

ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

สำหรับเนื้อหาในวิทยานิพนธ์ฉบับนี้ได้เน้นศึกษาการวิเคราะห์เชิงทฤษฎีของปัญหาการเปลี่ยนแปลงเฟส (Phase change problem) ได้แก่กระบวนการทำละลาย (Melting process) สำหรับวัสดุพูนในโครงสร้างระดับจุลภาค ซึ่งเป็นปัญหาที่มีการเคลื่อนตัวของขอบเขต (Moving boundary problem) โดยทำการสร้างแบบจำลองทางคณิตศาสตร์และสมการของระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical Schemes) รูปแบบใหม่ที่มีประสิทธิภาพและความแม่นยำสูงเพื่อใช้ในการวิเคราะห์กระบวนการทำละลายโดยเนื้อหาในวิทยานิพนธ์จะศึกษาครอบคลุมตั้งแต่การวิเคราะห์กระบวนการทำละลายในระบบ 1 มิติตลอดจนถึงการวิเคราะห์ในระบบสองมิติ

ในกรณีการวิเคราะห์กระบวนการเปลี่ยนแปลงเฟสในระบบ 1 มิตินั้นจะเป็นการนำเอาเทคนิคการเปลี่ยนพิกัดของแกน (Coordinate transformation technique based on variable space grid method) ในปัญหาการกระบวนการทำละลายในแท่งน้ำแข็งบริสุทธิ์และในวัสดุพูนแบบอิมิตัว ซึ่งเป็นวิธีที่คลาสสิกที่นักวิจัยนำมาประยุกต์ใช้ในกระบวนการต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาที่มีขอบเขตเคลื่อนที่ (Moving boundary problem) เช่นการวิเคราะห์เกี่ยวกับกระบวนการอบแห้ง (Drying process) กระบวนการทำแข็ง (freezing process) หรือกระบวนการทำละลาย (melting process)

สำหรับการวิเคราะห์กระบวนการเปลี่ยนแปลงเฟสในระบบ 2 มิติจะเริ่มตั้งแต่วิเคราะห์กระบวนการทำละลายโดยพิจารณาเฉพาะผลของการนำความร้อน การปรับปรุงประสิทธิภาพโครงสร้างกริดสำหรับกระบวนการทำละลายและการทำละลายโดยอาศัยคลื่นไมโครเวฟเป็นแหล่งกระตุ้นให้เกิดความร้อนซึ่งจะเน้นถึงวิธีการที่เพิ่มประสิทธิภาพของกระบวนการทำละลายโดยคลื่นไมโครเวฟให้สูงขึ้น และการวิเคราะห์กระบวนการทำละลายจากแหล่งความร้อนคงที่โดยจะพิจารณาผลของการพาความร้อนที่เกิดขึ้นภายในเฟสของเหลวที่เกิดจากการละลายตัว โดยการวิเคราะห์กระบวนการทั้งหมดนั้นจะอยู่บนพื้นฐานของการนำเทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์ อินเทอร์พอลชัน (Transfinite Interpolation) ร่วมกับวิธีพีดีอี (PDE Mapping) มาแก้ปัญหาดังกล่าว

จากงานวิจัยที่ปรากฏในวิทยานิพนธ์ดังกล่าวมาข้างต้นจะมีเนื้อหาประกอบทางทฤษฎีที่จำเป็นต่องานวิจัยต่าง ๆ ได้แก่ ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับวัสดุพูน ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับการแปลงพิกัดแบบแปรผันระยะกริด ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับเทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์

โพเลชันและทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับความรู้ทางด้านไมโครเวฟและระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ซึ่งทั้งหมดล้วนเป็นความรู้พื้นฐานที่เกี่ยวข้องและจำเป็นต่องานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งสิ้น

3.1 ทฤษฎีพื้นฐานเกี่ยวกับกระบวนการถ่ายเทความร้อนและมวลสารในวัสดุพูน

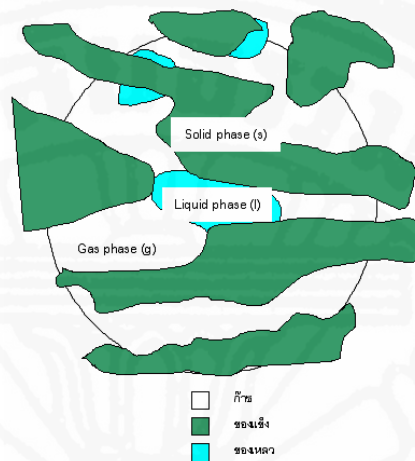
ถ้ากล่าวถึงวัสดุพูนแล้วหากพิจารณาในภาพกว้างเราสามารถแบ่งชนิดของวัสดุพูนออกเป็น 2 ชนิดได้ดังนี้

1. วัสดุพูนแบบอิมมัตว คือวัสดุพูนที่โครงสร้างภายในถูกเติมเต็มไปด้วยของเหลว โดยที่ไม่มีที่ว่างของรูพรุนใดที่ถูกแทนที่ด้วยอากาศหรือน้ำ
2. วัสดุพูนแบบไม่อิมมัตว คือวัสดุพูนที่โครงสร้างภายในประกอบไปด้วยสาร 3 สถานะ ได้แก่ ของเหลว (Liquid phase) และก๊าซ (Gas phase)

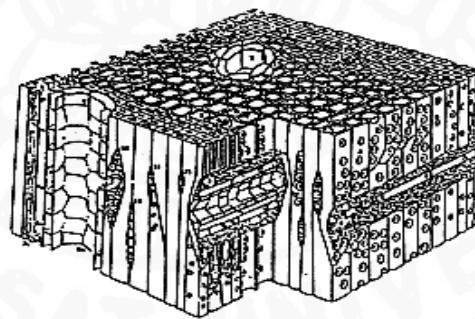
เป็นที่ทราบกันดีว่าวัสดุส่วนใหญ่ในทางวิศวกรรมเป็นวัสดุพูน ตัวอย่างวัสดุพูนที่ใช้ในงานในทางวิศวกรรม เช่น ดินและคอนกรีตในงานวิศวกรรมปฐพี เซรามิกในงานวิศวกรรมโลหะ ตัวเร่งปฏิกิริยาในงานวิศวกรรมเคมี ฉนวนความร้อนในงานวิศวกรรมเครื่องกลและเคมี เนื้อเยื่อต่าง ๆ หรือเยื่อชีวในงานวิศวกรรมชีวภาพและการแพทย์ รวมไปถึงอาหารและผลิตภัณฑ์ทางการเกษตรในงานวิศวกรรมเกษตร

นอกจากนี้หากเราพิจารณาในเชิงลึกถึงชนิดของวัสดุพูนแบบไม่อิมมัตวยังสามารถแบ่งออกเป็นสองชนิดใหญ่ ๆ เช่น ชนิดแรกของไหลหรือความชื้นจะเคลื่อนตัวอยู่รอบนอกอนุภาคของแข็ง (solid matrices) ไปตามโพรงช่องว่าง (pores) ภายในวัสดุโดยไม่มีการส่งผ่านหรือดูดกลืนเข้าไปในชั้นผิวของอนุภาคของแข็ง เราเรียกวัสดุพูนชนิดนี้ว่าวัสดุพูนแบบไม่ขึ้นมาก (Nonhygroscopic porous media) หากพิจารณาโครงสร้างของวัสดุพูนชนิดนี้พบว่าช่องว่างระหว่างอนุภาคของแข็งหรือรูพรุนมีขนาดใหญ่ ดังนั้นอิทธิพลของความดันไอภายในช่องว่างจะมีความสำคัญน้อย วัสดุพูนชนิดที่สองความชื้นจะถูกยึดอยู่กับโครงสร้างของอนุภาคของแข็งภายใต้พันธะทางเคมีและฟิสิกส์ (เป็นพันธะที่สำคัญในการหน่วงให้ความชื้นคงอยู่ในโครงสร้าง) ทำให้การเคลื่อนตัวของความชื้นทำได้ยาก อิทธิพลของความดันไอภายในมีความสำคัญมาก เนื่องจากช่องว่างระหว่างอนุภาคของแข็งมีขนาดเล็กมาก (ประมาณ 0-1 μm) เราเรียกวัสดุพูนชนิดนี้ว่าวัสดุพูนแบบขึ้นมาก (Hygroscopic porous media) ซึ่งกรณีนี้จะรวมถึงวัสดุพูนบางชนิด เช่น วัสดุชีวภาพที่ไม่สามารถแบ่งแยกลักษณะโครงสร้างได้ชัดเจนเนื่องจากเนื้อวัสดุมี

โครงสร้างซับซ้อน (เช่น เนื้อไม้ ดังแสดงในภาพที่ 3.2) ซึ่งการเคลื่อนที่ของความชื้นไม่มีเสถียรภาพ ทำให้การวิเคราะห์เชิงทฤษฎีมีความซับซ้อนกว่าในกรณีแรก



ภาพที่ 3.1 โครงสร้างของวัสดุพรุนทั่วไป



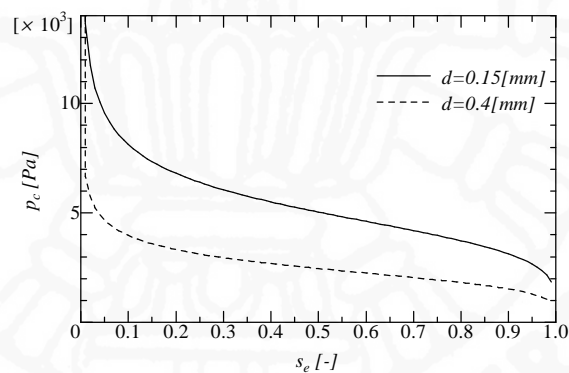
ภาพที่ 3.2 โครงสร้างวัสดุพรุนแบบเซลล์ลูลาร์-คาพิลลารี (cellular capillary)

วัสดุพรุนชนิดแรก (Nonhygroscopic porous media) ส่วนใหญ่เรียกว่าวัสดุพรุนแบบคาพิลลารี (Capillary porous media) เนื่องจากของเหลวหรือความชื้นภายในวัสดุเคลื่อนตัวในช่องว่างที่เป็นรูพรุน (ภาพที่ 3.4) โดยอิทธิพลของความดันคาพิลลารี (Capillary pressure) (เป็นฟังก์ชันของแรงตึงผิว มุมสัมผัส และลักษณะโครงสร้างทางกายภาพของวัสดุพรุน) ความดันคาพิลลารีสามารถนิยามได้ดังนี้คือ เมื่อของไหลสองชนิดที่ไม่ผสมกัน (Immiscible fluids) (เช่น น้ำและอากาศ) เกิดการสัมผัสกันในช่องว่างของวัสดุพรุน การไม่ผสมกันของของไหลสองชนิดทำให้

เกิดความไม่ต่อเนื่องของความดันตลอดช่วงผิวรอยต่อเรียกว่าความดันคาพิวลารี (p_c) ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

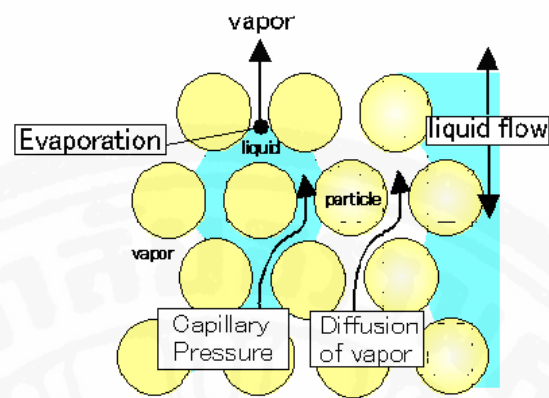
$$p_c = p - p_l \quad (3.1)$$

เมื่อ p คือความดันในของไหลที่มีสถานะแห้ง (Non-wetting phase) เช่นอากาศ ส่วน p_l คือความดันในของไหลที่มีสถานะเปียก (Wetting phase) ความดันคาพิวลารีมีคุณสมบัติที่สมดุลและสัมพันธ์โดยตรงกับแรงตึงผิวระหว่างของไหลทั้งสองชนิด จากการศึกษาพบว่าค่าความดันคาพิวลารีเพิ่มขึ้นเมื่อค่าอิมิตัวของของไหลสถานะแห้งเพิ่มขึ้น แต่ก็ขึ้นกับคุณสมบัติของความอิมิตัวของวัสดุนั้น ๆ ด้วย ภาพที่ 3.3 แสดงข้อมูลจากการทดลองที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความดันคาพิวลารีภายในวัสดุพอร์นและคุณสมบัติของของไหลที่สภาวะต่าง ๆ (Ratanadecho et al. [3-1])



ภาพที่ 3.3 ความสัมพันธ์ระหว่างความดันคาพิวลารีภายในวัสดุพอร์น และคุณสมบัติของของไหล

กลไกสำคัญอีกอย่างหนึ่งที่มีอิทธิพลต่อการเคลื่อนตัวของไอน้ำในช่องว่างที่เป็นรูพอร์น คือผลของการแพร่กระจายไอน้ำ (vapor diffusion force) ซึ่งอธิบายได้ด้วยกฎของฟิคส์ (Fick's law) โดยที่ภาพที่ 3.4 แสดงถึงกลไกที่สำคัญต่อกระบวนการถ่ายเทมวลสารในวัสดุพอร์นแบบคาพิวลารี



ภาพที่ 3.4 กระบวนการถ่ายเทมวลสารในวัสดุพอรุน

สำนักหอสมุด

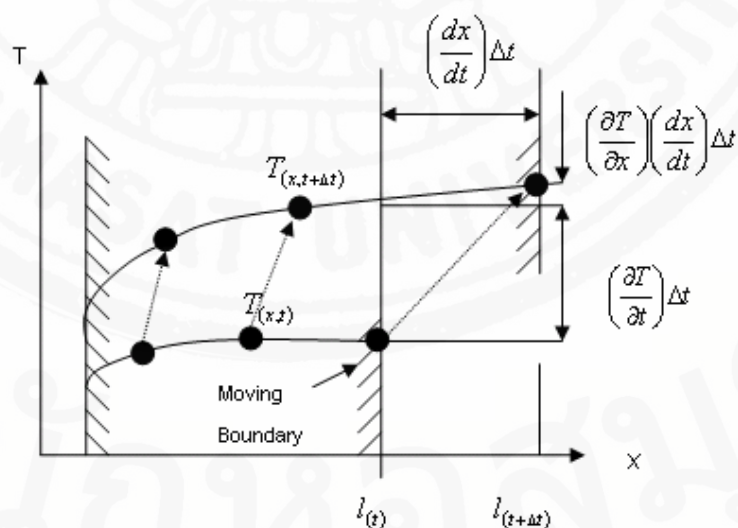
3.2 ทฤษฎีพื้นฐานและหลักการของกระบวนการการแปลงพิกัดแกนแบบแปรผันระยะกริด

เนื่องจากปัญหาการทำละลายที่ศึกษาในครั้งนี้เป็นปัญหาไม่เชิงเส้น ดังนั้นในการวิเคราะห์จึงจำเป็นต้องมีความเกี่ยวข้องกับการแปลงพิกัดแกน (Coordinate Transformation) สังเกตจากภาพที่ 3.5 จะพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป ที่จุดหรือตำแหน่งใด ๆ จะมีอุณหภูมิเพิ่มขึ้นในขณะเดียวกันก็มีตำแหน่งเปลี่ยนไปจากตำแหน่งเดิมด้วย ซึ่งเมื่ออาศัยหลักการของการแปลงพิกัดแกนจะได้ผลต่างของอุณหภูมิ (ΔT) มีค่าดังนี้

$$\Delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) \Delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) \Delta t \quad (3.2)$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิเมื่อเทียบกับเวลาของ ณ ตำแหน่งของจุดใด ๆ จะมีค่าดังนี้

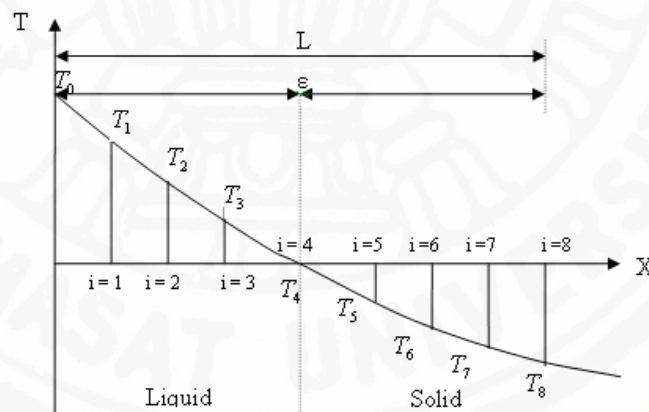
$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \left(\frac{dx}{dt} \right) \quad (3.3)$$



ภาพที่ 3.5 แสดงลักษณะแนวโน้มอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลงไป ณ ตำแหน่งใด ๆ
ในแนวแกน x ที่ เวลาเปลี่ยนไป

หลังจากนั้นพิจารณาหลักการของวิธีแปรผันระยะกริด ซึ่งถือเป็นวิธีการหนึ่งในการทำให้กริดที่สร้างขึ้นเคลื่อนที่ไปตามผิวรอยต่อที่เกิดการเปลี่ยนแปลงเฟส ซึ่งสามารถอธิบายได้ดังนี้ ถ้าหากเราทำการกำหนดให้ระยะของบริเวณไซนของเหลว (unfrozen layer) หรือระยะของ $x < \varepsilon$ หารด้วยจำนวนของกริดในบริเวณไซนของเหลวที่พิจารณา (n_l) มีค่าเท่ากับระยะของแต่ละกริดที่อยู่ในบริเวณไซนของเหลว Δx_l แล้ว เมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของแต่ละกริดที่เพิ่มขึ้นเนื่องจาก

การขยายตัวของชั้นการละลายตัวที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ $\left(\Delta x_l = \frac{\varepsilon}{n_l} \right)$ เช่นเดียวกับในบริเวณของไซนของแข็ง ($x > \varepsilon$) หากเรานำระยะที่เหลือในส่วนที่เป็นไซนของแข็ง ($L - \varepsilon$) หารด้วยจำนวนของกริดที่มีอยู่ในบริเวณไซนของแข็ง $n_s - i_s$ โดยที่ n_s คือ จำนวนของกริดในบริเวณไซนของแข็งที่พิจารณา i_s คือ ลำดับของตำแหน่งของกริดที่พิจารณา เมื่อเวลาผ่านไประยะห่างของแต่ละกริดในไซนของแข็งที่ลดลงเนื่องจากการขยายตัวของชั้นการละลายตัวที่เพิ่มขึ้นจะมีค่าเท่ากับ $\left(\Delta x_s = \frac{(L - \varepsilon)}{n_s - i_s} \right)$ ซึ่งจากที่อธิบายมาทั้งหมดสามารถอธิบายได้จากภาพ 3.6



ภาพที่ 3.6 แสดงการอธิบายวิธีการแปรผันระยะกริด

จากภาพที่ 3.6 เมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ $x = 0$ ถึงระยะ $x = \varepsilon$ แล้ว จะพบว่าอัตราการเคลื่อนที่ของแต่ละกริดภายในจะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varepsilon}{n_l} \quad (3.4)$$

กล่าวคืออัตราการขยายตัวของผิวละลายที่เคลื่อนที่ไปทางขวา $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$ หากรดด้วยระยะจากด้านซ้ายไปจนถึงระยะของผิวละลาย $(n_l \cdot \Delta x)$ ย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt}$ ณ จุดใด ๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือหารด้วยระยะจากขอบด้านซ้ายไปจนถึงจุดที่พิจารณา $(i_l \cdot \Delta x)$ ดังนั้น

$$\frac{dx}{dt} = \frac{i_l}{n_l} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.5)$$

จากสมการที่ (3.5) เมื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ (3.3) จะได้สมการสำหรับบริเวณโซนของเหลว ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \frac{i_l}{n_l} \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) \quad (3.6)$$

หลังจากนั้นเมื่อพิจารณาตั้งแต่ระยะ $x = \varepsilon$ ถึงระยะ $x = L$ แล้ว จะพบว่าอัตราการเคลื่อนที่ของแต่ละกริดภายใน จะมีความสัมพันธ์กับอัตราการเคลื่อนที่ของผิวละลาย ดังนี้

$$\frac{dx}{n_s - i_s} = \frac{d\varepsilon}{n_s}$$

กล่าวคืออัตราการขยายตัวของผิวละลายที่เคลื่อนที่ไปทางขวา $\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)$ หารด้วยระยะจากจุดผิวละลายถึงด้านปลายที่ $x = L$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $(L - \varepsilon)$ และมีค่าเท่ากับ $(n_s \cdot \Delta x)$ ด้วยนั้นย่อมมีค่าเท่ากับอัตราการเคลื่อนที่ $\frac{dx}{dt}$ ของผิวละลายใด ๆ ที่เคลื่อนที่ไปทางขวามือหารด้วยระยะตั้งแต่ผิวละลายใด ๆ ถึงด้านปลายที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $((n_s - i_s) \cdot \Delta x)$ จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้สมการ ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = \frac{n_s - i_s}{n_s} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.7)$$

จากสมการที่ (3.7) เมื่อนำไปแทนค่าในสมการที่ (3.3) จะได้สมการสำหรับบริเวณโซนของแข็ง ดังนี้

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right) \frac{n_s - i_s}{n_s} \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (3.8)$$

3.3 เทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์ อินเทอร์พอเลชัน (Transfinite interpolation)

วิธีการที่นำเสนอนี้ถือเป็นวิธีการที่ใช้ในการสร้างโครงสร้างของกริดในระบบ 2 มิติ ของระบบที่มีรูปทรงแบบสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งถือเป็นวิธีการที่เกี่ยวข้องกับพื้นฐานของวิธีการทางพีชคณิตโดยตรง โดยที่วิธีการนี้ถือว่าเป็นวิธีการที่สามารถสร้างโครงสร้างของกริดได้ง่ายกว่าวิธีการทางด้านสมการเชิงอนุพันธ์ และสามารถควบคุมลักษณะเฉพาะของโครงสร้างกริดได้ง่ายกว่า เช่น ตำแหน่ง หรือ ระยะห่างของกริด อย่างไรก็ตามจุดด้อยของวิธีการนี้คือ มักเกิดความไม่ต่อเนื่องของกริดที่อยู่บนขอบเขตของโดเมน (discontinuities on the boundary) ซึ่งมีผลต่อกริดภายในที่ถูกสร้างขึ้นภายหลัง โดยความต่อเนื่องและราบเรียบของโครงสร้างกริดจะน้อยกว่าโครงสร้างกริดที่ถูกสร้างขึ้นโดยวิธีการแปลงพิกัดแกน ดังนั้น จึงเกิดแนวคิดในการสร้างโครงสร้างของกริดเริ่มต้นด้วยวิธีการทางพีชคณิตและนำวิธีการแปลงพิกัดแกนมาช่วยทำให้โครงสร้างกริดภายในมีลักษณะต่อเนื่องและราบเรียบมากขึ้นกว่าเดิม สำหรับรายละเอียดของเทคนิควิธีทรานซ์ไฟไนต์อินเทอร์พอเลชัน มีดังต่อไปนี้

3.3.1 การประมาณค่าของตำแหน่งระหว่างจุดในทิศทางเดียว (Unidirectional interpolation)

การหาค่าฟังก์ชันขอบเขตของโดเมนที่พิจารณาซึ่งมีขอบเขตที่ไม่คงที่นั้นมีความจำเป็นที่จะต้องใช่วิธีการประมาณค่าฟังก์ชันซึ่งจะต้องใช้ค่าลำดับของข้อมูลซึ่งสอดคล้องกับขอบเขตของโดเมนที่พิจารณา สำหรับการสร้างสมการโพลิโนเมียลลำดับที่ n ซึ่งลากผ่านจุดใด ๆ ที่สอดคล้องกับสมการนั้นสามารถหาได้จากวิธีของ Lagrange ดังนี้

$$p(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

โดยที่

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, i = 0, 1, \dots, n$$

หรืออยู่ในรูป

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

(3.9)

สำหรับการประมาณค่าแต่ละจุดบนเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างเส้นโค้งขอบเขตสองเส้นนั้นจะใช้ Lagrange โพลิโนเมียลลำดับที่ 1 (degree 1) จะได้

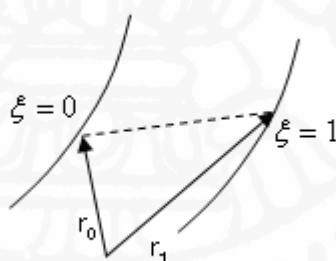
$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} \quad L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$$

ดังนั้นสมการเส้นตรงที่เชื่อมทั้งสองจุดคือ

$$\begin{aligned} y &= y_0 \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \\ &= y_0(1 - \xi) + y_1\xi \end{aligned} \tag{3.10}$$

โดยที่

$$x = x_0 + \xi(x_1 - x_0) \tag{3.11}$$

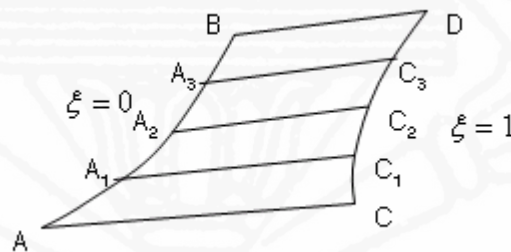


ภาพที่ 3.7 การประมาณค่าเชิงเส้นระหว่างสองจุด

ในการประมาณค่าเส้นตรงระหว่างเส้นโค้งขอบเขตสองเส้นนั้น ก่อนอื่นต้องทำการกำหนดจุดที่อยู่บนเส้นโค้งทั้งสองด้านซึ่งเส้นตรงที่อยู่ระหว่างเส้นโค้งสองเส้นนี้ ซึ่งอ้างอิงกับเวกเตอร์ r โดยจะมีจำนวนกริดทั้งหมดอยู่เป็นจำนวน $n+1$ จุด ดังภาพที่ 3.7 ซึ่งจะทำให้สามารถหาตำแหน่งของเวกเตอร์ r ได้ดังนี้

$$r = (1 - \xi)r_0 + \xi r_1 \quad (3.12)$$

ในการแสดงการสร้างกริดในระนาบ 2 มิติ โดยจะทำการประมาณค่า (interpolate) ตำแหน่งของกริดในทิศทางเดียวดังภาพที่ 3.8 โดเมน ABCD จะมีฟังก์ชันขอบเขต AB และ CD โดยที่เส้น AC และ BD เป็นเส้นตรงทั้งคู่ซึ่งพิจารณาในโคออดิเนต η จากนั้นทำการกำหนดจุดแต่ละจุดบนเส้นฟังก์ชันขอบเขตทั้งสองด้านจากภาพเราจะได้ 4 จุดบนแต่ละเส้นขอบเขต คือ $AA_1A_2A_3B$ และ $CC_1C_2C_3D$



ภาพที่ 3.8 การประมาณค่าเชิงเส้นระหว่างฟังก์ชันเส้นโค้งสองเส้น

เส้นเชื่อมระหว่างสองฟังก์ชันนี้จะมีความสัมพันธ์กับโคออดิเนต η ด้วยคือ $\eta = 0$ ที่เส้นเชื่อม AC, $\eta = 1$ ที่เส้นเชื่อม A_1C_1 ซึ่งเราจะทำการกำหนด ξ ให้คงที่ คือเส้น AB ให้ $\xi = 0$ และเส้น CD ให้ $\xi = 1$ โดยที่จุดทุกจุดบนเส้นเชื่อมฟังก์ชันทุกเส้นบนโดเมนจะอยู่ในพิกัด x, y

ในกรณีที่เส้น ξ เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งขอบเขตโดยที่ η เป็นเส้นตรงระหว่างเส้นฟังก์ชันของเส้นโค้ง ξ (ดูภาพที่ 3.8) จะได้สมการดังนี้

$$r(\xi_i, \eta_j) = (1 - \xi_i)r(0, \eta_j) + \xi_i r(1, \eta_j) \quad (3.13)$$

และในกรณีที่เส้น η เป็นฟังก์ชันของเส้นโค้งขอบเขตโดยที่ ξ เป็นเส้นตรงระหว่างเส้นฟังก์ชันของเส้นโค้ง η จะได้สมการดังนี้

$$r(\xi_i, \eta_j) = (1 - \eta_j)r(\xi_i, 0) + \eta_j r(\xi_i, 1) \quad (3.14)$$

โดยที่ลักษณะหรือตำแหน่งของกริดภายในนั้นจะถูกกำหนดมาจากตำแหน่งที่เปลี่ยนไปของขอบเขตเคลื่อนที่หรือผิวละลาย ซึ่งตำแหน่งของผิวละลายจะได้โดยการแก้ปัญหาจากสมการการเคลื่อนที่ของผิวละลาย (Stefan equation) และถูกกำหนดร่วมกับเทคนิคการแปลงพิกัด

3.3.2 การประมาณค่าของตำแหน่งระหว่างจุดหลายทิศทาง (Multidirectional interpolation and Transfinite interpolation)

จากสมการที่ 3.13 เราสามารถใช้สัญลักษณ์ P_ξ แทน $r(\xi_i, \eta_j)$ ได้แก่

$$r(\xi_i, \eta_j) = P_\xi = (1 - \xi_i)r(0, \eta_j) + \xi_i r(1, \eta_j) \quad (3.15)$$

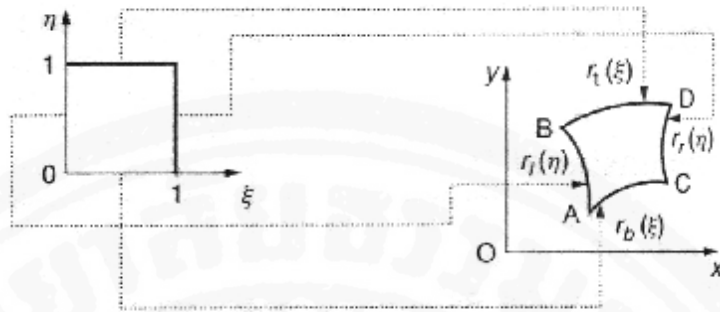
และจากสมการที่ 3.14 เราสามารถใช้สัญลักษณ์ P_η แทน $r(\xi_i, \eta_j)$ ได้แก่

$$r(\xi_i, \eta_j) = P_\eta = (1 - \eta_j)r(\xi_i, 0) + \eta_j r(\xi_i, 1) \quad (3.16)$$

สัญลักษณ์ P_ξ และ P_η เราเรียกว่า Projector ซึ่งเป็นการกำหนดหรือประมาณค่าตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ลงบนฟังก์ชันของเส้นโค้งขอบเขตทั้งสองด้านเพื่อหาความสัมพันธ์ของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างเส้นโค้งขอบเขตทั้งสองเส้น

จากสมการที่ (3.15) และ (3.16) จะเป็นการประมาณค่าระหว่างฟังก์ชันเส้นโค้ง 2 เส้นที่อยู่ตรงข้ามกันแต่สำหรับในกรณีที่เราต้องการประมาณค่าระหว่างฟังก์ชันของเส้นโค้งที่อยู่ตรงข้ามพร้อมกันทั้ง 2 แกน (4 ด้าน) จะสามารถประมาณค่าหาตำแหน่งของกริดที่จุดต่าง ๆ ได้จากความสัมพันธ์ดังนี้

$$\begin{aligned} P_\xi \oplus P_\eta &= P_\xi + P_\eta - P_\xi P_\eta \\ &= (1 - \xi)r(0, \eta) + \xi r(1, \eta) + (1 - \eta)r(\xi, 0) + \eta r(\xi, 1) \\ &\quad - (1 - \xi)(1 - \eta)r(0, 0) - (1 - \xi)\eta r(0, 1) \\ &\quad - (1 - \eta)\xi r(1, 0) - \xi\eta r(1, 1) \end{aligned} \quad (3.17)$$



ภาพที่ 3.9 การแปลงพิกัดของขอบเขตเส้นโค้ง

โดยที่ $P_\xi P_\eta$ ได้แก่

$$\begin{aligned}
 P_\xi(P_\eta(\xi, \eta)) &= P_\xi((1-\eta)r(\xi, 0) + \eta r(\xi, 1)) \\
 &= (1-\xi)[(1-\eta)r(0, 0) + \eta r(0, 1)] + \xi[(1-\eta)r(1, 0) + \eta r(1, 1)] \\
 &= (1-\xi)(1-\eta)r(0, 0) + (1-\xi)\eta r(0, 1) + \xi(1-\eta)r(1, 0) + \xi\eta r(1, 1)
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

จากสมการที่ (3.17) เราเรียกสัญลักษณ์ $P_\xi \oplus P_\eta$ ว่า Boolean sum of the transformations ซึ่งสามารถเขียนให้เข้าใจง่าย โดยเปลี่ยนตัวแปรบางตัวให้อยู่ในรูปของโดเมนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 r(\xi, \eta) &= (1-\xi)r_t(\eta) + \xi r_r(\eta) + (1-\eta)r_b(\xi) + \eta r_t(\xi) - (1-\xi)(1-\eta)r_b(0) \\
 &= -(1-\xi)\eta r_t(0) - (1-\eta)\xi r_b(1) - \xi\eta r_t(1)
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

โดยที่ l, r, b, t มีความหมายคือ left, right, bottom, top

ซึ่งสามารถใช้สมการ (3.19) แยกหาการประมาณค่าระหว่างฟังก์ชันขอบเขตเส้นโค้งที่อยู่ตรงข้ามกันที่ละแกนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta) &= (1-\xi)x_t(\eta) + \xi x_r(\eta) + (1-\eta)x_b(\xi) + \eta x_t(\xi) - (1-\xi)(1-\eta)x_b(0) \\
 &= -(1-\xi)\eta x_t(0) - (1-\eta)\xi x_b(1) - \xi\eta x_t(1)
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
 y(\xi, \eta) &= (1-\xi)y_t(\eta) + \xi y_r(\eta) + (1-\eta)y_b(\xi) + \eta y_t(\xi) - (1-\xi)(1-\eta)y_b(0) \\
 &= -(1-\xi)\eta y_t(0) - (1-\eta)\xi y_b(1) - \xi\eta y_t(1)
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

3.4 ทฤษฎีพื้นฐานและหลักการเบื้องต้นของเทคโนโลยีการทำความร้อนด้วยคลื่นไมโครเวฟ

ในช่วงทศวรรษที่ผ่านมาได้มีการนำคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในช่วงความถี่คลื่นของไมโครเวฟ 0.3 - 300 GHz หรือในช่วงความยาวคลื่น 30 cm. - 0.3 mm. มาใช้เป็นแหล่งพลังงานให้ความร้อนในทางอุตสาหกรรมดังแสดงในเอกสารอ้างอิง ([3-5]-[3-11]) การให้ความร้อนแก่วัตถุด้วยไมโครเวฟเป็นอีกวิธีหนึ่งที่น่าสนใจและไม่เหมือนวิธีการให้ความร้อนแบบเก่าที่ให้ความร้อนจากภายนอกผ่านผิววัตถุรังสีไมโครเวฟมีความลึกในการทะลุทะลวงเท่ากับ 2 cm. ในระหว่างที่รังสีไมโครเวฟผ่านเข้าไปในน้ำ พลังงานของไมโครเวฟจะลดลงโดยจะเปลี่ยนเป็นพลังงานความร้อนภายในน้ำ ซึ่งในการให้ความร้อนด้วยไมโครเวฟนั้นดีกว่าการให้ความร้อนแบบเก่า คือการใช้อากาศร้อนหรือน้ำ ซึ่งจะมีปัญหาเกี่ยวกับคุณภาพของผลผลิตภัณฑ์เนื่องจากความไม่สม่ำเสมอของการกระจายอุณหภูมิและความชื้นภายในผลิตภัณฑ์นั้น

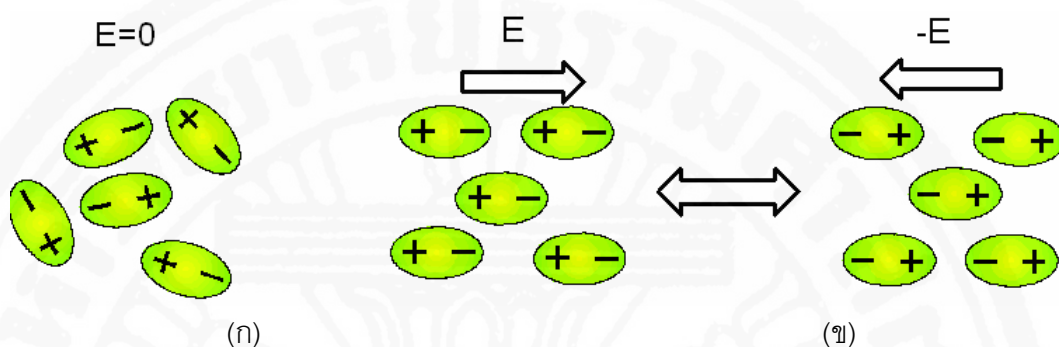
การให้ความร้อนด้วยคลื่นไมโครเวฟจะอาศัยคุณสมบัติของการดูดกลืนพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟภายในผลิตภัณฑ์ ซึ่งผลิตภัณฑ์ที่นำมาผ่านกระบวนการนี้ศัพท์ทางวิศวกรรมที่เกี่ยวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเราเรียกว่าวัสดุไดอิเล็กตริก ซึ่งวัสดุไดอิเล็กตริกหมายถึงวัสดุที่ฉนวนที่มีโครงสร้างพื้นฐานทางจุลภาคมีลักษณะเป็นขั้วทางไฟฟ้าซึ่งอันตรกิริยา (interaction) ระหว่างขั้วและคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าส่งผลทำให้เกิดความร้อนภายในขึ้น (internal heat generation) ดังนั้นผลิตภัณฑ์จะกระจายความร้อนจากภายในออกสู่ผิวนอก ซึ่งหลักการนี้จะทำให้ผิวของผลิตภัณฑ์ไม่เสียหายหรือต่างไปจากเดิมมากนัก เนื่องจากวิธีการนี้จะทำให้เกิดการระเหยของความชื้นภายในผลิตภัณฑ์เป็นไปอย่างรวดเร็วและมีการกระจายตัวของอุณหภูมิสม่ำเสมอ สามารถลดการเกิดรอยร้าวและรอยไหม้ในผลิตภัณฑ์ ซึ่งวิธีการนี้จะสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในกระบวนการทางอุตสาหกรรมอื่น ๆ ต่อไป สำหรับทฤษฎีพื้นฐานสำหรับการวิเคราะห์ใช้ไมโครเวฟเป็นแหล่งพลังงานให้ความร้อน ในทางอุตสาหกรรม

3.4.1 อันตรกิริยาที่เกิดขึ้นระหว่างสนามไฟฟ้ากับ วัสดุไดอิเล็กตริก

เมื่อสารที่เป็นฉนวนไฟฟ้าหรือวัสดุไดอิเล็กตริกเช่น ไม้ กระดาษ พลาสติก ถูกนำเข้าไปในสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โมเลกุลของสารวัสดุไดอิเล็กตริกจะหมุนและเคลื่อนที่หลายล้านครั้ง โดยจะเคลื่อนที่ตามการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้า โดยแสดงดังภาพที่ 3.10

จากภาพที่ 3.10(ก) ภายใน วัสดุไดอิเล็กตริกจะมีขั้วของแต่ละโมเลกุลเรียงตัวอยู่อย่างไม่เป็นระเบียบ ซึ่งขั้วในแต่ละโมเลกุลจะประกอบไปด้วยขั้วบวกและขั้วลบ เมื่อมีสนามไฟฟ้าวิ่ง

ผ่านวัสดุไดอิเล็กตริกทำให้ขั้วในแต่ละโมเลกุลจะเรียงตัวกันอย่างเป็นระเบียบและสลับขั้วตามการเปลี่ยนแปลงของคลื่นซึ่งจากการสลับขั้วไปมาอย่างรวดเร็วของขั้ว ทำให้ความเสียดทานเกิดขึ้นกับโมเลกุลตัวอื่นๆทำให้เกิดพลังงานออกมาในรูปของความร้อนภายในวัสดุไดอิเล็กตริก



ภาพที่ 3.10 อันตรกิริยาระหว่างวัสดุไดอิเล็กตริกและสนามไฟฟ้า

(ก) การเรียงตัวของสภาพเชิงขั้วภายในวัสดุไดอิเล็กตริกเมื่อไม่มีสนามไฟฟ้า

(ข) การเรียงตัวของสภาพเชิงขั้วเมื่อมีสนามไฟฟ้า

หลักการเกิดความร้อนนี้สามารถนำไปอธิบายได้ว่าน้ำภายในเตาไมโครเวฟร้อนขึ้นได้อย่างไร ทั้งนี้เนื่องจากโมเลกุลของน้ำซึ่งมีการกระจายตัวของประจุไม่สมมาตรเกิดโพลาไรเซชันแบบถาวรขึ้น กลับตัวไปมาตามความถี่ของคลื่นไมโครเวฟที่ใช้ (2.45 GHz) เป็นจำนวน 2,450 ล้านรอบต่อวินาทีในหนึ่งรอบคลื่นจะประกอบไปด้วยคลื่นช่วงบวกและคลื่นช่วงลบของสนามไฟฟ้า ดังนั้นโมเลกุลจะหันขั้วบวกไปทางขั้วลบของสนามไฟฟ้า 2,450 ล้านครั้งต่อวินาทีและหันขั้วลบไปทางขั้วบวกของสนามไฟฟ้าอีก 2,450 ล้านครั้งต่อวินาทีที่รวมแล้วโมเลกุลต้องกลับตัวถึง 4,900 ล้านครั้งต่อวินาที ทำให้เกิดการชนเสียดสีเกิดเป็นความร้อนทำให้อุณหภูมิของน้ำสูงขึ้นในที่สุด

โดยทั่วไปความถี่ของคลื่นไมโครเวฟจะวัดในหน่วยเมกะเฮิรตซ์ (MHz) ซึ่งในข้อตกลงนานาชาติว่าด้วยการกำหนดคลื่นความถี่สำหรับความถี่วิทยุ (radio frequency) และการใช้คลื่นไมโครเวฟ (Microwave application) (Jones and Rowley [3-9]) กำหนดความถี่วิทยุไว้ดังนี้

- 1) 13.56 MHz $\pm 0.05\%$ (± 0.00678 MHz.)
- 2) 27.12 MHz $\pm 0.6\%$ (± 0.16272 MHz.)
- 3) 40.68 MHz $\pm 0.05\%$ (± 0.02034 MHz.)

และได้กำหนดความถี่ของคลื่นไมโครเวฟไว้ดังนี้

- 4) 900 MHz (depend on country)

5) 2450 MHz. \pm 50 MHz.

ในปัจจุบันเตาไมโครเวฟที่ใช้ทั่วไปตามครัวเรือนจะใช้ความถี่ที่ 2450 MHz. ซึ่งจะมี ความยาวคลื่นในอากาศเท่ากับ 4.8 นิ้ว (12.192 cm.) ในขณะที่ความถี่เท่ากับ 900 MHz. จะมี ความยาวคลื่นในอากาศประมาณ 13 นิ้ว (33.02 cm.) ส่วนการวัดกำลังงานของคลื่นไมโครเวฟจะ วัดในหน่วยกิโลวัตต์ที่อุณหภูมิห้องและความดันหนึ่งบรรยากาศ ซึ่งคลื่นไมโครเวฟกำลัง 1 กิโลวัตต์สามารถทำให้น้ำจำนวน 2.5 ปอนด์ (1.134 Kg.) ระเหยได้ภายในเวลา 1 ชั่วโมง ปัญหา ของการทำความร้อนด้วยไมโครเวฟเกี่ยวข้องกับโดยตรงกับสนามแม่เหล็กไฟฟ้า การกระจายของ อุณหภูมิ การกระจายของความชื้นรวมทั้งตัวขึ้นทดสอบ (sample) ซึ่งเป็นคุณสมบัติวัสดุไดอิเล็กทริก ดังนั้นการรู้คุณสมบัติของวัสดุไดอิเล็กทริก (dielectric properties) จึงมีความจำเป็นรวมทั้ง การควบคุมสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งเป็นแหล่งพลังงานที่ก่อให้เกิดความร้อนภายในวัสดุไดอิเล็กทริก ความร้อนที่เกิดขึ้นจะส่งผลถึงการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิ ความชื้นและคุณสมบัติของวัสดุไดอิเล็กทริกด้วย

3.4.2 สมการพื้นฐาน (Basic Equation)

สมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าคือสมการแมกเวลล์ (Maxwell curl relation) รูปอนุพันธ์ของสมการแมกเวลล์ (Maxwell's equation) สามารถอธิบาย ในรูปของความเข้มสนามไฟฟ้า (electric field intensity, E) และความเข้มสนามแม่เหล็ก (magnetic field intensity, H) ซึ่งความสัมพันธ์ของสมการแมกเวลล์ (Maxwell's equation) สามารถแสดงได้ดังนี้

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.22)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.23)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = q \quad (3.24)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.25)$$

เมื่อ E และ H คือความเข้มของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กตามลำดับ, J คือ ความหนาแน่นของกระแสไฟฟ้า (current density), D คือความหนาแน่นของฟลักซ์ (flux

density) และ B คือความหนาแน่นของฟลักซ์แม่เหล็ก (magnetic flux density) โดยความสัมพันธ์ระหว่าง J , D และ B กับ E และ H คือ

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.26)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (3.27)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (3.28)$$

โดย σ คือคุณสมบัติการนำไฟฟ้า (electric conductivity), μ คือคุณสมบัติการซึมผ่านของสนามแม่เหล็ก (magnetic permeability) และ ϵ คือค่าคุณสมบัติไดอิเล็กตริก (dielectric permittivity หรือ dielectric constant) แทนสมการ (3.26) ถึง (3.28) ลงในสมการ (3.22) ถึง (3.25) จะได้

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.29)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.30)$$

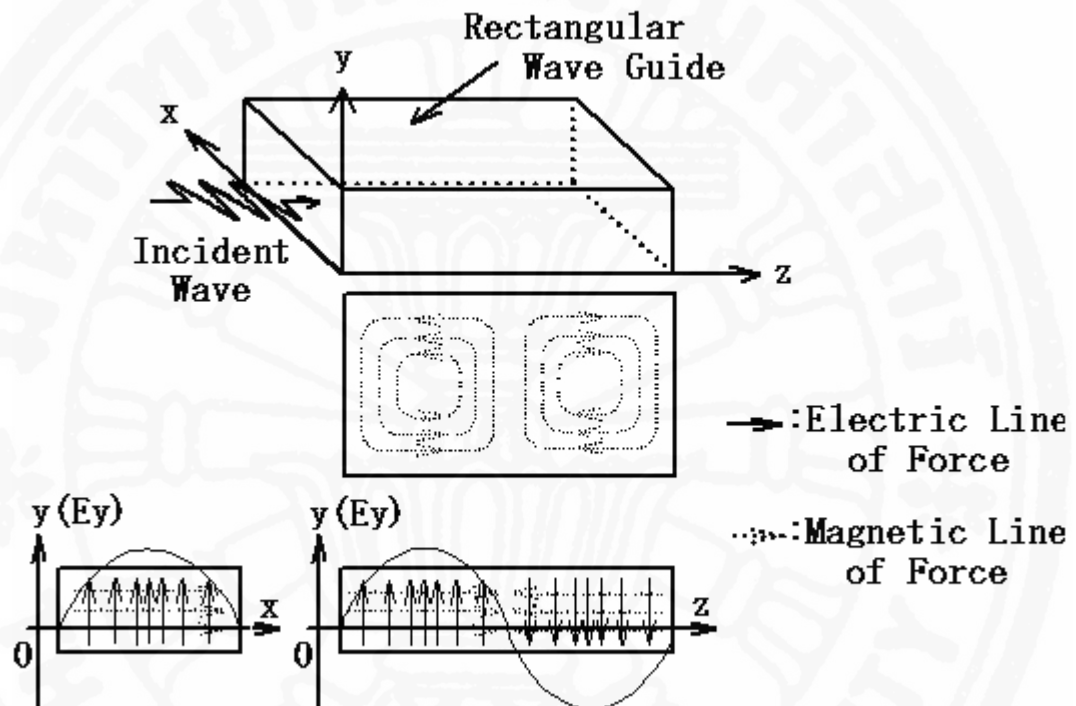
$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{\epsilon} \quad (3.31)$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0 \quad (3.32)$$

สมการ (3.29) และ (3.30) (the curl relation) อ้างอิงมาจากกฎของฟาราเดย์ (Faraday's law) และกฎของแอมแปร์ (Ampere's law) ตามลำดับ สมการ (3.31) และ (3.32) (divergence equations) เป็นผลมาจากกฎของเกาส์ (Gauss's law) the curl relation ในสมการของแมกเวลล์ (Maxwell's equation) ใช้วัดการหมุนของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า สมการที่ (3.29) อธิบายการเปลี่ยนแปลงของสนามแม่เหล็กตามเวลาทำให้เกิดสนามไฟฟ้า สมการที่ (3.31) แสดงถึงความแปรผัน (divergence) ของสนามแม่ไฟฟ้าที่จุดใด ๆ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับสภาพความหนาแน่นของประจุ (position charge density) และสมการที่ (3.32) แสดงถึงการไม่มีแหล่งกำเนิด (source) หรือแหล่งรับ (sink) ของสนามแม่เหล็ก

3.4.3 สมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้า ใน TE₁₀ mode

เพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจเกี่ยวกับสมการพื้นฐานที่ใช้ในการวิเคราะห์สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในระบบใด ๆ ในที่นี้จะยกตัวอย่างสำหรับกรณีคลื่นไมโครเวฟแบบ TE₁₀ mode ดังแสดงในภาพที่ 3.11



ภาพที่ 3.11 คลื่นไมโครเวฟแบบ TE₁₀ โหมด

จากระบบที่พิจารณาในภาพที่ 3.11 เราสามารถกำหนดคุณสมบัติสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแกนต่าง ๆ ดังนี้

$$\begin{aligned} E_x = E_y = H_y = 0 \\ E_y = H_x = H_z \neq 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

เมื่อ x, y และ z หมายถึงเวกเตอร์ในแนวแกน x, y และ z ตามลำดับ เมื่อพิจารณาสมการ (3.29) ตามนิยามของ Curl relation เราสามารถจัดรูปใหม่เป็น

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \bar{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \bar{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \bar{k} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \bar{k} \\ & = -\mu \left(\frac{\partial H_x}{\partial t} \bar{i} + \frac{\partial H_y}{\partial t} \bar{j} + \frac{\partial H_z}{\partial t} \bar{k} \right) \end{aligned} \quad (3.34)$$

แทนสมการ (3.33) ลงในสมการ (3.34) จะได้

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (3.36)$$

และจากนิยามของ Curl relation เราสามารถจัดรูปสมการ (3.30) ใหม่ได้เป็น

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \sigma (E_x \bar{i} + E_y \bar{j} + E_z \bar{k}) + \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \bar{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \bar{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \bar{k} \right)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \bar{i} - \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \bar{k} \\ & = \sigma (E_x \bar{i} + E_y \bar{j} + E_z \bar{k}) + \varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \bar{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \bar{j} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \bar{k} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

แทนสมการ (3.33) ลงในสมการ (3.37) จะได้

$$-\left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) = \sigma E_y + \varepsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (3.38)$$

สมการ (3.35), (3.36) และ (3.37) ใช้สำหรับปัญหาแบบ 2 มิติ สมมติให้สนามแม่เหล็กไฟฟ้าในแนวแกน y สม่ำเสมอ (uniform) และไม่สิ้นสุด (infinite) และสอดคล้องกับนิยามของ TE₁₀ mode ที่

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \quad (3.39)$$

$$\mu = \mu_0 \mu_r \quad (3.40)$$

$$\sigma = 2\pi f \varepsilon \tan \delta \quad (3.41)$$

เมื่อ f คือความถี่ของคลื่นไมโครเวฟ, $\tan \delta$ คือ ค่าสัมประสิทธิ์ลอสแทนเจนท์ (loss tangent coefficient) , ϵ_r และ μ_r คือ relative permittivity หรือ relative dielectric constant และ relative magnetic permeability ตามลำดับ ถ้าพิจารณาจากสนามแม่เหล็กค่า magnetic permeability, μ ของ วัสดุไดอิเล็กตริกที่ใช้ในงานประยุกต์ทางการทำความร้อนด้วยไมโครเวฟ สามารถประมาณได้เท่ากับ μ_0 ในอากาศ โดยทั่วไปคุณสมบัติไดอิเล็กตริกของวัสดุ (Dielectric properties) จะถูกสมมติให้แปรผันตามอุณหภูมิเพียงอย่างเดียวในกรณีของการทำความร้อน (Heating) และการหลอมเหลว (Melting) ด้วยไมโครเวฟ และจะแปรผันตามอุณหภูมิและความชื้น ในกรณีการอบแห้ง (Drying) ด้วยไมโครเวฟ

เพื่อให้สอดคล้องกับแบบจำลองในการวิเคราะห์ตามภาพที่ 3.11 สมการขอบเขต (Boundary Equation) จะอยู่ภายใต้เงื่อนไขดังต่อไปนี้

(ก) ขอบเขตในการพัฒนาเป็นตัวนำยิ่งยวด (Perfectly conduction boundaries)

เงื่อนไขขอบเขต (Boundary conditions) ภายในผนังของท่อนำคลื่นที่อธิบายโดย Faraday's law และ Gauss theorem จะเท่ากับ

$$E_t = 0, H_n = 0 \quad (3.42)$$

เมื่อ subscripts t และ n หมายถึงแกนในแนวสัมผัส (tangential) และตั้งฉาก (normal) ตามลำดับ

(ข) เงื่อนไขขอบเขตความต่อเนื่อง (Continuity boundary condition)

เงื่อนไขขอบเขตตลอดรอยต่อระหว่างวัสดุ เช่น อากาศ กับ วัสดุไดอิเล็กตริกอธิบายโดย Faraday's law และ Gauss theorem

$$\begin{aligned} E_t &= E'_t, H_t = H'_t \\ D_n &= D'_n, B_n = B'_n \end{aligned} \quad (3.43)$$

(ค) เงื่อนไขขอบเขตความดูดซับ (Absorbing boundary condition)

ที่ปลายทั้งสองด้านของท่อนำคลื่น, เงื่อนไขในการดูดซับพลังงานจะใช้เงื่อนไขที่เสนอ โดย Ratanadecho et al. [3-12]

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (3.44)$$

โดยเครื่องหมาย \pm แสดงถึงคลื่นที่เคลื่อนที่ไปข้างหน้าหรือถอยหลัง (forward or backward wave) และ v คือ ความเร็วเฟส (phase velocity) ของคลื่นไมโครเวฟ

(ง) การสั่น (oscillation) ของความเข้มของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าโดยแมกนีตรอน (Magnetron) สามารถอธิบายตามสมการต่อไปนี้

$$E_y = E_{yin} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin(2\pi ft) \quad (3.45)$$

$$H_x = \frac{E_{yin}}{Z_H} \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin(2\pi ft) \quad (3.46)$$

โดย Z_H คือ wave impedance ซึ่งนิยามโดย

$$Z_H = \frac{\lambda_g Z_l}{\lambda_0} = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (3.47)$$

สำหรับ Power flux ซึ่งเกี่ยวกับการแพร่กระจายของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสามารถแสดงได้โดย Poynting vector

$$S = \frac{1}{2} \text{Re}(E \times H^*) \quad (3.48)$$

โดย Poynting theorem สามารถประมาณค่ากำลังป้อน (power input) ของคลื่นไมโครเวฟได้ดังสมการ

$$P_{in} = \int_A S \cdot dA = \frac{A}{4Z_H} E_{yin}^2 \quad (3.49)$$

3.4.4 คุณสมบัติไดอิเล็กตริก (Dielectric properties)

ความรู้เกี่ยวกับคุณลักษณะของคุณสมบัติไดอิเล็กตริกของวัสดุไดอิเล็กตริกกระบวนการของไมโครเวฟมีความจำเป็นเพื่อใช้ในการออกแบบอุปกรณ์ใช้งานด้านไมโครเวฟได้อย่างเหมาะสม การแผ่รังสีเป็นรูปแบบหนึ่งของพลังงานที่สามารถทะลุผ่านที่ว่าง อากาศ วัสดุได้ ไมโครเวฟนั้นประกอบไปด้วยสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าเช่นเดียวกับแสง (การแผ่รังสีของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า) แต่จะแตกต่างจากแสงตรงที่ความถี่ของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าต่างกัน

ในการที่จะควบคุมความร้อนของวัสดุไดอิเล็กตริกอันเนื่องมาจากสนามแม่เหล็กไฟฟ้าหรือไมโครเวฟ เราจำเป็นต้องทราบคุณสมบัติการดูดซับพลังงานคลื่นไมโครเวฟของวัสดุไดอิเล็กตริกโดยจะเริ่มจากการกำหนด dielectric permittivity ของวัสดุไดอิเล็กตริก

$$\epsilon = \epsilon' + j\epsilon'' = \epsilon_0 (\epsilon_r' + j\epsilon_r'') = \epsilon_0 \left(\epsilon_r' + j \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \right) \quad (3.50)$$

เมื่อ $j = \sqrt{-1}$, ϵ คือ complex dielectric permittivity (โดยทั่วไปเรียก dielectric constant) และเป็นคุณสมบัติของวัสดุใด ๆ ที่อธิบายถึงความสามารถในการดูดซับ ส่งผ่าน และสะท้อนพลังงานจากส่วนที่เป็นสนามไฟฟ้าของคลื่นไมโครเวฟ โดย $\epsilon_0 = 8.86(10^{-12} \text{ F/m})$ คือ permittivity ของที่ว่าง (free space), ϵ_r' คือส่วนที่เป็นจำนวนจริงของ relative permittivity หรือ relative dielectric constant และอธิบายความสามารถในการสะท้อนกลับคลื่นไมโครเวฟจากผิวของชิ้นทดสอบ (sample) หรือ วัสดุไดอิเล็กตริกและบอกว่าคลื่นไมโครเวฟที่ส่งผ่านวัสดุไดอิเล็กตริกมีมากเท่าไร ϵ_r'' คือส่วนจินตภาพของคุณสมบัติไดอิเล็กตริก โดยทั่วไปเรียก Dielectric loss factor ซึ่งจะบอกถึงความสูญเสียพลังงานภายในชิ้นทดสอบหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือวัสดุสามารถดูดซับพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟที่ผ่านเข้ามาแล้วสามารถเปลี่ยนพลังงานความร้อนได้เท่าไร และ σ คือความสามารถในการนำไฟฟ้า (Electric conductivity) ความสัมพันธ์ระหว่าง Dielectric loss factor กับค่าการนำไฟฟ้าสามารถแสดงได้ดังนี้

$$\epsilon_r'' = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \quad (3.51)$$

เมื่อ ω คือ ความเร็วเชิงมุมของคลื่นไมโครเวฟ σ คือความสามารถในการนำไฟฟ้า (Electric conductivity) และ ϵ_r'' แสดงถึงความสูญเสียเชิงกล โดยสามารถยุบรวมกันเป็นตัวแปรใหม่เพื่อความสะดวกเรียกว่าค่าสัมประสิทธิ์ลอสมแทนเจนท์ (loss tangent coefficient, $\tan \delta$) :

$$\tan \delta = \frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} = \frac{\sigma}{\omega \epsilon_r' \epsilon_0} \quad (3.52)$$

ค่าสัมประสิทธิ์ลอสแทนเจนท์ ($\tan \delta$) เป็นอีกตัวแปรที่สำคัญตัวหนึ่งที่ใช้อธิบายความสามารถในการผลิตความร้อนของวัสดุไดอิเล็กตริกในขณะที่ดูดกลืนพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟ Von Hippel [3-10] ได้รวบรวมคุณสมบัติไดอิเล็กตริกสำหรับวัสดุต่าง ๆ (เช่น คริสตัล เซรามิก แก้ว น้ำ พลาสติก ยางมะตอย ซีเมนต์ และ ไม้ เป็นต้น) ในช่วงความถี่และอุณหภูมิ $100 < f < 10^{10}$ และ $12 < T < 200$ °C ตามลำดับ

3.4.5 ความยาวคลื่นและความลึกในการทะลุทะลวง (Wavelength and penetration dept)

ค่าไดอิเล็กตริกคอนสแตนต์และค่าสัมประสิทธิ์ลอสแทนเจนท์สามารถใช้ประมาณความยาวคลื่นภายในวัสดุไดอิเล็กตริกและความลึกในการทะลุทะลวงได้ตามที่อ้างอิงจากภาพที่ 3.11 คลื่นไมโครเวฟ TE_{10} mode ที่ความถี่ 2.45 GHz ผ่านเข้าไปในชิ้นงานรูปทรงสี่เหลี่ยมที่มีขนาดภายในเท่ากับ $a \times b$, ความยาวคลื่นในชิ้นงานรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้าสามารถหาได้จาก

$$\lambda_x = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 \cdot \lambda_0}{2a}\right)^2 - \left(\frac{0 \cdot \lambda_0}{2b}\right)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 \cdot \lambda_0}{2a}\right)^2}} \quad (3.53)$$

เมื่อความยาวคลื่นในสุญญากาศ $\lambda_0 = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ความยาวคลื่นในวัสดุไดอิเล็กตริกสามารถคำนวณได้จาก (Barrington et al. [3 - 13])

$$\lambda_{mg} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi f}{v} \sqrt{\frac{\epsilon_r' \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'}\right)^2} + 1 \right)}{2}}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi f}{v} \sqrt{\frac{\epsilon_r' \left(\sqrt{1 + (\tan \delta)^2} + 1 \right)}{2}}} \quad (3.54)$$

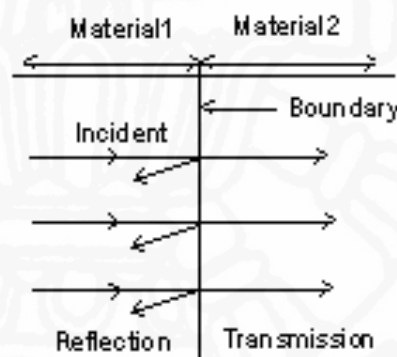
ความลึกในการทะลุทะลวงของคลื่นหรือระยะทางที่สนามไฟฟ้าทะลุเข้าไปได้สามารถหาได้จาก

$$D_p = \frac{1}{\frac{2\pi f}{v} \sqrt{\frac{\epsilon_r' \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon_r''}{\epsilon_r'} \right)^2} - 1 \right)}{2}}} = \frac{1}{\frac{2\pi f}{v} \sqrt{\frac{\epsilon_r' \left(\sqrt{1 + (\tan \delta)^2} - 1 \right)}{2}}} \quad (3.55)$$

พบว่าเมื่อค่าไดอิเล็กตริกคอนสแตนต์และประสิทธิภาพลอสแทนเจนท์เปลี่ยน ค่าความลึกในการทะลุทะลวงและสนามไฟฟ้าภายในวัสดุไดอิเล็กตริกก็จะเปลี่ยนด้วย

3.4.6 การสะท้อน, การส่งผ่าน และการดูดซับ (Reflect, transmit and absorb)

คลื่นไมโครเวฟมีความหมายคล้ายคลึงกับแสงหลายประการ คลื่นไมโครเวฟสามารถเป็นรังสีตกกระทบสามารถทะลุผ่านช่องว่างและสามารถและดูดซับโดยวัสดุไดอิเล็กตริกได้ (ดูภาพที่ 3.12) และความสามารถทั้งสามอย่างนั้นสัมพันธ์กับคุณสมบัติไดอิเล็กตริกของชั้นทดสอบด้วย



ภาพที่ 3.12 แสดงรังสีการตกกระทบและการดูดซับโดย วัสดุไดอิเล็กตริก

คลื่นไมโครเวฟจะถูกสะท้อนจากรอยต่อระหว่างวัสดุไดอิเล็กตริก 2 ชนิด (เช่น รอยต่อระหว่างชั้นทดสอบกับอากาศ) พลังงานของคลื่นไมโครเวฟที่ถูกสะท้อนกลับสามารถคำนวณได้จากค่า dielectric constant ของชั้นทดสอบตามสมการต่อไปนี้

$$P_{reflect} \cong \left(\frac{\sqrt{\epsilon} - 1}{\sqrt{\epsilon} + 1} \right)^2 \quad (3.56)$$

นอกจากนี้สมการนี้ใช้ได้กับขอสสมมติฐานที่ว่าผิวหน้าของวัตถุราบเรียบและคลื่นไมโครเวฟตกกระทบตั้งฉากกับผิวหน้าของชั้นทดสอบ คลื่นไมโครเวฟสามารถทะลุผ่าน วัสดุไดอิเล็กตริก เช่น

แก้วและพลาสติกได้โดยไม่มีการดูดซับและสะท้อน พลังงานของคลื่นไมโครเวฟที่ทะลุผ่านผิวรอยต่อระหว่าง วัสดุไดอิเล็กตริก 2 ชนิดสามารถคำนวณได้โดยสมการต่อไปนี้

$$P_{\text{Transmit}} = 1 - P_{\text{reflect}} \quad (3.57)$$

คลื่นไมโครเวฟสามารถทะลุผ่านวัสดุไดอิเล็กตริกสามารถถูกดูดซับและเปลี่ยนความร้อนได้เรียกว่าการกำเนิดปริมาณความร้อนภายในต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (density of microwave power absorbed) Q โดยปริมาณความร้อนภายในต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรนั้นสัมพันธ์กับสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กภายในวัสดุไดอิเล็กตริก ดังสมการต่อไปนี้ (Metaxas [3 - 14])

$$Q = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' |E|^2 + \omega \mu_0 \mu_r'' |H|^2 \quad (3.58)$$

เมื่อ E คือสนามแม่เหล็กไฟฟ้าซึ่งจะเปลี่ยนแปลงตามตำแหน่ง H คือสนามแม่เหล็กซึ่งเป็นปริมาณเชิงซ้อน (complementary complex patterns) อย่างไรก็ตาม, วัสดุไดอิเล็กตริก ไม่มีผลต่อ magnetic polarization เมื่ออยู่ในสนามแม่เหล็ก ดังนั้นจึงไม่มีสนามแม่เหล็กสูญเสียและสามารถละเทอมที่สองของสมการด้านขวามือของสมการ (3-58) ได้

$$Q = \sigma |E|^2 = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' |E|^2 \quad (3.59)$$

ในระหว่างการแผ่รังสีไมโครเวฟ, การเปลี่ยนแปลงเฟสของสนามไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยเวลาจะเร็วมาก ดังนั้นค่าเฉลี่ยรากที่สองของความเข้มของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะถูกใช้ในการประมาณค่าพลังงานไมโครเวฟที่ถูกดูดซับโดยวัสดุไดอิเล็กตริกเมื่อสมมติให้ไม่มีการสูญเสียสนามแม่เหล็ก ค่าของการกำเนิดปริมาณความร้อนภายในต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร (local volumetric heat generation) หรือความหนาแน่นของพลังงานไมโครเวฟที่ถูกดูดซับ (density of microwave power absorbed) สามารถแสดงดังสมการต่อไปนี้ (Ratanadecho et al.[3 - 15])

$$Q = \omega \epsilon_0 \epsilon_r'' E^2 = 2\pi \cdot f \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r (\tan \delta) E^2 \quad (3.60)$$

จากสมการด้านบนค่าพลังงานไมโครเวฟที่ถูกดูดซับจะแปรผันตรงกับความถี่ของสนามไฟฟ้า ค่า dielectric loss factor และค่ากำลังสองของสนามไฟฟ้าแต่ถึงกระนั้นถ้าค่า

dielectric constant และค่าค่าสัมประสิทธิ์ลอสแทนเจนท์ของฉนวนทดสอบมีค่ามากจะส่งผลให้การดูดซับพลังงานจากไมโครเวฟและปริมาณความร้อนเกิดขึ้นมากขึ้นตามแต่ถ้าค่า dielectric constant และค่าค่าสัมประสิทธิ์ลอสแทนเจนท์ของฉนวนทดสอบมีค่าน้อย, คลื่นไมโครเวฟจะทะลุผ่านฉนวนทดสอบโดยไม่เกิดความร้อนขึ้น อย่างไรก็ตาม คุณสมบัติที่สูงขึ้นอาจจะขึ้นกับตัวแปรอื่น ๆ เช่น ค่าความจุความร้อนจำเพาะ (specific heat) คุณลักษณะของฉนวนทดสอบและขนาดของฉนวนทดสอบ

สมการ (3.60) มีความสำคัญในการศึกษาความสามารถในการดูดซับพลังงานจากคลื่นไมโครเวฟของวัสดุไดอิเล็กตริกเมื่ออยู่ในสนามไฟฟ้าที่ความถี่สูง อย่างไรก็ตามปฏิกิริยาระหว่างสนามแม่เหล็กไฟฟ้าและ วัสดุไดอิเล็กตริกก็ส่งผลต่อคุณสมบัติไดอิเล็กตริกของวัสดุนั้นด้วยหรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือคุณลักษณะของคุณสมบัติไดอิเล็กตริกขึ้นอยู่กับการนำไมโครเวฟไปประยุกต์ใช้งานในกระบวนการต่าง ๆ เช่น การทำความร้อน (heating) การอบแห้ง (drying) หรือการหลอมเหลว (melting) เป็นต้น

สำนักหอสมุด

3.5 ทฤษฎีพื้นฐานและหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) ร่วมกับ ระเบียบวิธีซิมเปิ้ล อัลกอริทึม (Simple Algorithms)

3.5.1 ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method)

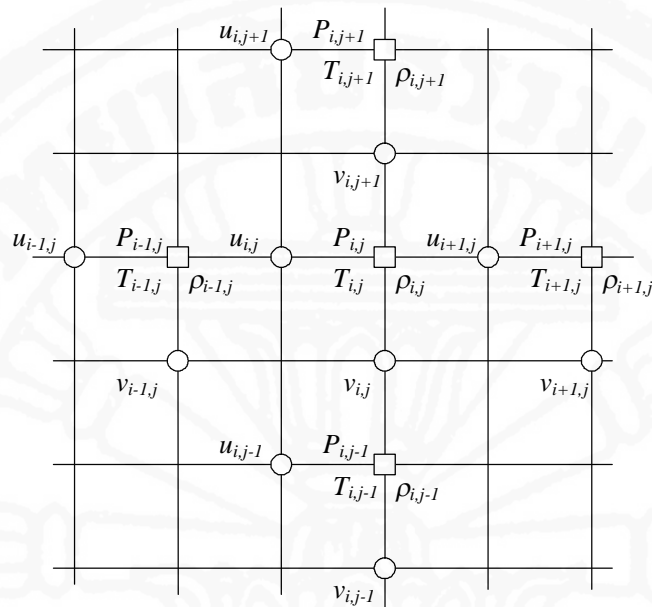
ปัจจุบันการศึกษาและวิเคราะห์ปัญหาทางด้านวิศวกรรมศาสตร์และวิทยาศาสตร์ได้มีการนำความรู้ความเข้าใจเกี่ยวกับระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods) มาผสมผสานกับความสามารถในการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ และความรู้พื้นฐานทางด้านภาษาคอมพิวเตอร์ มาใช้ในการวิเคราะห์หาผลเฉลยของปัญหาทางวิศวกรรมศาสตร์ได้อย่างรวดเร็วทำให้การจำลองแบบเชิงตัวเลขได้รับความนิยมเป็นอย่างมาก เนื่องจากสามารถพยากรณ์ผลเฉลยของปัญหาได้อย่างแม่นยำเพียงพอในการใช้งาน รวมทั้งสามารถประหยัดเวลาและค่าใช้จ่ายกว่าการทำการทดลอง

ระเบียบวิธีเชิงตัวเลข (Numerical methods) ที่ใช้ในปัจจุบันมีอยู่หลายวิธี เช่น ระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ (finite element method) และระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) เป็นต้น ซึ่งระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (finite volume method) เป็นระเบียบวิธีที่พัฒนามาจากระเบียบวิธีผลต่างสืบเนื่อง (finite difference method) โดยหลังจากการแบ่งขอบเขตของปัญหาเป็นปริมาตรย่อย ๆ แล้วจะทำการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์ของปัญหาตลอดปริมาตรควบคุม (Control volume) นั้น ซึ่งให้ความหมายทางกายภาพที่ชัดเจนหากจะเปรียบเทียบกับระเบียบวิธีไฟไนต์เอลิเมนต์ อาจกล่าวได้ว่าระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มนี้จะเสมือนแทนค่าฟังก์ชันประมาณแบบขั้นบันได (stepwise) หรือแบบเชิงเส้น (linear piecewise) แทนรูปแบบทั่วไปอยู่ในรูปแบบจุด (point form) การประมาณตัวแบบทางคณิตศาสตร์ที่มีความซับซ้อนจึงมีความง่ายกว่าทำให้เป็นที่นิยมในการคำนวณพลศาสตร์ของไหล (Computation fluid dynamics) ส่วนข้อเสียคือมีข้อจำกัดในการแก้ปัญหาที่มีรูปร่างซับซ้อน (Voller et al. [3-16]) แต่อย่างไรก็ตามกำลังได้รับการปรับปรุงและพัฒนาขึ้นเป็นลำดับ

เมื่อเปรียบเทียบการจำลองแบบด้วยระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มและไฟไนต์เอลิเมนต์ที่เทียบเท่ากันจะพบว่าข้อดีของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม คือ ระบบสมการมีความซับซ้อนน้อยกว่า (Voller et al., 1990; Idelsohn and Onate, 1994) และแสดงความหมายทางกายภาพได้ชัดเจนว่า

ในบทนี้จะแสดงการประยุกต์ใช้ระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม (Finite Volume Method) ซึ่งเป็นระเบียบวิธีเชิงตัวเลขที่อาศัยการอินทิเกรตสมการอนุพันธ์บนปริมาตรควบคุม (Control volume) โดยแบ่งขอบเขตของปัญหาที่สนใจออกเป็นปริมาตรควบคุมย่อย ๆ จำนวนมากแต่ละ

ปริมาตรควบคุมจะล้อมรอบโหนด (Node) ซึ่งเป็นตำแหน่งที่แสดงค่าเฉลี่ยของปริมาณต่าง ๆ ในปริมาตรควบคุมนั้น ซึ่งจะได้สมการพีชคณิตของแต่ละปริมาตรควบคุมที่มีตัวแปรเป็นค่าของปริมาณใด ๆ บนโหนดในปริมาตรควบคุมนั้นและปริมาตรควบคุมรอบข้างในการแก้ไขปัญหาดังนี้



ภาพที่ 3.13 แสดงลักษณะของปริมาตรควบคุมของระบบที่พิจารณาโดยอาศัยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม

เมื่อพิจารณาถึงกลุ่มของสมการที่เกี่ยวข้องกับปรากฏการณ์การการถ่ายเทความร้อนทั้งในกรณีการนำความร้อนและแบบการพาความร้อนนั้นจะพบว่าสมการที่เกี่ยวข้องทั้งหมดที่ต้องอาศัยหลักการของระเบียบวิธีดังกล่าว ดังนี้

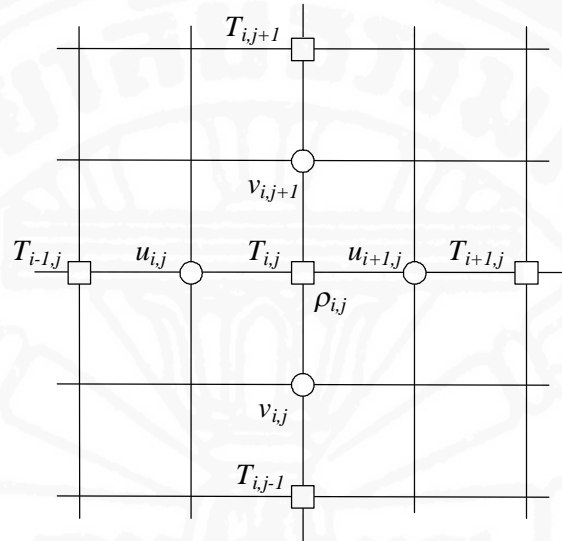
- 1.) สมการการถ่ายเทความร้อน (Heat equation)

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + \frac{\partial(uT_j)}{\partial x} + \frac{\partial(vT_j)}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} \right)$$

(3.61)

โดยที่ $a = k / \rho \cdot c_p$

เมื่อพิจารณาจากสมการข้างต้นแล้วเราจะสามารถทำการประยุกต์ (Discretization) สมการพื้นฐานข้างต้นให้อยู่ในรูปแบบของนิวมเมอริคัลโดยอาศัยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ได้ดังนี้



ภาพที่ 3.14 แสดงลักษณะของปริมาตรควบคุมของระบบที่พิจารณาโดยอาศัยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มในกรณีที่พิจารณาสมการการถ่ายเทความร้อน (Heat Equation)

จากสมการการถ่ายเทความร้อนสำหรับการวิเคราะห์กระบวนการทำละลายโดยพิจารณาการพาความร้อน

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + \frac{\partial(uT_j)}{\partial x} + \frac{\partial(vT_j)}{\partial z} = a \left(\frac{\partial^2 T_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} \right)$$

(3.62)

ชำนาญการหอสมุด

เมื่อทำการพิจารณาที่ละพจน์ของสมการ จะได้

พจน์ที่ 1

$$\iint \frac{\partial T}{\partial t} dx dz = \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta z \quad (3.63)$$

พจน์ที่ 2

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial x}(uT) dx dz &= \Delta z \int \frac{\partial}{\partial x}(uT) dx = \Delta z \left\{ (uT)_{i+1/2,j} - (uT)_{i-1/2,j} \right\} \\ &= \Delta z \left\{ u_{i+1,j} \frac{T_{i,j} + T_{i+1,j}}{2} - u_{i,j} \frac{T_{i-1,j} + T_{i,j}}{2} \right\} \\ \therefore \iint \frac{\partial}{\partial x}(uT) dx dz &= \Delta x \Delta z \left\{ u_{i+1,j} \frac{T_{i,j} + T_{i+1,j}}{2\Delta x} - u_{i,j} \frac{T_{i-1,j} + T_{i,j}}{2\Delta x} \right\} \end{aligned} \quad (3.64)$$

พจน์ที่ 3

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial y}(vT) dx dz &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y}(vT) dy = \Delta x \left\{ (vT)_{i,j+1/2} - (vT)_{i,j-1/2} \right\} \\ &= \Delta x \left\{ v_{i,j+1} \frac{T_{i,j} + T_{i,j+1}}{2} - v_{i,j} \frac{T_{i,j-1} + T_{i,j}}{2} \right\} \\ \therefore \iint \frac{\partial}{\partial y}(vT) dx dz &= \Delta x \Delta z \left\{ v_{i,j+1} \frac{T_{i,j} + T_{i,j+1}}{2\Delta z} - v_{i,j} \frac{T_{i,j-1} + T_{i,j}}{2\Delta z} \right\} \end{aligned} \quad (3.65)$$

พจน์ที่ 4

$$\begin{aligned}
 a \cdot \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dz &= a \cdot \Delta z \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx = a \cdot \Delta z \left\{ \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} - \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j} \right\} \\
 &= a \cdot \Delta z \left\{ \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x} \right\} \\
 \therefore a \cdot \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dz &= a \cdot \Delta x \Delta z \left\{ \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j} - T_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.66}$$

พจน์ที่ 5

$$\begin{aligned}
 a \cdot \iint \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz &= a \cdot \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dy = a \cdot \Delta x \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,j+1/2} - \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{i,j-1/2} \right\} \\
 &= a \cdot \Delta x \left\{ \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta z} - \frac{(T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta z} \right\} \\
 \therefore a \cdot \iint \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dz &= a \cdot \Delta x \Delta z \left\{ \frac{(T_{i,j+1} - T_{i,j})}{\Delta z^2} - \frac{(T_{i,j} - T_{i,j-1})}{\Delta z^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.67}$$

เมื่อทำการพิจารณาพจน์ที่เกี่ยวข้องทั้ง 5 พจน์แล้วจะทำให้เราได้สมการการถ่ายเทความร้อนที่อยู่
ในรูปแบบพื้นฐานของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ดังต่อไปนี้

แทนค่าพจน์ที่ (3.63) - (3.67) ลงในสมการ (3.62) จะได้

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta z + \Delta x \Delta z \left\{ u_{i+1,j} \frac{T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} - u_{i,j} \frac{T_{i-1,j}^{n+1} + T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right\} + \Delta x \Delta z \left\{ v_{i,j+1} \frac{T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta z} - v_{i,j} \frac{T_{i,j-1}^{n+1} + T_{i,j}^{n+1}}{2\Delta z} \right\} \\
 = a \cdot \Delta x \Delta z \left\{ \frac{T_{i+1,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right\} + a \cdot \Delta x \Delta z \left\{ \frac{(T_{i,j+1}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1})}{\Delta z^2} - \frac{(T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta z^2} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

โดยสามารถจัดรูปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}}{\Delta z} - \frac{v_{i,j}}{\Delta z} + \frac{2 \cdot a}{\Delta x^2} + \frac{2 \cdot a}{\Delta z^2} \right) T_{i,j}^{n+1} \\
 & = \left(\frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1,j}}{\Delta x} \right) T_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{a}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j}}{\Delta x} \right) T_{i-1,j}^{n+1} \\
 & \quad + \left(\frac{a}{\Delta z^2} - \frac{v_{i,j+1}}{\Delta z} \right) T_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{a}{\Delta z^2} + \frac{v_{i,j}}{\Delta z} \right) T_{i,j-1}^{n+1} + \frac{T_{i,j}^n}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
 t_0 &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{u_{i+1,j}}{\Delta x} - \frac{u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}}{\Delta z} - \frac{v_{i,j}}{\Delta z} + \frac{2 \cdot a}{\Delta x^2} + \frac{2 \cdot a}{\Delta z^2} \\
 t_1 &= \frac{a}{\Delta x^2} - \frac{u_{i+1,j}}{\Delta x} \\
 t_2 &= \frac{a}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j}}{\Delta x} \\
 t_3 &= \frac{a}{\Delta z^2} - \frac{v_{i,j+1}}{\Delta z} \\
 t_4 &= \frac{a}{\Delta z^2} + \frac{v_{i,j}}{\Delta z} \\
 t_5 &= \frac{T_{i,j}^n}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้สมการพลังงานในรูปแบบที่นำไปสู่กระบวนการซิมเปิ้ลอัลกอริทึม ดังนี้

$$T_{i,j} = (t_1 \cdot T_{i+1,j} + t_2 \cdot T_{i-1,j} + t_3 \cdot T_{i,j+1} + t_4 \cdot T_{i,j-1} + t_5) / t_0 \tag{3.70}$$

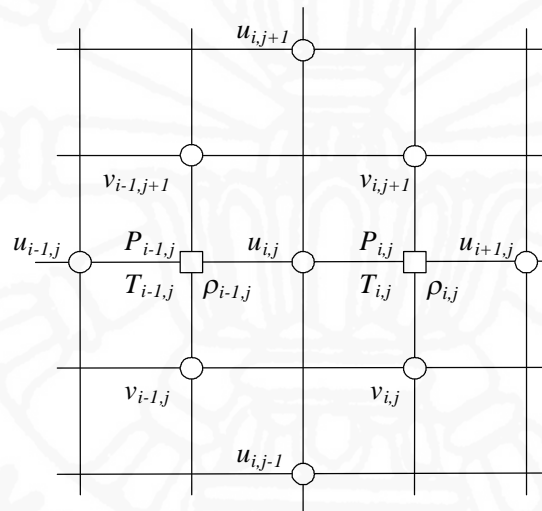
2.) สมการโมเมนตัม (Momentum Equations)

2.1) สมการโมเมนตัมในทิศทางแกน x (x- Direction momentum equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial(\rho u \cdot u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot u)}{\partial z} \right\} = \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} \right] - \frac{\partial p}{\partial x}$$

(3.71)

เมื่อพิจารณาจากสมการข้างต้นแล้วเราจะสามารถทำการประยุกต์ (Discretization) สมการพื้นฐานข้างต้นให้อยู่ในรูปแบบของนิวเมอริกัล โดยอาศัยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่ม ได้ดังนี้



ภาพที่ 3.15 แสดงลักษณะของปริมาตรควบคุมของระบบที่พิจารณาโดยอาศัยหลักการของระเบียบวิธีไฟไนต์วอลุ่มในกรณีที่พิจารณาสมการโมเมนตัม (Momentum Equation)

จากสมการโมเมนตัมในทิศทางแกน x (x-Momentum Equation) เมื่อทำการพิจารณาที่ละพจน์ของสมการ จะได้

พจน์ที่ 1

$$\iint \frac{\partial u}{\partial t} dx dz = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta z \quad (3.72)$$

พจน์ที่ 2

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot u) dx dz &= \Delta z \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot u) dx = \Delta z \{ (\rho u \cdot u)_{i+1/2,j} - (\rho u \cdot u)_{i-1/2,j} \} \\ &= \rho \Delta z \left\{ \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} u_{i+1/2,j} - \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} u_{i-1/2,j} \right\} \end{aligned}$$

โดยที่กำหนดให้

$$k_{ur} = \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2}$$

$$k_{ul} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2}$$

$$\therefore \iint \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot u) dx dz = \rho \cdot \left(k_{ur} \frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2 \Delta x} - k_{ul} \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2 \Delta x} \right) \Delta x \Delta z \quad (3.73)$$

พจน์ที่ 3

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial z} (\rho v \cdot u) dx dz &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial z} (\rho v \cdot u) dz = \Delta x \{ (\rho v \cdot u)_{i,j+1/2} - (\rho v \cdot u)_{i,j-1/2} \} \\ &= \rho \Delta x \left\{ \frac{v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}}{2} u_{i,j+1/2} - \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} u_{i,j-1/2} \right\} \end{aligned}$$

โดยที่กำหนดให้

$$k_{uu} = \frac{v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}}{2}$$

$$k_{ud} = \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2}$$

$$\therefore \iint \frac{\partial}{\partial z} (\rho v \cdot u) dx dz = \rho \left(k_{uu} \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2 \Delta z} - k_{ud} \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2 \Delta z} \right) \Delta x \Delta z \quad (3.74)$$

พจน์ที่ 4

$$\begin{aligned}
 \mu \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dz &= \mu \cdot \Delta z \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = \mu \cdot \Delta z \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j} \right\} \\
 &= \mu \cdot \Delta z \left\{ \frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})}{\Delta x} - \frac{(u_{i,j} - u_{i-1,j})}{\Delta x} \right\} \\
 \therefore \mu \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dz &= \mu \cdot \left\{ \frac{(u_{i+1,j} - u_{i,j})}{\Delta x^2} - \frac{(u_{i,j} - u_{i-1,j})}{\Delta x^2} \right\} \Delta x \Delta z
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

พจน์ที่ 5

$$\begin{aligned}
 \mu \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dz &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \mu \cdot \Delta x \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{i,j+1/2} - \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{i,j-1/2} \right\} \\
 &= \mu \cdot \Delta x \left\{ \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{\Delta z} - \frac{(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{\Delta z} \right\} \\
 \therefore \mu \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dx dz &= \mu \cdot \left\{ \frac{(u_{i,j+1} - u_{i,j})}{\Delta z^2} - \frac{(u_{i,j} - u_{i,j-1})}{\Delta z^2} \right\} \Delta x \Delta z
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

พจน์ที่ 6

$$\begin{aligned}
 \therefore \iint \frac{\partial p}{\partial x} dx dz &= \Delta z \int \frac{\partial p}{\partial x} dx = \Delta z (p_{i,j} - p_{i-1,j}) \\
 &= \frac{(p_{i,j} - p_{i-1,j})}{\Delta x} \Delta x \Delta z
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

แทนค่าพจน์ตัวแปร (3.72) - (3.77) ลงใน (3.71) จะได้

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta z + \rho \cdot \left(k_{ur} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} - k_{ul} \frac{u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \Delta x \Delta z \\
 & + \rho \left(k_{uu} \frac{u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta z} - k_{ud} \frac{u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j}^{n+1}}{2\Delta z} \right) \Delta x \Delta z = \mu \cdot \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{(u_{i,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x^2} \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \mu \cdot \left\{ \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1})}{\Delta z^2} - \frac{(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta z^2} \right\} \Delta x \Delta z \\
 & + \frac{\left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i-1,j}^*)^n \right)}{\Delta x} \Delta x \Delta z.
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

โดยสามารถจัดรูปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} + \frac{2\mu}{\Delta z^2} \right) u_{i,j}^{n+1} & = \left(\frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{\rho k_{ur}}{2\Delta x} \right) u_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{\rho k_{ul}}{2\Delta x} \right) u_{i-1,j}^{n+1} \\
 & + \left(\frac{\mu}{\Delta z^2} - \frac{\rho k_{uu}}{2\Delta z} \right) u_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\Delta z^2} - \frac{\rho k_{ud}}{2\Delta z} \right) u_{i,j-1}^{n+1} + \frac{\left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i-1,j}^*)^n \right)}{\Delta x} \\
 & + \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t}
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned}
 a_0 & = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} + \frac{2\mu}{\Delta z^2} \\
 a_1 & = \frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{\rho k_{ur}}{2\Delta x} \\
 a_2 & = \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{\rho k_{ul}}{2\Delta x} \\
 a_3 & = \frac{\mu}{\Delta z^2} - \frac{\rho k_{uu}}{2\Delta z} \\
 a_4 & = \frac{\mu}{\Delta z^2} - \frac{\rho k_{ud}}{2\Delta z} \\
 A_e & = \frac{1}{\Delta x} \\
 b_e & = \frac{u_{i,j}^n}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้สมการโมเมนตัมในทิศทางแกน x ในรูปแบบที่นำไปสู่กระบวนการซิมเปิลอัลกอริทึม
ดังนี้

$$u_{i,j}^{n+1} = \left(a_1 \cdot u_{i+1,j}^{n+1} + a_2 \cdot u_{i-1,j}^{n+1} + a_3 \cdot u_{i,j+1}^{n+1} + a_4 \cdot u_{i,j-1}^{n+1} + A_e \left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i-1,j}^*)^n \right) + b_e \right) / a_0 \quad (3.80)$$

โดยที่

$$u_{i,j}^{n+1} = (u_{i,j}^*)^n + u_{i,j} \quad (3.81)$$

2.2) สมการโมเมนตัมในทิศทางแกน z (z- Direction momentum equation)

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial(\rho u \cdot v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v \cdot v)}{\partial z} \right\} = \mu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g \quad (3.82)$$

จากสมการโมเมนตัมในทิศทางแกน z (z-Momentum Equation) เมื่อทำการพิจารณาที่ละพจน์
ของสมการ จะได้

พจน์ที่ 1

$$\iint \frac{\partial v}{\partial t} dx dz = \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta z \quad (3.83)$$

พจน์ที่ 2

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot v) dx dz &= \Delta z \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot v) dx = \Delta z \left\{ (\rho u \cdot v)_{i+1/2,j} - (\rho u \cdot v)_{i-1/2,j} \right\} \\ &= \rho \Delta z \left\{ \frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2} v_{i+1/2,j} - \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2} v_{i-1/2,j} \right\} \end{aligned}$$

โดยที่กำหนดให้

$$k_{vr} = \frac{u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{2}$$

$$k_{vl} = \frac{u_{i,j} + u_{i,j-1}}{2}$$

$$\therefore \iint \frac{\partial}{\partial x} (\rho u \cdot v) dx dy = \rho \cdot \left(k_{vr} \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2 \Delta x} - k_{vl} \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2 \Delta x} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.84)$$

พจน์ที่ 3

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial}{\partial z}(\rho v \cdot v) dx dz &= \Delta x \int \frac{\partial}{\partial z}(\rho v \cdot v) dz = \Delta x \{(\rho v \cdot v)_{i,j+1/2} - (\rho v \cdot v)_{i,j-1/2}\} \\ &= \rho \Delta x \left\{ \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} v_{i,j+1/2} - \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2} v_{i,j-1/2} \right\} \end{aligned}$$

โดยที่ที่กำหนดให้

$$k_{vu} = \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2}$$

$$k_{vd} = \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2}$$

$$\therefore \iint \frac{\partial}{\partial z}(\rho v \cdot v) dx dz = \rho \left(k_{vu} \frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2\Delta y} - k_{vd} \frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2\Delta y} \right) \Delta x \Delta y \quad (3.85)$$

พจน์ที่ 4

$$\begin{aligned} \mu \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dz &= \mu \Delta z \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \mu \Delta z \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i+1/2,j} - \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{i-1/2,j} \right\} \\ &= \mu \Delta z \left\{ \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x} - \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x} \right\} \end{aligned}$$

$$\mu \iint \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dz = \mu \left\{ \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{\Delta x^2} \right\} \Delta x \Delta z \quad (3.86)$$

พจน์ที่ 5

$$\begin{aligned} \mu \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dz &= \mu \Delta x \int \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) dz = \mu \Delta x \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{i,j+1/2} - \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{i,j-1/2} \right\} \\ &= \mu \Delta x \left\{ \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta z} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta z} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \mu \iint \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) dx dz = \mu \left\{ \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\Delta z^2} - \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\Delta z^2} \right\} \Delta x \Delta z \quad (3.87)$$

พจน์ที่ 6

$$\begin{aligned} \therefore \iint \frac{\partial p}{\partial z} dx dz &= \Delta x \int \frac{\partial p}{\partial z} dz = \Delta x (p_{i,j} - p_{i,j-1}) \\ &= \frac{(p_{i,j} - p_{i,j-1})}{\Delta z} \Delta x \Delta z \end{aligned} \quad (3.88)$$

พจน์ที่ 7

$$\therefore \iint \rho g dx dy = \Delta x \Delta y \rho g = \frac{\Delta x \Delta z \rho g}{2} \quad (3.89)$$

แทนค่าพจน์ตัวแปร (3.83) - (3.89) ลงใน (3.82) จะได้

$$\begin{aligned} &\frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j}^n}{\Delta t} \cdot \Delta x \Delta z + \rho \cdot \left(k_{vr} \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1}}{2\Delta x} - k_{vl} \frac{v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \\ &+ \rho \left(k_{vu} \frac{v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}}{2\Delta y} - k_{vd} \frac{v_{i,j-1}^{n+1} + v_{i,j}^{n+1}}{2\Delta y} \right) \Delta x \Delta y = \mu \left\{ \frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right\} \Delta x \Delta z \\ &+ \mu \left\{ \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j}^{n+1}}{\Delta z^2} - \frac{v_{i,j}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right\} \Delta x \Delta z \\ &+ \frac{\left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i,j-1}^*)^n \right)}{\Delta z} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta x \Delta z \rho g}{2} \end{aligned} \quad (3.90)$$

โดยสามารถจัดรูปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} + \frac{2\mu}{\Delta z^2} \right) v_{i,j}^{n+1} &= \left(\frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{\rho k_{vr}}{2\Delta x} \right) v_{i+1,j}^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{\rho k_{vl}}{2\Delta x} \right) v_{i-1,j}^{n+1} \\ &+ \left(\frac{\mu}{\Delta z^2} - \frac{\rho k_{vu}}{2\Delta z} \right) v_{i,j+1}^{n+1} + \left(\frac{\mu}{\Delta z^2} + \frac{\rho k_{vd}}{2\Delta z} \right) v_{i,j-1}^{n+1} + \frac{(p_{i,j}^* - p_{i,j-1}^*)}{\Delta z} \\ &+ \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\Delta x \Delta z \rho g}{2} \end{aligned} \quad (3.91)$$

กำหนดให้

$$c_0 = \frac{1}{\Delta t} + \frac{2\mu}{\Delta x^2} + \frac{2\mu}{\Delta z^2}$$

$$c_1 = \frac{\mu}{\Delta x^2} - \frac{\rho k_{vr}}{2\Delta x}$$

$$c_2 = \frac{\mu}{\Delta x^2} + \frac{\rho k_{vl}}{2\Delta x}$$

$$c_3 = \frac{\mu}{\Delta z^2} - \frac{\rho k_{vu}}{2\Delta z}$$

$$c_4 = \frac{\mu}{\Delta z^2} + \frac{\rho k_{vd}}{2\Delta z}$$

$$A_n = \frac{1}{\Delta z}$$

$$b_n = \frac{v_{i,j}^n}{\Delta t}$$

ดังนั้นจะได้สมการพลังงานในรูปแบบที่นำไปสู่กระบวนการซิมเปิลอัลกอริทึม ดังนี้

$$v_{i,j}^{n+1} = \left(a_1 \cdot v_{i+1,j}^{n+1} + a_2 \cdot v_{i-1,j}^{n+1} + a_3 \cdot v_{i,j+1}^{n+1} + a_4 \cdot v_{i,j-1}^{n+1} + A_n \left((p_{i,j}^*)^n - (p_{i,j-1}^*)^n \right) + b_n + \frac{\Delta x \Delta z \rho g}{2} \right) / c_0 \quad (3.92)$$

โดยที่

$$v_{i,j}^{n+1} = (v_{i,j}^*)^n + v_{i,j}^{\prime} \quad (3.93)$$

3.) สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation)

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3.94)$$

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) dx dy + \iint \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) dy dx = 0 \quad (3.95)$$

$$\Delta y \int \frac{\partial}{\partial x} (\rho \cdot u) dx + \Delta x \int \frac{\partial}{\partial y} (\rho \cdot v) dy = 0 \quad (3.96)$$

$$\Delta y \{ (\rho \cdot u)_{i+1,j} - (\rho \cdot u)_{i,j} \} + \Delta x \{ (\rho \cdot v)_{i,j+1} - (\rho \cdot v)_{i,j} \} = 0 \quad (3.97)$$

จากสมการที่ (3.80) และ (3.81) เขตให้ $\sum a_i u'_i = 0$ และ $b_e = 0$ จะได้

$$u'_{i,j} = A_e (p'_{i,j} - p'_{i-1,j}) / a_0 \quad (3.98)$$

ดังนั้น
$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + A_e (p'_{i,j} - p'_{i-1,j}) / a_0 \quad (3.99)$$

และ
$$u_{i+1,j} = u^*_{i+1,j} + A_e (p'_{i+1,j} - p'_{i,j}) / a_{0(i+1,j)} \quad (3.100)$$

และจากสมการที่ (3.92) และ (3.93) เขตให้ $\sum c_i v'_i = 0$, $b_n = 0$ และ $\frac{\Delta x \Delta z \rho g}{2} = 0$ จะได้

$$v'_{i,j} = A_n (p'_{i,j} - p'_{i,j-1}) / c_0 \quad (3.101)$$

ดังนั้น
$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + A_n (p'_{i,j} - p'_{i,j-1}) / c_0 \quad (3.102)$$

และ
$$v_{i,j+1} = v^*_{i,j+1} + A_n (p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) / c_{0(i,j+1)} \quad (3.103)$$

จากนั้นกลับมาพิจารณาสมการ (3.97) จะได้

$$\begin{aligned} & \Delta y [\rho_{i+1,j} \{u^*_{i+1,j} + A_e (p'_{i+1,j} - p'_{i,j}) / a_{0(i+1,j)}\} - \rho_{i,j} \{u^*_{i,j} + A_e (p'_{i,j} - p'_{i-1,j}) / a_0\}] \\ & + \Delta x [\rho_{i,j+1} \{v^*_{i,j+1} + A_n (p'_{i,j+1} - p'_{i,j}) / c_{0(i,j+1)}\} - \rho_{i,j} \{v^*_{i,j} + A_n (p'_{i,j} - p'_{i,j-1}) / c_0\}] = 0 \end{aligned} \quad (3.104)$$

โดยสามารถจัดรูปได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left[\Delta y \cdot \rho \left(\frac{A_e}{a_{0(i+1,j)}} + \frac{A_e}{a_0} \right) + \Delta x \cdot \rho \left(\frac{A_n}{c_{0(i,j+1)}} + \frac{A_n}{c_0} \right) \right] \cdot p'_{i,j} &= \Delta y \rho \frac{A_e}{a_{0(i+1,j)}} p'_{i+1,j} + \Delta y \rho \frac{A_e}{a_0} p'_{i-1,j} \\ &+ \Delta x \rho \frac{A_n}{c_{0(i,j+1)}} p'_{i,j+1} + \Delta x \rho \frac{A_n}{c_0} p'_{i,j-1} \\ &+ \Delta y [\rho(u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*)] + \Delta x [\rho(v_{i,j+1}^* - u_{i,j}^*)] \end{aligned} \quad (3.105)$$

กำหนดให้

$$\begin{aligned} g_0 &= \Delta y \cdot \rho \left(\frac{A_e}{a_{0(i+1,j)}} + \frac{A_e}{a_0} \right) + \Delta x \cdot \rho \left(\frac{A_n}{c_{0(i,j+1)}} + \frac{A_n}{c_0} \right) \\ g_1 &= \Delta y \rho \frac{A_e}{a_{0(i+1,j)}} \\ g_2 &= \Delta y \rho \frac{A_e}{a_0} \\ g_3 &= \Delta x \rho \frac{A_n}{c_{0(i,j+1)}} \\ g_4 &= \Delta x \rho \frac{A_n}{c_0} \\ G &= \Delta y [\rho(u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*)] + \Delta x [\rho(v_{i,j+1}^* - u_{i,j}^*)] \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้สมการความต่อเนื่อง (Continuity equation) ในรูปแบบที่นำไปสู่กระบวนการซิมเปิ้ล อัลกอริทึม ดังนี้

$$\cdot p'_{i,j} = (g_1 p'_{i+1,j} + g_2 p'_{i-1,j} + g_3 p'_{i,j+1} + g_4 p'_{i,j-1} + G) / g_0 \quad (3.106)$$

3.5.2 ระเบียบวิธีซิมเปิลอัลกอริทึม (Simple Algorithms)

ระเบียบวิธี Simple Algorithms นั้นถือเป็นหนึ่งในระเบียบวิธีของ Algorithms พื้นฐานที่ใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับสมการ Navier-Stokes โดยที่ของไหลไม่สามารถอัดตัวได้ ซึ่งคำว่า Simple นั้นย่อมาจาก “ Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations ” ซึ่งถือเป็นระเบียบวิธีแบบกึ่งปริยายที่เชื่อมความสัมพันธ์ระหว่างความดัน กับความเร็ว ซึ่งสามารถอธิบายลำดับขั้นตอนของกระบวนการนี้ได้พอสังเขป ดังนี้

1. เริ่มต้นจากคาดคะเนค่าเริ่มต้นของความดัน $(p^*)^n$ และกำหนดค่าเริ่มต้นของความเร็ว $(U^*)^n$, $(V^*)^n$ ของจุดที่อยู่บริเวณภายในเพื่อเป็นค่าเริ่มต้นสำหรับสมการ (3.79) และ (3.91)
2. ทำการแก้ปัญหาค้นหาค่าของ $(U^*)^{n+1}$ และ $(V^*)^{n+1}$ จากสมการ (3.79) และ (3.91)
3. เมื่อกำหนดหาค่า $(U^*)^{n+1}$ และ $(V^*)^{n+1}$ แล้ว นำ 2 ค่าใหม่นี้ไปใช้สำหรับหาค่าตัวแปรของความดัน (p') ที่แฝงอยู่ในสมการความต่อเนื่อง (สมการที่ (3.105))
4. จากนั้นคำนวณหาค่าตัวแปร p^{n+1} ของทุกจุดภายในจากสมการ $p^{n+1} = (p^*)^n + p'$ โดยที่ทุก ๆ ครั้งค่า p^{n+1} จะวนซ้ำกลับมาแทนที่ค่าของ $(p^*)^n$ ในลำดับการคำนวณต่อไปจนกว่าจะถึงค่าคลาดเคลื่อนที่ยอมรับได้
5. นำค่า p^{n+1} ที่ได้จากข้อที่ 4 มาคำนวณซ้ำในสมการโมเมนตัมอีกครั้งในวิธีการข้อที่ 2 และทำซ้ำจากข้อ 2 ถึงข้อ 5 จนกว่าค่าคลาดเคลื่อนจะอยู่ในช่วงที่ยอมรับได้

ชำนาญ กหาสมุด