

#### บทที่ 4

การใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขแก้ปัญหาค่าความละลาย (กรณีศึกษา: น้ำแข็ง และวัสดุพูนแบบอิมิตัว)  
โดยเทคนิควิธีวิธีการแปรผันระยะกริด

การแก้ปัญหาค่าความละลายเกิดการเปลี่ยนแปลงเฟสหรือการเคลื่อนตัวของผิวละลายนั้นเป็นปัญหาที่มีนักวิจัยให้ความสนใจเป็นพิเศษเนื่องจากมีความซับซ้อนที่เกี่ยวข้องกันระหว่างความไม่เป็นเชิงเส้นของเงื่อนไขขอบเขตและตำแหน่งของผิวละลาย จึงทำให้ไม่สามารถทำนายตำแหน่งการเคลื่อนตัวของผิวละลายได้เพียงจากการคาดคะเนเหมือนในระบบปัญหาเชิงเส้น นอกจากนี้ปัญหาค่าความละลายยังมีความสำคัญมากกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน เช่น การละลายของก้อนน้ำแข็งในมหาสมุทร การหลอมละลายในกระบวนการขึ้นรูปโลหะ กระบวนการแปรรูปและถนอมอาหาร หรือการถนอมเนื้อเยื่อต่าง ๆ ในด้านการแพทย์และยังมีตัวอย่างอื่น ๆ อีกมากในการอธิบายถึงความสำคัญของการเปลี่ยนแปลงเฟส ทั้งในกรณีของการทำละลายและการแข็งตัว การที่เราสามารถทำความเข้าใจกลไกของการเปลี่ยนแปลงในปรากฏการณ์ต่าง ๆ เหล่านี้จะช่วยให้เราสามารถออกแบบหรือพัฒนาปรับปรุงกระบวนการที่เกี่ยวข้องให้มีประสิทธิภาพยิ่งขึ้น

เมื่อพิจารณาผลงานวิจัยที่ผ่านมาเริ่มต้นจากปี ค.ศ. 1860 Neumann ([4-1]-[4-2]) ได้ทำการศึกษาปัญหาค่าความละลายเฟสที่มี 1 เฟส (one phase change problem) สำหรับเงื่อนไขขอบเขตที่มีอุณหภูมิคงที่จนสามารถหาคำตอบของปัญหาที่อยู่ในรูปของผลเฉลยแม่นยำตรงในกรณี 1 มิติได้สำเร็จ ต่อมาในปี ค.ศ. 1889 Stefan [4-3] ได้ศึกษาปัญหาเพิ่มเติมจนสามารถหาผลเฉลยในกรณีการเปลี่ยนแปลงเฟสในลักษณะสองเฟสพร้อมกัน (two phase change problem) ได้เช่นกัน กล่าวได้ว่านักวิจัยทั้งสองคนนี้ถือเป็นจุดเริ่มต้นของการศึกษาปัญหาค่าความละลายเฟสในยุคต่อมา ซึ่งทำให้สามารถหาผลเฉลยแม่นยำตรงได้หลากหลายวิธี เช่น วิธี Neumann's Solution [4-4], วิธี Similarity transformation method [4-5] หรือวิธี Heat balance integral methods [4-6]

หลังจากนั้นต่อมาได้มีการพัฒนาเพื่อนำเสนอวิธีการหาผลเฉลยแบบใหม่โดยใช้หลักการทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในการประมาณหาค่าผลของคำตอบ เช่น Murray และ Landis [4-7] ได้ทำการเปรียบเทียบระหว่างวิธีแปรผันระยะกริด (variable space grid method) กับวิธีกำหนดระยะห่างกริดแบบคงที่ (fixed space grid method) ซึ่งพบว่าวิธีแรกนั้นมีความแม่นยำมากกว่า เนื่องจากมีค่าความคลาดเคลื่อนขณะเริ่มต้นน้อยกว่า, นอกจากนี้ Mastanaiah [4-8] ได้

ศึกษากระบวนการเปลี่ยนแปลงเฟสโดยใช้วิธี Taylor'forward projection method และทำการเปรียบเทียบค่าที่ได้จากการวิเคราะห์ผลเฉลยแม่นยำตรงพบว่ามีความสอดคล้องและใกล้เคียงกันของค่าทั้งสอง

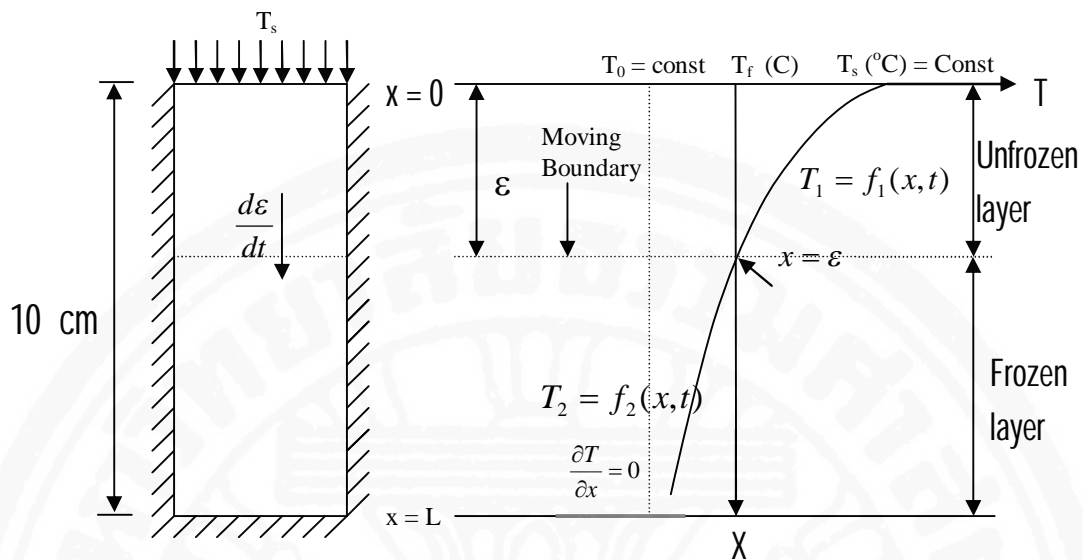
สำหรับบทความนี้จะนำเสนอปัญหาของการทำละลายในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสทั้งในกรณีที่เป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และแพคเกจของวัสดุพูนที่แข็งตัว (ขั้นตอนของวัสดุพูนที่แข็งตัวมีลักษณะเป็นก้อนสี่เหลี่ยม โดยที่ภายในประกอบด้วยลูกแก้วขนาดเล็กมาก ๆ (glass bead) ผสมกับน้ำที่แข็งตัวเต็มอยู่ในรูพูนของลูกแก้ว) โดยตัวแปรที่ทำการศึกษาคืออิทธิพลของอุณหภูมิทำละลายที่มีต่อวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสทั้งสอง ลักษณะการเคลื่อนตัวของผิวละลาย โดยวิธีที่นำเสนอในบทความนี้คือวิธีการแปรผันระยะกริด ซึ่งเป็นวิธีแปลงพิกัดเพื่อใช้ร่วมกับวิธีทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ง่ายแก่การทำความเข้าใจและมีความแม่นยำค่อนข้างสูงเพื่อเปรียบเทียบกับพฤติกรรมในกรณีของการทำละลายวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสที่สภาวะต่าง ๆ โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขและโดยผลเฉลยแม่นยำวิธี Similarly Transformation Method [4-1]

สำนักหอสมุด

#### 4.1 แบบจำลองทางกายภาพ

ลักษณะของแบบจำลองทางกายภาพที่จะทำการศึกษาได้แสดงในภาพที่ 1 กล่าวคือ วัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสที่ใช้ในการวิเคราะห์จะมี 2 ชนิด คือ กรณีที่เป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และชั้นทดสอบของวัสดุพอร์นที่แข็งตัวมีลักษณะเป็นก้อนสี่เหลี่ยม โดยที่ภายในประกอบด้วยลูกแก้วขนาดเล็กมาก ๆ (glass bead) ผสมกับน้ำที่แข็งตัวเต็มอยู่ในรูพอร์นของลูกแก้ว ซึ่งจะเรียกว่าแพคเบดของวัสดุพอร์นที่แข็งตัว โดยถือว่าเป็นวัสดุพอร์นแบบอิ่มตัว (saturated porous media) โดยจะทำการวิเคราะห์เปรียบเทียบถึงอัตราการละลายที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่อวัสดุทดสอบมีลักษณะโครงสร้างที่เปลี่ยนแปลงไป โดยวัสดุทดสอบจะมีความยาวทั้งหมดเท่ากับ 10 ซม. ซึ่งมีอุณหภูมิเริ่มต้นสม่ำเสมอเท่ากับ  $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$  ด้านบนถูกให้ความร้อนซึ่งมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$  และ  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  ตามลำดับ ส่วนลักษณะการเคลื่อนที่ของผิวละลายจะทำการพิจารณาเฉพาะในทิศทางหนึ่งมิติ คือ แกน X โดยจะมีทิศทางของผิวละลายเคลื่อนที่ลงจากด้านบนซึ่งได้รับแหล่งความร้อน และมีการถ่ายเทความร้อนเฉพาะแกนที่พิจารณาเท่านั้น โดยในที่นี้เพื่อความสะดวกในการวิเคราะห์จะพิจารณาให้มีชั้นของโซนของเหลว (unfrozen layer) เนื่องจากการทำละลายเกิดขึ้นตั้งแต่ต้นเพื่อกำหนดตำแหน่งของกริดภายในโซนของเหลวที่จะเกิดการเคลื่อนที่เมื่อกระบวนการทำละลายเกิดขึ้น

จากภาพที่ 1 แสดงให้เห็นถึงเส้นการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิทั้งในบริเวณโซนของเหลวและโซนของแข็ง (Frozen layer) โดยที่การเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในโซนของเหลวจะอยู่ในรูปฟังก์ชันของ  $T_1$  เช่นเดียวกับในโซนของแข็งที่มีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิในรูปฟังก์ชันของ  $T_2$  โดยที่  $T_0$  คือค่าอุณหภูมิเริ่มต้นของวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสขณะที่ยังไม่ได้รับความร้อน  $T_f$  คือค่าอุณหภูมิที่ตำแหน่งผิวละลาย ส่วน  $T_s$  คือค่าอุณหภูมิคงที่ที่ป้อนให้แก่วัสดุเปลี่ยนแปลงเฟสทางด้านบน และที่ตำแหน่ง  $x = \varepsilon$  ที่เป็นระยะที่บอกตำแหน่งของผิวละลายจึงจะค่อย ๆ เคลื่อนที่ไปในทิศทางแกน  $x$  มากขึ้นเมื่อเวลาเพิ่มขึ้นซึ่งจะทำให้เกิดบริเวณที่เป็นโซนของเหลวมากขึ้นด้วย



ภาพที่ 4.1. รูปแบบจำลองทางกายภาพ

กล่าวโดยสรุปจากแบบจำลองทางกายภาพ (Physical model) ที่จะทำการศึกษาค้นคว้าจะอยู่ภายใต้เงื่อนไขของสมมุติฐานดังนี้

- 1) ระบบที่พิจารณาคือระบบ 1 มิติ
- 2) พิจารณาเฉพาะผลของการนำความร้อนเท่านั้น
- 3) ไม่คำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงปริมาตรของวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟส เนื่องจากการทำละลาย
- 4) กำหนดให้วัสดุพหุแบบอิมิตัวที่พิจารณามีลักษณะเป็น Homogeneous

และในส่วนของเงื่อนไขของระบบที่ใช้ในการวิเคราะห์ กำหนดให้ระบบที่พิจารณามีเงื่อนไขเริ่มต้นและเงื่อนไขขอบเขตดังนี้

เงื่อนไขเริ่มต้น

- 1) ณ ตำแหน่งที่  $0 < x < L, t = 0, T = T_0 = -30 \text{ } ^\circ\text{C}$

เงื่อนไขขอบเขต

- 1) ณ ตำแหน่งที่  $x = 0, t \geq 0, T = T_s = \text{Const}$
- 2) ณ ตำแหน่งที่  $x = L, t \geq 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0$
- 3) ณ ตำแหน่งที่  $x = \epsilon, t > 0, T_1 = T_2 = \text{Const} = T_f = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$

#### 4.2 แบบจำลองทางคณิตศาสตร์

จากกฎการอนุรักษ์พลังงานเมื่อพิจารณาเฉพาะการนำความร้อนที่ถ่ายเทผ่านปริมาตรควบคุมใด ๆ ในที่นี้จะพิจารณาเป็นกรณีการถ่ายเทความร้อนแบบหนึ่งมิติเราสามารถเขียนสมการเชิงอนุพันธ์เพื่อใช้อธิบายการถ่ายเทความร้อนทั้งภายในบริเวณไซนของหลอด และภายในบริเวณไซนของแข็งในกรณีหนึ่งมิติ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} \quad (4.1)$$

โดยที่ค่า  $\alpha$  คือค่าสัมประสิทธิ์การกระจายตัวของความร้อน (Thermal diffusivity)

$j$  คือ ตำแหน่งใด ๆ ในวัสดุเปลี่ยนแปลงเฟส

เนื่องจากปัญหาที่ทำการศึกษาในครั้งนี้เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น ซึ่งเกี่ยวข้องต่อการเปลี่ยนแปลงเฟสและการเคลื่อนตัวของขอบเขต ดังนั้นในการวิเคราะห์จะต้องเกี่ยวข้องกับการแปลงพิกัดแกน (Coordinate Transformation) สำหรับการวิเคราะห์ในกรณีที่กำหนดให้กริดที่สร้างขึ้นเคลื่อนที่ไปกับตำแหน่งของผิวละลาย และเมื่อสังเกตจากภาพที่ 4.2 จะพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป ที่จุดหรือตำแหน่งใด ๆ ที่พิจารณาจะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้น ในขณะที่เดียวกันตำแหน่งก็เปลี่ยนไปจากตำแหน่งเดิมด้วย ซึ่งเมื่ออาศัยหลักการการแปลงพิกัดแกนจะได้ผลต่างของอุณหภูมิ ( $\Delta T$ ) มีค่าดังนี้

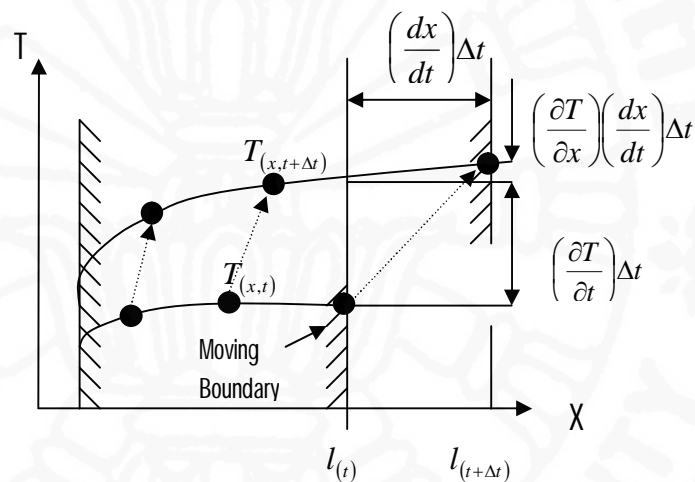
$$\Delta T = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) \Delta t + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) \Delta t \quad (4.2)$$

ดังนั้น

$$\frac{dT}{dt} = \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \frac{dx}{dt} \right) \quad (4.3)$$

หลังจากนั้นพิจารณาหลักการของวิธีแปรผันระยะกริด ซึ่งถือเป็นวิธีการหนึ่งในการทำให้กริดที่สร้างขึ้นเคลื่อนที่ไปตามผิวรอยต่อที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟส ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้ ถ้าหากเราทำการกำหนดให้ระยะของบริเวณไซนของหลอด หรือที่ระยะของ  $x < \varepsilon$  หาด้วยจำนวนของกริดในบริเวณไซนของหลอดที่พิจารณา ( $n_j$ ) มีค่าเท่ากับระยะของแต่ละกริดที่อยู่ในบริเวณไซน

ของเหลว  $\Delta x_i$  แล้ว เมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของแต่ละกริดที่เพิ่มขึ้นเนื่องจากการขยายตัวของชั้นการละลายตัวที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ  $\Delta x_i = \frac{\varepsilon}{n_i}$  เช่นเดียวกับในบริเวณของโซนของแข็ง ( $x > \varepsilon$ ) หากเรานำระยะที่เหลือในส่วนที่เป็นโซนของแข็ง ( $L - \varepsilon$ ) หารด้วยจำนวนของกริดที่มีอยู่ในบริเวณโซนของแข็ง  $n_s - i_s$  โดยที่  $n_s$  คือ จำนวนของกริดในบริเวณโซนของแข็งที่พิจารณา  $i_s$  คือ ลำดับของตำแหน่งของกริดที่พิจารณา เมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของแต่ละกริดในโซนของแข็งที่ลดลงเนื่องจากการขยายตัวของชั้นการละลายตัวที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ  $\Delta x_s = \frac{(L - \varepsilon)}{n_s - i_s}$  ซึ่งจากที่อธิบายมาทั้งหมดสามารถอธิบายได้ดังภาพที่ 4.3



ภาพที่ 4.2 แสดงลักษณะแนวโน้มอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไปพร้อมกับตำแหน่งการเคลื่อนที่ของกริดเมื่อเวลาเปลี่ยนไป



จากนั้นนำสมการที่ (4.6) แทนลงในสมการที่ (4.1) ก็จะได้สมการความร้อน (Heat Equation) ในรูปทั่วไปสำหรับกรณีในบริเวณที่เป็นของเหลว ดังนี้

$$\frac{dT_l}{dt} = \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_l^2} + \left( \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right) \cdot \left( \frac{i_l}{n_l} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (4.7)$$

หลังจากนั้นเมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ  $x = \varepsilon$  ถึงระยะ  $x = L$  แล้วจะพบว่าอัตราการเคลื่อนที่ของแต่ละกริดภายในจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ดังนี้

$$\frac{dx}{n_s - i_s} = \frac{d\varepsilon}{n_s}$$

กล่าวคืออัตราการขยายตัวของผิวละลายที่เคลื่อนที่ไปทางขวา  $\left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$  หากรด้วยระยะจากตำแหน่งผิวละลายถึงด้านปลายที่  $x = L$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $(L - \varepsilon)$  และมีค่าเท่ากับ  $(n_s \cdot \Delta x)$  นั้นย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่  $\frac{dx}{dt}$  ของผิวละลายใด ๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือหารด้วยระยะตั้งแต่ผิวละลายใด ๆ ถึงด้านปลายที่  $x = L$  ซึ่งมีค่าเท่ากับ  $((n_s - i_s) \cdot \Delta x)$  จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้สมการ ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n_s - i_s}{n_s} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (4.8)$$

ดังนั้น สำหรับกรณีในบริเวณที่เป็นของแข็ง

$$\frac{dT_s}{dt} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_s^2} + \left( \frac{\partial T_s}{\partial x_s} \right) \cdot \left( \frac{n_s - i_s}{n_s} \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \right) \quad (4.9)$$



จากภาพที่ 1 ทำการสมดุลความร้อนที่ผิวละลาย ( $x = \varepsilon$ ) จะได้

$$L_s \rho_s \frac{d\varepsilon}{dt} = q_{in} - q_{out} \quad (4.10)$$

$$L_s \rho_s \frac{d\varepsilon}{dt} = \left( -\lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right) - \left( -\lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_s} \right) \quad (4.11)$$

ดังนั้นจะได้สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย (Moving Boundary Equation) ดังนี้

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{L_s \rho_s} \left( \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_s} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right) \quad (4.12)$$

จากสมการที่ (4.12) กำหนดให้  $\rho_s$  มีค่าคงที่

สำนักหอสมุด

#### 4.3 รูปแบบสมการในระเบียบวิธีเชิงตัวเลข

จากแบบจำลองทางคณิตศาสตร์ที่ถูกสร้างขึ้นจะถูกนำไปแก้ปัญหาเพื่อหาผลเฉลยคำตอบโดยวิธีการผลต่างสี่เหลี่ยม (Finite Difference Method) ซึ่งเป็นวิธีการประมาณค่าของผลเฉลยโดยใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขชนิดหนึ่งเพื่อหาคุณสมบัติที่เปลี่ยนแปลงไปเนื่องจากการนำความร้อน และลักษณะการเปลี่ยนแปลงเฟสหรือตำแหน่งการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ซึ่งสามารถแสดงเป็นระบบสมการในรูประเบียบวิธีเชิงตัวเลขได้ดังนี้

##### 4.3.1) สมการความร้อน กรณีในบริเวณที่เป็นของเหลว

จากสมการ (4.7)

$$\frac{dT_l}{dt} = \alpha_l \frac{\partial^2 T_l}{\partial x_l^2} + \left( \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right) \frac{i_l}{n_l} \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

จะได้

$$\frac{T_{l(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} - T_{l(i)}^{t, n}}{\Delta t} = \alpha_l \frac{T_{l(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - 2T_{l(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} + T_{l(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{(\Delta x_l^{t+\Delta t, (n)})^2} + \frac{T_{l(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - T_{l(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{2\Delta x_l^{t+\Delta t, (n)}} \cdot \frac{i_l}{n_l} \cdot \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{t+\Delta t, (n)} \quad (4.13)$$

##### 4.3.2) สมการความร้อน กรณีในบริเวณที่เป็นของแข็ง

จากสมการ (4.9)

$$\frac{dT_s}{dt} = \alpha_s \frac{\partial^2 T_s}{\partial x_s^2} + \left( \frac{\partial T_s}{\partial x_s} \right) \frac{n_s - i_s}{n_s} \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)$$

จะได้

$$\frac{T_{s(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} - T_{s(i)}^{t, n}}{\Delta t} = \alpha_s \frac{T_{s(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - 2T_{s(i)}^{t+\Delta t, (n+1)} + T_{s(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{(\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)})^2} + \frac{T_{s(i+1)}^{t+\Delta t, (n)} - T_{s(i-1)}^{t+\Delta t, (n+1)}}{2\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)}} \cdot \frac{n_s - i_s}{n_s} \cdot \left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{t+\Delta t, (n)} \quad (4.14)$$

## 4.3.3) สมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย

จากสมการ (4.12)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{\bar{L}_s \rho_s} \left( \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial x_s} - \lambda_l \frac{\partial T_l}{\partial x_l} \right)$$

จะได้

$$\frac{\varepsilon^{t+\Delta t, (n)} - \varepsilon^t}{\Delta t} = \frac{1}{\bar{L}_s \rho_s} \left( \lambda_s \frac{-3T_{ls} + 4T_{s(l)}^{t+\Delta t, (n)} - T_{s(2)}^{t+\Delta t, (n)}}{2\Delta x_s^{t+\Delta t, (n-1)}} - \lambda_l \frac{3T_{ls} - 4T_{l(n_1-1)}^{t+\Delta t, (n)} + T_{l(n_1-2)}^{t+\Delta t, (n)}}{2\Delta x_l^{t+\Delta t, (n-1)}} \right) \quad (4.15)$$

โดยที่

$$\left( \frac{d\varepsilon}{dt} \right)^{t+\Delta t, (n)} = \frac{\varepsilon^{t+\Delta t, (n)} - \varepsilon^t}{\Delta t} \quad (4.16)$$

$$\Delta x_l^{t+\Delta t, (n)} = \frac{\varepsilon^{t+\Delta t, (n)}}{n_l} \quad (4.17)$$

$$\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)} = \frac{L - \varepsilon^{t+\Delta t, (n)}}{n_s} \quad (4.18)$$

โดยที่	<i>Subscrip (l)</i>	คือ	โซนของเหลว
	<i>Subscrip (s)</i>	คือ	โซนของแข็ง
	<i>t</i>	คือ	เวลา
	$\Delta t$	คือ	เวลาที่เพิ่มขึ้น
	<i>n</i>	คือ	จำนวนรอบของการคำนวณซ้ำ
	<i>L</i>	คือ	ความยาวทั้งหมดของวัสดุทดสอบ
	$\varepsilon$	คือ	ตำแหน่งของขอบเขตผิวละลาย
	<i>x</i>	คือ	ระยะทางในแกน <i>x</i>

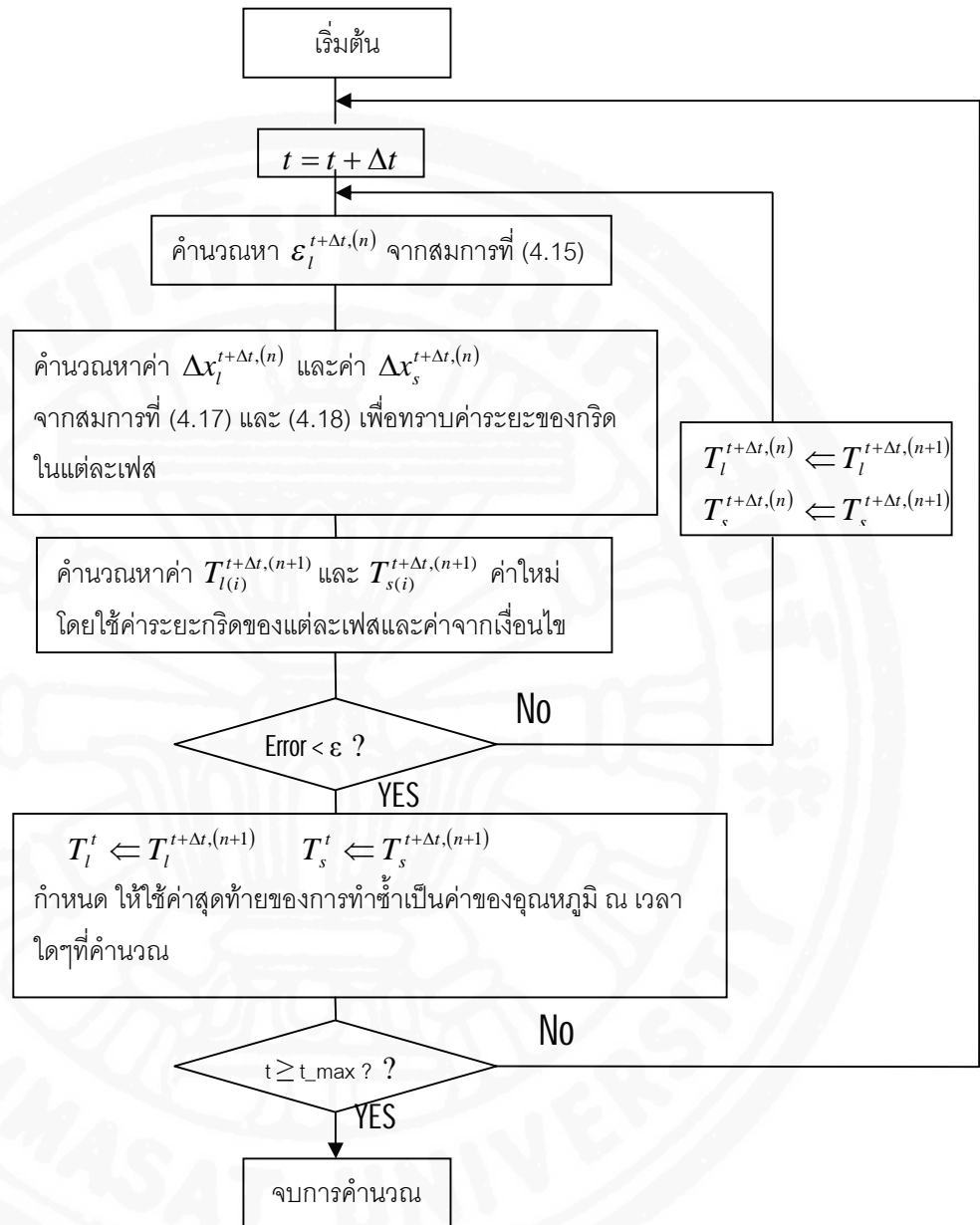
$T$	คือ	อุณหภูมิ
$\alpha$	คือ	ค่าสัมประสิทธิ์การแพร่ความร้อน ( $m^2/s$ )
$\lambda$	คือ	ค่าสัมประสิทธิ์การนำความร้อน ( $W/mK$ )
$L_s$	คือ	ค่าความร้อนแฝง ( $J/kg$ )
$\rho_s$	คือ	ความหนาแน่น ( $kg/m^3$ )
$n_s, n_l$	คือ	จำนวนกริดทั้งหมดในโซนของแข็ง / ของเหลว
$i_s, i_l$	คือ	ตำแหน่งกริดภายในโซนของแข็ง / ของเหลว

#### 4.3.4) สำหรับเงื่อนไขในการคำนวณทางระเบียบวิธีเชิงตัวเลขมีดังนี้

- กำหนดช่วงเวลา  $\Delta t$  (time step) มีค่าเท่ากับ 1 วินาที สำหรับการคำนวณหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิและตำแหน่งของรอยต่อระหว่างเฟสหรือผิวละลาย
- จำนวนกริดที่สร้างจะแบ่งเป็นกริดในบริเวณโซนของเหลว ( $n_l$ ) เท่ากับ 100 จุดและกริดในบริเวณเฟสของแข็ง ( $n_s$ ) เท่ากับ 50 จุด
- กำหนดค่าความคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้มีค่าเท่ากับ  $10^{-6}$  เพื่อหยุดการคำนวณซ้ำของอัลกอริทึมที่สร้างขึ้น

จากภาพที่ 4.4 จะอธิบายถึงลำดับขั้นตอน และรายละเอียดของแผนผังวิธีการคำนวณสำหรับการแก้ปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสจากสมการที่ (13)-(18) ดังนี้

ชำนาญกหอสมุด



ภาพที่ 4.4 แสดงลำดับขั้นตอนและรายละเอียดของแผนผังวิธีการแก้ปัญหา

จากแผนผังการแสดงผลลำดับขั้นตอนของการคำนวณในระเบียบวิธีเชิงตัวเลขสามารถอธิบายได้  
ดังนี้

1. กำหนดค่าเริ่มต้นที่จำเป็นเพื่อใช้ในการคำนวณหาค่าต่างๆในลำดับต่อไป เช่น ค่าคุณสมบัติทางความร้อนต่าง ๆ ตำแหน่งของผิวละลายเริ่มต้น การกระจายตัวของอุณหภูมิเริ่มต้นเนื่องจากกำหนดให้มีบริเวณชั้นบาง ๆ ของโซนของเหลวขณะเริ่มต้นกระบวนการทำละลายเพื่อให้ง่ายต่อการเขียนโปรแกรม
2. กำหนดค่าลำดับเวลา (time step) ของการคำนวณ โดยกำหนดให้เพิ่มขึ้นทีละ 1 วินาที
3. คำนวณหาค่าตำแหน่งของผิวละลาย  $\varepsilon_i^{t+\Delta t, (n)}$  ที่เวลาใหม่จากสมการที่ (4.15)
4. คำนวณหาค่า  $\Delta x_i^{t+\Delta t, (n)}$  และ  $\Delta x_s^{t+\Delta t, (n)}$  จากสมการที่ (4.17) และ (4.18) เพื่อหาค่าระยะห่างของตำแหน่งกริดในแต่ละเฟส
5. คำนวณหาค่า  $T_{l(i)}^{t+\Delta t, (n+1)}$  และ  $T_{s(i)}^{t+\Delta t, (n+1)}$  ณ เวลาใหม่โดยใช้ค่าตำแหน่งผิวละลายที่เวลาใหม่ระยะห่างของตำแหน่งกริดในแต่ละเฟสที่เวลาใหม่ และค่าคุณสมบัติเริ่มต้นต่างๆที่กำหนดไว้เริ่มต้น
6. ตรวจสอบโดยการนำค่า  $T_{l(i)}^{t+\Delta t, (n+1)}$  และ  $T_{s(i)}^{t+\Delta t, (n+1)}$  ณ เวลาใหม่จากข้อ 5 มาเทียบกับค่าที่เวลาเก่าว่ามีค่าน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดให้ยอมรับได้หรือไม่ ถ้าไม่ให้กลับไปทำการคำนวณซ้ำอีกครั้ง ( $n+1$ ) โดยใช้ค่าที่ได้ล่าสุดเป็นค่าเริ่มต้นในการทำซ้ำในครั้งต่อไป
7. ถ้าค่าที่ได้จากการทำซ้ำครั้งล่าสุดน้อยกว่าค่าคลาดเคลื่อนที่กำหนดแล้วนั้น จะกำหนดให้ค่าดังกล่าวเป็นค่าผลลัพธ์ (output) ของลำดับเวลา (time step) ใด ๆ ที่คำนวณ
8. ตรวจสอบค่า output ของเวลา (time step) ในข้อ 7 ดังกล่าวว่าเป็นค่าของ time step ที่อยู่ในช่วงที่กำหนดหรือไม่ ถ้าไม่ให้นำค่านั้นกลับมาใช้เป็นค่าเริ่มต้นในการคำนวณที่ time step เวลาต่อไป แต่ถ้าเกินช่วงของ time step ที่กำหนดไว้แล้วค่อยออกจาก loop ของการคำนวณ

ตารางที่ 4.1 แสดงค่าคุณสมบัติต่าง ๆ ของวัสดุพูนแบบอิมิตัว

ค่าคุณสมบัติ	โซนของเหลว	โซนของแข็ง
$\rho \text{ kg/m}^3$	1942.0	1910.0
$\alpha (\text{m}^2/\text{s})$	$0.21 \times 10^{-6}$	$0.605 \times 10^{-6}$
$\lambda (\text{W/m}\cdot\text{K})$	0.855	1.480
$L (\text{J/kg})$	-	$167.5 \times 10^3$

โดยที่ค่าคุณสมบัติต่าง ๆ นี้หาได้จากการหาค่าเฉลี่ยคุณสมบัติของ Porous Matrix และ น้ำในแต่  
ละเฟส (Rattanadecho, P. and Sertikul, C. [4-9])

สำนักหอสมุด

#### 4.4 ผลที่ได้จากการแก้ปัญหาด้วยระเบียบวิธีเชิงตัวเลข และวิจารณ์

ผลคำตอบที่ได้จากระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำเสนอในกรณีที่พิจารณาวัสดุทดสอบเป็นแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับค่าที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงจากวิธี Similarly Transformation Method [4-1] โดยมีรูปแบบของสมการ ดังต่อไปนี้

จากสมการ

$$\mu = \frac{Ste}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-\mu^2 \sigma^2}}{\operatorname{erf}(\mu \cdot \sigma) - \operatorname{erf}(\mu \cdot \beta)} - \frac{Sb\lambda^{1/2} e^{-\mu^2 \lambda}}{\operatorname{erfc}(\mu \cdot \lambda^{1/2})} \right\} \quad (4.19)$$

จะทำให้สามารถหาผลเฉลยของสมการสำหรับการหาตำแหน่งของผิวละลายได้ ดังนี้

$$\beta = 2\mu(\alpha_i \cdot t)^{1/2} \quad (4.20)$$

และสมการการหาการกระจายตัวของอุณหภูมิที่บริเวณเฟสของเหลวและของแข็งดังนี้

$$T_l = \frac{\operatorname{erf}(\mu \cdot \sigma) - \operatorname{erf}(\mu \cdot \eta_l)}{\operatorname{erf}(\mu \cdot \sigma) - \operatorname{erf}(\mu \cdot \beta)} \quad (4.21)$$

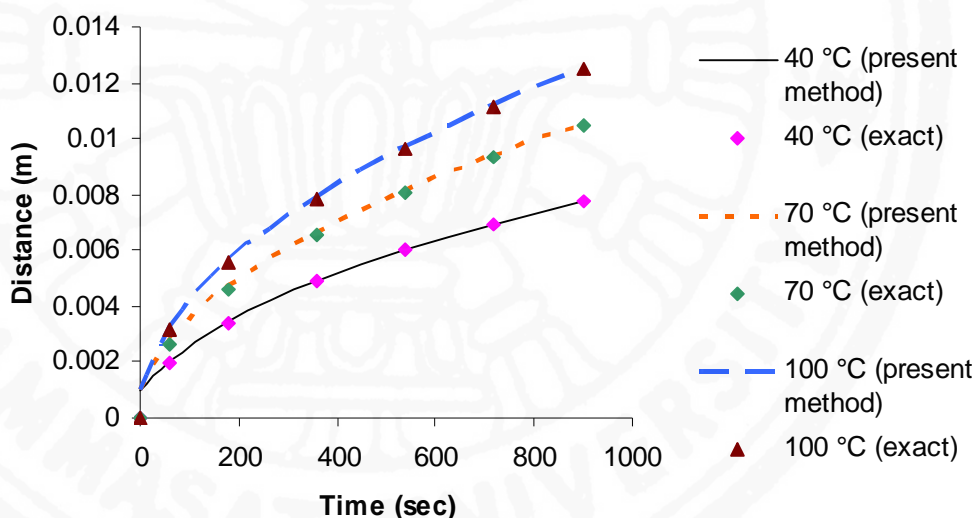
$$T_s = \frac{\operatorname{erfc}(\mu\lambda^{1/2}\eta_s)}{\operatorname{erfc}(\mu\lambda^{1/2})} \quad (4.22)$$

จากผลเฉลยแม่นยำตรงที่ได้ เมื่อนำมาเปรียบเทียบกับวิธีการที่นำเสนอพบว่าอัตราการเคลื่อนตัวของผิวละลายของทั้งคู่มีค่าสอดคล้องกันดังแสดงในตารางที่ 2 และภาพที่ 5 ซึ่งแสดงให้เห็นเป็นอย่างดีว่าวิธีการที่นำเสนอมีความแม่นยำและเชื่อถือได้



ตารางที่ 4.2 แสดงค่าตำแหน่งของผิวละลายที่เวลาและอุณหภูมิต่าง ๆ ของทั้งกรณีระเบียบวิธีเชิงตัวเลขและกรณีจากผลเฉลยแม่นยำ

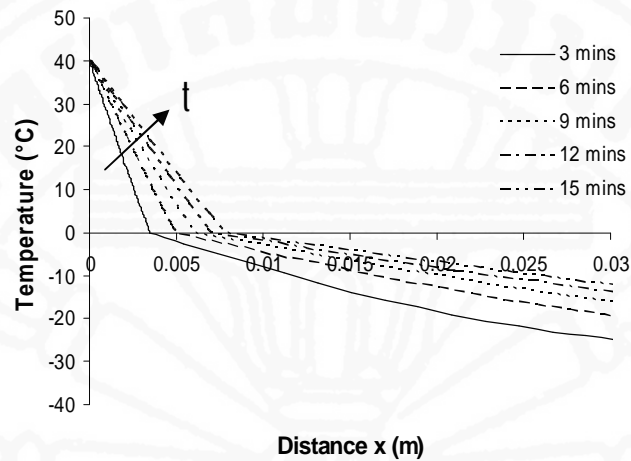
Time (s)	40 °C	40 °C (exact)	70 °C	70 °C (exact)	100 °C	100 °C (exact)
180	0.0034900	0.0034231	0.0047200	0.0046231	0.0056100	0.0055323
360	0.0049300	0.0048723	0.0066600	0.0065723	0.0079300	0.0078606
540	0.0060300	0.0059945	0.0081600	0.0080715	0.0097100	0.0096411
720	0.0069600	0.0069237	0.0094200	0.0093409	0.0112100	0.0111615
900	0.0077800	0.0077785	0.0105300	0.0104822	0.0125300	0.0125114



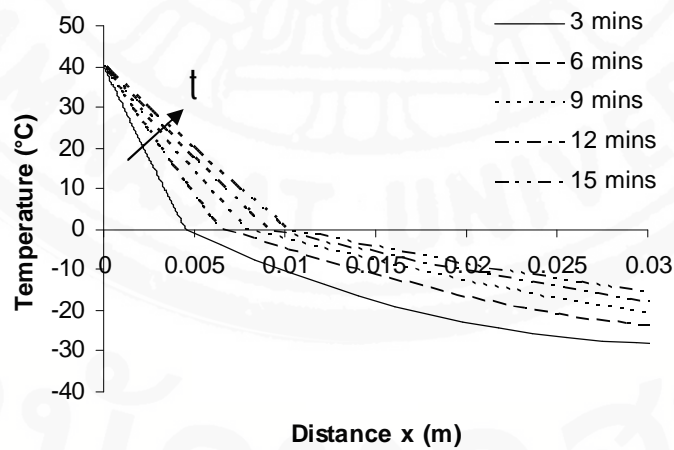
ภาพที่ 4.5 เปรียบเทียบระยะการเคลื่อนตัวของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ สำหรับอุณหภูมิทำละลายที่ 40 °C, 70 °C และ 100 °C

หลังจากที่ได้ทำการเปรียบเทียบให้เห็นถึงความสอดคล้องกันของทั้งสองวิธีซึ่งยืนยันให้เห็นถึงความถูกต้องของสมการและเทคนิควิธีที่นำเสนอแล้วนั้น หากทำการวิเคราะห์เพิ่มเติมโดยการกำหนดให้วัสดุทดสอบที่เราพิจารณาเป็นแพคเกจของวัสดุพูนที่แข็งตัว ค่าตอบที่ได้จากการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขกับกลุ่มสมการ (4.13) - (4.18) โดยอยู่บนพื้นฐานของวัสดุพูนแบบอิมพัลส์ทำให้สามารถเห็นถึงความแตกต่างของลักษณะการเคลื่อนตัวของผิวละลายและ

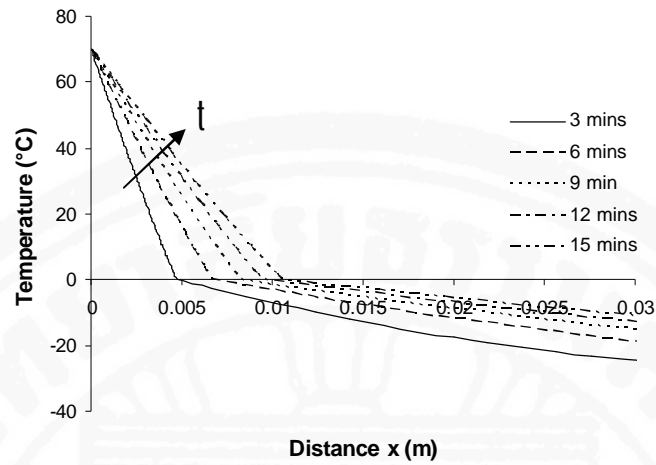
อิทธิพลของระดับอุณหภูมิที่ใช้ในการทำละลายของกรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และกรณีแพคเบดของวัสดุพอรันที่แข็งตัว ได้ดังนี้



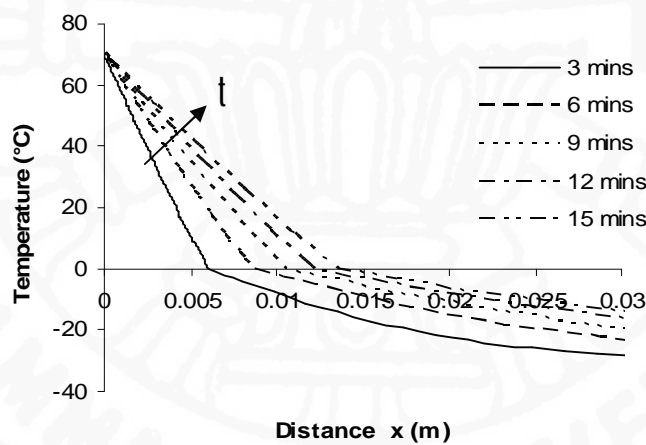
ภาพที่ 4.6 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ ณ อุณหภูมิของการทำละลาย  $40^{\circ}\text{C}$  ของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ (pure ice)



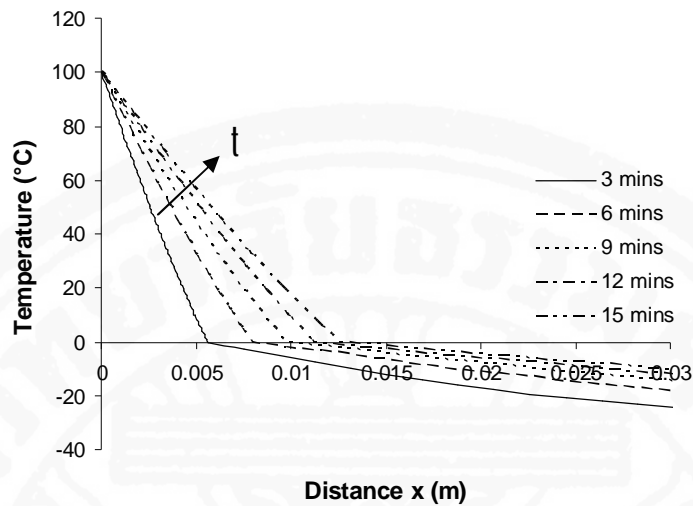
ภาพที่ 4.7 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ ณ อุณหภูมิของการทำละลาย  $40^{\circ}\text{C}$  ของวัสดุพอรันแบบอิมิตัว (ice+porous)



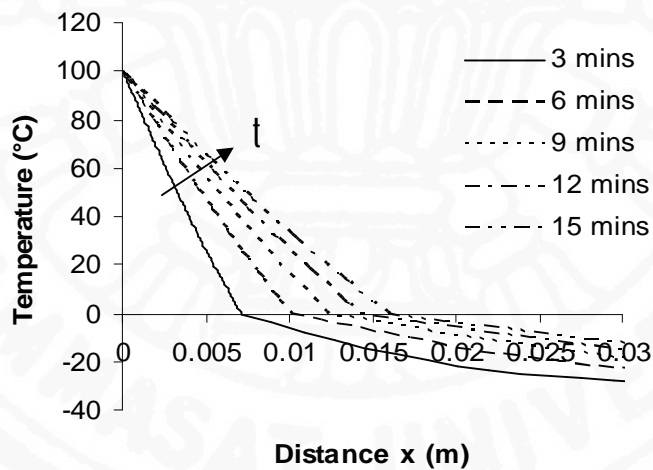
ภาพที่ 4.8 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ ณ อุณหภูมิของการทำละลาย 70 °C ของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ (pure ice)



ภาพที่ 4.9 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ ณ อุณหภูมิของการทำละลาย 70 °C ของวัสดุพูนแบบอิมิตัว (ice+porous)



ภาพที่ 4.10 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ ณ อุณหภูมิของการทำละลาย  $100^{\circ}\text{C}$  ของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ (pure ice)



ภาพที่ 4.11 ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิและการเคลื่อนที่ของผิวละลายที่เวลาต่าง ๆ ณ อุณหภูมิของการทำละลาย  $100^{\circ}\text{C}$  ของวัสดุพอร์นแบบอิมิตัว (ice+porous)

เมื่อพิจารณาลักษณะกราฟถึงพฤติกรรมของการละลายที่ได้จากผลการคำนวณโดยระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่นำเสนอทั้งในกรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และกรณีของแพคเบตของวัสดุพอร์นที่แข็งตัว จากภาพที่ 4.6 - 4.11 จากนาที่ที่ 3 จนถึง นาที่ที่ 15 โดยเพิ่มขึ้นทีละ 3 นาที พบว่าที่อุณหภูมิทำละลาย ( $T_s$ ) ทั้ง  $40^{\circ}\text{C}$   $70^{\circ}\text{C}$  และ  $100^{\circ}\text{C}$  ลักษณะการกระจายตัวของอุณหภูมิในบริเวณที่ถูกทำละลายจะมีค่าลดลงจากตำแหน่งเริ่มต้น (ซึ่งมีอุณหภูมิเท่ากับอุณหภูมิทำละลาย)

ไปจนถึงตำแหน่งของผิวละลาย ซึ่งที่จุดนี้จะมีอุณหภูมิคงที่เท่ากับ  $0^{\circ}\text{C}$  หลังจากผ่านบริเวณนี้ไป จะเข้าสู่บริเวณที่ไม่ถูกทำละลาย ซึ่งแนวโน้มของอุณหภูมิจะค่อย ๆ ลดลงจาก  $0^{\circ}\text{C}$  จากที่จุดผิวละลายไปจนกระทั่งถึงที่ตำแหน่งปลาย ( $X=L$ ) แท่งน้ำแข็งจะมีค่าอุณหภูมิคงที่ไม่เปลี่ยนแปลงไปตามระยะความยาวในแกน  $x$  ของก้อนน้ำแข็งเนื่องจากมีการหุ้มฉนวนไว้ที่ตำแหน่งปลาย ( $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ ) จากภาพที่ 5 จะสังเกตเห็นว่าเมื่อเพิ่มอุณหภูมิของการทำละลาย ( $T_s$ ) จาก  $40^{\circ}\text{C}$   $70^{\circ}\text{C}$  และ  $100^{\circ}\text{C}$  ผิวละลายจะเคลื่อนที่ได้เร็วขึ้นเนื่องจากอิทธิพลของความร้อนที่ส่งผ่านไปยังผิวละลายมากขึ้น นอกจากนั้นพบว่าที่อุณหภูมิของการทำละลายใด ๆ เมื่อเวลาเพิ่มขึ้นระยะทางของผิวละลายจะมีค่าเพิ่มขึ้นแต่จะเพิ่มขึ้นในอัตราที่ลดลงเมื่อเวลาผ่านไปขณะหนึ่งเพราะการที่บริเวณที่เกิดการละลายของน้ำแข็งเพิ่มขึ้นตามเวลานี้ซึ่งทำให้เกิดโซนของเหลวขยายตัวเพิ่มขึ้นเปรียบเสมือนเป็นตัวต้านทานความร้อนที่ถูกส่งไปยังผิวน้ำแข็ง

นอกจากนี้เมื่อเปรียบเทียบระหว่างกรณีแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์กับกรณีแพคเบตของวัสดุพอร์นที่แข็งตัวที่เวลาใด ๆ นั้นจะพบว่า ในกรณีที่เป็นแพคเบตของวัสดุพอร์นนั้นจะมีอัตราการละลายที่เร็วกว่าในกรณีที่เป็นน้ำแข็งธรรมดา เนื่องจากกรณีของแพคเบตของวัสดุพอร์นนั้นจะใช้ค่าความร้อนแฝงของการทำละลายน้อยกว่ากรณีของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และแพคเบตของวัสดุพอร์นนั้นมีค่าความจุความร้อนที่ต่ำกว่าในกรณีของแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์ อีกทั้งการที่น้ำกระจายตัวอยู่ในช่องรูพอร์นต่าง ๆ ภายใน Porous matrix นั้นจะเป็นการช่วยให้มีพื้นที่ในการรับพลังงานความร้อนมาใช้ในกระบวนการทำละลายเพิ่มขึ้นอีกด้วย

ชำนาญกานท์หอสมุด

#### 4.5 สรุป

หลังจากพิจารณาผลเฉลยของการเคลื่อนที่ของผิวละลาย พบว่า คำตอบที่ได้จากการใช้ระเบียบวิธีเชิงตัวเลขด้วยวิธีวิธีแปรผันระยะกิริตที่นำเสนอในครั้งนี้มีความแม่นยำค่อนข้างสูง สำหรับปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสในระบบ 1 มิติ ซึ่งผลลัพธ์ของระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่ได้จากปัญหาตัวอย่างนั้นพบว่ามีค่าสอดคล้องกับที่ได้จากผลเฉลยแม่นยำตรงในทุกกรณี

นอกจากนั้นจะพบว่าสำหรับการพิจารณาวัสดุให้เป็นแพคเบตของวัสดุพอรุน พบว่า อัตราการละลายที่เกิดขึ้นในกรณีที่มีการนำให้เป็นวัสดุพอรุนนั้นจะมีค่าสูงกว่าในกรณีที่มีการนำเป็นน้ำแข็งเนื่องจากเหตุผลดังกล่าว

เมื่อพิจารณาถึงวิธีการนำเสนอที่ค่อนข้างสะดวกกว่าการหาผลเฉลยแบบแม่นยำ โดยเฉพาะในกรณีที่เป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนและมีความไม่เชิงเส้น (Nonlinearity) สูง ด้วยเหตุนี้ทำให้ปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟสจึงเป็นปัญหาที่สามารถพัฒนาความรู้ความเข้าใจได้อีกมาก โดยประยุกต์ใช้กับระเบียบวิธีเชิงตัวเลขในรูปแบบใหม่ ๆ เนื่องจากเป็นปัญหาที่สามารถต่อยอดความรู้ได้สูง อันเป็นผลมาจากพัฒนาการของระบบคอมพิวเตอร์ที่สูงขึ้น

สำนักหอสมุด