + B_{1(w)} \cdot [f_{(u,1)} - f_{(u,1)}^{(1)}] \\ &\quad + B_{2(w)} \cdot [f_{(u,w_{\max})} - f_{(u,w_{\max})}^{(1)}] \end{aligned} \quad (5.3)$$

โดยที่ $A_{1(u)}, A_{2(u)}, B_{1(w)}$ และ $B_{2(w)}$ คือ เซตของฟังก์ชัน univariate blending ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{aligned} A_{1(1)} &= 1, & A_{1(u_{\max})} &= 0 \\ A_{2(1)} &= 0, & A_{2(u_{\max})} &= 1 \\ B_{1(1)} &= 1, & B_{1(w_{\max})} &= 0 \\ B_{2(1)} &= 0, & B_{2(w_{\max})} &= 1 \end{aligned} \quad (5.4)$$

ซึ่งจะทำให้ได้สมการทางพีชคณิตในรูปทั่วไปของ $A_{1(u)}, A_{2(u)}, B_{1(w)}$ และ $B_{2(w)}$ ดังนี้

$$\begin{aligned} A_{1(u)} &= \frac{u_{\max} - u}{u_{\max} - 1}, & A_{2(u)} &= 1 - A_{1(u)} \\ B_{1(w)} &= \frac{w_{\max} - w}{w_{\max} - 1}, & B_{2(w)} &= 1 - B_{1(w)} \end{aligned} \quad (5.5)$$

ซึ่งตำแหน่งของกริด ณ จุดต่าง ๆ ที่เคลื่อนที่ไปเนื่องจากการเคลื่อนที่ของผิวละลายนั้น จะสามารถหาได้จากสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย (สมการ 5.2) โดยใช้เทคนิคการแปลงพิกัดแกนเข้ามาช่วย

5.4.2 การแปลงพิกัดแกน

จากภาพที่ 5.1 จากกระบวนการทำละลายที่เกิดขึ้นนั้นพบว่าผิวละลายที่เกิดขึ้นนั้นมีลักษณะรูปร่างไม่คงที่ ดังนั้นจึงเป็นการยากที่จะแก้ปัญหาด้วยการคำนวณบนพิกัดแกน x, y ปกติ ด้วยเหตุนี้จึงต้องมีการแปลงพิกัดแกนจากพิกัดปกติให้อยู่ในรูปแบบของพิกัดแกนใด ๆ เพื่อให้สามารถคำนวณลักษณะการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับผิวละลาย ณ เวลาต่าง ๆ ได้ นอกจากนี้การแปลงพิกัดแกนยังช่วยทำให้กริดที่ถูกสร้างขึ้นมีลักษณะต่อเนื่องและราบเรียบ (smooth) สูงขึ้นด้วย ซึ่งเราสามารถแสดงรูปแบบของระบบพิกัดแกนเส้นโค้งใด ๆ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}x &= x(\xi, \eta), z = z(\xi, \eta) \text{ or} \\ \xi &= \xi(x, z), \eta = \eta(x, z)\end{aligned}\tag{5.6}$$

สำหรับสมการพื้นฐานที่เกี่ยวข้องเมื่อผ่านกระบวนการแปลงพิกัดแกนจะสามารถแสดงได้ดังนี้

- สมการการส่งถ่ายความร้อน (Heat Equation)

∅ สมการการส่งถ่ายความร้อนภายในโซนของเหลว

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_l}{\partial t} &= \frac{a_l}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 T_l}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 T_l}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 T_l}{\partial \eta^2} \right) + \\ \frac{a_l}{J^3} & \left[\left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \left(z_\xi \frac{\partial T_l}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial T_l}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(-x_\xi \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \frac{dz}{dt}\end{aligned}\tag{5.7 a}$$

Ø สมการการส่งถ่ายความร้อนภายในโซนของแข็ง

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_s}{\partial t} &= \frac{a_s}{J^2} \left(\alpha \frac{\partial^2 T_s}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 T_s}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 T_s}{\partial \eta^2} \right) + \\ & \frac{a_s}{J^3} \left[\left(\alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right) \left(z_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} - z_\eta \frac{\partial T_s}{\partial \xi} \right) + \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\beta \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \gamma \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \left(-x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) \right] + \\ & \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) \frac{dz}{dt} \end{aligned} \quad (5.7 \text{ b})$$

• สมการการเคลื่อนที่ผิวละลาย (Stefan equation)

$$\left\{ \lambda_s \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_s}{\partial \eta} \right) - \lambda_l \frac{1}{J} \left(x_\xi \frac{\partial T_l}{\partial \eta} \right) \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{J} \left[z_\eta \frac{\partial z_{mov}}{\partial \xi} - z_\xi \frac{\partial z_{mov}}{\partial \eta} \right] \right)^2 \right\} = \rho_s L_s \frac{\partial z_{mov}}{\partial t} \quad (5.8)$$

โดยที่ $J = x_\xi \cdot z_\eta - x_\eta \cdot z_\xi$, $\alpha = x_\eta^2 + z_\eta^2$, $\beta = x_\xi \cdot x_\eta + z_\xi \cdot z_\eta$, $\gamma = x_\xi^2 + z_\xi^2$
 และ x_ξ, x_η, z_ξ ซึ่ง z_η หมายถึง Partial derivatives, J คือ Jacobean, β, α, γ คือ geometric factors และ η, ξ คือ พิกัดที่ถูกเปลี่ยนแปลงไป (transformed coordinates)

5.5 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ของสมการพื้นฐาน จะถูกนำไปแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยคำตอบโดยเริ่มต้นจากการนำวิธีการแปลงพิกัดแกนมาใช้กับสมการพื้นฐาน จากนั้นจึงนำสมการพื้นฐานที่ถูกดัดแปลงพิกัดมาผ่านกระบวนการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข โดยอยู่บนพื้นฐานวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite Difference Method) เพื่อหาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการนำความร้อน ลักษณะการเปลี่ยนแปลงหรือการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ซึ่งสามารถแสดงเป็นสมการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ดังนี้

5.5.1 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสมการการถ่ายเทความร้อน

จากสมการ (5.7 a) จะได้

$$\begin{aligned}
 T_i^{n+1}(k,i) = & \left(\frac{1}{1 + \frac{2a_i \Delta t}{J^2(k,i)} \left(\frac{\alpha(k,i)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} + \frac{\gamma(k,i)}{\Delta \eta \Delta \eta} \right)} \right) * \left(T_i^n(k,i) + \frac{a_i \Delta t}{J^2(k,i)} * \left(\alpha(k,i) \frac{T_i^{n-1}(k,i+1) + T_i^{n+1}(k,i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right. \right. \\
 & - 2\beta(k,i) \left(\left(\frac{T_i^{n-1}(k+1,i+1) - T_i^{n+1}(k-1,i+1)}{2\Delta \eta} - \frac{T_i^{n-1}(k+1,i-1) - T_i^{n+1}(k-1,i-1)}{2\Delta \zeta} \right) \right) / 2\Delta \zeta \\
 & + \gamma(k,i) \left(\frac{T_i^{n-1}(k+1,i) + T_i^{n+1}(k-1,i)}{\Delta \eta \Delta \eta} \right) \left. \right) + \frac{a_i \Delta t}{J^3(k,i)} \left(\left(\alpha(k,i) \frac{X(k,i+1) - 2X(k,i) + X(k,i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right. \right. \\
 & * \left(\left(\frac{Z(k,i+1) - Z(k,i-1)}{2\Delta \zeta} \right) * \left(\frac{T_i^{n-1}(k+1,i) - T_i^{n+1}(k-1,i)}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{Z(k+1,i) - Z(k-1,i)}{2\Delta \eta} \right) \right. \\
 & * \left. \left. \left(\frac{T_i^{n-1}(k,i+1) - T_i^{n+1}(k,i-1)}{2\Delta \zeta} \right) \right) + \alpha(k,i) \left(\frac{Z(k,i+1) - 2Z(k,i) + Z(k,i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right) \right. \\
 & - 2\beta(k,i) \left(\left(\frac{Z(k+1,i+1) - Z(k-1,i+1)}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{Z(k+1,i-1) - Z(k-1,i-1)}{2\Delta \eta} \right) \right) / 2\Delta \zeta \\
 & + \gamma(k,i) \left(\frac{Z(k+1,i) - 2Z(k,i) + Z(k-1,i)}{\Delta \eta \Delta \eta} \right) * \left(- \frac{(X(k,i+1) - X(k,i-1))}{2\Delta \zeta} \right) \\
 & * \left(\frac{T_i^n(k+1,i) - T_i^n(k-1,i)}{2\Delta \eta} \right) + \frac{1}{J(k,i)} \left(\frac{X(k,i+1) - X(k,i-1)}{2\Delta \zeta} \right) \\
 & * \left(\frac{T_i^n(k+1,i) - T_i^n(k-1,i)}{2\Delta \eta} \right) * dz(k,i) \Big)
 \end{aligned}
 \tag{5.9 a}$$

จากสมการ (5.7 b) จะได้

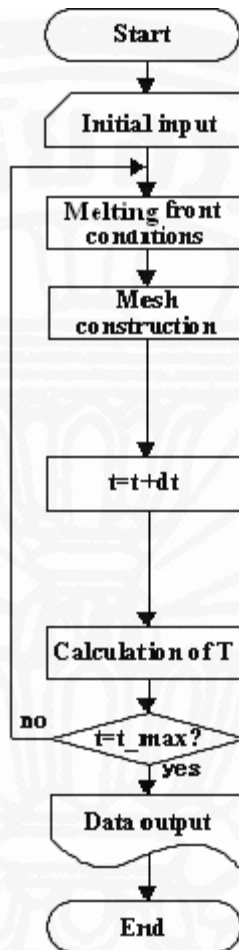
$$\begin{aligned}
T_s^{n+1}(k, i) = & \left(\frac{1}{1 + \frac{2a_t \Delta t}{J^2(k, i)} \left(\frac{\alpha(k, i)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right) + \left(\frac{\gamma(k, i)}{\Delta \eta \Delta \eta} \right)} \right) * \left(T_s^n(k, i) + \frac{a_t \Delta t}{J^2(k, i)} * \left(\alpha(k, i) \frac{T_s^{n-1}(k, i+1) + T_s^{n+1}(k, i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right) \right) \\
& - 2\beta(k, i) \left(\left(\frac{T_s^{n-1}(k+1, i+1) - T_s^{n+1}(k-1, i+1)}{2\Delta \eta} - \frac{T_s^{n-1}(k+1, i-1) - T_s^{n+1}(k-1, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) \right) / 2\Delta \zeta \\
& + \gamma(k, i) \left(\frac{T_s^{n-1}(k+1, i) + T_s^{n+1}(k-1, i)}{\Delta \eta \Delta \eta} \right) + \frac{a_t \Delta t}{J^3(k, i)} \left(\left(\alpha(k, i) \frac{X(k, i+1) - 2X(k, i) + X(k, i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right) \right) \\
& * \left(\left(\frac{Z(k, i+1) - Z(k, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) * \left(\frac{T_s^{n-1}(k+1, i) - T_s^{n+1}(k-1, i)}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{Z(k+1, i) - Z(k-1, i)}{2\Delta \eta} \right) \right) \\
& * \left(\frac{T_s^{n-1}(k, i+1) - T_s^{n+1}(k, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) + \alpha(k, i) \left(\frac{Z(k, i+1) - 2Z(k, i) + Z(k, i-1)}{\Delta \zeta \Delta \zeta} \right) \\
& - 2\beta(k, i) \left(\left(\frac{Z(k+1, i+1) - Z(k-1, i+1)}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{Z(k+1, i-1) - Z(k-1, i-1)}{2\Delta \eta} \right) \right) / 2\Delta \zeta \\
& + \gamma(k, i) \left(\frac{Z(k+1, i) - 2Z(k, i) + Z(k-1, i)}{\Delta \eta \Delta \eta} \right) * \left(- \frac{(X(k, i+1) - X(k, i-1))}{2\Delta \zeta} \right) \\
& * \left(\frac{T_s^n(k+1, i) - T_s^n(k-1, i)}{2\Delta \eta} \right) + \frac{1}{J(k, i)} \left(\frac{X(k, i+1) - X(k, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) \\
& * \left(\frac{T_s^n(k+1, i) - T_s^n(k-1, i)}{2\Delta \eta} \right) * dz(k, i)
\end{aligned} \tag{5.9 b}$$

5.5.2 ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขของสมการขอบเขตเคลื่อนที่

จากสมการ (5.8) จะได้

$$\begin{aligned}
Z^{n+1}(k, i) = & Z^n(k, i) + \\
& \left[\left(\frac{\lambda_s}{J(k+1, i)} * \left(\frac{X(k+1, i+1) - X(k+1, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) \right) \right. \\
& * \left(\frac{-3T_s(k, i) + 4T_s(k+1, i) - T_s(k+2, i)}{2\Delta \eta} \right) \\
& - \frac{\Delta T}{\rho_s L_s} * \left(\frac{\lambda_t}{J(k-1, i)} * \left(\frac{X(k-1, i+1) - X(k-1, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) * \left(\frac{3T_1(k, i) - 4T_1(k-1, i) + T_1(k-2, i)}{2\Delta \eta} \right) \right) \\
& * \left. \left(1 + \left(\left(\frac{Z^n(k+1, i) - Z^n(k-1, i)}{2\Delta \eta} \right) * \left(\frac{Z^n(k+1, i) - Z^n(k-1, i)}{2\Delta \zeta} \right) - \right)^2 \right) \right. \\
& \left. * \left(\left(\frac{Z^n(k, i+1) - Z^n(k, i-1)}{2\Delta \zeta} \right) * \left(\frac{Z^n(k, i+1) - Z^n(k, i-1)}{2\Delta \eta} \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

5.5.3 แผนผังสำหรับการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข



ภาพที่ 5.3 รายละเอียดของแผนผังและวิธีการคำนวณสำหรับกระบวนการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

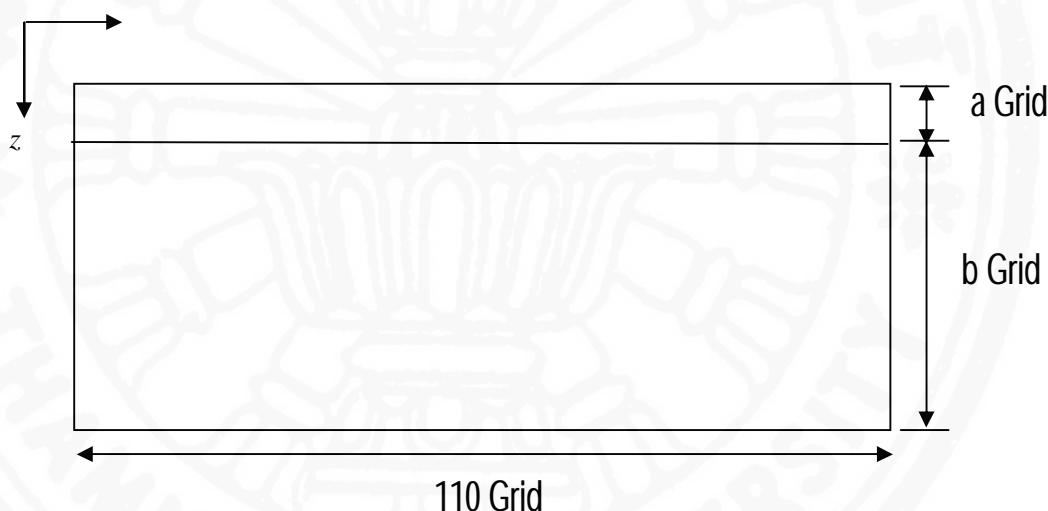
จากแผนผังการแสดงลำดับขั้นตอนของการคำนวณในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถอธิบายได้ดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นที่จำเป็นเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าต่าง ๆ ในลำดับต่อไป เช่น ค่าคุณสมบัติทางความร้อนต่าง ๆ ตำแหน่งของผิวละลายเริ่มต้น อุณหภูมิเริ่มต้น กำหนดค่าลำดับเวลา (time step) ของการคำนวณ โดยกำหนดให้เพิ่มขึ้นทีละ 1 วินาที
2. กำหนดค่าเงื่อนไขของผิวละลายเริ่มต้นเนื่องจากการเขียนโปรแกรมกำหนดให้ขณะเริ่มต้นมีโซนของเหลวบาง ๆ เพื่อกำหนดตำแหน่งของกริดภายในโซนของเหลวที่จะเกิดการเคลื่อนที่เมื่อกระบวนการทำละลายเกิดขึ้น
3. คำนวณหาค่าตำแหน่งโครงสร้างของกริดที่เวลาถัดไปโดยอาศัยเทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชันทำการประมาณค่าตำแหน่งของกริดที่อยู่ภายในวัสดุจากคู่ลำดับของขอบเขตโดเมนกับคู่ลำดับของขอบเขตผิวละลายที่เคลื่อนที่เนื่องจากผลของอุณหภูมิเริ่มต้น
4. คำนวณหาการลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิภายในโดเมนที่ลำดับเวลาต่อ ๆ ไป โดยจะทำการคำนวณทำซ้ำและเปรียบเทียบกับค่าในการทำซ้ำก่อนหน้า ถ้ามีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดแล้วนั้นจะกำหนดให้ค่าดังกล่าวเป็นค่าผลลัพธ์ (output) ของลำดับเวลา (time step) ใด ๆ ที่คำนวณ
5. ตรวจสอบค่าผลลัพธ์ (output) ของลำดับเวลา (time step) ในข้อ 4 ดังกล่าวว่าเป็นค่าของลำดับเวลาสุดท้ายที่กำหนดหรือไม่ ถ้าไม่ให้นำค่านั้นกลับมาใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณที่ลำดับเวลาต่อไป แต่ถ้าเป็นค่าผลลัพธ์ของลำดับเวลาที่กำหนดไว้จะทำการออกจากวงจรของการคำนวณโปรแกรม

ชำนาญ กอสมุด

5.6 การหาโครงสร้างกริดที่มีความเหมาะสมและสามารถทำนายปรากฏการณ์ได้แม่นยำที่สุด

จากการศึกษาในขณะเริ่มต้นของการวิเคราะห์กระบวนการทำละลายจะทำการแบ่งโครงสร้างของกริดออกเป็นสองบริเวณ ได้แก่ภายในบริเวณโซนของเหลวซึ่งกำหนดให้มีชั้นของเหลวบาง ๆ และภายในบริเวณโซนของแข็ง เหตุผลที่กำหนดให้มีโซนของเหลวตั้งแต่เริ่มต้นเนื่องจากต้องการกำหนดค่าตำแหน่งของกริดภายในโซนของเหลวที่จะเกิดการเคลื่อนที่เมื่อกระบวนการทำละลายเกิดขึ้น ดังนั้น การกำหนดพื้นที่ของโครงสร้างกริด (โซนของเหลว) ที่สอดคล้องกับจำนวนกริดจะทำให้การทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ภายในบริเวณโซนของเหลวมีประสิทธิภาพสูงขึ้นตามไปด้วยและภายในบริเวณโซนของแข็งก็จะประกอบไปด้วยโครงสร้างกริดที่สอดคล้องกับสมการที่ใช้ทำนายปรากฏการณ์ต่าง ๆ ภายในบริเวณโซนของแข็งด้วยเช่นกัน

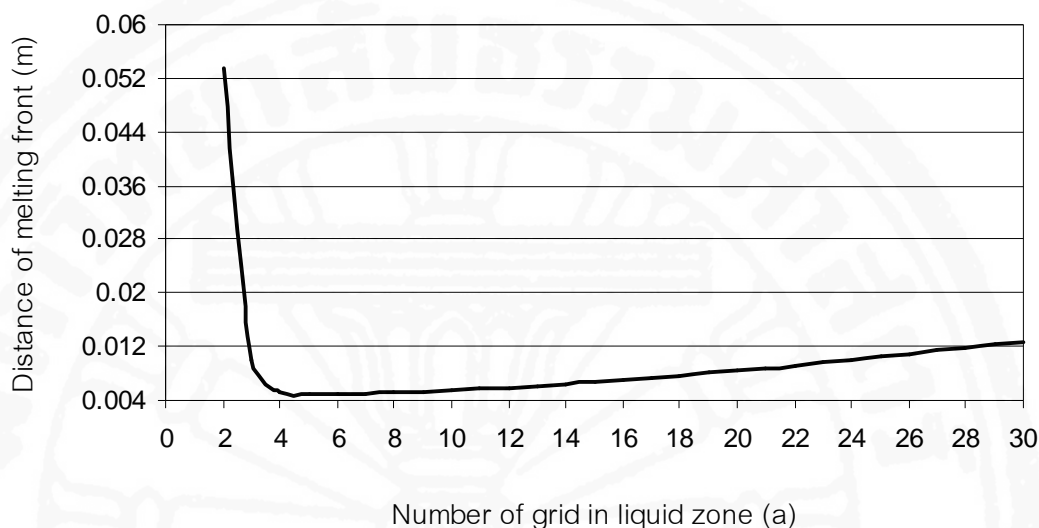


ภาพที่ 5.4 แสดงการกำหนดโครงสร้างกริดของโดเมน ณ บริเวณโซนของเหลวและโซนของแข็ง

จากภาพที่ 5.4 จะทำการกำหนดให้ในทิศทางแกน x ทั้งในบริเวณโซนของเหลวและโซนของแข็งต่างมีจำนวนกริดเท่ากับ 111 ตำแหน่ง ส่วนในทิศทางแกน z นั้นผลรวมของกริดในบริเวณโซนของเหลวและโซนของแข็งจะมีค่าเท่ากับ 100 โดยจะทำการเปลี่ยนแปลงค่า a และ b เพื่อนำมาใช้ในการประมวลผลปรากฏการณ์ทำละลายที่เกิดขึ้นแบบโดยใช้แบบจำลองทางคณิตศาสตร์และเทคนิควิธีที่นำเสนอ โดยจะพิจารณาถึงจำนวนกริดในบริเวณโซนของเหลวที่มีค่าเหมาะสมที่สุดในการทำนายผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น

5.7 ผลลัพธ์และวิจารณ์

5.7.1 การหาโครงสร้างกริดที่มีความเหมาะสมและสามารถทำนายปรากฏการณ์ได้แม่นยำที่สุด

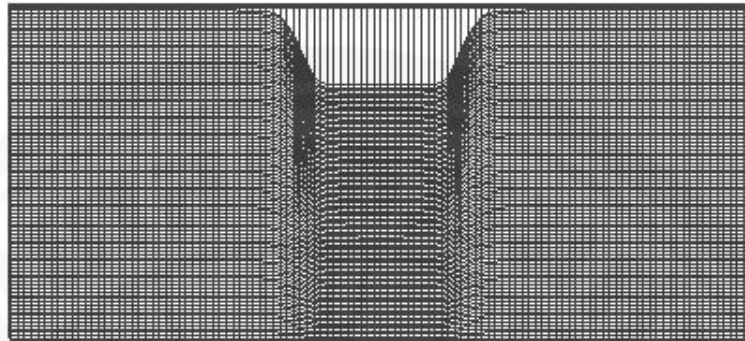


ภาพที่ 5.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางของผิวละลายกับจำนวนกริดในบริเวณโซนของเหลว

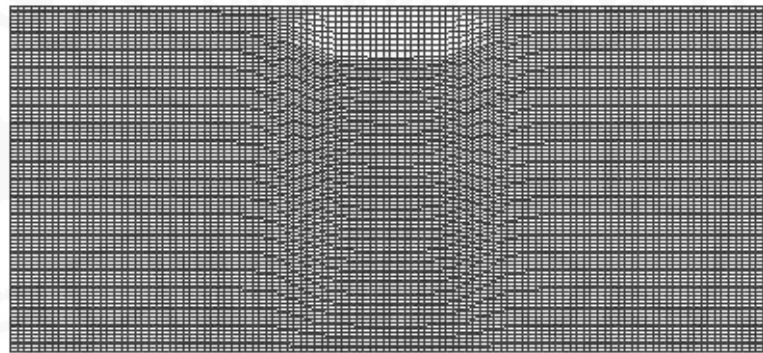
จากภาพที่ 5.5 ที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางของผิวละลายกับจำนวนกริดในบริเวณโซนของเหลว (a) โดยที่ค่า a จะมีค่าตั้งแต่ 2 ถึง 30 ซึ่งพบว่า

สำหรับบริเวณโซนของเหลวที่กำหนดให้มีจำนวนกริดเท่ากับ 2 ตำแหน่งค่าตำแหน่งผิวละลายที่ได้จะมีค่าสูงกว่าปกติมากเนื่องจากจะทำให้บริเวณโซนของเหลวมีเพียงกริดที่ตำแหน่งของเขตด้านบนและที่ตำแหน่งขอบเขตผิวละลายเท่านั้นทำให้เกิดความไม่ต่อเนื่องในการคำนวณหาค่าการกระจายอุณหภูมิภายในบริเวณโซนของเหลว

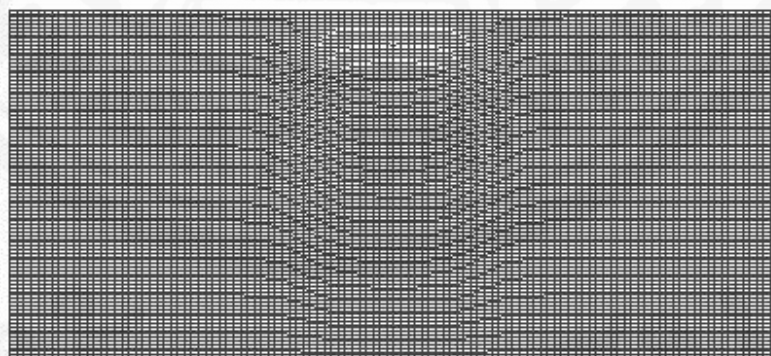
จากที่กล่าวมาเมื่อเพิ่มจำนวนกริดขึ้นเรื่อย ๆ ในช่วงแรกพบว่าค่าตำแหน่งของผิวละลายมีค่าลดลง แต่ในช่วงต่อมาเมื่อเพิ่มจำนวนกริดมากขึ้นเรื่อย ๆ พบว่าค่าตำแหน่งของผิวละลายที่มีแนวโน้มลดลงกลับค่อย ๆ กลับมาเพิ่มขึ้นอีกครั้งเนื่องจากการมีจำนวนกริดที่เพิ่มมากขึ้นในพื้นที่ ที่จำกัดส่งผลให้เกิดการอัดตัวกันของกริดในบริเวณที่พิจารณาสูงขึ้น ส่งผลให้ค่าที่ได้มีค่ามากขึ้นและมีค่าเกินความเป็นจริงในที่สุดโดยการเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยของ P.Rattanadecho [5-21] พบว่าค่าของจำนวนกริดที่เหมาะสมและมีค่าตำแหน่งของผิวละลายที่ใกล้เคียงกับปรากฏการณ์จริงมากที่สุดคือ 10 กริด



(a)



(b)

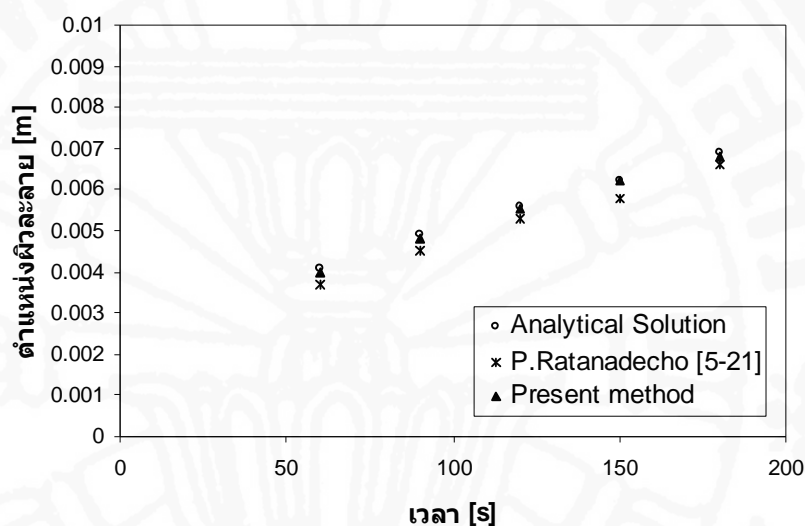


(c)

ภาพที่ 5.6 เปรียบเทียบลักษณะโครงสร้างของกริด ณ บริเวณผิวละลายที่เวลา 90 วินาที

- (a) จำนวนกริดในโซนของเหลวเท่ากับ 3
- (b) จำนวนกริดในโซนของเหลวเท่ากับ 10
- (c) จำนวนกริดในโซนของเหลวเท่ากับ 15

จากภาพที่ 5.6 จะพบว่าในกรณี (a) จะมีลักษณะแตกต่างจากกรณี (b) สังเกตได้จากในกรณี (b) บริเวณที่เกิดการละลายจะมีลักษณะเป็นเส้นยาวพระจันทร์ซึ่งแตกต่างจากกรณี (a) ส่วนกรณี (c) รูปทรงของการละลายตัวมีลักษณะคล้ายกับกรณี (b) แต่ตำแหน่งผิวละลายมีค่ามากกว่า ณ เวลาเดียวกันและพบว่าจำนวนกริดมีค่ามากขึ้นไปเมื่อเปรียบเทียบกับบริเวณชั้นบาง ๆ ของโซนของเหลวที่กำหนดขณะเริ่มต้นกระบวนการทำละลาย ซึ่งพบว่าในกรณี (b) มีค่าเหมาะสมและสามารถทำนายผลลัพธ์ได้แม่นยำที่สุด

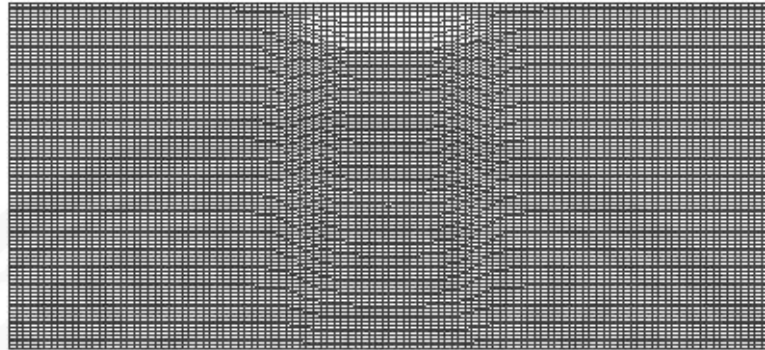


ภาพที่ 5.7 เปรียบเทียบผลการวิเคราะห์ของกระบวนการทำละลายกับผลงานวิจัยของ P.Ratanadecho [5-21]

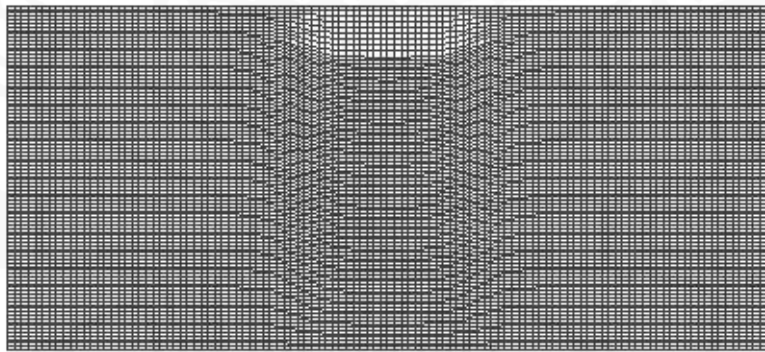
5.7.2 ตำแหน่งของผิวละลาย (Melting front) และโครงสร้างของกริดที่ถูกสร้าง (A Melting Front Tracking Grid Generation System)

จากภาพที่ 5.8 (a) แสดงให้เห็นถึงโครงสร้างของกริดเริ่มต้นขณะที่ยังไม่เกิดกระบวนการละลายตัว ซึ่งโครงสร้างของกริดเริ่มต้นนี้จะใช้เทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอลชันเพียงอย่างเดียว ส่วนภาพที่ 5.8 (b) – 5.8 (d) แสดงให้เห็นถึงรูปทรงของเส้นโค้งของผิวละลายที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา โดยที่โดเมนมีอุณหภูมิเริ่มต้นเท่ากับ 0 องศาเซลเซียส และอุณหภูมิทำละลายที่ป้อนจากทางด้านบนมีค่าคงที่เท่ากับ 60 องศาเซลเซียส

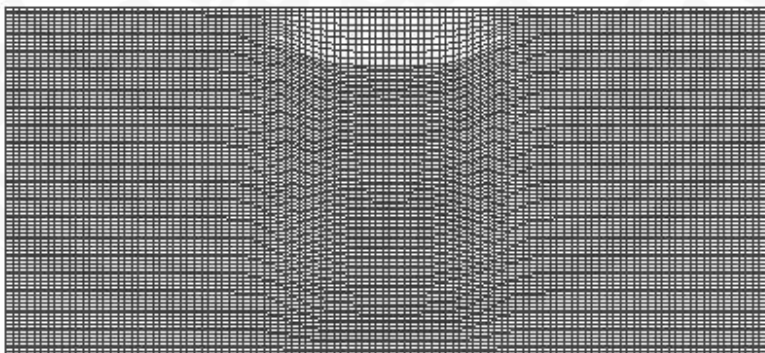
นอกจากนี้ยังพบว่าตำแหน่งของกริดที่เคลื่อนที่ไปตามเวลานั้นจะมีความและมีความแม่นยำและราบเรียบ (Smooth) ไปตามเส้นโค้งของผิวละลายหรืออีกทั้งบริเวณไหนตกภายในอีกด้วย ซึ่งบ่งบอกถึงควมมีประสิทธิภาพของเทคนิควิธีนี้เป็นอย่างดี



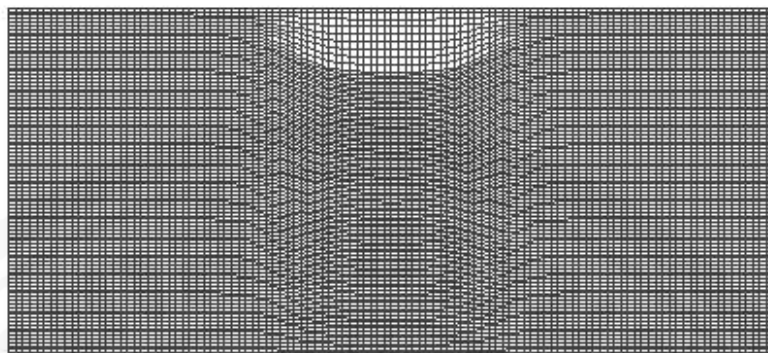
(a)



(b)



(c)

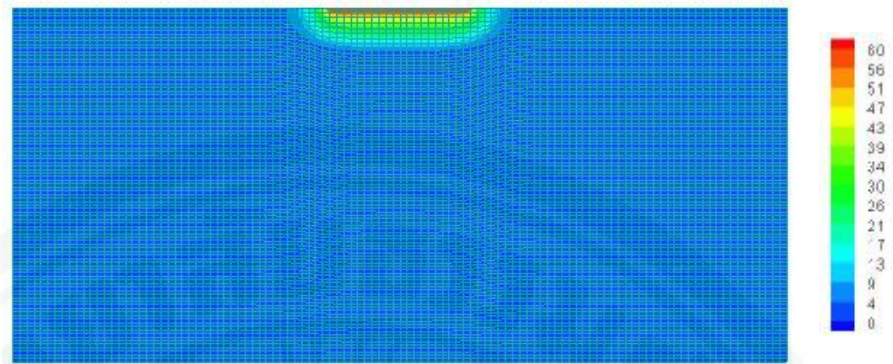


(d)

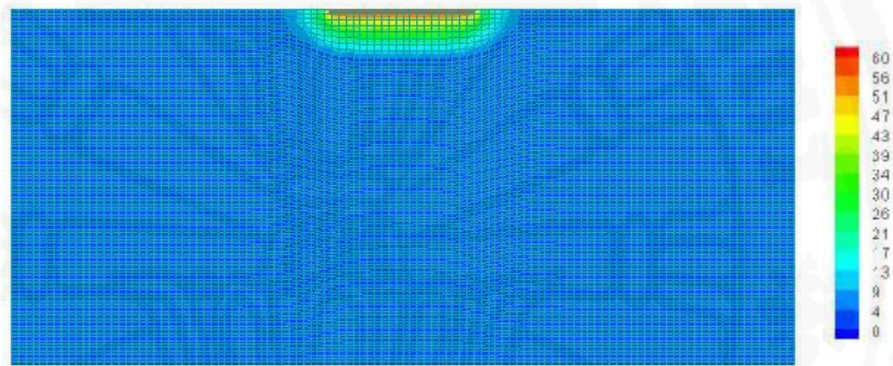
ภาพที่ 5.8 แสดงลักษณะโครงสร้างของกริด ณ บริเวณผิวละลายที่เปลี่ยนแปลงไปตามเวลา (a) โครงสร้างของกริดของกระบวนการทำละลายที่เวลา 60 วินาที, (b) โครงสร้างของกริดของกระบวนการทำละลายที่เวลา 90 วินาที, (c) โครงสร้างของกริดของกระบวนการทำละลายที่เวลา 120 วินาที, (d) โครงสร้างของกริดของกระบวนการทำละลายที่เวลา 150 วินาที

5.7.3 วิเคราะห์กระบวนการทำละลาย (Melting Process)

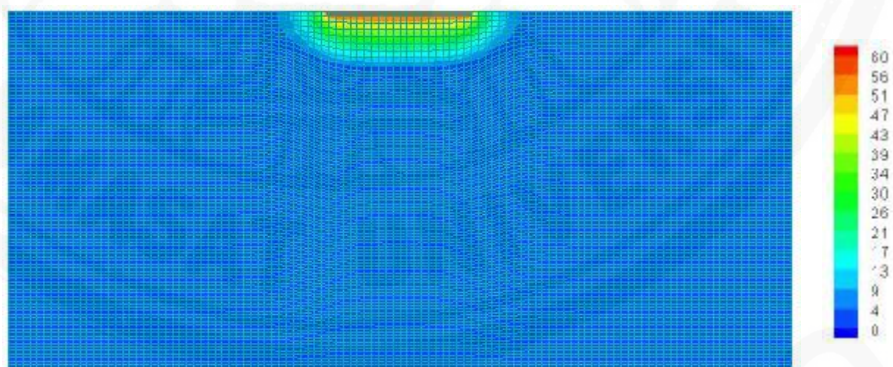
จากการวิเคราะห์กระบวนการถ่ายเทความร้อนสามารถแสดงให้เห็นถึงลักษณะการกระจายอุณหภูมิที่เกิดขึ้นได้ดังภาพที่ 5.9 (a) – 5.9 (d) ซึ่งใช้อธิบายสำหรับในกรณีกระบวนการทำละลายเมื่อเกิดการให้ความร้อนโดยป้อนแหล่งความร้อนที่มีอุณหภูมิคงที่ทางด้านบนของโดเมนที่พิจารณา ความร้อนจะเกิดการถ่ายเทจากทางด้านล่างผ่านบริเวณโซนของเหลว (Unfrozen layer) ซึ่งมีอุณหภูมิสูงกว่าไปยังโซนของแข็งทางด้านล่าง (Frozen layer) ซึ่งมีอุณหภูมิต่ำกว่า โดยที่ในขณะที่เริ่มต้นกระบวนการผิวละลายจะเกิดการเคลื่อนที่โดยมีลักษณะค่อนข้างเป็นเส้นขนานกับบริเวณขอบเขตโดเมนทางด้านล่างที่ได้รับความร้อน ต่อมาผิวละลายจะค่อยๆเปลี่ยนรูปทรงไปเมื่อส่วนของบริเวณที่ถูกทำละลายขยายเนื้อที่เพิ่มขึ้นอย่างช้า ๆ เนื่องจากเกิดการถ่ายเทความร้อนผ่านตำแหน่งของผิวละลายดังที่กล่าวมาข้างต้น



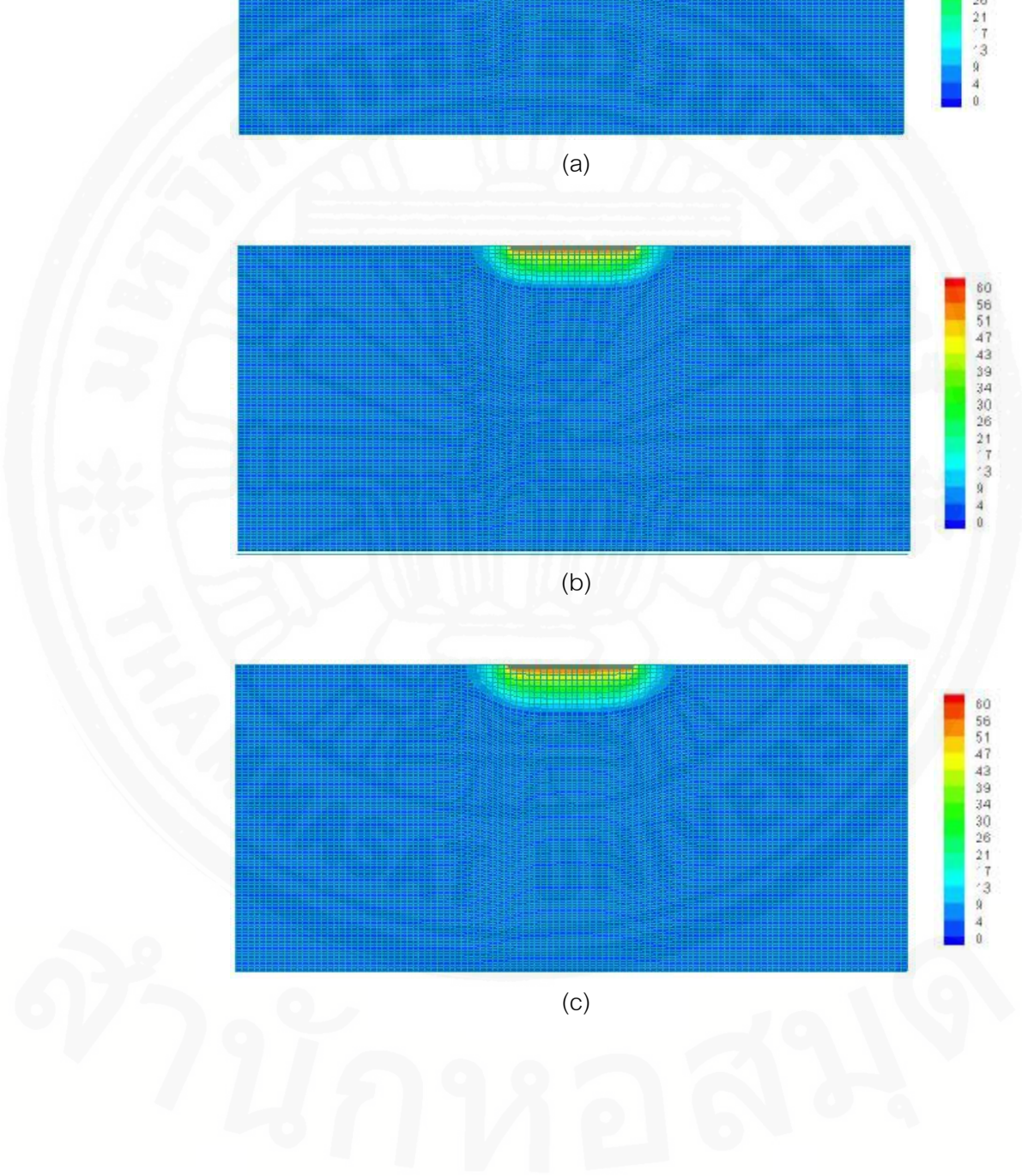
(a)

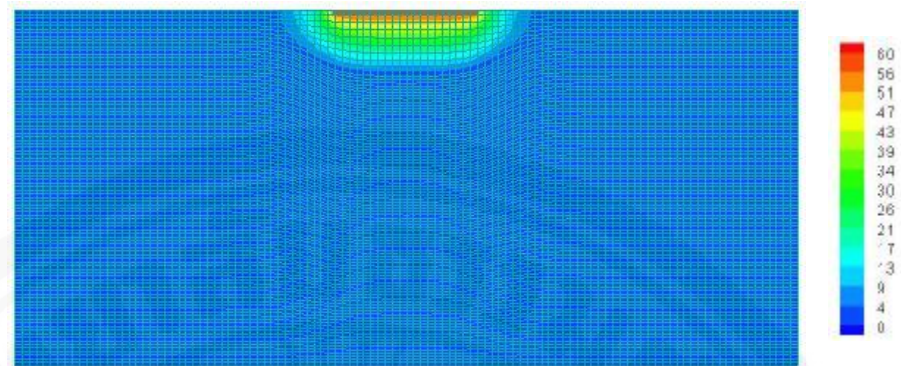


(b)



(c)





(d)

ภาพที่ 5.9 แสดงลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เกิดขึ้นของกระบวนการทำละลาย ณ เวลาต่าง ๆ (หน่วย $^{\circ}\text{C}$) (a) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 60 วินาที, (b) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 90 วินาที, (c) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 120 วินาที, (d) ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิที่เวลา 150 วินาที

สำนักหอสมุด

5.8 สรุปผลการวิเคราะห์

จากการศึกษาจะแสดงให้เห็นถึงกระบวนการทำละลายที่เกิดขึ้นในวัสดุที่พิจารณา โดยป้อนแหล่งให้ความร้อนไว้บริเวณด้านบนของวัสดุ โดยระเบียบวิธีที่ใช้ร่วมในการวิเคราะห์ ได้แก่ ระเบียบวิธีทางพีชคณิตซึ่งเป็นพื้นฐานของเทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์ อินเทอร์พอลेशन, ระเบียบวิธี PDE Mapping ซึ่งเป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหาของสมการเชิงอนุพันธ์และระเบียบวิธีทางนิวเมอริกัลซึ่งอยู่บนพื้นฐานของวิธีผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite Difference) เมื่อนำองค์ความรู้ต่าง ๆ ดังที่กล่าวมาใช้ร่วมกันจะช่วยให้สามารถแก้ปัญหาที่เกี่ยวกับปรากฏการณ์การทำละลายได้และเมื่อนำผลลัพธ์จากการทำนายที่ได้มาเปรียบเทียบกับผลและเปรียบเทียบกับผลงานวิจัยที่ใกล้เคียงจะพบว่ามีค่าสอดคล้องกัน ทำให้สรุปได้ว่าระเบียบวิธีที่กล่าวมาทั้งหมดนี้มีความน่าเชื่อถือและสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในการทำนายปรากฏการณ์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการทำละลายได้เป็นอย่างดี

สำนักหอสมุด